Mannigfaltigkeiten

Prof. Dr. Helge Glöckner

12.08.2021

Vorwort

Dieses Vorlesungsskript besteht aus den 30 Präsentationen einer vierstündigen Vorlesung, die im Sommersemester 2021 an der Universität Paderborn via ZOOM gehalten wurde (wobei Ausblicke und Zusammenfassungen für das Skript gestrichen wurden). Die Wahlpflicht-Vorlesung beendete den im Wintersemester 2018 begonnenen Analysis-Zyklus für Bachelor Mathematik und Technomathematik, der neben vier Pflichtveranstaltungen noch eine "Einführung in die Funktionalanalysis" im Wintersemester 2020/2021 umfasste. Die Veranstaltung stand zudem Master-Studierenden des gymnasialen Lehramts offen.

Die Vorlesung bezweckte, eine Einführung in das Themengebiet der differenzierbaren Mannigfaltigkeiten zu geben. Beispiele und Anwendungen wurden vorrangig im Bereich der Liegruppen gewählt. Die Diskussion von Flüssen für Differentialgleichungen auf Mannigfaltigkeiten sowie Parameterabhängigkeit rundet zudem den Themenbereich der gewöhnlichen Differentialgleichungen aus der Drittsemestervorlesung "Reelle Analysis" ab.

Inhaltsverzeichnis

Grob gesagt ist eine n-dimensionale topologische Mannigfaltigkeit eine Menge, die lokal (um jeden Punkt) aussieht wie eine offene Menge in $\mathbb{R}^n$. Präziser:

Definition 1.1

Sei $n \in \mathbb{N}$. Eine n-dimensionale **topologische Mannigfaltigkeit** ist ein Hausdorffscher topologischer Raum M derart, dass jeder Punkt $x \in M$ eine offene Umgebung U besitzt, die zu einer offenen Menge $V \subseteq \mathbb{R}^n$ homöomorph ist.

Zu $x \in M$ existieren also eine offene x-Umgebung $U \subseteq M$, eine offene Teilmenge $V \subseteq \mathbb{R}^n$ und ein Homöomorphismus $\phi\colon U \to V$ (also eine bijektive stetige Abbildung mit stetiger Umkehrfunktion $\phi^{-1}\colon V \to U$). Nenne ϕ eine **Karte um x**.

Homöomorphismen zwischen offenen Teilmengen von M und offenen Teilmengen von $\mathbb{R}^n$ nennt man (n-dimensionale) **Karten** für M.

Zunächst zwei Beispiele; anschließend Wiederholung zu Topologie.

Beispiel 1.2

Seien $n, m \in \mathbb{N}_0$. Ist $V \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge und $f\colon V \to \mathbb{R}^m$ eine stetige Funktion, so ist der Graph

$$M := \{(x, f(x))\colon x \in V\}$$

eine n-dimensionale topologische Mannigfaltigkeit (mit der von $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \cong \mathbb{R}^{n+m}$ induzierten Topologie).

Die Projektion

$$\phi\colon M \to V, \quad (x, y) \mapsto x$$

auf die erste Komponente ist stetig und bijektiv mit stetiger Umkehrfunktion

$$\phi^{-1}\colon V \to M, \quad x \mapsto (x, f(x)).$$

Für jeden Punkt $(x, y) \in M$ ist also ϕ eine Karte um (x, y).

Der Graph M hat also eine Karte $\phi\colon U \to V$ mit $U = M$, eine **globale Karte**.

Dies ist etwas Besonderes; der Kreis $\mathbb{S}_1$ zum Beispiel ist eine 1-dimensionale topologische Mannigfaltigkeit (siehe unten), die keine globale Karte ϕ besitzt, denn die nichtleere Menge $V := \phi(\mathbb{S}_1) \subseteq \mathbb{R}$ wäre dann offen und kompakt, hätte also ein Maximum, was der Offenheit widerspricht.

Beispiel 1.3

Der Einheitskreis $\mathbb{S}^1 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 = 1\}$ ist eine 1-dimensionale topologische Mannigfaltigkeit.

Sei nämlich $(x, y) \in \mathbb{S}_1$. Wir diskutieren zuerst den Fall $y > 0$. Dann ist

$$U_1 := \{(a, b) \in \mathbb{S}_1 \colon b > 0\}$$

eine offene (x, y)-Umgebung in $\mathbb{S}_1$ und

$$\phi_1 \colon U_1 \to]-1, 1[, \quad (a, b) \mapsto a$$

ein Homöomorphismus mit Umkehrfunktion $a \mapsto (a, \sqrt{1 - a^2})$, also eine 1-dimensionale Karte um (x, y).

Ist $y < 0$, $x > 0$ bzw. $x < 0$, so ist

$$U_2 := \{(a,b) \in \mathbb{S}_1 \colon b < 0\},$$

$U_3 := \{(a,b) \in \mathbb{S}_1 \colon a > 0\}$ bzw. $U_4 := \{(a,b) \in \mathbb{S}_1 \colon a < 0\}$ eine offene (x,y)-Umgebung in $\mathbb{S}_1$ und die Projektion $\phi_j \colon U_j \to]-1,1[$ auf die x-Achse (wenn $j = 2$) bzw. y-Achse (wenn $j = 3$ oder $j = 4$) ist eine Karte um den gegebenen Punkt (x,y), mit Umkehrfunktion $a \mapsto (a, -\sqrt{1-a^2})$ bzw. $b \mapsto (\sqrt{1-b^2}, b)$ bzw. $b \mapsto (-\sqrt{1-b^2}, b)$.

Wiederholung zu Topologie

"Begriff des topologischen Raums" ist Teil der Analysis 2 laut Modulhandbuch. Wir geben eine kurze Wiederholung, insb. von verwandten Begriffen.

Definition 1.4

Ist (X, d) ein metrischer Raum mit dem Abstand $d(x, y) \in [0, \infty[$ von $x, y \in X$, so schreiben wir

$$B_\varepsilon(x) := \{y \in X\colon d(x, y) < \varepsilon\}$$

für die offene Kugel vom Radius $\varepsilon > 0$ um $x \in X$. Eine Teilmenge $U \subseteq X$ heißt **offen**, wenn für jedes $x \in U$ ein $\varepsilon > 0$ existiert mit $B_\varepsilon(x) \subseteq U$.

Bemerkung 1.5

Die Menge $\mathcal{O}$ aller offenen Teilmengen eines metrischen Raums hat folgende Eigenschaften:

- O1 Es ist $\emptyset \in \mathcal{O}$ und $X \in \mathcal{O}$;
- O2 Für alle $U, V \in \mathcal{O}$ ist $U \cap V \in \mathcal{O}$;
- O3 Für jede Familie $(V_j)_{j \in J}$ von Mengen $V_j \in \mathcal{O}$ ist $\bigcup_{j \in J} V_j \in \mathcal{O}$.

Definition 1.6

Es sei X eine Menge. Eine Menge $\mathcal{O}$ von Teilmengen von X heißt **Topologie auf** X, wenn die Bedingungen O1, O2 und O3 aus Bemerkung 1.5 erfüllt sind. Das Paar $(X, \mathcal{O})$ nennt man dann einen **topologischen Raum**. Die Mengen $U \in \mathcal{O}$ werden **offene Teilmengen** von X genannt. Eine Teilmenge $A \subseteq X$ heißt **abgeschlossen**, wenn $X \setminus A$ offen ist.

Definition 1.7

Es sei $(X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum. Eine Teilmenge $V \subseteq X$ wird **Umgebung** eines Punkts $x \in X$ genannt, wenn eine offene Teilmenge $U \subseteq X$ existiert mit $x \in U$ und $U \subseteq V$. Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{O})$ heißt **Hausdorffsch**, wenn für alle $x \neq y$ in X disjunkte Umgebungen existieren, also eine x-Umgebung U existiert und eine y-Umgebung V mit $U \cap V = \emptyset$.

Für jeden metrischen Raum (X, d) ist der zugehörige topologische Raum $(X, \mathcal{O})$ Hausdorffsch, denn sind $x \neq y$ in X, so sind die Kugeln $B_\varepsilon(x)$ und $B_\varepsilon(y)$ disjunkt, wenn wir $\varepsilon := d(x, y)/2$ wählen.

Ist X eine Menge mit mindestens zwei Elementen $x \neq y$, so ist $\mathcal{O} := \{\emptyset, X\}$ eine nicht Hausdorffsche Topologie auf X (die indiskrete Topologie); die einzige x-Umgebung ist nämlich X und ebenso für y.

Definition 1.8

Eine Abbildung $f\colon X \to Y$ zwischen topologischen Räumen heißt **stetig**, wenn das Urbild $f^{-1}(U)$ offen in X ist für jede offene Teilmenge U von Y.

Zum Beispiel ist jede konstante Abbildung $X \to Y$ stetig (alle Urbilder sind X oder $\emptyset$). Auch identische Abbildungen $\mathrm{id}_X\colon X \to X$, $x \mapsto x$ sind stetig.

Definition 1.9

Ein **Homöomorphismus** ist eine stetige bijektive Abbildung $f\colon X \to Y$ zwischen topologischen Räumen, mit stetiger Umkehrfunktion $f^{-1}\colon Y \to X$. Topologische Räume X und Y werden **homöomorph** genannt, wenn ein Homöomorphismus $f\colon X \to Y$ existiert.

Zum Beispiel ist $\tan\colon \left]-\pi/2, \pi/2\right[\to \mathbb{R}$ stetig und bijektiv mit der stetigen Umkehrfunktion arctan. Also ist $\tan\colon \left]-\pi/2, \pi/2\right[\to \mathbb{R}$ ein Homöomorphismus. Folglich sind $\left]-\pi/2, \pi/2\right[$ und $\mathbb{R}$ homöomorph.

Definition 1.10

Ist $(X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum und $Y \subseteq X$ eine Teilmenge, so ist

$$\mathcal{O}_Y := \{U \cap Y \colon U \in \mathcal{O}\}$$

eine Topologie auf Y (siehe Anhang zu §1). Man nennt $\mathcal{O}_Y$ die **induzierte Topologie** (oder auch 'Spurtopologie'). Wird nichts anderes gesagt, so versehen wir Teilmengen $Y \subseteq X$ immer mit der induzierten Topologie. Die Mengen $V \in \mathcal{O}_Y$ werden **relativ offene** Teilmengen von Y genannt oder kurz **offen in $\boldsymbol{Y}$**.

Bemerkung 1.11

Die induzierte Topologie hat folgende Eigenschaften (siehe künftiger Anhang zu §1):

(a) Die Inklusionsabbildung $j_Y\colon Y \to X$, $x \mapsto x$ ist stetig als Abbildung von $(Y, \mathcal{O}_Y)$ nach $(X, \mathcal{O})$.

(b) Für jede Abbildung $f\colon Z \to Y$ mit einem topologischen Raum $(Z, \mathcal{T})$ gilt: f ist genau dann stetig nach $(Y, \mathcal{O}_Y)$, wenn f stetig nach $(X, \mathcal{O})$ ist (also $j_Y \circ f$ stetig ist).

(c) Wenn $Y \subseteq X$ eine offene Teilmenge ist, so ist

$$\mathcal{O}_Y = \{U \in \mathcal{O}\colon U \subseteq Y\};$$

eine Teilmenge von Y ist dann also genau dann in Y relativ offen, wenn sie in X offen ist.

Satz 1.12

Sind $f\colon X \to Y$ und $g\colon Y \to Z$ stetige Funktionen zwischen topologischen Räumen, so ist auch die Komposition $g \circ f\colon X \to Z$, $x \mapsto g(f(x))$ stetig.

Beweis. Für jede offene Teilmenge $U \subseteq Z$ ist $g^{-1}(U) \subseteq Y$ offen, also $(g \circ f)^{-1}(U) = f^{-1}(g^{-1}(U))$ offen in X. $\square$

Folgerung 1.13

Ist $f\colon X \to Z$ stetig und $Y \subseteq X$ eine Teilmenge, so ist die Einschränkung $f|_Y\colon Y \to Z$, $x \mapsto f(x)$ stetig auf $(Y, \mathcal{O}_Y)$.

Beweis. Es ist $f|_Y = f \circ j_Y$ mit der stetigen Inklusionsabbildung $j_Y\colon Y \to X$. □

Definition 1.14

Es sei $(X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum. Eine Teilmenge $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{O}$ wird eine **Basis der Topologie** genannt, wenn jede offene Menge Vereinigung von Mengen aus $\mathcal{B}$ ist.

Für $V \in \mathcal{O}$ existiert also eine Familie $(V_j)_{j \in J}$ von Mengen $V_j \in \mathcal{B}$ mit $V = \bigcup_{j \in J} V_j$.

Beispiel 1.15

$\mathcal{B} := \{]a, b[\colon a, b \in \mathbb{Q} \text{ mit } a < b\}$ ist eine abzählbare Basis für die Topologie auf $\mathbb{R}$.

Bemerkung 1.16

Traditionell wird meist verlangt, dass topologische Mannigfaltigkeiten zudem eine abzählbare Basis der Topologie besitzen sollen ("zweites Abzählbarkeitsaxiom"). Wir setzen dies nicht voraus und nennen die Existenz einer abzählbaren Basis explizit als Voraussetzung, wenn wir sie benutzen wollen.

Satz 1.17

Es sei X eine Menge und $\mathcal{B}$ eine Menge von Teilmengen von X. Genau dann ist $\mathcal{B}$ Basis einer Topologie auf X, wenn gilt:

- B1 $\bigcup_{V \in \mathcal{B}} V = X$;
- B2 Für alle $U, V \in \mathcal{B}$ und jedes $x \in U \cap V$ existiert ein $W \in \mathcal{B}$ mit $x \in W \subseteq U \cap V$.

Die Topologie ist dann eindeutig festgelegt und gegeben durch

$$\mathcal{O} = \Big\{ \bigcup_{V \in M} V \colon M \subseteq \mathcal{B} \Big\}.$$

(Beweis siehe Anhang).

Bemerkung 1.18

B2 ist insbesondere dann erfüllt, wenn gilt:

B2′ Für alle $U, V \in \mathcal{B}$ ist $U \cap V \in \mathcal{B}$.

Diese Bedingung ist oft bequemer nachzuprüfen.

Beispiel 1.19

Sind $(X_1, \mathcal{O}_1)$ und $(X_2, \mathcal{O}_2)$ topologische Räume, so ist die Menge

$$\mathcal{B} := \{U_1 \times U_2 \colon U_1 \in \mathcal{O}_1, U_2 \in \mathcal{O}_2\}$$

aller "offenen Kästchen" Basis einer Topologie $\mathcal{O}$ auf $X_1 \times X_2$. Man nennt diese die **Produkttopologie**.

Es ist B1 erfüllt, da $X_1 \times X_2 \in \mathcal{B}$. Gegeben $U, V \in \mathcal{B}$ ist $U = U_1 \times U_2$ und $V = V_1 \times V_2$ für geeignete $U_1, V_1 \in \mathcal{O}_1$ und $U_2, V_2 \in \mathcal{O}_2$. Dann ist

$$U \cap V = (U_1 \cap V_1) \times (U_2 \cap V_2) \in \mathcal{B},$$

also Bedingung B2′ erfüllt. Elementare Eigenschaften (s. Anhang):

Satz 1.20

Es seien $(X_1, \mathcal{O}_1)$ und $(X_2, \mathcal{O}_2)$ topologische Räume. Versehen wir $X := X_1 \times X_2$ mit der Produkttopologie, so gilt:

(a) Die Projektionen $\mathrm{pr}_j \colon X \to X_j$, $(x_1, x_2) \mapsto x_j$ sind stetig für $j \in \{1, 2\}$;

(b) Für jeden topologischen Raum Z ist eine Abbildung $f = (f_1, f_2) \colon Z \to X_1 \times X_2$ genau dann stetig, wenn f_1 und f_2 stetig sind;

(c) Sind X_1 und X_2 Hausdorffsch, so auch $X_1 \times X_2$;

(d) Sind $Y_1 \subseteq X_1$ und $Y_2 \subseteq X_2$ Teilmengen, so stimmt die von $(X, \mathcal{O})$ auf $Y := Y_1 \times Y_2$ induzierte Topologie $\mathcal{O}_Y$ überein mit der Produkttopologie $\mathcal{T}$, wenn wir $Y_j \subseteq X_j$ für $j \in \{1, 2\}$ mit der induzierten Topologie $(\mathcal{O}_j)_{Y_j}$ versehen und Y als Produkt von $(Y_1, (\mathcal{O}_1)_{Y_1})$ und $(Y_2, (\mathcal{O}_2)_{Y_2})$ betrachten.

(Beweis siehe Anhang).

Beispiel 1.21

Sind $f_1\colon X_1 \to Y_1$ und $f_2\colon X_2 \to Y_2$ stetige Abbildungen zwischen topologischen Räumen, so ist

$$f_1 \times f_2\colon X_1 \times X_2 \to Y_1 \times Y_2, \quad (x_1, x_2) \mapsto (f_1(x_1), f_2(x_2))$$

stetig.

Bezeichnet $\mathrm{pr}_j\colon X_1 \times X_2 \to X_j$ die Projektion, so ist nämlich $f_1 \times f_2 = (f_1 \circ \mathrm{pr}_1, f_2 \circ \mathrm{pr}_2)$ und die Komponenten dieser Funktion sind stetig.

Sind f_1 und f_2 Homöomorphismen, so auch $f_1 \times f_2$.

Denn die Funktion $(f_1)^{-1} \times (f_2)^{-1}\colon Y_1 \times Y_2 \to X_1 \times X_2$ ist stetig und offenbar ist dies die Umkehrfunktion zu $f_1 \times f_2$.

Bemerkung 1.22

Gegeben $n \in \mathbb{N}$ ist für jedes $k \in \{1, \ldots, n\}$ die Abbildung

$$\psi \colon \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k} \to \mathbb{R}^n, \quad (x, y) \mapsto (x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_{n-k})$$

ein Homöomorphismus, wobei $x = (x_1, \ldots, x_k)$, $y = (y_1, \ldots, y_{n-k})$.

Für Kugeln bezüglich der jeweiligen Maximumnormen gilt nämlich

$$\psi(B_\varepsilon^{\mathbb{R}^k}(x) \times B_\varepsilon^{\mathbb{R}^{n-k}}(y)) = B_\varepsilon^{\mathbb{R}^n}(\psi(x, y)).$$

Wir identifizieren häufig $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$ mittels ψ.

Satz 1.23

Sind $(X_1, \mathcal{O}_1)$ und $(X_2, \mathcal{O}_2)$ topologische Räume, so gilt:

(a) Ist X_1 eine n-dimensionale topologische Mannigfaltigkeit und X_2 eine m-dimensionale topologische Mannigfaltigkeit, so ist $X_1 \times X_2$ eine $(n+m)$-dimensionale topologische Mannigfaltigkeit.

(b) Haben X_1 und X_2 abzählbare Basen der Topologie, so auch $X_1 \times X_2$.

Beweis. (a) Gegeben $x = (x_1, x_2) \in X_1 \times X_2$ gibt es eine n-dimensionale Karte $\phi_1 \colon U_1 \to V_1 \subseteq \mathbb{R}^n$ für X_1 um x_1 und eine m-dimensionale Karte $\phi_2 \colon U_2 \to V_2 \subseteq \mathbb{R}^m$ für X_2 um x_2. Dann ist

$$U_1 \times U_2$$

eine offene x-Umgebung in $X_1 \times X_2$ und $V_1 \times V_2$ eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \cong \mathbb{R}^{n+m}$. Nach Beispiel 1.21 ist weiter

$$\phi_1 \times \phi_2 \colon U_1 \times U_2 \to V_1 \times V_2$$

ein Homöomorphismus, also eine $(n+m)$-dimensionale Karte für $X_1 \times X_2$ um x.

(b) Für $j \in \{1, 2\}$ sei $\mathcal{B}_j$ eine abzählbare Basis der Topologie auf X_j. Dann ist $\mathcal{B} := \{U_1 \times U_2 \colon U_1 \in \mathcal{B}_1,\ U_2 \in \mathcal{B}_2\}$ eine abzählbare Menge von offenen Teilmengen von $X_1 \times X_2$. Um zu sehen, dass $\mathcal{B}$ eine Basis für die Produkttopologie ist, sei $U \subseteq X_1 \times X_2$ eine offene Teilmenge.

Für alle $x = (x_1, x_2) \in U$ gibt es offene Teilmengen $U_x \subseteq X_1$ und $V_x \subseteq X_2$ mit $x \in U_x \times V_x \subseteq U$. Da $\mathcal{B}_1$ eine Basis der Topologie auf X_1 ist, ist U_x eine Vereinigung von Basismengen und eine dieser enthält x_1. Nach Verkleinern von U_x darf also $U_x \in \mathcal{B}_1$ angenommen werden und ebenso $V_x \in \mathcal{B}_2$. Dann ist $x \in U_x \times V_x \subseteq U$ mit $U_x \times V_x \in \mathcal{B}$ und somit

$$U = \bigcup_{x \in U} (U_x \times V_x)$$

eine Vereinigung von Mengen aus $\mathcal{B}$, also $\mathcal{B}$ eine Basis. $\square$

Bemerkung 1.24. Das Beispiel 1.2 war sicher vielen mit dem Wissen der Analysis 2 verständlich. Wir können die Argumente auch mit dem aktuell zusammengestellten Grundwissen der Topologie begründen: Die Projektion $\mathrm{pr}_1 \colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ ist stetig (siehe Satz 1.20 (a)), also auch $\mathrm{pr}_1|_M$ (siehe Folgerung 1.13) und die Koeinschränkung $\phi = \mathrm{pr}_1|_M^V$ dieser Abbildung (siehe Bemerkung 1.11 (b)). Die Umkehrfunktion $\phi^{-1} \colon V \to M$ ist stetig als Abbildung nach $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, da sie stetige Komponenten hat (Satz 1.20 (b)). Sie ist also stetig, nach Bemerkung 1.11 (b).

Definition/Satz 1.25

Es seien X eine Menge und $(f_j)_{j\in J}$ eine Familie von Abbildungen $f_j\colon X_j \to X$, wobei $(X_j, \mathcal{O}_j)$ ein topologischer Raum ist für alle $j \in J$. Dann ist

$$\mathcal{O} := \{V \subseteq X\colon (\forall j \in J)\ (f_j)^{-1}(V) \in \mathcal{O}_j\}$$

eine Topologie auf X. Man nennt $\mathcal{O}$ die **finale Topologie** auf X. Sie macht jedes f_j stetig.

Beweis. Wegen $(f_j)^{-1}(X) = X_j \in \mathcal{O}_j$ ist $X \in \mathcal{O}$ und analog sieht man, dass $\emptyset \in \mathcal{O}$. Sind $U, V \in \mathcal{O}$, so ist für jedes j

$$f_j^{-1}(U \cap V) = f_j^{-1}(U) \cap f_j^{-1}(V) \in \mathcal{O}_j$$

als Durchschnitt zweier offener Mengen und somit $U \cap V \in \mathcal{O}$. Ist $(V_i)_{i\in I}$ eine Familie von Mengen $V_i \in \mathcal{O}$, so ist $V := \bigcup_{i\in I} V_i \in \mathcal{O}$, da für jedes $j \in J$

$$f_j^{-1}(V) = \bigcup_{i\in I} f_j^{-1}(V_i) \in \mathcal{O}_j$$

als Vereinigung offener Mengen. Also ist $\mathcal{O}$ eine Topologie auf X. Diese macht jedes f_j stetig, denn $f_j^{-1}(V) \in \mathcal{O}_j$ für jedes $V \in \mathcal{O}$. $\square$

Das folgende Lemma wird uns wiederholt ermöglichen, wichtige Beispiele von Mannigfaltigkeiten zu konstruieren.

Lemma 1.26

Die Topologie auf einem topologischen Raum X sei final bezüglich einer Familie $(f_j)_{j\in J}$ von injektiven Abbildungen $f_j\colon X_j \to X$ mit topologischen Räumen X_j. Wir nehmen an, dass für alle $i, j \in J$ die Menge

$$U_{j,i} := f_j^{-1}(f_i(X_i)) = f_j^{-1}(f_i(X_i) \cap f_j(X_j))$$

in X_j offen ist und die durch

$$U_{j,i} \to U_{i,j}, \quad x \mapsto f_i^{-1}(f_j(x))$$

gegebene Abbildung $f_{i,j}$ ein Homöomorphismus. Dann gilt für jedes $i \in I$:

(a) Das Bild $f_i(X_i)$ ist offen in X.

(b) Die Ko-Einschränkung $f_i|^{f_i(X_i)}\colon X_i \to f_i(X_i)$ ist ein Homöomorphismus, wenn wir $f_i(X_i)$ mit der von X induzierten Topologie versehen.

Für jedes $i \in I$ ist dann also $f_i(X_i)$ offen in X und $f_i^{-1}\colon f_i(X_i) \to X_i$ ein Homöomorphismus.

Beweis. Sei $i \in I$. Per Voraussetzung ist für jedes $j \in J$ das Urbild $f_j^{-1}(f_i(X_i)) = U_{j,i}$ offen in X_j, also $f_i(X_i)$ offen in X per Definition der finalen Topologie. Ist $V \subseteq X_i$ eine offene Teilmenge, so ist für jedes $j \in J$

$$f_i(V) \cap f_j(X_j) = f_i(V \cap f_i^{-1}(f_j(X_j)) = f_i(V \cap U_{i,j}),$$

also

$$f_j^{-1}(f_i(V)) = f_j^{-1}(f_i(V) \cap f_j(X_j)) = f_j^{-1}(f_i(V \cap U_{i,j})) = f_{j,i}(V \cap U_{i,j})$$

offen in X_j. Folglich ist $f_i(V)$ offen in X und somit auch offen in $f_i(X_i)$. $\square$

Bemerkung 1.27

Sei X_j Hausdorffsch für jedes $j \in J$ in der Situation von Lemma 1.26 und es gebe eine stetige Abbildung $g\colon X \to Y$ in einen Hausdorffschen topologischen Raum Y derart, dass für alle $x, y \in X$ gilt: ist $g(x) = g(y)$, so existiert ein $j \in J$ mit $x, y \in f_j(X_j)$. Dann ist X Hausdorffsch.

Seien nämlich $x \neq y$ aus X. Ist $g(x) \neq g(y)$, so existieren in Y disjunkte offene Umgebungen U von $g(x)$ und V von $g(y)$. Dann sind $g^{-1}(U)$ und $g^{-1}(V)$ disjunkte offene Umgebungen von x bzw. y in X. Ist $g(x) = g(y)$, so existiert per Voraussetzung ein $j \in J$ mit $x, y \in f_j(X_j)$. Da X_j Hausdorffsch ist, existieren disjunkte offene Umgebungen U und V von $f_j^{-1}(x)$ bzw. $f_j^{-1}(y)$ in X_j. Dann sind $f_j(U)$ und $f_j(V)$ disjunkte offene Umgebungen von x bzw. y in X.

Beispiel 1.28: Projektive Räume

Gegeben $n \in \mathbb{N}$ sei

$$P := \left\{ \mathbb{R}v \colon v \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \right\}$$

die Menge aller 1-dimensionalen Untervektorräume von $\mathbb{R}^{n+1}$. Man nennt P den ***n*-dimensionalen reellen projektiven Raum** und schreibt dafür auch $P(\mathbb{R}^{n+1})$ oder $\mathbb{R}P^n$.

Wir machen nun P zu einer n-dimensionalen topologischen Mannigfaltigkeit. Gegeben $(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ schreiben wir

$$[x_1, \ldots, x_{n+1}] := \mathbb{R}(x_1, \ldots, x_{n+1}).$$

Wir betrachten für $k \in \{1, \ldots, n+1\}$ die Abbildung

$$f_k \colon \mathbb{R}^n \to P, \quad x = (x_1, \ldots, x_n) \mapsto [x_1, \ldots, x_{k-1}, 1, x_k, \ldots, x_n];$$

diese ist injektiv, da für $x \neq y$ die Vektoren $(x_1, \ldots, x_{k-1}, 1, x_k, \ldots, x_n)$ und $(y_1, \ldots, y_{k-1}, 1, y_k, \ldots, y_n)$ nicht kolinear sind. Weiter ist

$$f_k(\mathbb{R}^n) = \{[x_1, \ldots, x_{n+1}] \in P \colon x_k \neq 0\}.$$

Wir versehen nun P mit der finalen Topologie bezüglich der Familie $(f_k)_{k \in \{1, \ldots, n+1\}}$. Seien $i, j \in \{1, \ldots, n+1\}$. Dann ist

$$f_i(\mathbb{R}^n) \cap f_j(\mathbb{R}^n) = \{[x_1, \ldots, x_{n+1}] \colon x_i \neq 0 \text{ und } x_j \neq 0\},$$

im Falle $i < j$ ist weiter

$$U_{j,i} := f_j^{-1}(f_i(\mathbb{R}^n)) = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \colon x_i \neq 0\}$$

offen in $\mathbb{R}^n$. Ist $i = j$, so ist die Offenheit trivial. Im Falle $i > j$ ist

$$U_{j,i} := f_j^{-1}(f_i(\mathbb{R}^n)) = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \colon x_{i-1} \neq 0\}$$

offen in $\mathbb{R}^n$. Also ist $f_i(\mathbb{R}^n)$ offen in P bzgl. der finalen Topologie. Die Abbildungen $f_{i,j} \colon U_{j,i} \to U_{i,j}$, $x \mapsto f_i^{-1}(f_j(x))$ sind bijektiv. Im Falle $i < j$ ist für $x = (x_1, \ldots, x_n) \in U_{i,j}$ und $y = (y_1, \ldots, y_n) \in U_{j,i}$ genau dann $f_i(x) = f_j(y)$, wenn

$$[x_1, \ldots, x_{i-1}, 1, x_i, \ldots, x_n] = [y_1, \ldots, y_{j-1}, 1, y_j, \ldots, y_n],$$

wobei die linke Seite gleich $[x_1/x_{j-1}, \ldots, x_{i-1}/x_{j-1}, 1/x_{j-1}, x_i/x_{j-1}, \ldots, x_n/x_{j-1}]$ ist mit einem Repräsentanten, dessen j-te Komponente 1 ist. Also ist $f_{j,i}(x) = y$ gleich

$$\Big(\frac{x_1}{x_{j-1}}, \ldots, \frac{x_{i-1}}{x_{j-1}}, \frac{1}{x_{j-1}}, \frac{x_i}{x_{j-1}}, \ldots, \frac{x_{j-2}}{x_{j-1}}, \frac{x_j}{x_{j-1}}, \ldots, \frac{x_n}{x_{j-1}}\Big)$$

und somit stetig in x. Analog ist $f_{j,i}(x)$ für $i > j$ gegeben durch

$$\left(\frac{x_1}{x_j}, \ldots, \frac{x_{j-1}}{x_j}, \frac{x_{j+1}}{x_j}, \ldots, \frac{x_{i-1}}{x_j}, \frac{1}{x_j}, \frac{x_i}{x_j}, \ldots, \frac{x_n}{x_j}\right)$$

und somit stetig in x. Für alle i, j ist auch $(f_{j,i})^{-1} = f_{i,j}$ stetig, folglich $f_{j,i}$ ein Homöomorphismus. Die Voraussetzungen von Lemma 1.26 sind also erfüllt. Somit ist $U_j := f_j(\mathbb{R}^n)$ offen in P für jedes $j \in \{1, \ldots, j\}$ und $\phi_j := f_j^{-1} \colon U_j \to \mathbb{R}^n$ ein Homöomorphismus. Für jedes $x = (x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ gibt es ein $j \in \{1, \ldots, n+1\}$ mit $x_j \neq 0$, so dass also $\mathbb{R}x \in f_j(\mathbb{R}^n) = U_j$ und ϕ_j eine n-dimensionale Karte für P um $\mathbb{R}x$ ist. Können wir noch zeigen, dass P Hausdorffsch ist, so ist P eine topologische Mannigfaltigkeit.

Seien hierzu $u \neq v \in P$. Existiert ein $j \in \{1, \ldots, n+1\}$ mit $u, v \in f_j(\mathbb{R}^n)$, so existieren in $\mathbb{R}^n$ disjunkte offene Umgebungen U und V von $f_j^{-1}(u)$ bzw. $f_j^{-1}(v)$. Dann sind $f_j(U)$ und $f_j(V)$ disjunkte offene Umgebungen von u und v.

Andernfalls existiert kein $j \in \{1, \ldots, n+1\}$ mit $u, v \in f_j(\mathbb{R}^n)$. Seien $i, j \in \{1, \ldots, n+1\}$ mit $u \in f_i(\mathbb{R}^n)$ und $v \in f_j(\mathbb{R}^n)$; dann ist

$i \neq j$. Nachdem wir notfalls u und v vertauschen, dürfen wir annehmen, dass $i < j$ ist. Es ist

$$V' := \{(y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n \colon |y_i| < 1/2\}$$

eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ und somit $V := f_j(V')$ offen in P. Ebenso ist $U' := \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \colon |x_{j-1}| < 1/2\}$ eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ und $U := f_i(U')$ offen in P. Nun existieren

$$a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n \quad \text{und} \quad b = (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$$

mit $u = f_i(a)$ und $v = f_j(b)$. Da $v \notin U_i$, ist $b_i = 0$. Da $u \notin U_j$, ist $a_{j-1} = 0$. Also sind U und V offene Umgebungen von x bzw. y. Weiter ist $U \cap V = \emptyset$. Andernfalls gäbe es nämlich ein $x = (x_1, \ldots, x_n) \in U'$ und ein $y = (y_1, \ldots, y_n) \in V'$ mit $f_i(x) = f_j(y)$, so dass also $y_i \neq 0$, $x_{j-1} \neq 0$ und

$$1 > |y_i| = \left|\frac{1}{x_{j-1}}\right| \quad \text{sowie} \quad 1 > |x_{j-1}|,$$

was einander widerspräche. Somit muss doch $U \cap V = \emptyset$ sein. $\square$

Wir erinnern noch an drei topologische Grundbegriffe, die ab und zu benötigt werden:

Ist X ein topologischer Raum und $Y \subseteq X$ eine Teilmenge, so ist das **Innere** Y^o von Y definiert als die Vereinigung aller Teilmengen U von Y, die in X offen sind. Der **Abschluss** $\overline{Y}$ von Y ist definiert als der Durchschnitt aller abgeschlossenen Teilmengen A von X mit $Y \subseteq A$. Der **Rand** von Y ist $\partial Y := \overline{Y} \setminus Y^o$.

Dann ist Y^o die größte in Y enthaltene offene Teilmenge von X. Es ist $\overline{Y}$ die kleinste Y enthaltende abgeschlossene Teilmenge von X.

Es sei M eine n-dimensionale topologische Mannigfaltigkeit und $k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$.

Definition 2.1

Eine Menge $\mathcal{A}$ von n-dimensionalen Karten $\phi\colon U_\phi \to V_\phi$ von M heißt **C^k-Atlas** für M, wenn

A1 $\bigcup_{\phi \in \mathcal{A}} U_\phi = M$; und

A2 Alle $\phi, \psi \in \mathcal{A}$ sind C^k-kompatibel, d.h.

$$\psi \circ \phi^{-1}\colon \phi(U_\phi \cap U_\psi) \to \psi(U_\phi \cap U_\psi)$$

ist eine C^k-Abbildung – siehe Skizze.

Bemerkung 2.2

(a) Sind $f\colon X \to Y$ und $g\colon D \to Z$ Abbildungen, so schreiben wir kurz $g \circ f$ für die Komposition

$$f^{-1}(D) = f^{-1}(D \cap Y) \to Z, \quad x \mapsto g(f(x))$$

bzw. deren Koeinschränkung auf $g(D \cap f(X))$.

(b) Sind f und g stetige Abbildungen zwischen topologischen Räumen und Y und D offene Teilmengen eines topologischen Raums M, so ist $D \cap Y$ offen in M und somit offen in Y, folglich der Definitionsbereich $f^{-1}(D \cap Y)$ von $g \circ f$ eine offene Teilmenge von X.

(c) Die Abbildungen $\psi \circ \phi^{-1} \colon \phi(U_\phi \cap U_\psi) \to \psi(U_\phi \cap U_\psi)$ in A2 werden **Kartenwechsel** genannt oder **Übergangsabbildungen**. Sie sind C^k-Diffeomorphismen, denn die Umkehrfunktion ist $\phi \circ \psi^{-1}$.

Ein C^k-Atlas $\mathcal{A}$ auf einer topologischen Mannigfaltigkeit M heißt **maximal**, wenn für jeden C^k-Atlas $\mathcal{B}$ auf M aus $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ folgt, dass $\mathcal{A} = \mathcal{B}$.

Definition 2.3

Eine **C^k-Mannigfaltigkeit** ist eine topologische Mannigfaltigkeit M, zusammen mit einem maximalen C^k-Atlas $\mathcal{A}$ auf M. Ist $k = \infty$, so sprechen wir auch von einer **glatten** Mannigfaltigkeit.

Lemma 2.4

Ist M eine n-dimensionale topologische Mannigfaltigkeit und $\mathcal{A}$ ein C^k-Atlas auf M, so sei $\mathcal{A}_{\max}$ die Menge aller Karten $\psi\colon U_\psi \to V_\psi$ von M derart, dass sowohl ϕ und ψ als auch ψ und ϕ C^k-kompatibel sind für alle $\phi \in \mathcal{A}$. Dann gilt:

(a) $\mathcal{A}_{\max}$ ist ein C^k-Atlas auf M mit $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}_{\max}$.

(b) Für jeden C^k-Atlas $\mathcal{B}$ auf M mit $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ ist $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}_{\max}$.

Nach dem Vorigen ist $\mathcal{A}_{\max}$ der größte C^k-Atlas auf M, der $\mathcal{A}$ enthält; insbesondere ist $\mathcal{A}_{\max}$ ein maximaler C^k-Atlas, der $\mathcal{A}$ enthält und durch diese Eigenschaft eindeutig festgelegt.

Beweis. (a) Ist $\psi \in \mathcal{A}$, so sind ϕ und ψ sowie ψ und ϕ C^k-kompatibel für alle $\phi \in \mathcal{A}$, da $\mathcal{A}$ ein C^k-Atlas ist. Also ist $\psi \in \mathcal{A}_{\max}$ und somit $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}_{\max}$. Insbesondere wird A1 durch $\mathcal{A}_{\max}$ erfüllt, denn

$$M \supseteq \bigcup_{\phi \in \mathcal{A}_{\max}} U_\phi \supseteq \bigcup_{\phi \in \mathcal{A}} U_\phi = M.$$

Sind $\psi, \theta \in \mathcal{A}_{\max}$ und $x \in \theta(U_\psi \cap U_\theta)$, so gibt es ein $\phi \in \mathcal{A}$ mit $\theta^{-1}(x) \in U_\phi$. Auf einer offenen x-Umgebung $W_x \subseteq V_\theta$ gilt dann

$$\psi \circ \theta^{-1} = (\psi \circ \phi^{-1}) \circ (\phi \circ \theta^{-1});$$

diese Funktion ist C^k als Komposition von C^k-Funktionen. Da die offenen Mengen W_x den Definitionsbereich $\theta(U_\psi \cap U_\theta)$ von $\psi \circ \theta^{-1}$ überdecken und $\psi \circ \theta^{-1}|_{W_x}$ eine C^k-Abbildung ist, ist $\psi \circ \theta^{-1}$ eine C^k-Abbildung.

(b) Sei $\mathcal{B}$ ein C^k-Atlas mit $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$. Für jedes $\psi \in \mathcal{B}$ sind für jedes $\phi \in \mathcal{B}$ sowohl ϕ und ψ als auch ψ und ϕ C^k-kompatibel, da $\mathcal{B}$ ein C^k-Atlas ist. Insbesondere gilt dies für alle $\phi \in \mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$, so dass also $\psi \in \mathcal{A}_{\max}$ und somit $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}_{\max}$. $\square$

Bemerkung 2.5

Ist $(M, \mathcal{A})$ eine C^k-Mannigfaltigkeit, so benutzen wir das Wort "Karte" im Folgenden nur noch für die Karten $\phi \in \mathcal{A}$, nicht für beliebige Karten im Sinne einer topologischen Mannigfaltigkeit.

Beispiel 2.6

$\mathbb{R}^n$ ist eine n-dimensionale glatte Mannigfaltigkeit und allgemeiner jede offene Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}^n$.

Es ist nämlich $\{\mathrm{id}_U\}$ ein C^∞-Atlas und wir versehen U mit dem zugehörigen maximalen C^∞-Atlas.

Beispiel 2.7

Ist $(M, \mathcal{A})$ eine C^k-Mannigfaltigkeit, so auch jede offene Teilmenge $W \subseteq M$.

Es ist nämlich

$$\{\phi \in \mathcal{A} \colon U_\phi \subseteq W\}$$

ein maximaler C^k-Atlas auf W (Aufgabe P5). Wir versehen W mit diesem Atlas und machen so W zu einer C^k-Mannigfaltigkeit.

Beispiel 2.8

Der n-dimensionale reelle projektive Raum $\mathbb{R}P^n$ ist eine glatte Mannigfaltigkeit.

Dies ist ein Spezialfall der folgenden Beobachtung:

Satz 2.9

Sei $n \in \mathbb{N}_0$ und $k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$. Ist jedes X_i eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ in der Situation von Lemma 1.26, jedes $f_{i,j}$ eine C^k-Abbildung und X Hausdorffsch, so ist X eine C^k-Mannigfaltigkeit, zusammen mit dem maximalen C^k-Atlas, der den C^k-Atlas $\{f_i^{-1} \colon i \in I\}$ enthält. $\square$

Beispiel 2.10

Seien $n \in \mathbb{N}_0$ und $k, \ell \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ mit $\ell \leq k$. Ist $(M, \mathcal{A})$ eine C^k-Mannigfaltigkeit, so können wir den maximalen C^ℓ-Atlas $\mathcal{A}_{\max}$ bilden mit $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}_{\max}$. Man nennt $(M, \mathcal{A}_{\max})$ die M zugrunde liegende C^ℓ-Mannigfaltigkeit.

Jede C^k-Mannigfaltigkeit lässt sich also auch als C^ℓ-Mannigfaltigkeit mit $\ell \leq k$ betrachten.

Definition 2.11

Es sei M eine m-dimensionale C^k-Mannigfaltigkeit und N eine n-dimensionale C^k-Mannigfaltigkeit. Eine Abbildung $f\colon M \to N$ heißt C^k, wenn sie stetig ist und die auf einer offenen Teilmenge von V_ϕ (und somit von $\mathbb{R}^m$) definierte Abbildung

$$\psi \circ f \circ \phi^{-1}\colon \phi(U_\phi \cap f^{-1}(U_\psi)) \to V_\psi \subseteq \mathbb{R}^n$$

C^k ist für jede Karte $\phi\colon U_\phi \to V_\phi \subseteq \mathbb{R}^m$ von M und jede Karte $\psi\colon U_\psi \to V_\psi \subseteq \mathbb{R}^n$ von N (siehe Skizze).

Satz 2.12

Sind $f\colon M \to N$ und $g\colon N \to L$ beides C^k-Abbildungen zwischen C^k-Mannigfaltigkeiten, so ist auch die Komposition $g \circ f\colon M \to L$ eine C^k-Abbildung.

Beweis. Zunächst ist $g \circ f$ stetig als Komposition stetiger Abbildungen. Sei $\phi\colon U_\phi \to V_\phi$ eine Karte für M und $\psi\colon U_\psi \to V_\psi$ eine Karte für L. Die Komposition $h := \psi \circ g \circ f \circ \phi^{-1}$ ist dann auf der offenen Teilmenge $D := \phi(U_\phi \cap (g \circ f)^{-1}(U_\psi))$ von V_ϕ definiert. Um zu sehen, dass diese C^k ist, sei $x \in D$. Es sei $\theta\colon U_\theta \to V_\theta$ eine Karte für N um $f(\phi^{-1}(x))$. Dann ist auf einer offenen x-Umgebung in V_ϕ

$$h = \psi \circ g \circ f \circ \phi^{-1} = (\psi \circ g \circ \theta^{-1}) \circ (\theta \circ f \circ \phi^{-1})$$

C^k als Komposition von C^k-Abbildungen zwischen offenen Teilmengen von Vektorräumen. Also ist h eine C^k-Abbildung. $\square$

Bemerkung 2.13

Im vorigen Beweis und dem von Lemma 2.4 (a) haben wir die Technik des "Einschiebens von Karten" benutzt, also auf einer offenen Umgebung eines gegebenen Punkts eine Abbildung umgeschrieben, in dem wir $\mathrm{id} = \theta \circ \theta^{-1}$ (oder die Inverse einer solchen Abbildung) in eine Komposition eingebaut und dann umgeklammert haben, mit einer Karte $\theta\colon U_\theta \to V_\theta$.

Wir werden viele weitere Beispiele sehen.

Lemma 2.14

Ist $f\colon M \to N$ eine stetige Abbildung zwischen C^k-Mannigfaltigkeiten $(M, \mathcal{A}_M)$ und $(N, \mathcal{A}_N)$, so sind äquivalent:

(a) f ist C^k;

(b) Für alle Atlanten $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}_M$ und $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}_N$ ist $\psi \circ f \circ \phi^{-1}$ eine C^k-Abbildung für alle $\phi \in \mathcal{A}$ und $\psi \in \mathcal{B}$;

(c) Es existieren Atlanten $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}_M$ und $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}_N$ derart, dass $\psi \circ f \circ \phi^{-1}$ eine C^k-Abbildung ist für alle $\phi \in \mathcal{A}$ und $\psi \in \mathcal{B}$;

(d) Für jedes $x \in M$ existieren eine Karte $\phi\colon U_\phi \to V_\phi$ für M um x und eine Karte $\psi\colon U_\psi \to V_\psi$ für N um $f(x)$ derart, dass $\psi \circ f \circ \phi^{-1}$ eine C^k-Abbildung ist.

Beweis. Die Implikationen (a)$\Rightarrow$(b), (b)$\Rightarrow$(c) und (c)$\Rightarrow$(d) sind trivial. Gilt (d) und sind $\alpha \in \mathcal{A}_M$, $\beta \in \mathcal{A}_N$ Karten, so gibt es für $x \in \alpha(U_\alpha \cap f^{-1}(U_\beta))$ eine Karte $\phi \in \mathcal{A}_M$ um $\alpha^{-1}(x)$ und eine Karte $\psi \in \mathcal{A}_N$ um $f(\alpha^{-1}(x))$ derart, dass $\psi \circ f \circ \phi^{-1}$ eine C^k-Abbildung ist. Auf einer offenen x-Umgebung ist dann auch

$$\beta \circ f \circ \alpha^{-1} = (\beta \circ \psi^{-1}) \circ (\psi \circ f \circ \phi^{-1}) \circ (\phi \circ \alpha^{-1})$$

eine C^k-Abbildung. Also ist f eine C^k-Abbildung und (a) folgt. □

Beispiel 2.15

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge. Eine Abbildung $f\colon U \to \mathbb{R}^m$ ist genau dann C^k im Sinne von Mannigfaltigkeiten, wenn f im Sinne der Analysis 2 eine C^k-Abbildung ist.

Dies folgt aus (a)⇔(c) in Lemma 2.14, angewandt mit den Atlanten $\mathcal{A} = \{\mathrm{id}_U\}$ und $\mathcal{B} = \{\mathrm{id}_{\mathbb{R}^m}\}$ (da $\mathrm{id}_{\mathbb{R}^m} \circ f \circ (\mathrm{id}_U)^{-1} = f$).

Satz/Definition 2.16

Es seien $(M_j, \mathcal{A}_j)$ C^k-Mannigfaltigkeiten für $j \in \{1,2\}$, der Dimensionen n_j. Versehen wir $M := M_1 \times M_2$ mit der Produkttopologie, so ist

$$\mathcal{A} := \{\phi_1 \times \phi_2 \colon \phi_1 \in \mathcal{A}_1,\ \phi_2 \in \mathcal{A}_2\}$$

ein C^k-Atlas für M. Wir versehen M mit dem maximalen C^k-Atlas $\mathcal{A}_{\max}$, der $\mathcal{A}$ enthält.

Man nennt $(M, \mathcal{A}_{\max})$ die **Produktmannigfaltigkeit**; diese hat Dimension $n_1 + n_2$.

Beweis. Für alle $\phi_1 \in \mathcal{A}_1$ und $\phi_2 \in \mathcal{A}_2$ ist $U_{\phi_1} \times U_{\phi_2}$ ein offenes Kästchen in $M_1 \times M_2$. Weiter ist $V_{\phi_1} \times V_{\phi_2}$ ein offenes Kästchen in $\mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2} \cong \mathbb{R}^{n_1+n_2}$ und

$$\phi_1 \times \phi_2 \colon U_{\phi_1} \times U_{\phi_2} \to V_{\phi_1} \times V_{\phi_2}$$

ist ein Homöomorphismus. Gegeben $(x_1, x_2) \in M$ gibt es $\phi_1 \in \mathcal{A}_1$ und $\phi_2 \in \mathcal{A}_2$ mit $x_1 \in U_{\phi_1}$ und $x_2 \in U_{\phi_2}$, so dass also $(x_1, x_2) \in U_{\phi_1} \times U_{\phi_2}$. Die Definitionsbereiche der Produktkarten in $\mathcal{A}$ überdecken also M und somit ist A1 durch $\mathcal{A}$ erfüllt. Sind auch $\psi_j \in \mathcal{A}_j$ für $j \in \{1, 2\}$, so ist

$$(\phi_1 \times \phi_2) \circ (\psi_1 \times \psi_2)^{-1} = (\phi_1 \circ \psi_1^{-1}) \times (\phi_2 \circ \psi_2^{-1})$$

eine C^k-Abbildung, also $\mathcal{A}$ ein C^k-Atlas. $\square$.

Produktmannigfaltigkeiten $M = M_1 \times M_2$ haben folgende Eigenschaften.

Satz 2.17

(a) Die Projektion $\mathrm{pr}_j \colon M \to M_j$ ist C^k für $j \in \{1, 2\}$.

(b) Für jede C^k-Mannigfaltigkeit N ist eine Abbildung $f = (f_1, f_2) \colon N \to M_1 \times M_2$ genau dann C^k, wenn f_1 und f_2 beide C^k-Abbildungen sind.

Beweis. Gegeben $x = (x_1, x_2) \in M$ seien $\phi_j \colon U_j \to V_j$ Karten für M_j um x_j. Dann ist $\phi_1 \times \phi_2$ eine Karte für M um x. Nun ist

$$\phi_j \circ \mathrm{pr}_j \circ (\phi_1 \times \phi_2)^{-1} \colon V_{\phi_1} \times V_{\phi_2} \to V_{\phi_j}$$

die Projektion auf die j-te Komponente und somit eine C^k-Abbildung, als Einschränkung der entsprechenden Projektion $\mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2} \to \mathbb{R}^{n_j}$, die eine lineare Abbildung ist. Nach Lemma 2.14 (d) ist pr_j eine C^k-Abbildung.

(b) Ist f eine C^k-Abbildung, so auch $f_j = \mathrm{pr}_j \circ f$, nach (a). Sind umgekehrt f_1 und f_2 beide C^k-Abbildungen, so sei $x \in N$ und

$y_j := f_j(x)$. Für jede Karte ϕ von N um x und alle karten ψ_j von M_j um y_j ist $\psi_j \circ f_j \circ \phi^{-1}$ eine C^k-Abbildung. Da

$$(\psi_1 \times \psi_2) \circ f \circ \phi^{-1} = (\psi_1 \circ f_1 \circ \phi^{-1}, \psi_2 \circ f_2 \circ \phi^{-1})$$

eine C^k-Abbildung ist, ist f eine C^k-Abbildung nach Lemma 2.14 (d). □

Definition 2.18

Eine **Liegruppe** ist eine Gruppe G, versehen mit einer glatten Mannigfaltigkeitsstruktur, für welche die Gruppenmultiplikation

$$G \times G \to G, \quad (x, y) \mapsto xy$$

und die Gruppeninversion $G \to G$, $x \mapsto x^{-1}$ glatt ist.

Beispiel 2.19

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist

$$\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) := \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} \colon \det(A) \neq 0\} = \det{}^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$$

eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^{n\times n} \cong \mathbb{R}^{n^2}$. Mit der glatten Mannigfaltigkeitsstruktur als offene Teilmenge ist $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ eine Liegruppe.

Beweis. Matrixmultiplikation $\mathbb{R}^{n\times n} \times \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}^{n\times n}$ ist eine bilineare Abbildung und somit glatt. Die Einschränkung auf die offene Teilmenge $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \times \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ ist dann ebenfalls glatt. Die Komponenten der Abbildung

$$\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}^{n\times n}, \quad A \mapsto A^{-1}$$

sind aufgrund der Cramerschen Regel rationale Funktionen in den Matrixeinträgen und somit glatte Funktionen. □

Definition 2.20

Eine C^k-Abbildung $f\colon M \to N$ zwischen C^k-Mannigfaltigkeiten heißt ***C^k*-Diffeomorphismus**, wenn f bijektiv und f^{-1} eine C^k-Abbildung ist.

Beispiel 2.21. Jede konstante Abbildung $f\colon M \to N$ zwischen C^k-Mannigfaltigkeiten ist C^k.

Beispiel 2.22. Für jede C^k-Mannigfaltigkeit M ist die identische Abbildung $\mathrm{id}_M\colon M \to M$ ein C^k-Diffeomorphismus mit $\mathrm{id}_M^{-1} = \mathrm{id}_M$ (id_M ist stetig und für alle Karten ϕ, ψ von M ist $\psi \circ \mathrm{id}_M \circ \phi^{-1} = \psi \circ \phi^{-1}$ ein Kartenwechsel, also C^k).

Beispiel 2.23. Ist $f\colon M_1 \times M_2 \to N$ eine C^k-Abbildung mit C^k-Mannigfaltigkeiten M_1, M_2 und N, so ist für jedes $x_1 \in M_1$ die partielle Abbildung

$$f(x_1, \cdot)\colon M_2 \to N, \quad x_2 \mapsto f(x_1, x_2)$$

C^k. Die Funktion $g\colon M_2 \to M_1 \times M_2$, $x_2 \mapsto (x_1, x_2)$ ist nämlich C^k, da beide Komponenten C^k sind (die erste ist konstant, die zweite id_{M_2}). Also ist $f(x_1, \cdot) = f \circ g$ eine Komposition von C^k-Funktionen, somit C^k.

Beispiel 2.24. Ist G eine Liegruppe, so ist die Gruppeninversion $\eta\colon G \to G$, $g \mapsto g^{-1}$ ein C^∞-Diffeomorphismus (denn η ist glatt und $\eta \circ \eta = \mathrm{id}_G$, also $\eta = \eta^{-1}$).

Satz 2.25

Ist G eine Liegruppe, so sind für jedes $g \in G$ die folgenden Abbildungen C^∞-Diffeomorphismen:

(a) Die **Linkstranslation** $\lambda_g\colon G \to G$, $h \mapsto gh$;

(b) Die **Rechtstranslation** $\rho_g\colon G \to G$, $h \mapsto hg$;

(c) Der zu g gehörige **innere Automorphismus** $I_g\colon G \to G$, $h \mapsto ghg^{-1}$.

Beweis. (a) Die Gruppenmultiplikation $\mu\colon G \times G \to G$, $(g, h) \mapsto gh$ ist glatt. Nach Beispiel 2.23 ist für jedes $g \in G$ somit $\lambda_g = \mu(g, \cdot)$ glatt. Da $\lambda_{g^{-1}} \circ \lambda_g = \lambda_g \circ \lambda_{g^{-1}} = \mathrm{id}_G$, ist λ_g bijektiv und $(\lambda_g)^{-1} = \lambda_{g^{-1}}$ ist glatt, somit λ_g ein C^∞-Diffeomorphismus.

(b) zeigt man analog zu (a) oder benutzt $\rho_g = \eta \circ \lambda_{g^{-1}} \circ \eta$.

(c) Es ist $I_g = \lambda_g \circ \rho_{g^{-1}}$, somit I_g ein C^∞-Diffeomorphismus unter Benutzung von (a) und (b).[1] $\square$

Übrigens ist $\lambda_e = \rho_e = I_e = \mathrm{id}_G$ mit dem Neutralelement $e \in G$. Für alle $g, h \in G$ gilt $\lambda_g \circ \lambda_h = \lambda_{gh}$, $\rho_g \circ \rho_h = \rho_{hg}$ und $I_g \circ I_h = I_{gh}$.

Satz 2.26

Es sei $(M, \mathcal{A})$ eine C^k-Mannigfaltigkeit. Versehen wir eine offene Teilmenge W von M mit dem maximalen C^k-Atlas $\mathcal{A}_W := \{\phi \in \mathcal{A} \colon U_\phi \subseteq W\}$, so gilt:

(a) Die Inklusion $j_W \colon W \to M$ ist C^k;

(b) Ist N eine C^k-Mannigfaltigkeit und $f \colon M \to N$ eine C^k-Abbildung, so ist $f|_W$ ebenfalls C^k;

(c) Ist N eine C^k-Mannigfaltigkeit, so ist eine Abbildung $f \colon N \to W$ genau dann C^k, wenn $j_W \circ f \colon N \to M$ eine C^k-Abbildung ist.

[1] Übrigens ist auch $I_g = \rho_{g^{-1}} \circ \lambda_g$.

Beweis. (a) Die Abbildung j_W ist stetig. Für jedes $x \in W$ existiert eine Karte $\phi \in \mathcal{A}_W$ um x. Dann ist $\phi \circ j_W \circ \phi^{-1} = \mathrm{id}_W$ eine C^k-Abbildung. Nach Lemma 2.14 (d) ist also j_W eine C^k-Abbildung.

(b) $f|_W = f \circ j_W$ ist C^k als Komposition von C^k-Abbildungen.

(c) Ist f eine C^k-Abbildung, so auch $j_W \circ f$. Ist umgekehrt $j_W \circ f$ eine C^k-Abbildung, so ist f nach Bemerkung 1.11 stetig. Für jedes $x \in N$ existiert eine Karte ϕ um x in N und eine Karte $\psi \in \mathcal{A}_W$ um $f(x)$. Da $j_W \circ f$ eine C^k-Abbildung ist, ist

$$\psi \circ (j_W \circ f) \circ \phi^{-1} = \psi \circ f \circ \phi^{-1}$$

eine C^k-Abbildung. Also ist f eine C^k-Abbildung, nach Lemma 2.14 (d). $\square$

Satz 2.27

Es seien $(M, \mathcal{A})$ eine n-dimensionale C^k-Mannigfaltigkeit, $U \subseteq M$ und $V \subseteq \mathbb{R}^n$ offene Teilmengen und $\phi\colon U \to V$ eine bijektive Abbildung. Dann sind äquivalent:

(a) ϕ ist eine Karte für M, also $\phi \in \mathcal{A}$;

(b) ϕ ist ein C^k-Diffeomorphismus.

Beweis. (a)$\Rightarrow$(b): Ist ϕ eine Karte, so ist ϕ ein Homöomorphismus, also stetig. Da $\phi \in \mathcal{A}_U$ und $\mathrm{id}_V \circ \phi \circ \phi^{-1} = \mathrm{id}_V$ eine C^k-Abbildung ist, ist auch ϕ eine C^k-Abbildung nach Lemma 2.14 (d). Da ϕ^{-1} stetig und $\phi \circ \phi^{-1} \circ \mathrm{id}_V = \mathrm{id}_V$ eine C^k-Abbildung ist, ist ϕ^{-1} eine C^k-Abbildung nach Lemma 2.14 (d), also ϕ ein C^k-Diffeomorphismus.

(b)$\Rightarrow$(a): Ist ϕ ein C^k-Diffeomorphismus, so sind ϕ und ϕ^{-1} beides C^k-Abbildungen, somit beide stetig, also ϕ ein Homöomorphismus. Da ϕ eine C^k-Abbildung ist, ist für alle $\psi \in \mathcal{A}_U$

$$\mathrm{id}_V \circ \phi \circ \psi^{-1} = \phi \circ \psi^{-1}$$

eine C^k-Abbildung; ψ und ϕ sind somit C^k-kompatibel. Da ϕ^{-1} eine C^k-Abbildung ist, ist weiter

$$\psi \circ \phi^{-1} \circ \mathrm{id}_V = \psi \circ \phi^{-1}$$

eine C^k-Abbildung, ϕ und ψ somit C^k-kompatibel. Da $\mathcal{A}_U$ ein maximaler C^k-Atlas auf U ist, folgt mit Lemma 2.4, dass $\phi \in (\mathcal{A}_U)_{\max} = \mathcal{A}_U$. $\square$

Bisher haben wir nur offene Untermannigfaltigkeiten von gegebenen C^k-Mannigfaltigkeiten kennen gelernt. Nun wenden wir uns allgemeineren Untermannigfaltigkeiten zu, die niedrigere Dimension haben können. Untermannigfaltigkeiten liefern viele wichtige Beispiele von C^k-Mannigfaltigkeiten.[2] Sei M eine m-dimensionale C^k-Mannigfaltigkeit. Anschaulich: Eine Teilmenge $N \subseteq M$ ist eine n-dimensionale Untermannigfaltigkeit, wenn N lokal in M liegt wie $\mathbb{R}^n \times \{0\}$ in $\mathbb{R}^m$. Präziser:

[2] Es lässt sich sogar zeigen, dass jede C^k-Mannigfaltigkeit mit abzählbarer Basis der Topologie C^k-diffeomorph ist zu einer Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$ für genügend großes n (Whitneyscher Einbettungssatz).

Definition 2.28

Es seien $(M, \mathcal{A})$ eine m-dimensionale C^k-Mannigfaltigkeit und $n \in \{0, 1, \ldots, m\}$. Eine Teilmenge $N \subseteq M$ heißt ***n*-dimensionale Untermannigfaltigkeit** von M, wenn für jedes $x \in N$ eine Karte $\phi\colon U_\phi \to V_\phi \subseteq \mathbb{R}^m$ für M um x existiert derart, dass

$$\phi(U_\phi \cap N) = V_\phi \cap (\mathbb{R}^n \times \{0\}) \tag{1}$$

(siehe Skizze), also mit $\phi = (\phi_1, \ldots, \phi_m)$

$$U_\phi \cap N = \{x \in U_\phi \colon \phi_{n+1}(x) = \cdots = \phi_m(x) = 0\}. \tag{2}$$

Die Karten $\phi \in \mathcal{A}$, welche (1) erfüllen, nennen wir auch **an *N* angepasst**. Für jede solche ist $U_\phi \cap N$ offen in N (versehen mit der induzierten Topologie) und $W_\phi := \{x \in \mathbb{R}^n \colon (x, 0) \in V_\phi\}$ offen in $\mathbb{R}^n$. Weiter ist

$$\phi_N\colon U_\phi \cap N \to W_\phi, \quad x \mapsto (\phi_1(x), \ldots, \phi_n(x))$$

ein Homöomorphismus mit Umkehrfunktion $x \mapsto \phi^{-1}(x, 0)$.

Lemma/Definition 2.29

Für jede n-dimensionale Untermannigfaltigkeit N von M ist $\{\phi_N \colon \phi \in \mathcal{A}\,\text{angepasst an } N\}$ ein C^k-Atlas für N, versehen mit der von M induzierten Topologie. Mit dem zugehörigen maximalen C^k-Atlas $\mathcal{A}_N$ ist N also eine n-dimensionale C^k-Mannigfaltigkeit.

Wir versehen eine Untermannigfaltigkeit N immer mit dem Atlas $\mathcal{A}_N$ (wenn nichts anderes gesagt wird). Da Karten ϕ_N (für an N angepasste Karten $\phi \in \mathcal{A}$) nennen wir **Untermannigfaltigkeits-Karten** für N.

Beweis. Ist $\phi \in \mathcal{A}$ an N angepasst, so ist

$$h \colon V_\phi \cap (\mathbb{R}^n \times \{0\}) \to W_\phi, \quad (x,0) \mapsto x$$

ein Homöomorphismus mit Umkehrfunktion $x \mapsto (x,0)$. Da $\phi|_{U_\phi \cap N}^{V_\phi \cap (\mathbb{R}^n \times \{0\})}$ ein Homöomorphismus ist, ist auch die entsprechende Untermannigfaltigkeitskarte

$$\phi_N = h \circ \phi|_{U_\phi \cap N}^{V_\phi \cap (\mathbb{R}^n \times \{0\})}$$

ein Homöomorphismus. Für jedes $x \in N$ gibt es nach

Definition 2.28 eine an N angepasste Karte $\phi \in \mathcal{A}$ um x; dann ist $x \in U_\phi \cap N$, dem Definitionsbereich von ϕ_N. Gegeben an N angepasste Karten $\phi, \psi \in \mathcal{A}$ schreiben wir $\psi = (\psi_1, \ldots, \psi_m)$. Da $\psi \circ \phi^{-1}$ eine C^k-Funktion ist, sind die Komponenten $\psi_j \circ \phi^{-1}$ ebenfalls C^k-Funktionen für $j \in \{1, \ldots, m\}$. Für $j \in \{1, \ldots, n\}$ sei $(\psi_N)_j$ die j-te Komponente von ψ_N; per Konstruktion ist

$$(\psi_j \circ \phi^{-1})(x, 0) = \psi_j(\phi_N^{-1}(x)) = (\psi_N)_j(\phi_N^{-1}(x))$$

eine C^k-Funktion von $x \in \phi_N(U_\phi \cap U_\psi \cap N)$. Also ist $\psi_N \circ \phi_N^{-1}$ eine C^k-Funktion und somit sind ϕ_N und ψ_N C^k-kompatibel; die Menge der ϕ_N ist also ein C^k-Atlas auf N. $\square$

Beispiel 2.30

Ist $U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge und $f\colon U \to \mathbb{R}^m$ eine C^k-Funktion, so ist der Graph $\mathrm{graph}(f)$ von f eine Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \cong \mathbb{R}^{n+m}$ als C^k-Mannigfaltigkeit (und von $U \times \mathbb{R}^m$).

Die Menge $U_\phi := V_\phi := U \times \mathbb{R}^m$ ist nämlich offen in $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ und

$$\phi\colon U_\phi \to V_\phi, \quad (x,y) \mapsto (x, y - f(x))$$

ist ein C^k-Diffeomorphismus mit Umkehrfunktion $(x,y) \mapsto (x, y + f(x))$, also eine Karte für die C^k-Mannigfaltigkeit $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$. Weiter ist

$$\mathrm{graph}(f) = \{(x,y) \in U_\phi \colon \phi(x) \in U \times \{0\}\},$$

also $\phi(\mathrm{graph}(f)) = V_\phi \cap (\mathbb{R}^n \times \{0\})$.

Satz 2.31

Ist M eine m-dimensionale C^k-Mannigfaltigkeit, $n \in \{0, 1, \ldots, m\}$ und $N \subseteq M$ eine n-dimensionale Untermannigfaltigkeit, so gilt:

(a) Die Inklusionsabbildung $j_N\colon N \to M$, $x \mapsto x$ ist C^k;

(b) Ist $f\colon M \to L$ eine C^k-Abbildung in eine C^k-Mannigfaltigkeit L, so ist die Einschränkung $f|_N\colon N \to L$ eine C^k-Abbildung;

(c) Ist L eine C^k-Mannigfaltigkeit, so ist eine Abbildung $f\colon L \to N$ genau dann C^k, wenn $j_N \circ f\colon L \to M$ eine C^k-Abbildung ist.

Beweis. (a) Die Inklusion j_N ist stetig, da N mit der induzierten

Topologie versehen ist. Gegeben $x \in N$ existiert eine an N angepasste Karte $\phi\colon U_\phi \to V_\phi$ für M um x. Ist $\phi_N\colon U_\phi \cap N \to W_\phi$ die zugehörige Untermannigfaltigkeitskarte, so ist $x \in U_\phi \cap N$ und

$$(\phi \circ j_N \circ \phi_N^{-1})(x) = \phi(\phi^{-1}(x,0)) = (x,0)$$

C^k in $x \in W_\phi$. Also ist j_N eine C^k-Abbildung.

(b) $f|_N = f \circ j_N$ ist C^k als Komposition von C^k-Abbildungen.

(c) Ist f eine C^k-Abbildung, so auch $j_N \circ f$. Sei umgekehrt $j_N \circ f$ als C^k angenommen. Dann ist $j_N \circ f$ stetig und somit f stetig, da N die von M induzierte Topologie trägt. Gegeben $x \in L$ existiert eine Karte ϕ für L um x und eine an N angepasste Karte $\psi\colon U_\psi \to V_\psi$ von M um $f(x)$; sei $\psi_N\colon U_\psi \cap N \to W_\psi$ die entsprechende Untermannigfaltigkeits-Karte für N. Dann ist

$$(\psi \circ j_N \circ f \circ \phi^{-1})(y) = ((\psi_N \circ f \circ \phi^{-1})(y), 0)$$

eine C^k-Funktion von $y \in \phi(U_\phi \cap f^{-1}(U_\psi))$, also auch $(\psi_N \circ f \circ \phi^{-1})(y)$. Somit ist f eine C^k-Abbildung. $\square$

Zwei Fakten helfen mitunter, Untermannigfaltigkeiten zu erkennen:

Lemma 2.32

Sei M eine m-dimensionale C^k-Mannigfaltigkeit, $n \in \{0, 1, \ldots, m\}$ und $N \subseteq M$ eine Teilmenge. Jedes $x \in N$ habe eine offene Umgebung Q in M derart, dass $Q \cap N$ eine n-dimensionale Untermannigfaltigkeit von Q ist. Dann ist N eine n-dimensionale Untermannigfaltigkeit von M.

Beweis. Jede an $Q \cap N$ angepasste Karte von Q ist eine an N angepasste Karte von M. $\square$

Lemma 2.33

Seien M_1 und M_2 beides m-dimensionale C^k-Mannigfaltigkeiten und $N \subseteq M_1$ eine n-dimensionale Untermannigfaltigkeit von M_1. Ist $f\colon M_1 \to M_2$ ein C^k-Diffeomorphismus, so ist $f(N)$ eine n-dimensionale Untermannigfaltigkeit von M_2 und $f|_N^{f(N)}$ ist ein C^k-Diffeomorphismus.

Beweis. Ist $x \in N$ und $\phi\colon U_\phi \to V_\phi$ eine an N angepasste Karte um x für M_1, so ist $f(U_\phi)$ eine offene Umgebung von $f(x)$ in M_2 und

$\psi := \phi \circ f^{-1}|_{f(U_\phi)}^{U_\phi}$ ein C^k-Diffeomorphismus, also eine Karte für M_2. Diese ist an $f(N)$ angepasst, da $\psi(f(N) \cap f(U_\phi)) = \psi(f(N \cap U_\phi)) = \phi(N \cap U_\phi) = V_\phi \cap (\mathbb{R}^n \times \{0\})$. Also ist $f(N)$ eine n-dimensionale Untermannigfaltigkeit von M_2. Da f eine C^k-Abbildung ist, ist nach Satz 2.31 auch $f|_N$ eine C^k-Abbildung und auch $f|_N^{f(N)}$. Analog ist $(f|_N^{f(N)})^{-1} = f^{-1}|_{f(N)}^N \colon f(N) \to f^{-1}(f(N)) = N$ eine C^k-Abbildung und somit $f|_N^{f(N)}$ ein C^k-Diffeomorphismus. $\square$

Beispiel 2.34

Der Einheitskreis $\mathbb{S}_1$ ist eine 1-dimensionale Untermannigfaltigkeit der glatten Mannigfaltigkeit $\mathbb{R}^2$.

Als Graph der C^∞-Funktion $f\colon\ ]-1,1[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt{1-x^2}$ ist $N := \mathbb{S}_1 \cap \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 \colon x_2 > 0\}$ nach Beispiel 3.20 eine Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}\times\,]0,\infty[$. Nun sind Drehungen um 90, 180 bzw. 270 Grad C^∞-Diffeomorphismen von $\mathbb{R}^2$, die die offene obere Halbebene auf die linke, untere bzw. rechte offene Halbebene H überführen und N auf $H \cap \mathbb{S}_1$ abbilden. Nach

Lemma 2.33 sind diese Bilder Untermannigfaltigkeiten von H; nach Lemma 2.32 ist $\mathbb{S}_1$ folglich eine Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^2$.

Satz 2.35

Es seien $(M_1, \mathcal{A}_1)$ und $(M_2, \mathcal{A}_2)$ C^k-Mannigfaltigkeiten der Dimensionen m_1 bzw. m_2. Weiter seien $N_1 \subseteq M_1$ und $N_2 \subseteq M_2$ Untermannigfaltigkeiten der Dimensionen n_1 bzw. n_2. Dann ist $N := N_1 \times N_2$ eine $(n_1 + n_2)$-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $M := M_1 \times M_2$. Die C^k-Mannigfaltigkeitsstruktur der Untermannigfaltigkeit stimmt überein mit der C^k-Mannigfaltigkeitsstruktur auf $N_1 \times N_2$, betrachtet als Produktmannigfaltigkeit der C^k-Mannigfaltigkeiten N_1 und N_2.

Beweis. Gegeben $(x_1, x_2) \in N_1 \times N_2$ gibt es an N_j angepasste Karten $\phi_j \colon U_{\phi_j} \to V_{\phi_j} \subseteq \mathbb{R}^{m_j}$ von M_j um x_j für $j \in \{1, 2\}$. Sei $(\phi_j)_{N_j} \colon U_{\phi_j} \cap N_j \to W_{\phi_j}$ die entsprechende Untermannigfaltigkeits-Karte für N_j um x_j. Die Abbildung

$$\theta \colon \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{m_1 - n_1} \times \mathbb{R}^{n_2} \times \mathbb{R}^{m_2 - n_2} \to \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2} \times \mathbb{R}^{m_1 - n_1} \times \mathbb{R}^{m_2 - n_2},$$

$(a, b, c, d) \mapsto (a, c, b, d)$ ist ein Isomorphismus von Vektorräumen, also ein C^k-Diffeomorphismus. Somit ist $V := \theta(V_{\phi_1} \times V_{\phi_2})$ offen in $\mathbb{R}^{m_1+m_2}$ und

$$\theta \circ (\phi_1 \times \phi_2) \colon U_{\phi_1} \times U_{\phi_2} \to V$$

ein C^k-Diffeomorphismus, somit eine Karte für $M_1 \times M_2$. Diese bildet $(U_{\phi_1} \times U_{\phi_2}) \cap (N_1 \times N_2)$ auf $W_{\phi_1} \times W_{\phi_2} \times \{0\}$ ab, ist also an $N_1 \times N_2$ angepasst. Also ist $N_1 \times N_2$ eine Untermannigfaltigkeit von $M_1 \times M_2$. Die zugehörige Untermannigfaltigkeitskarte ist $(\phi_1)_{N_1} \times (\phi_2)_{N_2}$, also auch eine Karte des Produkts $N_1 \times N_2$; die zugehörigen maximalen C^k-Atlanten sind also gleich. $\square$

Satz 2.36

Ist G eine m-dimensionale Liegruppe, so gilt:

(a) Für jede Karte $\phi \colon U_\phi \to V_\phi$ von G ist auch $gU_\phi \to V_\phi$, $x \mapsto \phi(g^{-1}x)$ eine Karte.

(b) Eine Untergruppe $H \subseteq G$ ist genau dann eine n-dimensionale Untermannigfaltigkeit von G, wenn es eine Karte $\phi \colon U_\phi \to V_\phi$ von G um das Neutralelement e gibt mit $\phi(U_\phi \cap H) = V_\phi \cap (\mathbb{R}^n \times \{0\})$. Die glatte Mannigfaltigkeitsstruktur auf H als Untermannigfaltigkeit macht dann H zu einer Liegruppe.

Beweis. (a) Da die Linkstranslation $\lambda_g\colon G \to G$ ein C^∞-Diffeomorphismus und somit ein Homöomorphismus ist, ist $gU_\phi = \lambda_g(U_\phi)$ eine offene Teilmenge von G. Weiter ist $\phi \circ \lambda_{g^{-1}}|_{gU_\phi}^{U_\phi}$ ein C^∞-Diffeomorphismus (und somit eine Karte für G) als Komposition von zwei C^∞-Diffeomorphismen.

(b) Ist $\phi\colon U_\phi \to V_\phi$ eine Karte für G um e mit $\phi(U_\phi \cap H) = V_\phi \cap (\mathbb{R}^n \times \{0\})$, so ist $U_\phi \cap H$ eine Untermannigfaltigkeit von U_ϕ. Da $\lambda_h\colon U_\phi \to hU_\phi$ ein C^∞-Diffeomorphismus ist, ist nach Lemma 2.33 für jedes $h \in H$

$$h(U_\phi \cap H) = (hU_\phi) \cap hH = (hU_\phi) \cap H$$

eine Untermannigfaltigkeit von hU_ϕ; nach Lemma 2.32 ist H also eine Untermannigfaltigkeit von G. Die Gruppeninversion $\eta\colon G \to G$ ist glatt, also auch $\eta|_H$ und $\eta|_H^H$ nach Satz 2.31 (a) und (b); letztere Abbildung ist die Inversion in H. Die Gruppenmultiplikation $\mu\colon G \times G \to G$ ist glatt, also auch $\mu|_{H\times H}$ bzgl. der Untermannigfaltigkeitsstruktur und folglich $\mu|_{H\times H}^H$ (Satz 2.31 (b)+(c)). Nach Satz 2.35 haben wir auch Glattheit der Multiplikation von H auf der Produktmannigfaltigkeit $H \times H$. $\square$

Beispiel 2.37

Die spezielle lineare Gruppe

$$\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) := \{A \in \mathbb{R}^{2\times 2}\colon \det(A) = 1\}$$

ist eine Untermannigfaltigkeit des Vektorraums $\mathbb{R}^{2\times 2} \cong \mathbb{R}^4$ aller reellen 2×2-Matrizen, betrachtet als C^∞-Mannigfaltigkeit (und in dessen offener Teilmenge $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$).

Sei nämlich W die Menge aller $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ in $\mathbb{R}^{2\times 2}$ derart, dass $a \neq 0$. Dann ist W eine offene Umgebung der Einheitsmatrix $\mathbf{1}$ in $\mathbb{R}^{2\times 2}$. Gegeben $A \in W$ ist genau dann

$$1 = \det(A) = ad - bc,$$

wenn $d = (1 + bc)/a$ ist. Es ist also

$$W \cap \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) = \mathrm{graph}(f)$$

für die C^∞-Funktion $f\colon U \to \mathbb{R}$, $(a, b, c) \mapsto (1 + bc)/a$ auf der offenen Teilmenge $U := \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3\colon a \neq 0\}$, wenn wir $\mathbb{R}^{2\times 2}$

mit $\mathbb{R}^4$ identifizieren mithilfe der Bijektion (und globalen Karte)

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto (a, b, c, d).$$

Graphen sind Untermannigfaltigkeiten; also greift Satz 2.36 (b).

Bemerkung 2.38

Allgemeiner ist für $n \in \mathbb{N}$ die spezielle lineare Gruppe

$$\mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} \colon \det(A) = 1\}$$

eine Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^{n \times n}$ (Übung).

Im Hinblick auf höhere n beobachten wir, dass wir im Fall $n = 2$ die Gleichung $\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = 1$ auch lokal um $\mathbf{1}$ mit dem Satz über implizite Funktionen nach a_{22} $(= d)$ auflösen könnten, da

$$\frac{\partial}{\partial a_{22}}\bigg|_{A=\mathbf{1}} \det(A) = \frac{d}{da_{22}}\bigg|_{a_{22}=1} \det(\mathrm{diag}(1, a_{22})) = \frac{d}{da_{22}}\bigg|_{a_{22}=1} a_{22} = 1 \neq 0,$$

wobei $\mathrm{diag}(1, a_{22})$ die Diagonalmatrix $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix}$ ist.

§3 Tangentialvektoren, Tangentialräume und Tangentialabbildungen

Sind $U \subseteq \mathbb{R}^m$ und $V \subseteq \mathbb{R}^n$ offene Teilmengen und ist $f = (f_1, \ldots, f_n)\colon U \to V$ eine C^k-Abbildung mit $k \geq 1$, so haben wir an jeder Stelle $x = (x_1, \ldots, x_m) \in U$ die Ableitung

$$f'(x)\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$$

zur Verfügung, also diejenige lineare Abbildung, die in den Standardbasen der Jacobi-Matrix $J_f(x) \in \mathbb{R}^{n \times m}$ entspricht mit den Matrixeinträgen $(J_f(x))_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)$ für $i \in \{1, \ldots, n\}$ und $j \in \{1, \ldots, m\}$.

Für eine C^k-Abbildung $f\colon M \to N$ zwischen C^k-Mannigfaltigkeiten und $x \in M$ hätten wir gern Entsprechendes. Wir definieren für $x \in M$ hierzu einen Vektorraum $T_x M$ (den Tangentialraum) und eine lineare Abbildung

$$T_x f\colon T_x M \to T_{f(x)} N.$$

Es gibt mehrere Möglichkeiten, Tangentialräume zu definieren (die alle isomorph sind); unser Zugang benutzt sogenannte "geometrische" Tangentialvektoren (Äquivalenzklassen von Kurven).

Definition 3.1

Es sei M eine m-dimensionale C^k-Mannigfaltigkeit mit $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ und $x \in M$. Ein **Tangentialvektor** an M in x ist eine Äquivalenzklasse $[\gamma]$ von C^k-Kurven $\gamma \colon \,]{-\varepsilon}, \varepsilon[\, \to M$ mit $\gamma(0) = x$ (für beliebige $\varepsilon > 0$) unter der folgenden Äquivalenzrelation:

Sind $\gamma \colon \,]{-\varepsilon}, \varepsilon[\, \to M$ und $\eta \colon \,]{-\delta}, \delta[\, \to M$ beide C^k-Kurven mit $\gamma(0) = \eta(0) = x$, so schreiben wir $\gamma \sim \eta$, wenn

$$(\phi \circ \gamma)'(0) = (\phi \circ \eta)'(0) \tag{1}$$

für jede Karte $\phi \colon U_\phi \to V_\phi \subseteq \mathbb{R}^m$ von M um x (siehe Skizze). Wir schreiben $T_x M$ für die Menge aller Tangentialvektoren $[\gamma]$ an M in x und nennen $T_x M$ den **Tangentialraum** an M in x.

Transitivität, Reflexivität und Symmetrie der Relation sind offensichtlich.

Bemerkung 3.2

Ist (1) für ein ϕ erfüllt, so auch für jede andere Karte $\psi\colon U_\psi \to V_\psi$ um x, da

$$(\psi\circ\gamma)'(0) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(\psi\circ\phi^{-1})(\phi(\gamma(t)) = (\psi\circ\phi^{-1})'(\phi(x))\,(\phi\circ\gamma)'(0)$$

nach der Kettenregel, was mit $(\psi\circ\phi^{-1})'(\phi(x))\,(\phi\circ\eta)'(0) = (\psi\circ\eta)'(0)$ übereinstimmt.

Per Definition der Äquivalenzrelation $\sim$ ist für jede Karte $\phi\colon U_\phi \to V_\phi$ von M um x die Abbildung

$$h_\phi\colon T_xM \to \mathbb{R}^m, \quad [\gamma] \mapsto (\phi\circ\gamma)'(0)$$

wohldefiniert und injektiv.

Lemma 3.3

$h_\phi\colon T_xM \to \mathbb{R}^m$ ist bijektiv.

Beweis. Gegeben $v \in \mathbb{R}^m$ gibt es $\varepsilon > 0$ mit $\phi(x) + \,]{-\varepsilon}, \varepsilon[\, v \subseteq V_\phi$. Dann ist

$$\gamma\colon\ ]-\varepsilon,\varepsilon[\to M,\quad t\mapsto\phi^{-1}(\phi(x)+tv)$$

eine C^k-Kurve in M mit $\gamma(0)=x$. Weiter ist $(\phi\circ\gamma)(t)=\phi(x)+tv$, also $h_\phi([\gamma])=(\phi\circ\gamma)'(0)=v$. $\square$

Wir geben T_xM die eindeutige Vektorraumstruktur, welche die Bijektion $h_\phi\colon T_xM\to\mathbb{R}^m$ zu einem Isomorphismus von Vektorräumen macht, definieren also

$$tv:=h_\phi^{-1}(th_\phi(v))\quad\text{und}\quad v+w:=h_\phi^{-1}(h_\phi(v)+h_\phi(w))$$

für $v,w\in T_xM$ und $t\in\mathbb{R}$.

Die Vektorraumstruktur ist von der gewählten Karte unabhängig, denn ist auch ψ eine Karte von M um x, so ist nach Bemerkung 3.2

$$h_\psi=(\psi\circ\phi^{-1})'(\phi(x))\circ h_\phi;$$

dies ist ein Isomorphismus von Vektorräumen bezüglich der mittels h_ϕ definierten Vektorraumstruktur auf T_xM (als Komposition von zwei Isomorphismen).

Beispiel. Im Falle $M = \mathbb{R}^m$ können wir die globale Karte $\phi = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^m}$ benutzen; wir haben für $x \in \mathbb{R}^m$ dann den Vektorraum-Isomorphismus

$$h_{\mathrm{id}_{\mathbb{R}^m}} \colon T_x(\mathbb{R}^m) \to \mathbb{R}^m, \quad [\gamma] \mapsto \gamma'(0)$$

mit Umkehrfunktion

$$\mathbb{R}^m \to T_x(\mathbb{R}^m), \quad v \mapsto [t \mapsto x + tv].$$

Entsprechendes gilt für $T_x(U)$ im Falle einer offenen Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}^m$.

Definition 3.4

Es sei $f\colon M \to N$ eine C^k-Abbildung zwischen C^k-Mannigfaltigkeiten mit $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ und $x \in M$. Dann ist

$$T_x f\colon T_x M \to T_{f(x)} N, \quad [\gamma] \mapsto [f \circ \gamma]$$

wohldefiniert und eine lineare Abbildung; wir nennen $T_x f$ die **Tangentialabbildung** von f an der Stelle x.

Wohldefiniertheit: Sind γ und η beides C^k-Kurven in M um x und ist $\gamma \sim \eta$, so sei $\phi\colon U_\phi \to V_\phi \subseteq \mathbb{R}^m$ eine Karte von M um x. Für jede Karte $\psi\colon U_\psi \to V_\psi \subseteq \mathbb{R}^n$ von N um $f(x)$ gilt dann

$$(\psi \circ f \circ \gamma)'(0) = (\psi \circ f \circ \phi^{-1} \circ \phi \circ \gamma)'(0) = (\psi \circ f \circ \phi^{-1})'(\phi(x))\,(\phi \circ \gamma)'(0),$$

was mit $(\psi \circ f \circ \phi^{-1})'(\phi(x))\,(\phi \circ \eta)'(0) = (\psi \circ f \circ \eta)'(0)$ übereinstimmt. Also ist $f \circ \gamma \sim f \circ \eta$ als Kurve um $f(x)$ in N.

Linearität: Für ϕ und ψ wie zuvor ist

$$(h_\psi \circ T_x f \circ h_\phi^{-1})(v) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \psi(f(\phi^{-1}(\phi(x)+tv))) = (\psi \circ f \circ \phi^{-1})'(\phi(x))\, v$$

für jedes $v \in \mathbb{R}^m$, also

$$h_\psi \circ T_x f \circ h_\phi^{-1} = (\psi \circ f \circ \phi^{-1})'(\phi(x)) \tag{2}$$

und folglich $T_x f = h_\psi^{-1} \circ (\psi \circ f \circ \phi^{-1})'(\phi(x)) \circ h_\phi$ linear.

Satz 3.5 (Kettenregel)

Gegeben seien C^k-Abbildungen $f\colon M \to N$ und $g\colon N \to L$ zwischen C^k-Mannigfaltigkeiten, wobei $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Für jedes $x \in M$ gilt dann

$$T_x(g \circ f) = T_{f(x)} g \circ T_x f.$$

Beweis. Für jedes $[\gamma] \in T_x M$ ist $T_{f(x)} g\, T_x f([\gamma]) = T_{f(x)} g([f \circ \gamma]) = [g \circ (f \circ \gamma)] = [(g \circ f) \circ \gamma] = T_x(g \circ f)([\gamma])$. $\square$

Es ist nützlich, C^k-Funktionen mit gewissen Eigenschaften der Tangentialabbildungen genauer anzuschauen, entsprechend dem Studium von bijektiven, injektiven und surjektiven linearen Abbildungen zwischen Vektorräumen.

Topologische Vorbereitungen:

Sei $f\colon X \to Y$ eine Abbildung zwischen topologischen Räumen.

(a) Man nennt f eine **topologische Einbettung** (oder einen Homöomorphismus auf das Bild), wenn die Ko-Einschränkung $f|^{f(X)}\colon X \to f(X)$, $x \mapsto f(x)$ ein Homöomorphismus ist bezüglich der von Y auf $f(X)$ induzierten Topologie.

(b) Gibt es zu einem gegebenem $x \in X$ eine offene x-Umgebung $U \subseteq X$ derart, dass $f(U)$ in Y offen und $f|_U\colon U \to f(U)$ ein Homöomorphismus ist, so nennt man f einen **lokalen Homöomorphismus** an der Stelle x. Ist f an jeder Stelle ein lokaler Homöomorphismus, so wird f ein **lokaler Homöomorphismus** genannt.

Definition 3.6

Sei $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Eine C^k-Abbildung $f\colon M \to N$ zwischen C^k-Mannigfaltigkeiten heißt

Submersion, wenn $T_x f\colon T_x M \to T_{f(x)} N$ surjektiv ist für jedes $x \in M$;

Immersion, wenn $T_x f\colon T_x M \to T_{f(x)} N$ injektiv ist für jedes $x \in M$;

étale, wenn $T_x f\colon T_x M \to T_{f(x)} N$ bijektiv ist für jedes $x \in M$;

Einbettung von C^k-Mannigfaltigkeiten, wenn f eine Immersion ist und eine topologische Einbettung.

Beispiele 3.7 Sei $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.

(a) Für jede C^k-Mannigfaltigkeit M ist die identische Abbildung $\mathrm{id}_M\colon M \to M$, $x \mapsto x$ étale, denn wegen $[\mathrm{id}_M \circ \gamma] = [\gamma]$ ist $T_x(\mathrm{id}_M) = \mathrm{id}_{T_x M}$ für alle $x \in M$.

(b) Jeder C^k-Diffeomorphismus $f\colon M \to N$ zwischen C^k-Mannigfaltigkeiten ist étale, denn für jedes $x \in M$ ist wegen

$$\mathrm{id}_{T_x M} = T_x\, \mathrm{id}_M = T_x(f^{-1} \circ f) = (T_{f(x)} f^{-1}) \circ T_x f$$

und $\mathrm{id}_{T_{f(x)}N} = T_{f(x)}(f \circ f^{-1}) = (T_x f) \circ T_{f(x)} f^{-1}$ die Abbildung $T_x f$ invertierbar mit

$$(T_x f)^{-1} = T_{f(x)} f^{-1}. \tag{3}$$

(c) Für jede C^k-Mannigfaltigkeit M und offene Teilmenge $W \subseteq M$ ist die Inklusionsabbildung $j_W\colon W \to M$ étale (und wir identifizieren $T_x W$ mit $T_x M$ für $x \in W$ mithilfe des Isomorphismus $T_x(j_W)$).

Wählen wir eine Karte $\phi\colon U_\phi \to V_\phi \subseteq \mathbb{R}^m$ für W um x und betrachten $h_\phi\colon T_x M \to \mathbb{R}^m$ und die entsprechende Abbildung $g_\phi\colon T_x W \to \mathbb{R}^m$, so ist nämlich

$$T_x j_W = h_\phi^{-1} \circ \underbrace{(\phi \circ j_W \circ \phi^{-1})'(\phi(x))}_{=\mathrm{id}_{\mathbb{R}^m}} \circ g_\phi = h_\phi^{-1} \circ g_\phi$$

ein Isomorphismus.

Definition 3.8

Sei $k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$. Gegeben $x \in M$ wird eine Abbildung $f\colon M \to N$ ein **lokaler C^k-Diffeomorphismus** an der Stelle x genannt, wenn eine offene x-Umgebung $U \subseteq M$ existiert derart, dass $f(U)$ offen in N und $f|_U \colon U \to f(U)$ ein C^k-Diffeomorphismus ist. Ist f ein lokaler C^k-Diffeomorphismus an jeder Stelle $x \in M$, so nennt man f einen **lokalen C^k-Diffeomorphismus**.

Satz 3.9

Sei $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Eine C^k-Abbildung $f \colon M \to N$ zwischen C^k-Mannigfaltigkeiten ist genau dann ein lokaler C^k-Diffeomorphismus, wenn f étale ist.

Dies folgt aus

Lemma 3.10

Sei $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Eine C^k-Abbildung $f \colon M \to N$ zwischen C^k-Mannigfaltigkeiten ist genau dann ein lokaler C^k-Diffeomorphismus an einer Stelle $x \in M$, wenn $T_x f \colon T_x M \to T_{f(x)} N$ ein Isomorphismus von Vektorräumen ist.

Beweis. Ist $U \subseteq M$ eine offene x-Umgebung derart, dass $f(U)$

offen in N und $f|_U^{f(U)}$ ein C^k-Diffeomorphismus ist, so gilt mit den Inklusionsabbildungen $j_U\colon U \to M$ und $j_{f(U)}\colon f(U) \to N$, dass

$$f \circ j_U = f|_U = j_{f(U)} \circ f|_U^{f(U)}$$

ist. Also ist $T_x f \circ T_x j_U = T_{f(x)} j_{f(U)} \circ T_x(f|_U^{f(U)})$, wobei $T_x j_U$, $T_{f(x)} j_{f(U)}$ und $T_x(f|_U^{f(U)})$ Isomorphismen von Vektorräumen sind und somit auch $T_x f$.

Ist $T_x f$ ein Isomorphismus, so wählen wir eine Karte $\phi\colon U_\phi \to V_\phi \subseteq \mathbb{R}^m$ von M um x und eine Karte $\psi\colon U_\psi \to V_\psi \subseteq \mathbb{R}^n$ von N um $f(x)$ und folgern aus

$$\mathbb{R}^m \cong T_x M \cong T_{f(y)} N \cong \mathbb{R}^n,$$

dass $m = n$. Nach Verkleinern von U_ϕ und V_ϕ ist $g := \psi \circ f \circ \phi^{-1}$ auf ganz V_ϕ definiert. Dies ist eine C^k-Abbildung; da

$$T_x f = h_\psi^{-1} \circ g'(g(x)) \circ h_\phi$$

invertierbar ist, ist auch die lineare Abbildung $g'(g(x))\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ invertierbar. Nach dem Satz über die Umkehrfunktion aus der Analysis 2 gibt es eine offene $g(x)$-Umgebung $W \subseteq V_\phi$ derart, dass $g(W)$ offen in V_ψ ist und $g|_W\colon W \to g(W)$ ein C^k-Diffeomorphismus. Dann ist $\phi^{-1}(W)$ eine offene Teilmenge von M. Weiter ist $f(\phi^{-1}(W)) = \psi^{-1}(g(W))$ offen in N und $f|_{f^{-1}(W)} = \psi^{-1} \circ g|_W \circ \phi|_{\phi^{-1}(W)}\colon \phi^{-1}(W) \to f(\phi^{-1}(W))$ ist ein C^k-Diffeomorphismus. $\square$

Beispiel 3.11

Sei $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Ist M eine C^k-Mannigfaltigkeit und N eine Untermannigfaltigkeit, so ist die Inklusion $j_N\colon N \to M$ eine Einbettung von C^k-Mannigfaltigkeiten.

Da wir N mit der von M induzierten Topologie versehen, ist j_N eine topologische Einbettung. Für $x \in N$ gibt es eine an N angepasste Karte $\phi\colon U_\phi \to V_\phi \subseteq \mathbb{R}^m$ von M, so dass also mit der Dimension n von N

$$U_\phi \cap N = V_\phi \cap (\mathbb{R}^n \times \{0\}).$$

Betrachte $i\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $y \mapsto (y, 0)$. Mit der zugehörigen Untermannigfaltigkeitskarte $\phi_N\colon U_\phi \cap N \to W_\phi$ (wobei $W_\phi = i^{-1}(V_\phi)$) haben wir

$$\phi \circ j_N \circ \phi_N^{-1} = i|_{W_\phi}.$$

Somit ist $(\phi \circ j_N \circ \phi_N^{-1})'(\phi_N(x)) = i$ eine injektive lineare Abbildung und somit auch $T_x j_N = h_\phi \circ (\phi \circ j_N \circ \phi_N^{-1})'(\phi_N(x)) \circ h_{\phi_n}^{-1}$. Also ist j_N eine Immersion.

Konvention

Für $x \in N$ identifizieren wir häufig $T_x N$ mit dem Untervektorraum $T_x j_N(T_x N)$ von $T_x M$ mithilfe der injektiven linearen Abbildung $T_x j_N \colon T_x N \to T_x M$, d.h. wir identifizieren $v \in T_x N$ mit $T_x j_N(v) \in T_x M$.

In §4 und §5 sei $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Wir charakterisieren Immersionen, anschließend Einbettungen von C^k-Mannigfaltigkeiten.

Definition 4.1

Wir betrachten C^k-Abbildungen $f_1 \colon M_1 \to N_1$ und $f_2 \colon M_2 \to N_2$ zwischen C^k-Mannigfaltigkeiten. Gegeben $x \in M_1$ sagen wir, $\boldsymbol{f_1}$ **sieht** um x **lokal aus wie** $\boldsymbol{f_2}$, wenn es einen C^k-Diffeomorphismus $\phi \colon U \to V$ zwischen offenen Teilmengen von M_1 und M_2 gibt und einen C^k-Diffeomorphismus $\psi \colon P \to Q$ zwischen offenen Teilmengen von N_1 und N_2, so dass

$$x \in U, \quad f_1(U) \subseteq P$$

und

$$f_2 \circ \phi = \psi \circ f_1|_U. \tag{1}$$

Äquivalent zu (1) ist auch

$$f_2|_V = \psi \circ f_1|_U \circ \phi^{-1}.$$

Beispiel 4.2

Für $n \leq m$ ist die injektive lineare Abbildung

$$i\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, \quad y \mapsto (y, 0)$$

eine glatte Abbildung und eine Immersion.

Denn für jedes $x \in \mathbb{R}^n$ erhalten wir mit den Karten $\phi = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}$ um x und $\psi = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^m}$ um $i(x)$, dass

$$T_x i = h_\psi^{-1} \circ \underbrace{(\psi \circ i \circ \phi^{-1})'(\phi(x))}_{i'(\phi(x))=i} \circ h_\phi = h_\psi^{-1} \circ i \circ h_\phi$$

injektiv ist als Komposition injektiver Funktionen.

Satz 4.3

Für eine C^k-Abbildung $f\colon N \to M$ zwischen C^k-Mannigfaltigkeiten der Dimensionen n und m sind äquivalent:

(a) f ist eine Immersion;

(b) Es ist $n \leq m$ und um jeden Punkt $x \in N$ sieht f lokal aus wie die injektive lineare Abbildung

$$i \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, \quad y \mapsto (y, 0).$$

Beweis. Gilt (b), so gibt es für jedes $x \in N$ einen C^k-Diffeomorphismus ϕ zwischen einer offenen x-Umgebung $U \subseteq N$ und einer offenen Teilmenge $V \subseteq \mathbb{R}^n$ und einen C^k-Diffeomorphismus $\psi \colon P \to Q$ zwischen offenen Teilmengen von M und $\mathbb{R}^m$ derart, dass $f(U) \subseteq P$ und $i \circ \phi = \psi \circ f|_U$. Es folgt

$$T_{\phi(x)} i \circ T_x \phi = T_{f(x)} \psi \circ T_x(f|_U) = T_{f(x)} \psi \circ T_x f.$$

Da $T_x \phi$ ein Isomorphismus ist und nach Beispiel 4.2 $T_{\phi(x)} i$ injektiv, ist $T_x f$ injektiv, also f eine Immersion.

Gilt (a), so wählen wir zu $x \in N$ eine Karte $\phi \colon U_\phi \to V_\phi \subseteq \mathbb{R}^n$ für N um x und eine Karte $\psi \colon U_\psi \to V_\psi \subseteq \mathbb{R}^n$ für M um $f(x)$. Nach Verkleinern von U_ϕ dürfen wir annehmen, dass $f(U_\phi) \subseteq U_\psi$. Nach Ersetzen von ϕ durch $\phi - \phi(x)$ dürfen wir annehmen, dass $\phi(x) = 0$. Ebenso dürfen wir annehmen, dass

$\psi(f(x)) = 0$. Da f eine Immersion ist, ist

$$\alpha := (\psi \circ f \circ \phi^{-1})'(\phi(x)) \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

injektiv. Mit dem Basisergänzungssatz finden wir $w_{n+1}, \ldots, w_m \in \mathbb{R}^m$ derart, dass

$$\mathbb{R}^m = \alpha(\mathbb{R}^n) \oplus \mathbb{R}w_{n+1} \oplus \cdots \oplus \mathbb{R}w_m.$$

Dann ist

$$\theta \colon V_\phi \times \mathbb{R}^{m-n} \to \mathbb{R}^m, \ (v, t_{n+1}, \ldots, t_m) \mapsto (\psi \circ f \circ \phi^{-1})(v) + \sum_{j=n+1}^{m} t_j w_j$$

eine C^k-Abbildung derart, dass

$$\theta'(0)(\mathbb{R}^m) = \alpha(\mathbb{R}^n) + \mathbb{R}w_{n+1} + \cdots + \mathbb{R}w_m = \mathbb{R}^m,$$

also $\theta'(0) \colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ ein surjektiver Endomorphismus und somit ein Automorphismus ist. Nach dem Satz über die Umkehrfunktion existiert eine offene 0-Umgebung $Q \subseteq V_\phi \times \mathbb{R}^{m-n}$ derart, dass $\theta(Q)$ offen in $\mathbb{R}^m$ und $\theta|_Q \colon Q \to \theta(Q)$ ein C^k-Diffeomorphismus ist. Es ist $\theta(0) = (\psi \circ f \circ \phi^{-1})(0) = \psi(f(x)) = 0 \in V_\psi$. Nach Verkleinern von Q dürfen wir $\theta(Q) \subseteq V_\psi$ annehmen, da θ stetig ist. Dann ist $P := \psi^{-1}(\theta(Q)) \subseteq U_\psi$ eine offene Umgebung von $f(x)$ und

$$\Psi := (\theta|_Q)^{-1} \circ \psi|_P \colon P \to Q$$

eine Karte von M um $f(x)$. Weiter ist

$$U := \{y \in U_\phi \colon f(y) \in P \text{ und } (\phi(y), 0) \in Q\}$$

eine offene x-Umgebung in N und

$$\Phi := \phi|_U \colon U \to \phi(U) =: V$$

eine Karte von N um x. Per Definition von U ist $f(U) \subseteq P$. Gegeben $y \in U$ sei $v := \phi(y)$; dann ist $(v, 0) \in Q$ und somit

$$\Psi(f(y)) = (\theta|_Q)^{-1}(\underbrace{(\psi \circ f \circ \phi^{-1})(v)}_{=\theta(v,0)}) = (v, 0) = i(v) = (i \circ \Phi)(y).$$

Also sieht f um x lokal aus wie i. $\square$

Bemerkung 4.4

Gegeben seien C^k-Abbildungen $f\colon M \to N$ und $g\colon N \to L$ zwischen C^k-Mannigfaltigkeiten. Die folgenden Beobachtungen folgen direkt aus der Kettenregel (Satz 3.5) und Beispiel 3.7 (b):

(a) Sind f und g Immersionen, so ist auch $g \circ f$ eine Immersion. Insbesondere ist dies der Fall, wenn f (bzw. g) eine Immersion ist und g (bzw. f) ein C^k-Diffeomorphismus.

(b) Sind f und g Submersionen, so ist auch $g \circ f$ eine Submersion. Insbesondere ist dies der Fall, wenn f (bzw. g) eine Submersion ist und g (bzw. f) ein C^k-Diffeomorphismus.

Sind $f\colon X \to Y$ und $g\colon Y \to Z$ topologische Einbettungen zwischen topologischen Räumen, so ist $g \circ f\colon X \to Z$ eine topologische Einbettung, denn mit $g|^{g(Y)}$ ist auch $g|_{f(X)}^{g(f(X))}$ ein Homöomorphismus und somit auch $(g \circ f)|^{g(f(X))} = g|_{f(X)}^{g(f(X))} \circ f|^{f(X)}$. In der Situation der Bemerkung 4.4 folgern wir also aus (a):

(c) Sind f und g Einbettungen von C^k-Mannigfaltigkeiten, so auch $f \circ g$. Insbesondere gilt dies, wenn f (bzw. g) eine Einbettung von C^k-Mannigfaltigkeiten ist und g (bzw. f) ein C^k-Diffeomorphismus.

Satz 4.5

Gegeben eine C^k-Abbildung $f\colon N \to M$ zwischen C^k-Mannigfaltigkeiten sind äquivalent:

(a) f ist eine Einbettung von C^k-Mannigfaltigkeiten;

(b) $f(N)$ ist eine Untermannigfaltigkeit von M und $f|^{f(N)}\colon N \to f(N)$ ist ein C^k-Diffeomorphismus.

Beweis. Gilt (b), so ist die Inklusion $j\colon f(N) \to M$ nach Beispiel 3.11 eine Einbettung von C^k-Mannigfaltigkeiten und somit auch $f = j \circ f|^{f(N)}$, nach Bemerkung 4.4 (c).

Gilt (a) und ist $y \in f(N)$, so wählen wir $x \in N$ mit $y = f(x)$. Nach Satz 4.3 (b) gibt es eine Karte $\phi\colon U_\phi \to V_\phi \subseteq \mathbb{R}^n$ von N um x und eine Karte $\psi\colon U_\psi \to V_\psi \subseteq \mathbb{R}^m$ derart, dass $f(U_\phi) \subseteq U_\psi$ und

$$\psi \circ f \circ \phi^{-1} \colon V_\phi \to V_\psi$$

gleich $i|_{V_\phi}$ ist mit $i \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $v \mapsto (v, 0)$. Insbesondere ist

$$V_\phi \times \{0\} = i(V_\phi) = (\psi \circ f \circ \phi^{-1})(V_\phi) \subseteq V_\psi.$$

Nach Ersetzen von V_ψ durch $V_\psi \cap (V_\phi \times \mathbb{R}^{m-n})$ und U_ψ durch $\psi^{-1}(V_\psi \cap (V_\phi \times \mathbb{R}^{m-n}))$ dürfen wir annehmen, dass

$$V_\psi \cap (\mathbb{R}^n \times \{0\}) = V_\phi \times \{0\}$$

ist. Da f eine topologische Einbettung ist, ist $f(U_\phi)$ relativ offen in $f(N)$; es gibt daher eine offene Teilmenge $Q \subseteq M$ derart, dass $f(U_\phi) = f(N) \cap Q$. Nach Ersetzen von Q durch $Q \cap U_\psi$ dürfen wir annehmen, dass $Q \subseteq U_\psi$ gilt. Nach Ersetzen von U_ψ durch Q und V_ψ durch $\psi(Q)$ dürfen wir annehmen, dass $U_\psi = Q$, also

$$f(N) \cap U_\psi = f(U_\phi).$$

Dann ist

$$\begin{aligned} \psi(f(N) \cap U_\psi) &= \psi(f(U_\phi)) = (\psi \circ f \circ \phi^{-1})(V_\phi) = i(V_\phi) \\ &= V_\phi \times \{0\} = V_\psi \cap (\mathbb{R}^n \times \{0\}), \end{aligned}$$

also ψ eine an $f(N)$ angepasste Karte von M und somit $f(N)$ eine n-dimensionale Untermannigfaltigkeit von M. Die Ko-Einschränkung $f|^{f(N)}\colon N \to f(N)$ ist C^k, da f eine C^k-Abbildung ist. Die Inklusionsabbildung $j\colon f(N) \to M$ ist C^k, da $f(N)$ eine Untermannigfaltigkeit ist. Da $f = j \circ f|^{f(N)}$ eine Immersion ist, ist für jedes $x \in N$ die Tangentialabbildung

$$T_x f = T_{f(x)} j \circ T_x(f|^{f(N)})$$

injektiv und somit auch $T_x(f|^{f(N)})\colon T_x N \to T_{f(x)} f(N)$ injektiv. Da sowohl $T_x N$ als auch $T_{f(x)} f(N)$ die Dimension n haben, ist $T_x(f|^{f(N)})$ ein Isomorphismus. Also ist $f|^{f(N)}$ étale und somit ein lokaler Diffeomorphismus. Als injektiver lokaler Diffeomorphismus ist $f|^{f(N)}$ ein Diffeomorphismus. $\square$

Der folgende Satz gibt zwei Charakterisierungen von Submersionen und erhellt ihre lokale Struktur. Bevor wir ihn beweisen, geben wir zwei Anwendungen.

Satz 5.1

Es sei $f\colon M \to N$ eine C^k-Abbildung, wobei M eine m-dimensionale C^k-Mannigfaltigkeit ist und N eine n-dimensionale C^k-Mannigfaltigkeit. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

(a) f ist eine Submersion;

(b) Es ist $n \leq m$ und f sieht um jeden Punkt lokal aus wie die Projektion $\mathrm{pr}_1\colon \mathbb{R}^m = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n} \to \mathbb{R}^n$, $(u, v) \mapsto u$;

(c) Für jedes $x \in M$ existiert eine offene Umgebung W von $f(x)$ in N und eine C^k-Abbildung $\sigma\colon W \to M$ derart, dass $f \circ \sigma = \mathrm{id}_W$ und $\sigma(f(x)) = x$ (f erlaubt lokale C^k-Schnitte).

Folgerung 5.2

Es sei $q\colon M \to N$ eine surjektive Submersion zwischen C^k-Mannigfaltigkeiten. Ist $f\colon N \to L$ eine Abbildung in eine C^k-Mannigfaltigkeit L, so sind äquivalent:

(a) $f\colon N \to L$ ist C^k;

(b) $f \circ q\colon M \to L$ ist C^k.

Beweis. Ist f eine C^k-Abbildung, so auch $f \circ q$ als Komposition von C^k-Abbildungen. Sei umgekehrt $f \circ q$ eine C^k-Abbildung. Für jedes $y \in N$ gibt es ein $x \in M$ mit $q(x) = y$, da q surjektiv ist. Nach Satz 5.1 gibt es eine offene y-Umgebung W in N und eine C^k-Funktion $\sigma\colon W \to M$ derart, dass $q \circ \sigma = \mathrm{id}_W$. Dann ist

$$f|_W = f|_W \circ \mathrm{id}_W = f \circ (q \circ \sigma) = (f \circ q) \circ \sigma$$

eine C^k-Funktion als Komposition von C^k-Funktionen. Schreibe statt W auch $W(y)$. Da $(W(y))_{y \in N}$ eine offene Überdeckung von N ist, ist f eine C^k-Funktion. $\square$

Folgerung 5.3

Es sei M eine C^k-Abbildung und $q\colon M \to N$ eine surjektive Abbildung in eine Menge N. Dann gibt es höchstens eine C^k-Mannigfaltigkeitsstruktur auf N, die q eine Submersion macht.

Beweis. Für $j \in \{1, 2\}$ schreiben wir N_j für N, versehen mit einer C^k-Mannigfaltigkeitsstruktur, welche $q\colon M \to N_j$ zu einer Submersion macht. Wir schreiben q_j für q als Abbildung nach N_j. Nun betrachten wir die Abbildung

$$f\colon N_1 \to N_2, \quad x \mapsto x.$$

Da $f \circ q_1 = q_2$ eine C^k-Abbildung ist und q_1 eine Submersion, ist f nach Folgerung 5.2 eine C^k-Abbildung. Auch f^{-1} ist C^k, da $f^{-1} \circ q_2 = q_1$ eine C^k-Abbildung und q_2 eine Submersion ist. Also ist f ein C^k-Diffeomorphismus und somit $N_1 = N_2$: wir haben die gleichen offenen Mengen und die gleichen Karten. $\square$

Beweis von Satz 5.1. (a)$\Rightarrow$(b): Zu $x \in M$ existiert eine Karte $\phi\colon U_\phi \to V_\phi \subseteq \mathbb{R}^m$ für M um x und eine Karte $\psi\colon U_\psi \to V_\psi \subseteq \mathbb{R}^n$ für N um $f(x)$; nach Ersetzen von U_ϕ durch $U_\phi \cap f^{-1}(U_\psi)$ dürfen wir annehmen, dass $f(U_\phi) \subseteq U_\psi$. Da f eine Submersion ist, ist die lineare Abbildung

$$(\psi \circ f \circ \phi^{-1})'(\phi(x))\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$$

surjektiv, somit $n \leq m$. Der Kern der vorigen linearen Abbildung hat die Dimension $m - n$; wir finden einen Isomorphismus vom Kern nach $\mathbb{R}^{m-n}$ und setzen diesen zu einer linearen Abbildung $\alpha\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^{m-n}$ fort. Der Endomorphismus

$$((\psi \circ f \circ \phi^{-1})'(\phi(x)), \alpha)\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n} \cong \mathbb{R}^m$$

von $\mathbb{R}^m$ hat dann trivialen Kern, ist also ein Automorphismus. Nach dem Satz über die Umkehrfunktion können wir folglich nach Verkleinern der offenen $\phi(x)$-Umgebung $V_\phi \subseteq \mathbb{R}^m$ erreichen, dass

$$\theta := (\psi \circ f \circ \phi^{-1}, \alpha)\colon V_\phi \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-1}$$

offenes Bild hat und ein C^k-Diffeomorphismus nach $\theta(V_\phi)$ ist. Dann ist $\theta \circ \phi\colon U_\phi \to \theta(V_\phi) \subseteq \mathbb{R}^m$ ein C^k-Diffeomorphismus und somit eine Karte für M. Es ist $\psi \circ f \circ \phi^{-1} = \mathrm{pr}_1 \circ \theta$, also

$$\psi \circ f \circ (\theta \circ \phi)^{-1} = \psi \circ f \circ \phi^{-1} \circ \theta^{-1} = \mathrm{pr}_1 \circ \theta \circ \theta^{-1} = \mathrm{pr}_1 |_{\theta(V_\phi)}.$$

(b)⇒(c): Gegeben y und x wie in (b) sei $\phi\colon U_\phi \to V_\phi \subseteq \mathbb{R}^m$ eine Karte für M um x und $\psi\colon U_\psi \to V_\psi \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Karte für N um y derart, dass $f(U_\phi) \subseteq U_\psi$ und $\psi \circ f \circ \phi^{-1} = \mathrm{pr}_1|_{V_\phi}$. Es gibt offene Teilmengen $P \subseteq \mathbb{R}^n$ und $Q \subseteq \mathbb{R}^m$ derart, dass $P \times Q \subseteq V_\phi$ und $\phi(x) \in P \times Q$. Sei $q := \mathrm{pr}_2(\phi(x)) \in Q$. Es ist

$$P = \mathrm{pr}_1(P \times Q) = (\psi \circ f \circ \phi^{-1})(P \times Q) \subseteq V_\psi$$

und $\psi(y) = \psi(f(x)) = (\psi \circ f \circ \phi^{-1})(\phi(x)) = \mathrm{pr}_1(\phi(x)) \in P$, also $W := \psi^{-1}(P)$ eine offene y-Umgebung in N. Die Abbildung

$$\sigma\colon W \to M, \quad w \mapsto \phi^{-1}(\psi(w), q)$$

ist C^k und $\sigma(y) = \sigma(f(x)) = \sigma \circ \psi^{-1} \circ (\psi \circ f \circ \phi^{-1})(\phi(x)) = \sigma(\psi^{-1}(\mathrm{pr}_1(\phi(x)))) = \phi^{-1}(\mathrm{pr}_1(\phi(x)), q) = \phi^{-1}(\phi(x)) = x$. Weiter ist $f(\sigma(w)) = f(\phi^{-1}(\psi(w), q)) = \psi^{-1}(\psi \circ f \circ \phi^{-1})(\psi(w), q) = \psi^{-1}(\psi(w)) = w$ für jedes $w \in W$.

(c)⇒(a): Gegeben $x \in M$ wählen wir $\sigma\colon W \to M$ wie in (b) mit $y := f(x)$. Aus $f \circ \sigma = \mathrm{id}_W$ folgt $\mathrm{id}_{T_yN} = \mathrm{id}_{T_yW} = T_xf \circ T_y\sigma$. Also ist T_xf surjektiv. □

Zur Motivation betrachten wir für $m, n \in \mathbb{N}_0$ mit $n \leq m$ die Projektion

$$\mathrm{pr}_1 \colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n} \to \mathbb{R}^n, \quad (x, y) \mapsto x;$$

diese ist eine Submersion zwischen den glatten Mannigfaltigkeiten $\mathbb{R}^m$ und $\mathbb{R}^n$. Wir beobachten:

Beispiel 6.1

Ist $S \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Untermannigfaltigkeit, so auch $(\mathrm{pr}_1)^{-1}(S) \subseteq \mathbb{R}^m$.

Denn $(\mathrm{pr}_1)^{-1}(S) = S \times \mathbb{R}^{m-n}$ ist das kartesische Produkt der Untermannigfaltigkeit S von $\mathbb{R}^n$ und der Untermannigfaltigkeit $\mathbb{R}^{m-n}$ von $\mathbb{R}^{m-n}$, nach Satz 2.35 also eine Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n} = \mathbb{R}^m$ mit $\dim(S \times \mathbb{R}^{m-n}) = \dim(S) + (m - n)$.

Bemerkung 6.2

Analoges gilt, wenn wir $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^m$ und $\mathbb{R}^{m-n}$ als C^k-Mannigfaltigkeiten betrachten mit $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Weiter können $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{R}^{m-n}$ durch offene Teilmengen $P \subseteq \mathbb{R}^n$ und $Q \subseteq \mathbb{R}^{m-n}$ ersetzt werden und $\mathbb{R}^m$ durch $P \times Q$: es ist $(\mathrm{pr}_1)^{-1}(S) = S \times Q$ eine Untermannigfaltigkeit von $P \times Q$ für jede Untermannigfaltigkeit $S \subseteq P$, mit $\mathrm{pr}_1 \colon P \times Q \to P$.

Beispiel 6.3

Für n, m, P, Q, pr_1 und k wie zuvor sei $Y := P \times Q$. Weiter sei X eine C^k-Mannigfaltigkeit und $f \colon X \to P$ eine C^k-Abbildung. Dann ist der "Egalisator"

$$E := \{(x, y) \in X \times Y \colon f(x) = \mathrm{pr}_1(y)\}$$

eine Untermannigfaltigkeit der C^k-Mannigfaltigkeit $X \times Y$ und die Projektion $\pi_1 \colon E \to X$, $(x, y) \mapsto x$ ist eine Submersion.

Für $x \in X$, $y = (p, q) \in P \times Q = Y$ ist nämlich genau dann

$$f(x) = \mathrm{pr}_1(y) = p,$$

wenn $p = f(x)$. Somit ist $E = \mathrm{graph}(f) \times Q$. Da $\mathrm{graph}(f)$ eine

Untermannigfaltigkeit von $X \times P$ ist (mit Dimension $\dim(X)$, siehe Aufgabe P9) und Q eine Untermannigfaltigkeit von Q, ist E nach Satz 2.35 eine Untermannigfaltigkeit von $X \times Y$, der Dimension $\dim(X) + \dim(Q) = \dim(X) + (m - n)$. Für jedes $(x, y) \in E$ mit $y = (p, q)$ ist

$$\sigma\colon X \to E, \quad z \mapsto (z, (f(z), q))$$

ein C^k-Schnitt für π_1 mit $\sigma(x) = (x, y)$, also π_1 eine Submersion nach Satz 5.1.

Analoges gilt für allgemeine Submersionen, da diese lokal wie pr_1 aussehen.

Satz 6.4

Es sei $f\colon M \to N$ eine C^k-Abbildung zwischen C^k-Mannigfaltigkeiten mit $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Ist f eine Submersion, so gilt:

(a) Für jede Untermannigfaltigkeit $S \subseteq N$ ist $f^{-1}(S)$ eine Untermannigfaltigkeit von M.

(b) Für jedes $y \in N$ ist $f^{-1}(\{y\}) = \{x \in M\colon f(x) = y\}$ eine Untermannigfaltigkeit von M.

In (a) ist weiter $\dim(f^{-1}(S)) = \dim(S) + \dim(M) - \dim(N)$.

Beweis. (a) Gegeben $x \in f^{-1}(S)$ gibt es eine Karte $\phi\colon U_\phi \to V_\phi \subseteq \mathbb{R}^m$ von M um x und eine Karte $\psi\colon U_\psi \to V_\psi \subseteq \mathbb{R}^n$ von N um $f(x)$ derart, dass $f(U_\phi) \subseteq U_\psi$ und

$$\psi \circ f|_{U_\phi} = \mathrm{pr}_1 \circ \phi$$

mit $\mathrm{pr}_1\colon \mathbb{R}^m = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n} \to \mathbb{R}^n$. Nach Verkleinern von V_ϕ dürfen wir annehmen, dass $V_\phi = P \times Q$ mit offenen Teilmengen $P \subseteq \mathbb{R}^n$ und $Q \subseteq \mathbb{R}^{m-n}$. Nach Ersetzen von V_ψ durch P dürfen wir $V_\psi = P$ annehmen. Dann ist $U_\psi = \psi^{-1}(P)$ eine offene Teilmenge von N und $S \cap U_\psi$ eine Untermannigfaltigkeit von U_ψ, der Dimension $\dim(S)$. Da ψ ein Diffeomorphismus ist, ist $\psi(S \cap U_\psi)$ eine $\dim(S)$-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $V_\psi = P$ und nach Bemerkung 6.2 also $L := (\mathrm{pr}_1|_{P\times Q})^{-1}(\psi(S \cap U_\psi))$ eine $\dim(S) + \dim(M) - \dim(N)$-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $V_\phi = P \times Q$. Dann ist

$$\begin{aligned}
\phi^{-1}(L) &= \{z \in U_\phi\colon \overbrace{\mathrm{pr}_1(\phi(z))}^{=\psi(f(z))} \in \psi(S \cap U_\psi)\} \\
&= \{z \in U_\phi\colon f(z) \in S\} = U_\phi \cap f^{-1}(S)
\end{aligned}$$

eine zu L diffeomorphe Untermannigfaltigkeit von U_ϕ, da ϕ ein Diffeomorphismus ist. Nach Lemma 2.32 ist $f^{-1}(S)$ eine Untermannigfaltigkeit von M der genannten Dimension.

(b) Die einpunktige Menge $\{y\}$ ist eine 0-dimensionale Untermannigfaltigkeit von N, ihr Urbild nach (a) also eine Untermannigfaltigkeit von M. $\square$

Beispiel 6.5

Die Sphäre $\mathbb{S}_n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ ist eine n-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ (und von $\mathbb{R}^{n+1}$).

Es ist nämlich

$$\mathbb{S}_n = q^{-1}(\{1\})$$

mit der glatten Abbildung $q\colon \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sum_{j=1}^{n+1} x_j^2$ für $x = (x_1, \ldots, x_{n+1})$. Diese hat an jeder Stelle x Gradienten

$$\nabla q(x) = 2x \neq 0,$$

so dass also die lineare Abbildung $q'(x) = \langle \nabla q(x), \cdot \rangle \colon \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ nicht die Nullabbildung ist und somit surjektiv. Also ist q eine

Submersion und die Niveaumenge $\mathbb{S}_n$ nach Satz 6.4 (b) eine Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$, der Dimension $(n+1)-1$.

Satz 6.6

Gegeben seien C^k-Mannigfaltigkeiten M_1, M_2 und N mit $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ und C^k-Abbildungen $f_1 \colon M_1 \to N$ sowie $f_2 \colon M_2 \to N$. Ist f_2 eine Submersion, so ist

$$E := \{(x_1, x_2) \in M_1 \times M_2 \colon f_1(x_1) = f_2(x_2)\}$$

eine Untermannigfaltigkeit von $M_1 \times M_2$ und $\pi_1 \colon E \to M_1$, $(x_1, x_2) \mapsto x_1$ ist eine Submersion.

Beweis. Gegeben $(x_1, x_2) \in E$ gibt es eine Karte $\phi \colon U_\phi \to V_\phi \subseteq \mathbb{R}^m$ für M_2 um x_2 und eine Karte $\psi \colon U_\psi \to V_\psi \subseteq \mathbb{R}^n$ für N um $f_2(x_2) = f_1(x_1)$ derart, dass $f_2(U_\phi) \subseteq U_\psi$ und

$$\psi \circ f_2|_{U_\phi} = \mathrm{pr}_1 \circ \phi$$

mit der Projektion $\mathrm{pr}_1 \colon \mathbb{R}^m = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n} \to \mathbb{R}^n$. Dann ist $W := (f_1)^{-1}(U_\psi)$ eine offene Umgebung von x_1 in M_1. Weiter ist

$\theta := \mathrm{id}_W \times \phi\colon W \times U_\phi \to W \times V_\phi$ ein C^k-Diffeomorphismus und

$$\begin{aligned}\theta(E \cap (W \times U_\phi)) &= \{(w,z) \in W \times V_\phi \colon f_1(w) = \overbrace{f_2(\phi^{-1}(z))}^{=\psi^{-1}(\mathrm{pr}_1(z))}\} \\ &= \{(w,z) \in W \times V_\phi \colon \psi(f_1(w)) = \mathrm{pr}_1(z)\}\end{aligned}$$

nach Beispiel 6.3 eine C^k-Untermannigfaltigkeit von $W \times V_\phi$ derart, dass die Projektion p auf die W-Komponente eine Submersion ist. Anwenden von θ^{-1} zeigt, dass $E \cap (W \times U_\phi)$ eine Untermannigfaltigkeit von $W \times U_\phi$ ist. Schließlich ist π_1 auf dieser Menge gleich $p \circ \theta|_{E \cap (W \times U_\phi)}$ und somit eine Submersion. Nach Lemma 2.32 ist E eine Untermannigfaltigkeit von $M_1 \times M_2$. $\square$

Definition 6.7

Die Untermannigfaltigkeit E aus Satz 6.6 wird das **Faserprodukt** von M_1 und M_2 genannt (genauer: von $f_1\colon M_1 \to N$ und $f_2\colon M_2 \to N$); man schreibt

$$M_1 \times_N M_2 := E.$$

Auch bei der Notation $M_1 \times_N M_2$ muss man im Hinterkopf behalten, dass das Faserprodukt nicht nur von M_1, M_2 und N, sondern auch von f_1 und f_2 abhängt. Beispiele von Faserprodukten lernen wir im folgenden Kapitel kennen.

Mit vertauschten Rollen von M_1 und M_2 sieht man:

Bemerkung 6.8

Ist f_1 statt f_2 eine Submersion in Satz 6.6, so ist ebenfalls $M_1 \times_N M_2$ eine Untermannigfaltigkeit von $M_1 \times M_2$. In diesem Fall ist $\pi_2\colon M_1 \times_N M_2 \to M_2$, $(x, y) \mapsto y$ eine Submersion.

§7 Der Satz von Godement und G/H als Mannigfaltigkeit

Sei $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Es ist möglich, diejenigen Äquivalenzrelationen $R \subseteq M \times M$ auf einer C^k-Mannigfaltigkeit M zu charakterisieren, für welche sich die Menge

$$M/R := \{[x] \colon x \in M\}$$

der Äquivalenzklassen $[x] := \{y \in M \colon xRy\}$ derart zu einer C^k-Mannigfaltigkeit machen lässt, dass die kanonische Abbildung $q \colon M \to M/R$, $x \mapsto [x]$ zu einer Submersion wird (wobei xRy meint, dass $(x, y) \in R$). Der Satz von Godement (auch **Godement-Kriterium** genannt) liefert solch eine Charakterisierung.

Satz 7.1 (Satz von Godement)

Für eine Äquivalenrelation R auf M sind äquivalent:

(a) Es gibt eine C^k-Mannigfaltigkeitsstruktur auf M/R, welche $q \colon M \to M/R$, $x \mapsto [x]$ zu einer Submersion macht;

(b) R ist abgeschlossen in $M \times M$ und eine Untermannigfaltigkeit; zudem ist $\mathrm{pr}_2 \colon R \to M$, $(x, y) \mapsto y$ eine Submersion.

Existiert sie, so ist die in (a) beschriebene C^k-Mannigfaltigkeits-struktur auf M/R automatisch eindeutig, nach Folgerung 5.3.

Beweis. (a)$\Rightarrow$(b): Da die Mannigfaltigkeit $N := M/R$ Hausdorffsch ist, ist die Diagonale

$$\Delta_N := \{(x,x)\colon x \in N\}$$

eine abgeschlossene Teilmenge von $N \times N$. Da die Abbildung

$$q \times q\colon M \times M \to N \times N, \quad (x,y) \mapsto (q(x), q(y))$$

stetig ist, ist $R = (q \times q)^{-1}(\Delta_N)$ abgeschlossen in $M \times M$. Man beachte, dass

$$R = \{(x,y) \in M \times M\colon q(x) = q(y)\} = M \times_N M$$

das Faserprodukt von M und M ist mit den Abbildungen $f_1 := f_2 := q\colon M \to N$. Da q eine Submersion ist, ist R nach Bemerkung 6.8 eine Untermannigfaltigkeit von $M \times M$ und $\pi_2\colon R \to M$ ist eine Submersion.

(b)$\Rightarrow$(a): Diese Implikation begründen wir später. $\square$

Folgerung 7.2

Es sei G eine Liegruppe und $H \subseteq G$ eine abgeschlossene Untergruppe, welche eine Untermannigfaltigkeit von G ist. Dann gibt es genau eine glatte Mannigfaltigkeitsstruktur auf $G/H := \{gH : g \in G\}$, welche die kanonische Abbildung $q\colon G \to G/H$, $g \mapsto gH$ zu einer Submersion macht. Die Abbildung

$$\tau\colon G \times G/H \to G/H, \quad (g, xH) \mapsto gxH$$

ist glatt. Ist H zudem ein Normalteiler, so ist G/H eine Liegruppe.

Im Beweis benutzen wir:

Lemma 7.3

Gegeben seien C^k-Abbildungen $f_1\colon M_1 \to N_1$ und $f_2\colon M_2 \to N_2$ zwischen C^k-Mannigfaltigkeiten, wobei $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.

(a) Sind f_1 und f_2 Submersionen, so auch $f_1 \times f_2\colon M_1 \times M_2 \to N_1 \times N_2$, $(x_1, x_2) \mapsto (f_1(x_1), f_2(x_2))$.

(b) Sind f_1 und f_2 Immersionen, so auch $f_1 \times f_2$.

Beweis. Gegeben $x = (x_1, x_2) \in M_1 \times M_2$ seien $\phi_j \colon U_{\phi_j} \to V_{\phi_j}$ Karten von M_j um x_j und $\psi_j \colon U_{\psi_j} \to V_{\psi_j}$ Karten für N_j um $f_j(x_j)$ derart, dass $f_j(U_{\phi_j}) \subseteq U_{\psi_j}$ für $j \in \{1, 2\}$. Setzen wir $g_j := \psi_{\phi_j} \circ f_j \circ \phi_j^{-1}$, so ist

$$T_x(f_1 \times f_2) = h^{-1}_{\psi_1 \times \psi_2} \circ (g_1 \times g_2)'(\phi_1(x_1), \phi_2(x_2)) \circ h_{\phi_1 \times \phi_2}$$

mit $(g_1 \times g_2)'(g_1(x_1), g_2(x_2)) = g_1'(\phi_1(x_1)) \times g_2'(\phi_2(x_2))$. Diese Abbildung ist surjektiv (bzw. injektiv), wenn die linearen Abbildungen $g_1'(\phi_1(x_1))$ und $g_2'(\phi_2(x_2))$ beide surjektiv (bzw. beide injektiv) sind. $\square$

Beweis von Folgerung 7.2. Sei $R := \{(x, y) \in G \times G \colon xH = yH\}$. Gegeben $(x, y) \in G \times G$ ist $(x, y) \in R$ genau dann, wenn $x^{-1}y \in H$, somit

$$R = f^{-1}(H)$$

mit der stetigen Abbildung

$$f \colon G \times G \to G, \quad (x, y) \mapsto x^{-1}y.$$

Also ist R abgeschlossen in $G \times G$. Die Abbildung f ist zudem glatt und sie ist eine Submersion. Gegeben $(x, y) \in G \times G$ ist nämlich

$$\sigma\colon G\to G\times G,\quad z\mapsto (x,xz)$$

eine glatte Abbildung derart, dass $f(\sigma(z))=x^{-1}xz=z$ für alle $z\in G$, und zudem ist $\sigma(x^{-1}y)=(x,xx^{-1}y)=(x,y)$; somit ist (c)$\Rightarrow$(a) von Satz 5.1 anwendbar. Nach Satz 6.4 ist also $R=f^{-1}(H)$ eine Untermannigfaltigkeit von $G\times G$. Schließlich sieht man mit (c)$\Rightarrow$(a) in Satz 5.1, dass die glatte Abbildung $\mathrm{pr}_2\colon R\to G$, $(x,y)\mapsto y$ eine Submersion ist; gegeben $(x,y)\in R$ ist mit $h:=y^{-1}x\in H$ nämlich die Abbildung

$$\sigma\colon G\to R,\quad z\mapsto (zh,z)$$

glatt und erfüllt $\mathrm{pr}_2\circ\sigma=\mathrm{id}_G$ und $\sigma(y)=(yh,y)=(x,y)$. Nach dem Satz von Godement gibt es also eine glatte Mannigfaltigkeiotsstruktur auf G/H, die q zu einer Submersion macht. Nach Lemma 7.3 ist

$$\mathrm{id}_G\times q\colon G\times G\to G\times G/H$$

eine Submersion. Sei $\mu\colon G\times G\to G$ die glatte Gruppenmultiplikation. Da $\tau\circ(\mathrm{id}_G\times q)=q\circ\mu$ glatt ist, ist nach

Folgerung 5.2 auch τ glatt. Ist H ein Normalteiler, so sei $\tilde{\eta}\colon G/H \to G/H$ die Gruppeninversion und $\tilde{\mu}\colon G/H \times G/H \to G/H$ die Gruppenmultiplikation. Da die Gruppeninversion $\eta\colon G \to G$ glatt ist, ist $\tilde{\eta} \circ q = q \circ \eta$ glatt, nach Folgerung 5.2 also auch $\tilde{\eta}$. Da $\tilde{\mu} \circ (q \times q) = q \circ \mu$ glatt ist und $q \times q$ eine Submersion, ist nach Folgerung 5.2 auch $\tilde{\mu}$ glatt. $\square$

Man nennt G/H auch einen **homogenen Raum**.

Ist $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ und $f\colon M \to N$ eine C^k-Abbildung zwischen C^k-Mannigfaltigkeiten der Dimensionen m und n, so können wir mit der folgenden Tatsache der linearen Algebra testen, ob für jedes $x \in M$ die lineare Abbildung

$$\alpha := (\psi \circ f \circ \phi^{-1})'(\phi(x))\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$$

injektiv (bzw. surjektiv, bzw. bijektiv) ist für eine Karte ϕ von M um x und eine Karte ψ von N um $f(x)$, also $T_x f = (h_\psi)^{-1} \circ \alpha \circ h_\phi$ injektiv (bzw. surjektiv, bzw. bijektiv) ist und somit f eine Immersion (bzw. eine Submersion, bzw. étale). Die α bezüglich den Standardbasen darstellende Matrix ist die Jacobimatrix $J_{\psi\circ f\circ\phi^{-1}}(\phi(x))$.

Lemma 8.1

Es sei $\alpha\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ eine lineare Abbildung und $A = (a_{ij})$ die α darstellende Matrix bezüglich den Standardbasen $e_1, \ldots, e_n$ von $\mathbb{R}^n$ und $f_1, \ldots, f_m$ von $\mathbb{R}^m$, also $\alpha(f_j) = \sum_{i=1}^n a_{ij} e_i$ für $j \in \{1, \ldots, m\}$. Dann gilt:

(a) α ist genau dann injektiv, wenn $m \leq n$ und A den Rang m besitzt.

(b) α ist genau dann surjektiv, wenn $m \geq n$ und A den Rang n besitzt.

(c) α ist genau dann bijektiv, wenn $m = n$ und A den Rang m besitzt. $\square$

Bemerkung 8.2 Im Falle von offenen Teilmengen $P \subseteq \mathbb{R}^m$ und $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ ist eine C^k-Abbildung $f\colon P \to Q$ genau dann eine Immersion (bzw. Submersion, bzw. étale), wenn an jeder Stelle $x \in P$ die Ableitung

$$f'(x)\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$$

injektiv (bzw. surjektiv, bzw. bijektiv) ist, denn $f = \psi \circ f \circ \phi^{-1}$ und somit $T_x f = (h_\psi)^{-1} \circ f'(x) \circ h_\phi$ mit den globalen Karten $\phi := \mathrm{id}_P$ und $\psi := \mathrm{id}_Q$.

Beispiel 8.3

Die glatte Abbildung $f = (f_1, f_2)\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto (\cos(t), \sin(t))^T$ ist eine Immersion (keine Einbettung aber, da nicht injektiv).

In der Tat: Für jedes $t \in \mathbb{R}$ ist $J_f(t) = (-\sin(t), \cos(t))^T$ nicht der Nullvektor, also eine (2×1)-Matrix vom Rang 1.

Beispiel 8.4

Sei $\mathbb{R}_d$ die Menge der reellen Zahlen, versehen mit der diskreten Topologie (jede Teilmenge ist offen) und zugehörigen 0-dimensionalen glatten Mannigfaltigkeitsstruktur mit den Karten $\{x\} \to \{0\} \subseteq \mathbb{R}^0 = \{0\}$ für $x \in \mathbb{R}$. Dann ist die bijektive Abbildung

$$\mathbb{R}_d \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x$$

eine Immersion, aber keine Einbettung von glatten Mannigfaltigkeiten (da die Umkehrfunktion nicht stetig ist).

$\mathbb{R}_d$ hat keine abzählbare Basis der Topologie.

Lemma 8.5

Gegeben seien C^k-Abbildungen $f\colon M \to N$ und $g\colon N \to L$ zwischen C^k-Mannigfaltigkeiten mit $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Dann gilt:

(a) Ist $g \circ f\colon M \to L$ eine Submersion, so auch g.

(b) Ist $g \circ f$ eine Immersion, so auch f.

(c) Ist f eine Submersion und $g \circ f$ eine Immersion, so ist auch g eine Immersion.

(d) Ist g eine Immersion, so ist $g \circ f$ genau dann eine Immersion, wenn f eine Immersion ist.

(e) Ist f eine surjektive Submersion, so ist $g \circ f$ genau dann eine Submersion, wenn g eine Submersion ist.

Beweis. (a) Für jedes $x \in M$ ist $T_x(g \circ f) = T_{f(x)}g \circ T_x f$ surjektiv, also auch $T_{f(x)}g$ surjektiv.

(b) Für jedes $x \in M$ ist $T_x(g \circ f) = T_{f(x)}g \circ T_x f$ injektiv, also auch $T_x f$ injektiv.

(c) Seien $v, w \in T_{f(x)}N$ mit $T_{f(x)}g(v) = T_{f(x)}g(w)$. Da T_xf surjektiv ist, gibt es $a, b \in T_xM$ mit $v = T_xf(a)$ und $w = T_xf(b)$. Dann ist

$$\begin{aligned} T_x(g \circ f)(a) &= T_{f(x)}g(T_xf(a)) = T_{f(x)}g(v) = T_{f(x)}g(w) \\ &= T_{f(x)}g(T_xf(b)) = T_x(g \circ f)(b), \end{aligned}$$

also $a = b$ und somit $v = w$.

(d) Für jedes $x \in M$ ist $T_{f(x)}g$ injektiv, also $\ker(T_x(g \circ f)) = \ker(T_{f(x)}g \circ T_xf) = \ker T_xf$. Eine lineare Abbildung ist genau dann injektiv, wenn ihr Kern trivial ist.

(e) Für jedes $x \in M$ ist $T_xf(T_xM) = T_{f(x)}N$, somit $T_{f(x)}g(T_xN) = T_{f(x)}g(T_xf(T_xM)) = T_x(g \circ f)(T_xM)$; es ist also $T_{f(x)}g$ genau dann surjektiv, wenn $T_x(g \circ f)$ es ist. $\square$

Beispiel 8.6

Die Abbildung $q\colon \mathbb{R} \to \mathbb{S}_1$, $t \mapsto (\cos(t), \sin(t))$ ist glatt und étale, also ein lokaler Diffeomorphismus (aber kein Diffeomorphismus, da q nicht injektiv ist).

Da $\mathbb{S}_1$ eine Untermannigfaltigkeit der glatten Mannigfaltigkeit $\mathbb{R}^2$ ist, ist die Inklusionsabbildung $j\colon \mathbb{S}_1 \to \mathbb{R}^2$ eine Einbettung von glatten Mannigfaltigkeiten, insbesondere also eine Immersion. Da $j \circ q$ nach Beispiel 8.3 einer Immersion ist, ist nach Lemma 8.5 (d) auch q eine Immersion. Für jedes $t \in \mathbb{R}$ ist also die lineare Abbildung $T_t q\colon T_t\mathbb{R} \to T_{q(t)}\mathbb{S}_1$ injektiv und somit ein Isomorphismus, da Definitionsbereich und Wertebereich Vektorräume der gleichen Dimension (nämlich 1) sind.

Beispiel 8.7

Sei $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ und $f\colon M \to N$ eine C^k-Abbildung zwischen C^k-Mannigfaltigkeiten. Dann ist graph(f) eine Untermannigfaltigkeit von $M \times N$ (siehe Aufgabe P9; vgl. Beispiel 2.30). Sei $j\colon$ graph$(f) \to M \times N$ die Inklusionsabbildung. Dann ist

$$\psi \colon M \to \mathrm{graph}(f), \quad x \mapsto (x, f(x))$$

ein C^k-Diffeomorphismus und $j \circ \psi = (\mathrm{id}_M, f)$ eine Einbettung von C^k-Mannigfaltigkeiten.

Die Abbildung $(\mathrm{id}_M, f) \colon M \to M \times N$, $x \mapsto (x, f(x))$ ist nämlich C^k, da ihre Komponenten C^k-Funktionen sind. Nach Satz 2.31 (c) ist also auch $\psi = (\mathrm{id}_M, f)|^{\mathrm{graph}(f)}$ eine C^k-Abbildung. Die Abbildung $\mathrm{pr}_1 \colon M \times N \to M$, $(x, y) \mapsto x$ ist C^k, also auch $\pi_1 := \mathrm{pr}_1|_{\mathrm{graph}(f)}$. Nun ist $\mathrm{pr}_1 \circ \psi = \mathrm{id}_M$ und $\psi \circ \pi_1 = \mathrm{id}_{\mathrm{graph}(f)}$, also ψ ein C^k-Diffeomorphismus. Nach Bemerkung 4.4 (c) ist dann $j \circ \psi$ eine Einbettung von C^k-Mannigfaltigkeiten.

Beispiel 8.8

Für jede C^k-Mannigfaltigkeit M mit $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ ist die Diagonale

$$\Delta_M := \{(x, x) \colon x \in M\}$$

eine Untermannigfaltigkeit von $M \times M$ und die Abbildung $\psi \colon M \to \Delta_M$, $x \mapsto (x, x)$ ein C^k-Diffeomorphismus.

Es ist nämlich $\Delta_M = \operatorname{graph}(\mathrm{id}_M)$ und $\psi = (\mathrm{id}_M, \mathrm{id}_M)|^{\operatorname{graph}(\mathrm{id}_M)}$, so dass ein Spezialfall von Beispiel 8.7 vorliegt.

Beispiel 8.9

Gegeben seien C^k-Mannigfaltigkeiten M und N mit $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Dann ist für jedes $y \in N$ die Abbildung

$$i_y \colon M \to M \times N, \quad x \mapsto (x, y)$$

eine Einbettung von C^k-Mannigfaltigkeiten.

Für die konstante Abbildung $f \colon M \to N$, $x \mapsto y$ ist $i_y = (\mathrm{id}_M, f)$; nach Beispiel 8.7 ist diese Abbildung eine Einbettung von C^k-Mannigfaltigkeiten, zudem $\operatorname{graph}(f) = M \times \{y\}$ eine Untermannigfaltigkeit von $M \times N$ und $(\mathrm{id}_M, f)|^{\operatorname{graph}(f)} \colon M \to M \times \{y\}$, $x \mapsto (x, y)$ ein C^k-Diffeomorphismus. $\square$

Der folgende Spezialfall eines Satzes von Sard wird mehrmals von Nutzen sein.

Satz 8.10 (Satz von Sard)

Es sei $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ und $f\colon M \to N$ eine C^k-Abbildung zwischen C^k-Mannigfaltigkeiten mit $M \neq \emptyset$. Hat die Topologie von M eine abzählbare Basis, so gilt:

(a) Ist $\dim(M) < \dim(N)$, so hat das Bild $f(M)$ leeres Inneres in N.

(b) Ist f surjektiv, so ist $\dim(M) \geq \dim(N)$.

Bemerkung 8.11

Beispiel 8.4 zeigt, dass die Schlussfolgerungen von Satz 8.10 falsch werden können, wenn M keine abzählbare Basis besitzt.

Bemerkung 8.12

Auch für $k = 0$ würden die Schlussfolgerungen von Satz 8.10 falsch, z.B. gibt es surjektive stetige Abbildungen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ und $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ (sogenannte “raumfüllende Kurven”).

Beweis von Satz 8.10. In der Situation von (b) ist

$f(M)^o = N = f(M) \neq \emptyset$, also (a) anwendbar.

(a) Wir nehmen $f(M)^o \neq \emptyset$ an und führen einen Widerspruch herbei. Sei $y \in f(M)^o$ und eine Karte $\psi\colon U_\psi \to V_\psi \subseteq \mathbb{R}^n$ für N um y. Dann ist $W := f^{-1}(f(M)^o \cap U_\psi)$ eine offene, nicht leere Teilmenge von M und $f(W) = f(M)^o \cap U_\psi$, also

$$\psi(f(M)^o \cap U_\psi) = \psi(f(W))$$

eine offene, nicht leere Teilmenge von V_ψ (und von $\mathbb{R}^n$). Nach Ersetzen von f durch $\psi \circ f|_W$ dürfen wir also annehmen, dass $N = \mathbb{R}^n$. Sei $\mathcal{A}$ der gegebene maximale C^k-Atlas auf M. Sei weiter $\mathcal{B}$ eine abzählbare Basis der Topologie auf M und $\mathcal{B}'$ die Menge aller $B \in \mathcal{B}$, für welche eine Karte ϕ_B von M existiert mit Definitionsbereich B. Für jede Karte $\phi\colon U_\phi \to V_\phi \subseteq \mathbb{R}^m$ von M ist U_ϕ eine Vereinigung gewisser Basismengen $B \in \mathcal{B}$ und auch $\phi|_B\colon B \to \phi(B)$ eine Karte für M, somit $B \in \mathcal{B}'$. Folglich ist $M = \bigcup_{B \in \mathcal{B}'} B$, also $\mathcal{A}' := \{\phi_B\colon B \in \mathcal{B}'\} \subseteq \mathcal{A}$ ein abzählbarer Atlas. Für jedes $B \in \mathcal{B}'$ ist

$$f \circ (\phi_B)^{-1}\colon \phi_B(B) \to \mathbb{R}^n$$

eine C^k-Abbildung, wobei $\phi_B(B)$ eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^m$ ist mit $m < n$. Für jedes $\varepsilon > 0$ wird dann $f(B) = (f \circ \phi_B^{-1})(\phi_B(B))$ durch abzählbar viele Würfel mit Gesamtvolumen $< \varepsilon$ überdeckt, es ist also $f(B)$ eine sogenannte **Lebesgue-Nullmenge** von $\mathbb{R}^n$ (vgl. Bemerkung 7.12 des Skripts zur Reellen Analysis von Prof. Glöckner). Dann ist auch die abzählbare Vereinigung

$$f(M) = \bigcup_{B \in \mathcal{B}'} f(B)$$

eine Lebesgue-Nullmenge und somit $f(M)^o = \emptyset$, Widerspruch. $\square$

Bemerkung 8.13

Identifizieren wir $\mathbb{R}^2$ mit der komplexen Zahlenebene $\mathbb{C}$, so ist $\mathbb{S}_1 = \{z \in \mathbb{C} \colon |z| = 1\}$ eine Untergruppe der multiplikativen Gruppe $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$ des Körpers $\mathbb{C}$; letztere ist eine Liegruppe.

$\mathbb{C}^\times := \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ist nämlich eine offene Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$. Weiter ist $zw \in \mathbb{C}^\times$ eine glatte Funktion von $(z, w) \in \mathbb{C}^\times \times \mathbb{C}^\times$ (da $zw \in \mathbb{C}$ bilinear in $(z, w) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ ist) und

$$(x+iy)^{-1} = \frac{x-iy}{x^2+y^2}$$

ist glatt in $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

Da $\mathbb{S}_1$ eine Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ ist, ist $\mathbb{S}_1$ auch eine Untermannigfaltigkeit der offenen Teilmenge $\mathbb{C}^\times$ und somit eine Liegruppe. Der surjektive lokale C^∞-Diffeomorphismus $q\colon \mathbb{R} \to \mathbb{S}$, $t \mapsto (\cos t, \sin t) = e^{it}$ aus Beispiel 8.6 ist ein Gruppenhomomorphismus.

Für alle $s, t \in \mathbb{R}$ ist nämlich

$$q(t+s) = e^{i(t+s)} = e^{it+is} = e^{it}e^{is} = q(t)q(s).$$

Man nennt $\mathbb{S}_1$ die **Kreisgruppe**.

Bemerkung 8.14

Für $s, t \in \mathbb{R}$ ist $e^{is} = e^{it}$ genau dann, wenn $1 = e^{i(s-t)}$, also $s - t \in 2\pi\mathbb{Z}$.

Beispiel 8.15

Für jede irrationale Zahl $\theta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ (z.B. $\theta := \sqrt{2}$) ist die Abbildung

$$\gamma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{S}_1 \times \mathbb{S}_1, \quad t \mapsto (e^{it}, e^{i\theta t})$$

glatt, injektiv und eine Immersion, deren Bild in $\mathbb{S}_1 \times \mathbb{S}_1$ dicht ist aber leeres Inneres hat.

Bemerkung 8.16

Wir werden in diesem Kapitel auch zeigen, dass $\mathbb{S}_1 \times \mathbb{S}_1$ diffeomorph ist zum Torus $\mathbb{T} \subseteq \mathbb{R}^3$.

Das Beispiel 8.15 ermöglicht also, die reelle Gerade dicht auf den Torus zu wickeln ("dichte Wickelung").

Definition 8.17

In Analogie $\mathbb{S}_1 \times \mathbb{S}_1$ nennt man für $n \in \mathbb{N}$ das n-fache kartesische Produkt $(\mathbb{S}_1)^n = \mathbb{S}_1 \times \cdots \times \mathbb{S}_1$ einen ***n*-Torus**. Dieser ist eine n-dimensionale glatte Mannigfaltigkeit und eine Liegruppe mit den komponentenweisen Operationen.

Begründung zu Beispiel 8.15. Mit $q\colon \mathbb{R} \to \mathbb{S}_1$ wie oben ist $\gamma(t) = (q(t), q(\theta t))$, also γ ein Gruppenhomomorphismus und glatt. Da $\mathrm{pr}_1 \circ \gamma = q$ eine Immersion ist, ist nach Lemma 8.5 (b) auch γ eine Immersion. Ist $\gamma(t) = (1,1)$, so ist $t \in 2\pi\mathbb{Z}$ und $\theta t \in 2\pi\mathbb{Z}$, es gibt also $n, m \in \mathbb{Z}$ mit $t = 2\pi n$ und $\theta t = 2\pi m$. Wäre $t \neq 0$, so wäre auch $n \neq 0$ und somit

$$\theta = \frac{2\pi m}{t} = \frac{2\pi m}{2\pi n} = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q},$$

Widerspruch. Also ist $t = 0$, folglich der Kern $\ker(\gamma) = \{0\}$ die triviale Untergruppe von $(\mathbb{R}, +)$ und somit γ injektiv. Nach dem Satz von Sard (Satz 8.10) ist $\gamma(\mathbb{R})^o = \emptyset$, insbesondere also γ nicht surjektiv. Zum Nachweis der Dichtheit des Bildes nutzen wir:

Lemma 8.18

Für jede irrationale Zahl θ ist die Abbildung

$$\eta\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{S}_1, \quad n \mapsto e^{n2\pi i\theta} = (e^{2\pi i\theta})^n$$

ein Gruppenhomomorphismus von $(\mathbb{Z}, +)$ nach $(\mathbb{S}_1, \cdot)$, dessen Bild in $\mathbb{S}_1$ dicht ist.

Beweis. Ist $\eta(n) = 1$, so ist $n2\pi\theta = 2\pi m$ mit einem $m \in \mathbb{Z}$. Wäre $n \neq 0$, so wäre $\theta = m/n \in \mathbb{Q}$, Widerspruch. Also ist $\ker(\eta) = \{0\}$ und η somit injektiv. Da $\mathbb{S}_1$ eine abgeschlossene, beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}^2$ und somit kompakt ist, besitzt die Folge $(\eta(n))_{n \in \mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge $(\eta(n_k))_{k \in \mathbb{N}}$. Sei $z \in \mathbb{S}_1$ der Limes. Zu $\varepsilon > 0$ gibt es ein $k_0 \in \mathbb{N}$ derart, dass $|\eta(n_k) - z| < \varepsilon/2$ für alle $k \geq k_0$. Wählen wir $\ell > k \geq k_0$, so ist also

$$\varepsilon > |\eta(n_\ell) - \eta(n_k)| = |\eta(n_\ell)|\,|1 - \eta(n_\ell)^{-1}\eta(n_k)| = |1 - \eta(n_k - n_\ell)| = |1 - w|$$

mit $1 \neq w := \eta(n_k - n_\ell) \in \eta(\mathbb{Z})$. Wir schreiben $w = e^{i\phi}$ mit $0 \neq \phi \in [-\pi, \pi]$. Sei $\phi > 0$; der Fall $\phi < 0$ ist analog. Es gibt ein kleinstes $n \in \mathbb{N}$ mit $n\phi \geq 2\pi$. Dann überdecken die Kreisbögen

$$B_j := \{e^{it} \colon t \in [j\phi, (j+1)\phi]\}$$

für $j \in \{0, 1, \ldots, n\}$ den Kreis $\mathbb{S}_1$, da die Intervalle $I_j = [j\phi, (j+1)\phi]$ das Intervall $[0, 2\pi]$ überdecken. Da I_j Länge $\leq \pi$ hat, hat jeder Punkt in B_j höchstens den Abstand

$$|e^{i(j+1)\phi} - e^{ij\phi}| = |e^{i\phi} - 1| = |w - 1| < \varepsilon$$

vom Punkt $e^{ij\phi} = w^j \in \eta(\mathbb{Z})$. Also ist $\eta(\mathbb{Z})$ dicht in $\mathbb{S}_1$. $\square$

Dichtheit des Bildes in Beispiel 8.15. Gegeben $(z, w) \in \mathbb{S}_1 \times \mathbb{S}_1$ existiert wegen der Surjektivität von q ein $t \in \mathbb{R}$ derart, dass

$$q(t) = z.$$

Nach Lemma 8.18 gibt es eine Folge $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{Z}$ derart, dass

$$q(2\pi\theta n_k) \to \frac{w}{q(\theta t)}$$

für $k \to \infty$ und somit

$$q(\theta(t + 2\pi n_k)) = q(\theta t)q(2\pi\theta n_k) \to q(\theta(t))\,\frac{w}{q(\theta(t))} = w.$$

Da $q(t + 2\pi n_k) = q(t) = z$ für jedes $k \in \mathbb{N}$, folgt

$$\gamma(t + 2\pi n_k) = (q(t + 2\pi n_k), q(\theta(t + 2\pi n_k))) \to (z, w)$$

für $k \to \infty$, so dass also (z, w) im Abschluss von $\gamma(\mathbb{R})$ enthalten ist. Da (z, w) beliebig war, ist $\overline{\gamma(\mathbb{R})} = \mathbb{S}_1 \times \mathbb{S}_1$ gezeigt. $\square$

Sei $R > 0$ und $r \in]0, R[$. Wir betrachten den Kreis

$$K := \{(R+r\cos(\beta), 0, r\sin(\beta)) \colon \beta \in \mathbb{R}\} = \{(x, 0, z) \colon (x-R)^2+z^2 = r^2\}$$

in der x-z-Ebene in $\mathbb{R}^3$ und die entsprechende Rotationsfläche

$$\mathbb{T} := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon (\sqrt{x^2 + y^2} - R)^2 + z^2 = r^2\},$$

welche ein Torus in $\mathbb{R}^3$ ist. Diese ist eine zweidimensionale Untermannigfaltigkeit der offenen Teilmenge

$$U := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon (x, y) \neq 0 \text{ und } (\sqrt{x^2 + y^2} - R)^2 + z^2 > 0\}$$

von $\mathbb{R}^3$ (also auch von $\mathbb{R}^3$), da

$$\mathbb{T} = f^{-1}(\{r^2\})$$

eine Niveaumenge ist für die glatte Abbildung $f \colon U \to \mathbb{R}$, $(x, y, z) \mapsto (\sqrt{x^2 + y^2} - R)^2 + z^2$; diese ist eine Submersion, da ihr Gradient

$$\nabla f(x, y, z) = ((1 - R/\sqrt{x^2 + y^2})2x, (1 + R/\sqrt{x^2 + y^2})2y, 2z)$$

für kein $(x, y, z) \in U$ verschwindet.

Die glatte Abbildung

$$\Phi\colon \mathbb{R} \to K, \quad \beta \mapsto \begin{pmatrix} R + r\cos(\beta) \\ 0 \\ r\sin(\beta) \end{pmatrix}$$

ist surjektiv und $\Phi(\beta_1) = \Phi(\beta_2)$ genau dann, wenn $\beta_2 - \beta_1 \in 2\pi\mathbb{Z}$. Für $\alpha \in \mathbb{R}$ sei $D(\alpha) \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ die Drehmatrix, die um den Winkel α um die z-Achse dreht, also

$$D(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Für Spaltenvektoren $v_1, v_2 \in \,]0,\infty[\, \times \{0\} \times \mathbb{R}$ ist $D(\alpha_1)v_1 = D(\alpha_2)v_2$ genau dann, wenn $v_1 = v_2$ und $\alpha_2 - \alpha_1 \in 2\pi\mathbb{Z}$. Die Abbildung

$$\Psi\colon \mathbb{S}_1 \times \mathbb{S}_1 \to \mathbb{T}, \quad (e^{i\alpha}, e^{i\beta}) \mapsto D(\alpha)\Phi(\beta)$$

ist also wohldefiniert. Weiter ist sie bijektiv.

Satz 8.19

$\Psi\colon \mathbb{S}_1 \times \mathbb{S}_1 \to \mathbb{T}$ ist ein C^∞-Diffeomorphismus.

Beweis. Die Abbildung $q\colon \mathbb{R} \to \mathbb{S}_1$, $t \mapsto e^{it}$ ist surjektiv und étale, also eine surjektive Submersion. Somit ist auch

$$q \times q\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{S}_1 \times \mathbb{S}_1, \quad (\alpha, \beta) \mapsto (e^{i\alpha}, e^{i\beta})$$

eine surjektive Submersion (siehe Lemma 7.3 (a)). Da $h := \Psi \circ (q \times q)\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $(\alpha, \beta) \mapsto D(\alpha)\Phi(\beta)$ glatt ist, ist nach Folgerung 5.2 auch Ψ eine glatte Abbildung. Wir zeigen, dass h als Abbildung nach $\mathbb{T}$ eine Submersion ist; nach Lemma 8.5 (a) ist dann auch Ψ eine Submersion und somit étale, da $\dim(\mathbb{S}_1 \times \mathbb{S}_1) = 2 = \dim(\mathbb{T})$. Es genügt zu zeigen, dass $h'(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^{3\times 2}$ für alle (α, β) den vollen Rang 2 hat. Nun ist

$$\frac{\partial h}{\partial \beta}(\alpha, \beta) = D(\alpha)\Phi'(\beta) = D(\alpha) \begin{pmatrix} -r\sin(\beta) \\ 0 \\ r\cos(\beta) \end{pmatrix}.$$

Da $D(\alpha + t) = D(\alpha)D(t)$, ist $D'(\alpha) = D(\alpha)D'(0)$ mit

$$D'(0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und somit

$$\frac{\partial h}{\partial \alpha}(\alpha,\beta) = D(\alpha)D'(0)\Phi(\beta) = D(\alpha)\begin{pmatrix} 0 \\ R + r\cos(\alpha) \\ 0 \end{pmatrix};$$

dieser Vektor und $\frac{\partial h}{\partial \beta}(\alpha,\beta)$ sind linear unabhängig, da die zwei Vektoren

$$\begin{pmatrix} -r\sin(\beta) \\ 0 \\ r\cos(\beta) \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ R + r\cos(\alpha) \\ 0 \end{pmatrix}$$

es sind, auf die $D(\alpha)$ jeweils angewandt wird. $\square$

Definition 9.1

Sei G eine Gruppe und X eine Menge. Eine Abbildung

$$\sigma\colon G \times X \to X, \quad (g, x) \mapsto g.x$$

heißt **Linkswirkung** von G auf X (oder kurz: **Wirkung**), wenn gilt:

W1 $e.x = x$ für alle $x \in X$;

W2 Für alle $x \in X$ und $g, h \in G$ ist $g.(h.x) = (gh).x$.

Das Paar (X, σ) nennt man dann eine G-**Menge**.

Man sagt auch, G wirkt (oder operiert) auf X via σ.

Gegeben $x \in X$ nennt man

$$G_x := \{g \in G \colon g.x = x\}$$

die **Standgruppe** von x und $G.x := \{g.x \colon g \in G\}$ die **Bahn** von x.

Die Abbildung

$$G \to X, \quad g \mapsto g.x$$

heißt **Bahnabbildung**. Existiert ein $x \in X$ mit $G.x = X$, so nennt man die Wirkung **transitiv**.

Wir wiederholen eine elementare Tatsache.

Satz 9.2

Ist (X, σ) eine G-Menge und $x \in X$, so gilt:

(a) G_x ist eine Untergruppe von G.

(b) Die Abbildung $f\colon G/G_x \to G.x$, $gG_x \mapsto g.x$ ist wohldefiniert und eine Bijektion.

Beweis. (a) Wegen $e.x = x$ ist $e \in G_x$. Sind $g, h \in G_x$, so ist $(gh).x = g.(h.x) = g.x = x$, also $gh \in G_x$. Ist $g \in G_x$, so ist $g^{-1}.x = g^{-1}.(g.x) = (g^{-1}g).x = e.x = x$, also $g^{-1} \in G_x$.

(b) Ist $gG_x = hG_x$, so ist $h = gk$ mit einem $k \in G_x$ und somit $h.x = (gk).x = g.(k.x) = g.x$, somit f wohldefiniert.

Ist $f(gG_x) = f(hG_x)$, so ist $g.x = h.x$, also $(h^{-1}g).x = h^{-1}.(g.x) = h^{-1}.(h.x) = (h^{-1}h).x = e.x = x$, somit $h^{-1}g \in G_x$ und folglich $gG_x = hG_x$. Die Abbildung f ist also injektiv. Gegeben $y \in G.x$ existiert ein $g \in G$ mit $y = g.x$. Dann ist $y = f(gG_x)$, also f surjektiv. $\square$

Beispiel 9.3

Jede Gruppe G ist eine G-Menge mit der Gruppenmultiplikation $G \times G \to G$, $(g, x) \mapsto gx$ als Wirkung. Allgemeiner: Ist $H \subseteq G$ eine Untergruppe, so ist G/H eine G-Menge mit der Wirkung

$$G \times G/H \to G/H, \quad (g, xH) \mapsto gxH.$$

Konjugationswirkung: Auch $G \times G \to G$, $(g, x) \mapsto gxg^{-1}$ ist für jede Gruppe G eine Wirkung.

Bemerkung 9.4

Es sei (X, σ) eine G-Menge und $x \in X$. Ist G eine Liegruppe und G_x eine Untermannigfaltigkeit von G, so können wir G/G_x die glatte Mannigfaltigkeitsstruktur geben, welche die kanonische

Abbildung $q\colon G \to G/G_x$, $g \mapsto gG_x$ zu einer Submersion macht (siehe Folgerung 7.2). Da die Abbildung

$$f\colon G/G_x \to G.x, \quad gG_x \mapsto g.x$$

eine Bijektion ist, können wir der Bahn $G.x$ die glatte Mannigfaltigkeitsstruktur geben, welche f zu einem C^∞-Diffeomorphismus (und die Bahnabbildung eine Submersion) macht. Ist die Wirkung zudem transitiv, ist also $X = G.x$ eine glatte Mannigfaltigkeit.

Die Wirkung $\sigma\colon G \times X \to X$ wird dann glatt, denn $\sigma \circ (\mathrm{id}_G \times f)$ ist glatt; letzteres gilt, da $\mathrm{id}_G \times q$ eine surjektive Submersion ist und

$$\sigma \circ (\mathrm{id}_G \times f) \circ (\mathrm{id}_G \times q)\colon G \times G \to X, \quad (g,h) \mapsto f(q(gh))$$

glatt ist.

Ist X bereits eine glatte Mannigfaltigkeit und $\sigma\colon G \times X \to X$ glatt, so ist die Bahnabbildung $G \to G.x \subseteq X$ glatt nach X und somit nach Folgerung 5.2 auch $f\colon G/G_x \to G.x \subseteq X$ glatt, da $f \circ q$ die glatte Bahnabbildung ist. Im Falle einer transitiven Wirkung ist also

$$f\colon G/G_x \to X$$

eine Bijektion und glatt.

Bemerkung 9.5

Sei $\sigma\colon G \times X \to X$ transitiv und glatt. Wir werden später sehen, dass f immer eine Immersion ist. Hat G (und somit G/G_x) eine abzählbare Basis der Topologie, so ist $\dim(G/G_x) \geq \dim(X)$ nach dem Satz von Sard, folglich $\dim(G/G_x) = \dim(X)$ und f ein C^∞-Diffeomorphismus.

Wir können die gegebene glatte Mannigfaltigkeit X dann also mit G/G_x identifizieren.

Beispiel: Graßmann-Mannigfaltigkeiten

Für $n \in \mathbb{N}$ und $r \in \{0, 1, \ldots, n\}$ sei $\mathrm{Gr}_{r,n}(\mathbb{R})$ die Menge aller r-dimensionalen Untervektorräume $F \subseteq \mathbb{R}^n$. Triviale Fälle vermeidend sei $0 < r < n$. Beachten Sie, dass die orthogonale Gruppe $\mathrm{O}(n) := \{A \in \mathbb{R}^{n\times n}\colon A^T A = \mathbf{1}\}$ auf $\mathrm{Gr}_{r,n}(\mathbb{R})$ operiert via

$$A.F := \{Aw \colon w \in F\}$$

für $A \in \mathrm{O}(n)$, $F \in \mathrm{Gr}_{r,n}(\mathbb{R})$. Die orthogonale Gruppe ist eine Untermannigfaltigkeit von $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, also eine Liegruppe, nach Aufgabenblatt 5. Die Wirkung ist transitiv, denn ist $F \in \mathrm{Gr}_{r,n}(\mathbb{R})$, so können wir eine Orthonormalbasis $v_1, \ldots, v_r$ von F wählen und diese zu einer Orthonormalbasis $v_1, \ldots, v_n$ von $\mathbb{R}^n$ ergänzen. Die Matrix A mit den Spalten $v_1, \ldots, v_n$ ist dann in $\mathrm{O}(n)$ und es ist

$$A.(\mathbb{R}^r \times \{0\}) = F.$$

Die Standgruppe $\mathrm{O}(n)_x$ von $x := \mathbb{R}^r \times \{0\} \subseteq \mathbb{R}^n$ besteht aus den Blockdiagonalmatrizen der Form

$$\mathrm{diag}(B, C)$$

mit $B \in \mathrm{O}(r)$ und $C \in \mathrm{O}(n-r)$, wie wir sogleich begründen; diese ist eine zu $\mathrm{O}(r) \times \mathrm{O}(n-r)$ diffeomorphe Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^{n \times n}$ und somit auch von $\mathrm{O}(n)$ (siehe Lemma 9.7).

Satz 9.6

$\mathrm{Gr}_{r,n}(\mathbb{R})$ kann so zu einer glatten Mannigfaltigkeit gemacht werden, dass die Bahnabbildung

$$\mathrm{O}(n) \to \mathrm{Gr}_{r,n}(\mathbb{R}), \quad A \mapsto A.(\mathbb{R}^r \times \{0\})$$

zu einer Submersion wird.

Dann ist $\mathrm{Gr}_{r,n}(\mathbb{R})$ diffeomorph zu $\mathrm{O}(n)/\,\mathrm{O}(n)_x = \mathrm{O}(n)/(\mathrm{O}(r) \times \mathrm{O}(n-r))$.

Zum Beweis haben wir noch die Gestalt der Standgruppe zu begründen. Offenbar enthält diese die beschriebenen Blockmatrizen. Ist $A \in \mathrm{O}(n)_x$, so schreiben wir A als Blockmatrix

$$A = \begin{pmatrix} B & U \\ L & D \end{pmatrix}$$

mit $B \in \mathbb{R}^{r\times r}$. Da $A.x = x$, folgt $L = 0$. Wir zeigen noch, dass $U = 0$ ist und somit $A = \mathrm{diag}(B, D)$; da die Spalten von A eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^n$ bilden, bilden die Spalten von B eine solche für $\mathbb{R}^r$ und diejenigen von D eine für $\mathbb{R}^{n-r}$, so dass also $B \in \mathrm{O}(r)$ und $C \in \mathrm{O}(n-r)$. Da $A^T = A^{-1}$ in der Standgruppe von x ist, lässt A automatisch das orthogonale Komplement $x^\perp = \{0\} \times \mathbb{R}^{n-r}$ bezüglich des Standard-Skalarprodukts $\langle \cdot, \cdot \rangle$ invariant, denn für alle $v \in x$ und $w \in x^\perp$ ist

$$\langle v, Aw \rangle = \langle A^T v, w \rangle = 0$$

wegen $A^T v \in x$, folglich $Aw \in x^\perp$. Also ist $U = 0$. □

Lemma 9.7

Sei $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ und M eine C^k-Mannigfaltigkeit. Dann gilt:

(a) Ist N eine Untermannigfaltigkeit von M und L eine Untermannigfaltigkeit von N, so ist L auch eine Untermannigfaltigkeit von M.

(b) Ist N eine Untermannigfaltigkeit von M und L eine Untermannigfaltigkeit von M mit $L \subseteq N$, so ist L auch eine eine Untermannigfaltigkeit von N.

Beweis. (a) Da die Inklusionsabbildungen $j_N \colon N \to M$ und

$j_L\colon L \to N$ Einbettungen von C^k-Mannigfaltigkeiten sind, ist auch $j_N \circ j_L$ eine Einbettung von C^k-Mannigfaltigkeiten (Bemerkung 4.4 (c)), nach Satz 4.5 also $L = (j_N \circ j_L)(L)$ eine Untermannigfaltigkeit von M.

(b) Die Inklusionsabbildung $j_L\colon L \to M$ ist glatt, also auch $j_L|^N\colon L \to N$. Da $j_L = j_N \circ j_L|^N$ eine Immersion ist, ist auch $j_L|^N$ eine Immersion (Lemma 8.5 (b)). Ebenso muss $j_L|^N$ eine topologische Einbettung sein, da $j_L = j_N \circ j_L|^N$ eine solche ist. Also ist $j_L|^N$ eine Einbettung von C^k-Mannigfaltigkeiten. Nach Satz 4.5 ist also $L = (j_L|^N)(L)$ eine Untermannigfaltigkeit von N. $\square$

Wirkung von $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ auf der komplexen projektiven Geraden $\mathbb{C}P^1$

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) = \det^{-1}(\mathbb{C} \setminus \{0\})$ eine offene Teilmenge von $\mathbb{C}^{n\times n} \cong \mathbb{R}^{2n^2}$ und eine Liegruppe.[3]

Wie im Reellen (Beispiele 1.28 und 2.8) macht man zudem die

[3] Die Glattheit der Multiplikation sieht man wie im Reellen; die Matrixeinträge von A^{-1} sind über $\mathbb{C}$ rationale Funktion in den Matrixeinträgen a_{jk} von A, ihr Real- und Imaginärteil also reelle rationale Funktionen von $\mathrm{Re}(a_{jk})$ und $\mathrm{Im}(a_{jk})$ und somit glatt.

komplexe projektive Gerade $\mathbb{C}P^1$ aller eindimensionalen komplexen Untervektorräume von $\mathbb{C}^2$ zu einer glatten Mannigfaltigkeit. Die Topologie auf $\mathbb{C}P^1$ ist final bezüglich den Abbildungen

$$f_1\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}P^1, \quad z \mapsto \mathbb{C}(1, z)$$

und

$$f_2\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}P^1, \quad z \mapsto \mathbb{C}(z, 1),$$

deren Bilder $U_1 := \{\mathbb{C}(v_1, v_2)\colon v_1 \neq 0\}$ bzw.
$U_2 := \{\mathbb{C}(v_1, v_2)\colon v_2 \neq 0\}$ offen sind und die sich zu Homöomorphismen auf das Bild koeinschränken, deren Inverse

$$\phi_j\colon U_j \to \mathbb{C} \quad \text{für } j \in \{1, 2\}$$

Karten sind und einen C^∞-Atlas bilden, da die Kartenwechsel komplexe rationale Funktionen und somit glatt sind. Mit dem zugehörigen maximalen C^∞-Atlas ist $\mathbb{C}P^1$ also eine 2-dimensionale glatte Mannigfaltigkeit.[4] Die surjektive Abbildung

[4] Da die Kartenwechsel holomorph sind, könnte man $\mathbb{C}P^1$ auch als komplex 1-dimensionale komplexe Mannigfaltigkeit auffassen, eine sogenannte "Riemannsche Fläche".

$$q\colon \mathbb{C}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{C}P^1, \quad v \mapsto \mathbb{C}v$$

ist glatt auf der offenen Teilmenge W_1 aller $v = (v_1, v_2)$ mit $v_1 \neq 0$. Denn $q(v) \in U_1$ und wegen

$$q(v) = \mathbb{C}(v_1, v_2) = \mathbb{C}v_1(1, v_2/v_1) = \mathbb{C}(1, v_2/v_1) = \phi_1^{-1}(v_2/v_1)$$

ist $\phi_1(q(v)) = v_1/v_2$ glatt in (v_1, v_2). Schreiben wir $v_1 = x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$, so sind

$$\frac{\partial}{\partial x}(\phi_1 \circ q)(v_1, v_2) = 1/v_1$$

und $\frac{\partial}{\partial y}(\phi_1 \circ q)(v_1, v_2) = i/v_1$ über $\mathbb{R}$ linear unabhängig, so dass also $(\phi_1 \circ q)'(v)$ den vollen Rang 2 besitzt und somit $q|_{W_1}$ eine Submersion ist. Analog ist q auf der offenen Menge aller $v = (v_1, v_2)$ mit $v_2 \neq 0$ glatt und eine Submersion und somit ist q eine surjektive Submersion. Die Wirkung

$$\sigma\colon\ \mathrm{GL}_2(\mathbb{C}) \times (\mathbb{C}^2 \setminus \{(0,0)\}) \to \mathbb{C}^2 \setminus \{(0,0)\}, \quad (A, w) \mapsto Aw$$

ist glatt (als Einschränkung einer bilinearen Abbildung); hierbei wird w als Spaltenvektor betrachtet. Die Abbildung

$$\tau\colon \mathrm{GL}_2(\mathbb{C}) \times \mathbb{C}P^1 \to \mathbb{C}P^1, \quad (A, \mathbb{C}w) \mapsto A(\mathbb{C}w) = \mathbb{C}Aw$$

ist wohldefiniert und offenbar ebenfalls eine Wirkung. Wir kürzen $G := \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ ab. Da $\mathrm{id}_G \times q$ eine surjektive Submersion ist und

$$\tau \circ (\mathrm{id}_G \times q) = q \circ \sigma$$

glatt ist, ist τ glatt. Man nennt $\widehat{A} := \tau(A, \cdot)\colon \mathbb{C}P^1 \to \mathbb{C}P^1$ die zu $A \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ gehörige **gebrochen lineare Abbildung**. Beachte, dass

$$\mathbb{C}P^1 = f_2(\mathbb{C}) \cup \{\mathbb{C}(1,0)\}.$$

Bemerkung 9.8

In der komplexen Funktionentheorie identifiziert man gern $\mathbb{C}$ und $f_2(\mathbb{C})$ mittels der Bijektion $f_2\colon \mathbb{C} \to f_2(\mathbb{C})$. Schreibt man $\infty := \mathbb{C}(1,0)$, so ist also

$$\mathbb{C}P^1 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}.$$

Gegeben $z \in \mathbb{C}$ und $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ ist

$A.f_2(z) = \mathbb{C}A(z,1)^T = \mathbb{C}\begin{pmatrix} az+b \\ cz+d \end{pmatrix} \in f_2(\mathbb{C})$ genau dann, wenn $cz + d \neq 0$. In diesem Fall ist $A.f_2(z) = \mathbb{C}(cz+d)(\frac{az+b}{cz+d}, 1) = f_2(\frac{az+b}{cz+d})$, mit der obigen Identifikation also

$$\widehat{A}(z) = \frac{az+b}{cz+d}.$$

Symmetrische Gruppen. Für jede Menge X ist die Menge $S(X)$ aller bijektiven Selbstabbildungen $\phi\colon X \to X$ eine Gruppe mit Komposition als Gruppenverknüpfung, dem Neutralelement id_X und der inversen Abbildung ϕ^{-1} als Inversem von $\phi \in S(X)$.

Satz 9.9

Ist G eine Gruppe und $\sigma\colon G \times X \to X$, $(g,x) \mapsto g.x$ eine Wirkung auf einer Menge X, so gilt:

(a) Für jedes $g \in G$ ist $\widehat{g} := \sigma(g,\cdot)\colon X \to X$ eine Bijektion.

(b) Die Abbildung $G \to S(X)$, $g \mapsto \widehat{g}$ ist ein Gruppen-Homomorphismus.

(c) Schreiben wir $x \sim y$ für $x, y \in X$ genau dann, wenn $y \in G.x$, so ist $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf X. Für jedes $x \in X$ ist die Äquivalenzklasse $\{y \in X : x \sim y\}$ genau die Bahn $G.x$ von x.

Beweis. (a) und (b): Für das Neutralelement $e \in G$ gilt nach W1 $\widehat{e}(x) = e.x = x$ für alle $x \in X$; also ist $\widehat{e} = \mathrm{id}_X$. Nach W2 ist für alle $g, h \in G$ und $x \in X$

$$(\widehat{g} \circ \widehat{h})(x) = \widehat{g}(\widehat{h}(x)) = g.(h.x) = (gh).x = \widehat{gh}(x),$$

also $\widehat{g} \circ \widehat{h} = \widehat{gh}$. Insbesondere ist $\widehat{g^{-1}} \circ \widehat{g} = \widehat{g^{-1}g} = \widehat{e} = \mathrm{id}_X$ und analog $\widehat{g} \circ \widehat{g^{-1}} = \mathrm{id}_X$, also $\widehat{g}$ eine invertierbare Abbildung mit Umkehrfunktion $\widehat{g}^{-1} = \widehat{g^{-1}}$.

(c) Da $x = e.x$, ist $x \sim x$. Ist $x \sim y$ und $y \sim z$, so existieren $g, h \in G$ mit $y = g.x$ und $z = h.y$. Dann ist also $z = h.(g.x) = (hg).x$, somit $x \sim z$. Ist $x \sim y$, so gibt es ein $g \in G$ mit $y = g.x$. Dann ist $g^{-1}.y = g^{-1}.(g.x) = (g^{-1}g).x = x$, also auch $y \sim x$. Somit ist $\sim$ eine Äquivalenzrelation. Per Definition ist $x \sim y$ genau dann, wenn $y \in G.x$. Die Äquivalenzklasse von x ist also $\{y \in X : x \sim y\} = G.x$. $\square$

Jede orthogonale Matrix $A \in \mathrm{O}(2)$ hat Determinante 1 oder -1. Da die einpunktige Menge $\{1\}$ in $\{1, -1\} \subseteq \mathbb{R}$ relativ offen ist, ist

$$\mathrm{SO}(2) := \{A \in \mathrm{O}(2) \colon \det(A) = 1\} = (\det|_{\mathrm{O}(2)}^{\{1,-1\}})^{-1}(\{1\})$$

eine offene Teilmenge von $\mathrm{O}(2)$ und somit eine Liegruppe.

Transitive Wirkung von $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ auf der oberen Halbebene. Sei

$$\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} \colon\ \mathrm{Re}(z) > 0\}.$$

Satz 9.10

Für $A \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ bildet die zugehörige gebrochen lineare Abbildung $\widehat{A}$ die obere Halbebene $\mathbb{H}$ auf sich ab, wir erhalten also eine glatte Wirkung

$$\sigma \colon\ \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \times \mathbb{H} \to \mathbb{H}, \quad (A, z) \mapsto \widehat{A}(z) =: A.z.$$

Die Wirkung ist transitiv. Die komplexe Einheit i hat Standgruppe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})_i = \mathrm{SO}(2)$; die Abbildung $f \colon\ \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})/\mathrm{SO}(2) \to \mathbb{H}$, $A\,\mathrm{SO}(2) \mapsto A.i$ ist ein C^∞-Diffeomorphismus.

Beweis. Sei $z \in \mathbb{H}$ und $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$. Ist $c = 0$, so ist $d \neq 0$ wegen $1 = \det(A) = ad - bc$ und somit $cz + d = d \neq 0$. Ist $c \neq 0$, so ist $\mathrm{Im}(cz + d) = c\,\mathrm{Im}(z) \neq 0$, also ebenfalls $cz + d \neq 0$. Also ist stets

$$\widehat{A}(z) = \frac{az + b}{cz + d}.$$

Erweitern mit dem komplex Konjugierten des Nenners liefert

$$\widehat{A}(z) = \frac{(az+b)(c\overline{z}+d)}{(cz+d)(c\overline{z}+d)} = \frac{ac|z|^2 + adz + bc\overline{z} + bd}{|cz+d|^2}$$

mit Imaginärteil

$$\frac{ad\,\mathrm{Im}(z) - bc\,\mathrm{Im}(z)}{|cz+d|^2} = \frac{\overbrace{(ad-bc)}^{=\det(A)=1}\mathrm{Im}(z)}{|cz+d|^2} = \frac{\mathrm{Im}(z)}{|cz+d|^2} > 0;$$

also ist $\widehat{A}(z) \in \mathbb{H}$. Wir erhalten somit eine Wirkung

$$\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \times \mathbb{H} \to \mathbb{H}, \quad (A, z) \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$$

für A wie oben. Diese ist glatt, da sie eine Einschränkung der glatten Wirkung $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C}) \times \mathbb{C}P^1 \to \mathbb{C}P^1$ ist. Für A wie oben gilt genau dann $\widehat{A}(i) = i$, wenn $\frac{ai+b}{ci+d} = i$, was zu

$$ai + b = di - c$$

äquivalent ist, also zu $a = d$ und $b = -c$. Die Standgruppe der imaginären Einheit i ist also

$$\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})_i = \left\{ A = \begin{pmatrix} a & -c \\ c & a \end{pmatrix} : a, c \in \mathbb{R} \text{ und } 1 = \det(A) = a^2 + c^2 \right\} = \mathrm{SO}(2).$$

Sei $G := \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$. Für jedes $z \in \mathbb{H}$ enthält die Bahn $G.z$ die horizontale Gerade durch z, denn für jedes $b \in \mathbb{R}$ ist

$$\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.z = \frac{z+b}{1} = z + b.$$

Wir behaupten, dass $]0,\infty[\, i \subseteq G.i$. Nach dem Vorigen ist dann $x + iy \in G.iy = G.i$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und $y \in\,]0,\infty[$, also $G.i = \mathbb{H}$. Zum Beweis der Behauptung sei $y > 0$. Für $t \in \mathbb{R}$ ist

$$\begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}.i = \frac{e^t i}{e^{-t}} = e^{2t} i,$$

was gleich iy ist, wenn wir $t := \frac{1}{2}\ln(y)$ wählen. Die Wirkung von $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ auf $\mathbb{H}$ ist also transitiv.

Da $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ dreidimensional ist und $\mathrm{SO}(2)$ die Dimension 1 hat, hat der homogene Raum $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})/\mathrm{SO}(2)$ die Dimension 2. Sei

$$q\colon \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \to \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})/\mathrm{SO}(2), \;\; A \mapsto A\,\mathrm{SO}(2)$$

die kanonische Submersion. Wir zeigen nun, dass die Bahnabbildung

$$\sigma^i\colon \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{H}, \quad A \mapsto A.i$$

eine Submersion ist. Für die bijektive Abbildung $f\colon \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})/\mathrm{SO}(2) \to \mathbb{H}$, $A\,\mathrm{SO}(2) \mapsto A.i$ ist dann $f \circ q = \sigma^i$ eine Submersion, nach Folgerung 5.2 und Lemma 8.5 (e) also f eine Submersion. Da Definitions- und Wertebereich die gleiche Dimension 2 haben, ist f étale, also ein lokaler Diffeomorphismus und somit ein Diffeomorphismus. Gegeben $A \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ sei $z := A.i$. Wir betrachten die glatten Kurven $\gamma, \eta\colon \mathbb{R} \to \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ mit

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} A \quad \text{und} \quad \eta(t) = \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix} A.$$

Mit der globalen Karte $\phi := \mathrm{id}_{\mathbb{H}}$ können wir h_ϕ betrachten wie in Kapitel 3. Es genügt zu zeigen, dass die Vektoren

$$h_\phi(T_A\sigma^i([\gamma])) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(\gamma(t).i) \quad \text{und} \quad h_\phi(T_A\sigma^i([\eta])) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(\eta(t).i)$$

im reellen Vektorraum $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ linear unabhängig sind. Der erste ist

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} .z = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(z+t) = 1,$$

also reell und von 0 verschieden. Der zweite ist

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix} .z = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \frac{e^t z}{e^{-t}} = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(e^{2t}z) = 2z;$$

dieser Vektor hat nicht verschwindenden Imaginärteil und ist somit linear unabhängig vom ersten. $\square$

Wir stellen ein Lemma über Untermannigfaltigkeiten bereit sowie zwei über Produktmannigfaltigkeiten und gehen dann kurz auf topologische Grundlagen ein, nämlich Quotiententopologien, Quotientenabbildungen und offene Abbildungen. Diese Grundlagen werden in §11 im Beweis des Satzes von Godement benutzt.

Im ganzen Kapitel sei $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.

Lemma 10.1

Es sei M eine C^k-Mannigfaltigkeit, $x \in M$ und F ein Untervektorraum von $T_x M$. Dann existiert eine Untermannigfaltigkeit N von M mit $x \in N$ und $T_x N = F$.

Beweis. Sei $\phi\colon U_\phi \to V_\phi \subseteq \mathbb{R}^m$ eine Karte von M um x mit $\phi(x) = 0$ und $h_\phi\colon T_x M \to \mathbb{R}^m$ der zugehörige Isomorphismus aus Kapitel 3. Ist n die Dimension von F, so ist $h_\phi(F)$ ein n-dimensionaler Untervektorraum von $\mathbb{R}^m$ und wir finden einen Vektorraum-Automorphismus $\alpha\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ derart, dass $\alpha(h_\phi(F)) = \mathbb{R}^n \times \{0\}$. Dann ist auch $\alpha \circ \phi\colon U_\phi \to \alpha(V_\phi)$ eine

Karte für M und $h_{\alpha\circ\phi} = \alpha \circ h_\phi$, wir dürfen daher $h_\phi(F) = \mathbb{R}^n \times \{0\}$ annehmen. Dann ist

$$N := \phi^{-1}((\mathbb{R}^n \times \{0\}) \cap V_\phi)$$

eine n-dimensionale Untermannigfaltigkeit von M und ϕ eine an N angepasste Karte. Ist $j_N \colon N \to M$ die Inklusionsabbildung, so ist

$$\phi \circ j_N = i \circ \phi_N$$

mit $i \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n}$, $y \mapsto (y, 0)$ und der zu ϕ gehörigen Karte ϕ_N, folglich

$$h_\phi \circ T_x(j_N) = i \circ h_{\phi_N}$$

mit Bild $\mathbb{R}^n \times \{0\} = h_\phi(F)$. Da $h_\phi \colon T_xM \to \mathbb{R}^m$ ein Isomorphismus von Vektorräumen ist, folgt $\mathrm{im}(T_x(j_N)) = F$; die linke Seite identifizieren wir mit T_xN. $\square$

Lemma 10.2

Gegeben C^k-Mannigfaltigkeiten M_1 und M_2 sei $\mathrm{pr}_1 \colon M_1 \times M_2 \to M_1$ die Projektion auf die erste Komponente und $\mathrm{pr}_2 \colon M_1 \times M_2$ die Projektion auf die zweite. Für jedes $x = (x_1, x_2) \in M_1 \times M_2$ ist dann

$$\Phi := (T_x \operatorname{pr}_1, T_x \operatorname{pr}_2)\colon T_x(M_1 \times M_2) \to T_{x_1}M_1 \times T_{x_2}M_2$$

ein Isomorphismus von Vektorräumen. Die Umkehrabbildung sendet $(v_1, v_2) \in T_{x_1}M_1 \times T_{x_2}M_2$ auf $T_{x_1}i_{x_2}(v_1) + T_{x_2}j_{x_1}(v_2) =: \Psi(v_1, v_2)$ unter Benutzung der C^k-Abbildungen $i_{x_2}\colon M_1 \to M_1 \times M_2$, $y \mapsto (y, x_2)$ und $j_{x_1}\colon M_2 \to M_1 \times M_2$, $y \mapsto (x_1, y)$.

Beweis. Φ und Ψ sind lineare Abbildungen zwischen $(m_1 + m_2)$-dimensionalen Vektorräumen mit $m_1 := \dim(M_1)$ und $m_2 := \dim(M_2)$. Es ist

$$(\Phi \circ \Psi)(v_1, v_2) = \Phi(T_{x_1}i_{x_2}(v_1)) + \Phi(T_{x_2}j_{x_1}(v_2)).$$

Der erste Summand ist

$$(T_{x_1}(\overbrace{\operatorname{pr}_1 \circ i_{x_2}}^{=\operatorname{id}_{M_1}})(v_1),\ T_{x_1}(\overbrace{\operatorname{pr}_2 \circ i_{x_2}}^{=c_{x_2}})(v_1)) = (v_1, 0)$$

mit der konstanten Abbildung $c_{x_2}\colon M_1 \to M_2$, $y \mapsto x_2$. Analog sieht man, dass der zweite Summand $(0, v_2)$ ist und somit $(\Phi \circ \Psi)(v_1, v_2) = (v_1, v_2)$, also $\Phi \circ \Psi = \operatorname{id}$ auf $T_{x_1}M_1 \times T_{x_2}M_2$. Es ist also Ψ injektiv und aus Dimensionsgründen somit ein Isomorphismus. Weiter ist $\Phi = \Phi \circ \Psi \circ \Psi^{-1} = \mathrm{id} \circ \Psi^{-1} = \Psi^{-1}$. $\square$

Wir identifizieren $v \in T_x(M_1 \times M_2)$ mit $\Phi(v) \in T_{x_1}M_1 \times T_{x_2}M_2$, etwa in Lemma 10.3, das erst später benötigt wird.

Lemma 10.3

Ist in der Situation von Lemma 10.2 N eine C^k-Mannigfaltigkeit und $f\colon M_1 \times M_2 \to N$ eine C^k-Funktion, so gilt für alle $x = (x_1, x_2) \in M_1 \times M_2$ und alle $(v_1, v_2) \in T_{x_1}M_1 \times T_{x_2}M_2$

$$T_x f(v_1, v_2) = T_{x_1} f^{x_2}(v_1) + T_{x_2} f_{x_1}(v_2)$$

mit $f_{x_1}\colon M_2 \to N$, $y \mapsto f(x_1, y)$ und $f^{x_2}\colon M_1 \to N$, $y \mapsto f(y, x_2)$.

Beweis. Mit Ψ, i_{x_1} und j_{x_2} wie in Lemma 10.2 ist $f_{x_1} = f \circ i_{x_1}$ und $f^{x_2} = f \circ j_{x_2}$, also

$$\begin{aligned} T_x f(\Psi(v_1, v_2)) &= T_x f(T_{x_1} j_{x_2}(v_1)) + T_x f(T_{x_2} i_{x_1}(v_2)) \\ &= T_{x_1}(f \circ j_{x_2})(v_1) + T_{x_2}(f \circ i_{x_1})(v_2) \\ &= T_{x_1} f^{x_2}(v_1) + T_{x_2} f_{x_1}(v_2). \ \square \end{aligned}$$

Offene Abbildungen und Quotientenabbildungen

Definition 10.4

Es sei $(X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum, Y eine Menge und $q\colon X \to Y$ eine surjektive Abbildung. Die finale Topologie $\mathcal{O}_{\text{fin}}$ auf Y bezüglich q wird die **Quotiententopologie** auf Y genannt.

Für jede Teilmenge $V \subseteq Y$ gilt also:

V ist offen in der Quotiententopologie auf Y $\Leftrightarrow$ $q^{-1}(V)$ ist offen in X.

Übergang zu Komplementen zeigt, dass für jede Menge $A \subseteq Y$ gilt:

A ist abgeschlossen in Y mit der Quotiententopologie

$\Leftrightarrow$ $q^{-1}(A)$ ist abgeschlossen in X.

Eine surjektive Abbildung $q\colon X \to Y$ zwischen topologischen Räumen $(X, \mathcal{O})$ und $(Y, \mathcal{T})$ heißt **Quotientenabbildung**, wenn $\mathcal{T}$ die Quotiententopologie ist, also $\mathcal{T} = \mathcal{O}_{\text{fin}}$.

Jede Quotientenabbildung ist stetig: Ist $V \subseteq Y$ offen, so ist V offen in der Quotiententopologie, also $q^{-1}(V)$ offen in X.

Lemma 10.5

Es sei $q\colon X \to Y$ eine Quotientenabbildung zwischen topologischen Räumen und $f\colon Y \to Z$ eine Abbildung in einen topologischen Raum Z. Dann sind äquivalent:

(a) f ist stetig;

(b) $f \circ q$ ist stetig.

Beweis. Da q stetig ist, folgt (b) aus (a). Gilt (b), ist für jede offene Teilmenge U von Z das Urbild

$$(f \circ q)^{-1}(U) = q^{-1}(f^{-1}(U))$$

offen in X, somit $f^{-1}(U)$ offen in der Quotiententopologie auf Y. Also ist f stetig. □

Definition 10.6

Eine Abbildung $f\colon X \to Y$ zwischen topologischen Räumen wird eine **offene Abbildung** genannt, wenn $f(U)$ in Y offen ist für jede offene Teilmenge $U \subseteq X$.

Man beachte, dass $f(U)$ offen ist, wenn $f(U)$ eine Umgebung von $f(x)$ ist für jedes $x \in U$.

Lemma 10.7

Ist eine stetige Abbildung $q\colon X \to Y$ zwischen topologischen Räumen offen und surjektiv, so ist q eine Quotientenabbildung.

Beweis. Sei V eine Teilmenge von Y. Ist V offen in Y, so ist $q^{-1}(V)$ offen in X, da q stetig ist. Sei umgekehrt $q^{-1}(V)$ offen in X. Da q eine offene Abbildung ist, ist dann $q(q^{-1}(V))$ offen in Y. Da q surjektiv ist, ist $V = q(q^{-1}(V))$; nach dem Vorigen ist diese Menge offen in Y. $\square$

Beispiel 10.8

Jede Submersion $f\colon M \to N$ zwischen C^k-Mannigfaltigkeiten ist eine offene Abbildung. Jede surjektive Submersion ist eine Quotientenabbildung.

Ist nämlich $U \subseteq M$ eine offene Teilmenge und $x \in U$, so gibt es nach Satz 5.1 (c) eine offene Umgebung W von $f(x)$ in N und eine

C^k-Abbildung $\sigma\colon W \to M$ derart, dass $\sigma(f(x)) = x$ und $f \circ \sigma = \mathrm{id}_W$. Nach Ersetzen von W durch $\sigma^{-1}(U)$ dürfen wir annehmen, dass $\sigma(W) \subseteq U$. Dann ist

$$f(U) \supseteq f(\sigma(W)) = \mathrm{id}_W(W) = W$$

und somit $f(U)$ eine Umgebung von $f(x)$. Die letzte Aussage folgt mit Lemma 10.7.

Lemma 10.9

Eine Quotientenabbildung $q\colon X \to Y$ zwischen topologischen Räumen ist genau dann eine offene Abbildung, wenn $q^{-1}(q(U))$ offen in X ist für jede offene Teilmenge $U \subseteq X$.

Beweis. Ist q eine offene Abbildung, so für jede offene Teilmenge U von X das Bild $q(U)$ in Y offen, wegen der Stetigkeit von q also $q^{-1}(q(U))$ offen in X. Ist umgekehrt $q^{-1}(q(U))$ offen für jede offene Teilmenge U von X, so ist $q(U)$ offen in Y (also q eine offene Abbildung), da Y die Quotiententopologie trägt. □

Lemma 10.10

Ist $q\colon X \to Y$ eine stetige, surjektive, offene Abbildung zwischen topologischen Räumen, so ist Y genau dann Hausdorffsch, wenn

$$E := \{(x_1, x_2) \in X \times X \colon q(x_1) = q(x_2)\}$$

eine abgeschlossene Teilmenge von $X \times X$ ist.

Beweis. Ist Y Hausdorffsch, so ist die Diagonale $\Delta_Y := \{(y, y) \colon x \in Y\}$ in $Y \times Y$ abgeschlossen. Da die Abbildung $q \times q \colon X \times X \to Y \times Y$, $(x_1, x_2) \mapsto (q(x_1), q(x_2))$ stetig ist, ist

$$E = (q \times q)^{-1}(\Delta_Y)$$

in $X \times X$ abgeschlossen. Ist E abgeschlossen und sind $y_1 \neq y_2$ in Y, so finden wir Elemente $x_j \in X$ mit $q(x_j) = y_j$ für $j \in \{1, 2\}$. Dann ist $(x_1, x_2) \notin E$. Da $(X \times X) \setminus E$ offen ist, finden wir offene x_j-Umgebungen $V_j \subseteq X$ für $j \in \{1, 2\}$ mit

$$V_1 \times V_2 \subseteq (X \times X) \setminus E.$$

Für alle $(v_1, v_2) \in V_1 \times V_2$ ist $q(v_1) \neq q(v_2)$, folglich $q(V_1) \cap q(V_2) = \emptyset$. Da q eine offene Abbildung ist, sind $q(V_1)$ und $q(V_2)$ somit disjunkte offene Umgebungen von y_1 bzw. y_2. $\square$

Es fehlt nur noch: **Beweis von (b)⇒(a) in Satz 7.1.**
Wir setzen (b) voraus, setzen $N := M/R$ und betrachten die kanonische Abbildung $q\colon M \to N$, $x \mapsto [x]$. Wir versehen N mit der Quotiententopologie; diese macht q zu einer Quotientenabbildung.

Schritt 1

q ist eine offene Abbildung und N Hausdorffsch.

Die Abbildung $\mathrm{pr}_1\colon R \to M$, $(x,y) \mapsto x$ ist stetig. Ist $U \subseteq M$ offen, so ist

$$\begin{aligned} q^{-1}(q(U)) &= \{y \in M\colon (\exists x \in U)\ [y] = [x]\} \\ &= \{y \in M\colon (\exists x \in U)\ (x,y) \in R\} = \mathrm{pr}_2((\mathrm{pr}_1)^{-1}(U)) \end{aligned}$$

eine offene Teilmenge von X, denn $(\mathrm{pr}_1)^{-1}(U)$ ist offen wegen der Stetigkeit von pr_1 und pr_2 ist per Voraussetzung eine Submersion, somit nach Beispiel 10.8 eine offene Abbildung. Die Voraussetzungen von Lemma 10.9 sind nachgewiesen, also q eine offene Abbildung. Da per Voraussetzung

$$\{(x,y) \in M \times M \colon q(x) = q(y)\} = R$$

in $M \times M$ abgeschlossen ist, ist N Hausdorffsch (Lemma 10.10).

Schritt 2

Sei $U \subseteq M$ eine offene Teilmenge derart, dass es eine C^k-Mannigfaltigkeitsstruktur auf $q(U)$ gibt, die $q|_U \colon U \to q(U)$ zu einer Submersion macht. Dann gilt:

(a) Ist $V \subseteq U$ eine offene Teilmenge von U, so ist $q(V)$ offen in $q(U)$ und $f|_V \colon V \to q(V)$ ein Submersion.

(b) Es ist $U' := q^{-1}(q(U))$ eine offene Teilmenge von M mit $U \subseteq U'$ und für die obige C^k-Mannigfaltigkeitsstruktur auf $q(U) = q(U')$ ist auch $q|_{U'} \colon U' \to q(U)$ eine Submersion.

Nach Schritt 1 ist $q(V)$ offen in $q(U)$; der Rest von (a) ist klar. Offenbar ist $U \subseteq q^{-1}(q(U)) =: U'$; da $q(U)$ offen und q stetig ist, ist U' offen. Da $q(x) = q(y)$ für alle $(x,y) \in R$, gilt auf der offenen Teilmenge $Y := (U \times U') \cap R$ von R

$$q|_{U'} \circ \mathrm{pr}_2|_Y = q|_U \circ \mathrm{pr}_1|_Y. \tag{1}$$

Die rechte Seite ist eine Submersion als Komposition von Submersionen[5] und insbesondere C^k. Nun ist $\mathrm{pr}_2|_Y\colon Y \to U'$ eine Submersion und surjektiv, da zu jedem $y \in U'$ ein $x \in U$ existiert mit $q(y) = q(x)$, so dass also $(x, y) \in (U \times U') \cap R = Y$. Da die linke Seite von (1) wie die rechte C^k ist, ist $q|_{U'}$ nach Folgerung 5.2 eine C^k-Abbildung. Nach Lemma 8.5 (e) ist $q|_{U'}$ eine Submersion, da $q_{U'} \circ \mathrm{pr}_2|_Y$ es ist.

Schritt 3

Sei $(U_j)_{j\in J}$ eine offene Überdeckung von M derart, dass für jedes $j \in J$ die Abbildung $q|_{U_j}\colon U_j \to q(U_j)$ eine Submersion ist für eine C^k-Mannigfaltigkeitsstruktur auf $q(U_j)$. Dann erlaubt N eine C^k-Mannigfaltigkeitsstruktur, die q zu einer Submersion macht.

Da die C^k-Mannigfaltigkeitsstuktur auf $q(U_j)$ nach Schritt 2 (b) auch $q|_{U'_j}$ zu einer Submersion macht mit $U'_j := q^{-1}(q(U_j))$, dürfen wir nach Ersetzen von U_j durch U'_j annehmen, dass jedes U_j eine

[5] Da $\psi\colon R \to R$, $(x, y) \mapsto (y, x)$ ein Diffeomorphismus ist, ist mit pr_2 auch $\mathrm{pr}_1 = \mathrm{pr}_2 \circ \psi$ eine Submersion.

saturierte Teilmenge von M ist, also $U_j = q^{-1}(q(U_j))$. Für alle $i, j \in J$ ist $V := q(U_i) \cap q(U_j)$ eine offene Teilmenge von $q(U_i)$ und

$$W := q^{-1}(V)$$

sowohl eine offene Teilmenge von $q^{-1}(q(U_i)) = U_i$ als auch von U_j. Die von $q(U_i)$ auf der offenen Teilmenge V induzierte C^k-Mannigfaltigkeitsstruktur macht $q|_W \colon W \to V$ nach Schritt 2 (a) zu einer Submersion. Gleiches gilt für die von $q(U_j)$ auf V induzierte Mannigfaltigkeitsstuktur. Die von $q(U_i)$ und $q(U_j)$ auf V induzierten C^k-Mannigfaltigkeitsstrukturen sind also gleich, nach Folgerung 5.3. Nach Aufgabe P14 (a) gibt es somit eine Mannigfaltigkeitsstruktur auf N, welche $q(U_j)$ für jedes $j \in J$ zu einer offenen Untermannigfaltigkeit macht. Da $q|_{U_j}$ eine C^k-Abbildung in die Untermannigfaltigkeit $q(U_j)$ ist, ist $q|_{U_j}$ auch C^k als Abbildung nach N. Ist $\lambda_j \colon q(U_j) \to N$ die Inklusionsabbildung, so ist $T_{q(x)}\lambda_j$ für jedes $x \in U_j$ ein Isomorphismus. Da $T_x(q|_{U_j}^{q(U_j)})$ surjektiv ist, ist auch $T_x q|_{U_j} = T_{q(x)}\lambda_j \circ T_x q|_{U_j}^{q(U_j)}$ surjektiv, also jedes $q|_{U_j}$ und somit q eine Submersion.

Schritt 4

Für jedes $x_0 \in M$ existiert eine offene x_0-Umgebung $U \subseteq M$, eine Untermannigfaltigkeit $S \subseteq U$ und eine C^k-Abbildung $r\colon U \to S$ derart, dass

$$q(x) = q(r(x)) \quad \text{für alle } x \in U \tag{2}$$

und

$$q(s) \neq q(t) \quad \text{für alle } s \neq t \text{ in } S. \tag{3}$$

Für jedes $x \in U$ gibt es also genau ein $s \in S$ mit $[x] = [s]$, nämlich $s = r(x)$. Insbesondere ist $r(s) = s$ für jedes $s \in S$ und $r(U) = S$.

Wenn das stimmt, können wir den Beweis beenden: Da $r|_S = \mathrm{id}_S$, ist $T_x(r)\colon T_xM \to T_xS$ surjektiv für jedes $x \in S$ und somit $T_y(r)$ surjektiv für y in einer x-Umgebung in U (Aufgabe P13 (b)). Nach Verkleinern der offenen Obermenge U von S dürfen wir also annehmen, dass $r\colon U \to S$ eine Submersion ist. Es ist $q(S) = q(U)$ offen in N und weil $\phi := q|_S\colon S \to q(S)$ eine Bijektion ist, können wir $q(S)$ so zu einer C^k-Mannigfaltigkeit machen, dass ϕ zu einem C^k-Diffeomorphismus wird. Dann ist $q|_U = q|_S \circ r = \phi \circ r$ eine Komposition von Submersionen, also eine Submersion $U \to q(U)$. Da x_0 beliebig war, greift Schritt 3 und beendet den Beweis.

Wir identifizieren $T_{(x_0,x_0)}(M \times M)$ mit $T_{x_0}M \times T_{x_0}M$ mit dem Isomorphismus $(T_{(x_0,x_0)}\operatorname{pr}_1, T_{(x_0,x_0)}\operatorname{pr}_2)$, wie in Lemma 10.2 (mit auf ganz $M \times M$ definierten Projektionen). Setzen wir

$$E := \{v \in T_{x_0}M \colon (v,0) \in T_{(x_0,x_0)}R\},$$

so ist $E \times \{0\} = \ker T_{(x_0,x_0)}\operatorname{pr}_2$ mit $\operatorname{pr}_2 \colon R \to M$ wie zuvor. Sei $m := \dim(M)$, $r := \dim(R)$. Da pr_2 eine Submersion ist, folgt $r = m + \dim(E)$. Sei $F \subseteq T_{x_0}M$ ein zu E komplementärer Untervektorraum, also $T_{x_0}M = E \oplus F$. Dann ist

$$\dim(F) = m - \dim(E) = 2m - r.$$

Nach Lemma 10.1 existiert eine Untermannigfaltigkeit S' von M mit $x_0 \in S'$ und $T_{x_0}S' = F$. Nach Übergang zu einer x_0-Umgebung in S' dürfen wir annehmen, dass $S' = g^{-1}(\{0\})$ für eine Submersion $g \colon V \to \mathbb{R}^{m-\dim(F)} = \mathbb{R}^{r-m}$ auf einer offenen x_0-Umgebung $V \subseteq M$, da $m - (2m - r) = r - m$. Dann ist

$$\Sigma := (S' \times M) \cap R$$

eine m-dimensionale Untermannigfaltigkeit von R, denn $\Sigma = h^{-1}(\{0\})$ mit der Submersion $h := g \circ \operatorname{pr}_1|_{(V \times M) \cap R}$.

Die Tangentialabbildung $T_{(x_0,x_0)}(\mathrm{pr}_2|_\Sigma)\colon T_{(x_0,x_0)}\Sigma \to T_{x_0}M$ ist ein Isomorphismus.

Da Definitions- und Wertebereich m-dimensionale Vektorräume sind, genügt es zu zeigen, dass die Tangentialabbildung injektiv ist, also $\ker(T_{(x_0,x_0)}(\mathrm{pr}_2|_\Sigma)) = \{0\}$. Aber

$$\ker(T_{(x_0,x_0)}\,\mathrm{pr}_2|_\Sigma)) = \underbrace{\ker(T_{(x_0,x_0)}\,\mathrm{pr}_2)}_{=E\times\{0\}} \cap \underbrace{T_{(x_0,x_0)}\Sigma}_{\subseteq T_{(x_0,x_0)}(S'\times M)=F\times T_{x_0}M} = \{0\},$$

da $E \cap F = \{0\}$. Nach Lemma 3.10 gibt es eine offene (x_0, x_0)-Umgebung $\widetilde{U} \subseteq \Sigma$ derart, dass $\mathrm{pr}_2(\widetilde{U})$ offen in M und

$$\mathrm{pr}_2|_{\widetilde{U}}\colon \widetilde{U} \to \mathrm{pr}_2(\widetilde{U})$$

ein C^k-Diffeomorphismus ist. Nach Verkleinern von $\widetilde{U}$ dürfen wir annehmen, dass

$$\widetilde{U} = \Sigma \cap (U_1 \times U_2)$$

mit offenen Umgebungen U_1 und U_2 von x_0 in M. Nach Ersetzen von U_2 durch $U_1 \cap U_2$ dürfen wir annehmen, dass $U_2 \subseteq U_1$. Nach

Ersetzen von U_2 durch $\mathrm{pr}_2(\widetilde{U})$ dürfen wir annehmen, dass $U_2 = \mathrm{pr}_2(\widetilde{U})$. Also ist

$$f := \mathrm{pr}_2|_{(U_1 \times U_2)\cap\Sigma} \colon (U_1 \times U_2) \cap \Sigma \to U_2$$

ein C^k-Diffeomorphismus. Da $\mathrm{pr}_2 \circ f^{-1} = f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_{U_2}$, ist $f^{-1} \colon U_2 \to (U_1 \times U_2) \cap \Sigma$ von der Form

$$x \mapsto (r(x), x)$$

mit einer C^k-Funktion $r \colon U_2 \to U_1$, die wegen $(r(x), x) \in \Sigma = (S' \times M) \cap R$ automatisch $r(x) \in S'$ erfüllt.

Für alle $x \in S' \cap U_2$ ist $r(x) = x$.

Denn $(r(x), x) \in \widetilde{U}$ aber wegen $U_2 \subseteq U_1$ ist auch $(x, x) \in (U_1 \times U_2) \cap (S' \times M) \cap R = \widetilde{U}$. Da $\mathrm{pr}_2|_{\widetilde{U}}$ injektiv ist, impliziert

$$\mathrm{pr}_2(r(x), x) = x = \mathrm{pr}_2(x, x),$$

dass $r(x) = x$. Es ist

$$U := \{x \in U_2 \colon r(x) \in U_2\}$$

eine offene Teilmenge von U_2 und somit $S := S' \cap U$ eine

Untermannigfaltigkeit von U. Für $x \in U$ ist dann $r(x) \in U_2 \cap S'$.

Es ist $r(U) \subseteq S$, also $r|_U$ eine C^k-Abbildung $U \to S$.

Für alle $x \in U$ ist nämlich $r(x) \in U_2 \cap S'$, somit $r(r(x)) = r(x) \in U_2$, folglich $r(x) \in U$ und somit $r(x) \in U \cap S' = S$.

Für jedes $x \in U$ gibt es genau ein $s \in S$ mit $q(x) = q(s)$, nämlich $s = r(x)$.

Für $x \in U$ ist $r(x) \in S$ und $(r(x), x) = f^{-1}(x) \in \widetilde{U} \subseteq \Sigma \subseteq R$, also $q(x) = q(r(x))$. Ist $s \in S$ und $q(x) = q(s)$, so ist $(s, x) \in (S' \times M) \cap R = \Sigma$ sowie $s \in S \subseteq U \subseteq U_2 \subseteq U_1$ und $x \in U \subseteq U_2$, also $(s, x) \in \Sigma \cap (U_1 \times U_2) = \widetilde{U}$. Auch ist $(r(x), x) = f^{-1}(x) \in \widetilde{U}$. Da $\mathrm{pr}_2|_{\widetilde{U}}$ injektiv ist, folgt aus

$$\mathrm{pr}_2(s, x) = x = \mathrm{pr}_2(r(x), x),$$

dass $s = r(x)$. Dies beendet Schritt 4 und somit den Beweis des Satzes von Godement. $\square$.

§12 Abschneidefunktionen und Partitionen der Eins

Wir konstruieren Beispiele von C^k-Funktionen auf C^k-Mannigfaltigkeiten, zur späteren Benutzung. Ausgangspunkt sind entsprechende Funktionen auf $\mathbb{R}^m$. Es sei $\|\cdot\|_2$ die euklidische Norm.

Satz 12.1

Für $m \in \mathbb{N}$ und reelle Zahlen $0 < r < R$ gibt eine C^∞-Funktion $f\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ derart, dass für alle $x \in \mathbb{R}^m$

$$f(x) = 1 \;\text{ wenn }\; \|x\|_2 \leq r; \quad f(x) = 0 \;\text{ wenn }\; \|x\|_2 \geq R;$$

und $f(x) \in \,]0,1[$ wenn $r < \|x\|_2 < R$.

Die folgenden Überlegungen (die vielen aus der Analysis 1 oder einem Proseminar bekannt sein könnten) nutzen beim Beweis.

Lemma 12.2

Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Sind $f|_{]-\infty,0[}$ und $f|_{]0,\infty[}$ C^1 und besitzt die Funktion $(f|_{\mathbb{R}\setminus\{0\}})'$ eine stetige Fortsetzung $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, so ist f eine C^1-Funktion und $f' = g$.

Beweis. Nach dem Hauptsatz der Integral- und Differentialrechnung ist die Funktion

$$h\colon [0,\infty[\to\mathbb{R},\quad x\mapsto f(1)+\int_1^x g(t)\,dt$$

stetig differenzierbar und es ist $h'(x)=f(x)$ für alle $x>0$, da $g|_{]0,\infty[}=(f|_{]0,\infty[})'$. Da h und f stetig sind, folgt $f(0)=h(0)$. Also besitzt f an der Stelle 0 eine rechtsseitige Ableitung und diese ist $h'(0)=g(0)$. Mit der Hilfsfunktion

$$]-\infty,0]\to\mathbb{R},\quad x\mapsto f(-1)+\int_{-1}^x g(t)\,dt$$

sehen wir analog, dass f an der Stelle 0 eine linksseitige Ableitung besitzt und diese gleich $g(0)$ ist. Also existiert $f'(0)$ und ist gleich $g(0)$, somit $f'=g$ stetig. $\square$

Lemma 12.3

Für jedes Polynom $p\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ist die folgende Funktion glatt:

$$f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad x\mapsto\begin{cases}0 & \text{wenn } x\leq 0;\\ p(1/x)e^{-1/x} & \text{wenn } x>0.\end{cases}$$

Beweis. Wir zeigen per Induktion nach $k \in \mathbb{N}_0$, dass für jedes p obiges f eine C^k-Funktion ist. Induktionsanfang: f ist an jeder Stelle $x \neq 0$ stetig und linksseitig stetig an der Stelle 0 mit linksseitigem Grenzwert $0 = f(0)$. Für $0 < x \to 0$ gilt

$$\lim_{x \searrow 0} f(x) = \lim_{x \searrow 0} \frac{p(1/x)}{e^{1/x}} = \lim_{y \to \infty} \frac{p(y)}{e^y} = 0.$$

Also ist auch der rechtsseitige Grenzwert gleich $0 = f(0)$ und somit f stetig an der Stelle 0.

Gelte die Induktionsbehauptung für ein $k \in \mathbb{N}_0$. Nun ist $f'(x) = 0$ für $x < 0$; Nach Produkt- und Kettenregel gilt für $x > 0$

$$f'(x) = p'(1/x)(-1/x^2)e^{-1/x} + p(1/x)e^{-1/x}(1/x^2) = q(1/x)e^{-1/x}$$

mit der Polynomfunktion $q\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $y \mapsto -y^2 p'(y) + y^2 p(y)$. Per Induktionsanfang lässt sich f' via $0 \mapsto 0$ fortsetzen zu einer stetigen Funktion g, die per Induktionsvoraussetzung sogar eine C^k-Funktion ist. Nach Lemma 12.2 ist f also C^1 mit $f' = g$. Da dies eine C^k-Funktion ist, ist f eine C^{k+1}-Funktion. $\square$

Lemma 12.4

Für alle reellen Zahlen $a < b$ existiert eine glatte Funktion $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derart, dass

$$g|_{]-\infty,a]} = 1, \quad g(]a,b[) \subseteq]0,1[\quad \text{und} \quad g|_{[b,\infty[} = 0.$$

Beweis. Sei f die glatte Funktion aus Lemma 12.3, mit $p = 1$. Für $r := b - a$ ist dann $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x)f(r-x)$ eine glatte Funktion derart, dass $h(x) = 0$ für alle $x \in]-\infty, 0] \cup [r, \infty[$ und $h(]0,r[) \subseteq]0,\infty[$. Die Funktion $H\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$x \mapsto \frac{\int_0^x h(t)\,dt}{\int_0^r h(t)\,dt}$$

ist Vielfaches einer Stammfunktion von h und somit glatt. Weiter gilt $H|_{]-\infty,0]} = 0$, $H|_{[r,\infty[} = 1$ und es ist $H|_{[0,r]}$ streng monoton wachsend, somit $H(]0,r[) \subseteq]0,1[$. Also leistet $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto H(b-x)$ das Gewünschte. $\square$

Beweis von Satz 12.1 Man definiere $f\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ via $f(x) := g((\|x\|_2)^2)$, wobei $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ wie in Lemma 12.4 ist mit $a = r^2$ und $b = R^2$. $\square$

Definition 12.5

Ein topologischer Raum K heißt **kompakt**, wenn er Hausdorffsch ist und jede offene Überdeckung von K eine endliche Teilüberdeckung besitzt. Eine Teilmenge K eines topologischen Raums X heißt kompakt, wenn K in der von X induzierten Topologie kompakt ist.

Jede abgeschlossene Teilmenge eines kompakten topologischen Raums ist kompakt; jede kompakte Teilmenge eines Hausdorffschen topologischen Raums ist abgeschlossen.[6]

Definition 12.6

Ein topologischer Raum X heißt **lokalkompakt**, wenn er Hausdorffsch ist und für jedes $x \in X$ und jede x-Umgebung $U \subseteq X$ eine kompakte Umgebung K von x in X existiert mit $K \subseteq U$.

Jede x-Umgebung enthält also eine kompakte x-Umgebung.

Beispiel 12.7

$\mathbb{R}^m$ ist lokalkompakt sowie jede offene Teilmenge $W \subseteq \mathbb{R}^m$.

[6] Siehe z.B. Satz 29.1 im Skript zur "Einführung in die Funktionalanalysis" von H.G. im WS 2020/2021.

Zu jedem $x \in W$ und jeder x-Umgebung $U \subseteq W$ existiert nämlich ein $r > 0$ derart, dass die abgeschlossene Kugel $\overline{B}_r(x)$ bezüglich der euklidischen Norm in U enthalten ist; die Kugel ist kompakt.

Beispiel 12.8

Jede m-dimensionale topologische Mannigfaltigkeit M ist lokalkompakt.

Gegeben $x \in M$ und eine x-Umgebung $U \subseteq M$ finden wir eine Karte $\phi\colon U_\phi \to V_\phi \subseteq \mathbb{R}^m$ für M um x. Da die offene Teilmenge V_ϕ von $\mathbb{R}^m$ lokalkompakt ist, existiert eine kompakte $\phi(x)$-Umgebung L in V_ϕ mit $L \subseteq \phi(U_\phi \cap U)$. Dann ist $K := \phi^{-1}(L)$ eine kompakte x-Umgebung in M mit $K \subseteq U$.

Definition 12.9

Ist X ein topologischer Raum, E ein Vektorraum und $f : X \to E$ eine Funktion, so nennt man den Abschluss

$$\operatorname{supp}(f) := \overline{\{x \in X\colon f(x) \neq 0\}}$$

den **Träger** von f.

Satz 12.10

Ist M eine C^k-Mannigfaltigkeit, so existiert für jedes $x \in M$ und jede x-Umgebung $U \subseteq M$ eine glatte Funktion $h\colon M \to \mathbb{R}$ derart, dass $h(M) \subseteq [0,1]$, $\operatorname{supp}(h) \subseteq U$ und $h|_W = 1$ für eine x-Umgebung $W \subseteq U$.

Beweis. Es sei $\phi\colon U_\phi \to V_\phi \subseteq \mathbb{R}^m$ eine Karte von M um x. Nach Ersetzen von ϕ durch $\phi - \phi(x)$ dürfen wir $\phi(x) = 0$ annehmen. Für ein $R > 0$ gilt $\overline{B}_R(0) \subseteq \phi(U_\phi \cap U)$ für die abgeschlossene Kugel bzgl. der euklidischen Norm auf $\mathbb{R}^m$. Wir wählen $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ wie in Satz 11.1, mit R wir zuvor und $r := R/2$. Dann ist $L := \operatorname{supp}(f)$ eine abgeschlossene Teilmenge von $\overline{B}_R(0)$, also kompakt. Weiter ist $K := \phi^{-1}(L)$ kompakt und somit abgeschlossen in M. Definieren wir $h\colon M \to \mathbb{R}$ via

$$h(y) := \begin{cases} f(\phi(y)) & \text{wenn } \ y \in U_\phi; \\ 0 & \text{wenn } \ y \in M \setminus K, \end{cases}$$

so ist h eine C^k-Funktion auf den offenen Mengen U_ϕ und $M \setminus K$ und somit C^k. Es ist $\operatorname{supp}(h) \subseteq K \subseteq U$; die weiteren erwünschten Eigenschaften gelten per Konstruktion. $\square$

Ist X ein topologischer Raum und E ein endlich-dimensionaler Vektorraum, so schreibt man $C_c(X,E)$ für den Vektorraum aller stetigen Funktionen $f\colon X \to E$ mit kompaktem Träger $\operatorname{supp}(f)$. Ist $k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ und M eine C^k-Mannigfaltigkeit, sei analog

$$C_c^k(M,E)$$

der Vektorraum aller C^k-Funktionen $f\colon M \to E$ mit kompaktem Träger. Kürze $C_c(X) := C_c(X,\mathbb{R})$ und $C_c^k(M) := C_c^k(M,\mathbb{R})$ ab.[7]

Im Rest des Kapitels sei stets $k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$.

Folgerung 12.11

Auf jeder C^k-Mannigfaltigkeit M trennt $C_c^k(M)$ die Punkte, d.h. für alle $x \neq y$ in M existiert ein $f \in C_c^k(M)$ mit $f(x) \neq f(y)$.

Beweis. $M \setminus \{y\}$ ist eine x-Umgebung, enthält also eine kompakte x-Umgebung K, da M lokalkompakt ist. Nach Satz 12.10 gibt es eine C^k-Funktion $f\colon M \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = 1$ und $\operatorname{supp}(f) \subseteq K$

[7] Manchmal meint man damit auch Räume komplexwertiger Funktionen.

$\subseteq M \setminus \{y\}$, so dass $y \notin \operatorname{supp}(f)$ und folglich $f(y) = 0 \neq f(x)$. $\square$

Folgerung 12.12 (Vorgegebener Funktionskeim)

Es seien M eine C^k-Mannigfaltigkeit, $x \in M$ und $g\colon U \to \mathbb{R}^n$ eine C^k-Funktion auf einer offenen x-Umgebung $U \subseteq M$, mit $n \in \mathbb{N}$. Dann existiert eine C^k-Funktion $f\colon M \to \mathbb{R}^n$ derart, dass $f|_W = g|_W$ für eine x-Umgebung $W \subseteq U$. Man kann zudem erreichen, dass $f \in C^k_c(M, \mathbb{R}^n)$ und $\operatorname{supp}(f) \subseteq U$.

Beweis. Nach Satz 12.10 gibt es eine C^k-Funktion $h\colon M \to \mathbb{R}$ mit kompaktem Träger $K := \operatorname{supp}(h) \subseteq U$ derart, dass $h|_W = 1$ für eine x-Umgebung $W \subseteq U$. Dann ist

$$f\colon M \to \mathbb{R}^n, \quad y \mapsto \begin{cases} h(y)g(y) & \text{wenn } \; y \in U; \\ 0 & \text{wenn } \; y \in M \setminus K \end{cases}$$

auf U und auf $M \setminus K$ eine C^k-Funktion und somit C^k. Weiter ist $\operatorname{supp}(f) \subseteq K \subseteq U$. Per Konstruktion ist $f|_W = g|_W$. $\square$

Lemma 12.13

Ist X eine lokalkompakter topologischer Raum, $K \subseteq X$ eine kompakte Teilmenge und $U \subseteq X$ eine offene Teilmenge mit $K \subseteq U$, so existiert eine kompakte Teilmenge $L \subseteq U$ mit $K \subseteq L^o$.

Beweis. Da X lokalkompakt ist, existiert zu jedem $x \in K$ eine kompakte x-Umgebung $L_x \subseteq U$. Die Inneren liefern eine offene Überdeckung $(L_x^o)_{x \in K}$ für K in X; da K kompakt ist, existieren $x_1, \ldots, x_n \in K$ mit

$$K \subseteq L_{x_1}^o \cup \cdots \cup L_{x_n}^o.$$

Die rechte Seite ist in L^o enthalten für die kompakte Menge $L := L_{x_1} \cup \cdots \cup L_{x_n} \subseteq U$. $\square$

Definition 12.14

Ein topologischer Raum X heißt **σ-kompakt**, wenn es eine Folge $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von kompakten Teilmengen $K_n \subseteq X$ gibt mit $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n$.

Jeder lokalkompakte, σ-kompakte topologische Raum besitzt eine **kompakte Ausschöpfung** $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ im folgenden Sinn.

Lemma 12.15

Ist ein topologischer Raum X lokalkompakt und σ-kompakt, so existiert eine aufsteigende Folge

$$K_1 \subseteq K_2 \subseteq \cdots$$

von kompakten Teilmengen K_n von X derart, dass $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n$ und $K_n \subseteq K_{n+1}^o$ für jedes $n \in \mathbb{N}$.

Beweis. Aufgrund der σ-Kompaktheit von X existiert eine Folge $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ kompakter Teilmengen von X mit Vereinigung X. Wir setzen $K_1 := L_1$. Ist $n \in \mathbb{N}$ und sind kompakte Teilmengen $K_1, \ldots, K_n$ von X bereits konstruiert mit $L_j \subseteq K_j$ für alle $j \in \{1, \ldots, n\}$ und $K_j \subseteq K_{j+1}^o$ für alle $j \in \{1, \ldots, n-1\}$, so liefert Lemma 12.13 (mit $U := X$) eine kompakte Teilmenge K_{n+1} von X derart, dass

$$K_n \cup L_{n+1} \subseteq K_{n+1}^o.$$

Dann leistet $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ das Gewünschte; insbesondere ist $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n = X$ da $L_n \subseteq K_n$ für jedes n und $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} L_n = X$. $\square$

Beispiel 12.16. Mit Kugeln bezüglich der euklidischen Norm auf $\mathbb{R}^m$ ist

$$\overline{B}_1(0) \subseteq \overline{B}_2(0) \subseteq \cdots$$

eine kompakte Ausschöpfung von $\mathbb{R}^m$, denn für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist

$$\overline{B}_n(0) \subseteq B_{n+1}(0) = (\overline{B}_{n+1}(0))^o.$$

Definition 12.17

Eine Familie $(A_j)_{j\in J}$ von Teilmengen A_j eines topologischen Raums X heißt **lokal endlich**, wenn für jedes $x \in X$ eine x-Umgebung $W \subseteq X$ existiert derart, dass die Menge

$$\{j \in J \colon A_j \cap W \neq \emptyset\}$$

endlich ist.

Definition 12.18

Es sei M eine C^k-Mannigfaltigkeit. Eine **C^k-Partition der Eins** auf M ist eine Familie $(h_j)_{j\in J}$ von C^k-Funktionen $h_j \colon M \to \mathbb{R}$ derart, dass gilt:

(a) Für jedes $j \in J$ ist $h_j(M) \subseteq [0,1]$;

(b) Die Familie $(\operatorname{supp}(h_j))_{j \in J}$ der Träger ist lokal endlich;

(c) Für jedes $x \in M$ ist $\sum_{j \in J} h_j(x) = 1$.

Bemerkung 12.19 Beachten Sie, dass in (c) nur endlich viele Summanden von 0 verschieden sind. Besser: Ist $x \in M$ und $W \subseteq M$ eine x-Umgebung derart, dass

$$J_0 := \{j \in J \colon \operatorname{supp}(h_j) \cap W \neq \emptyset\}$$

endlich ist, so gilt für alle $y \in W$

$$\sum_{j \in J_0} h_j(y) = 1$$

und alle anderen Summanden in $\sum_{j \in J} h_j(y) = 1$ sind 0.

Definition 12.20

Eine C^k-Partition der Eins $(h_j)_{j \in J}$ auf einer C^k-Mannigfaltigkeit M heißt einer offenen Überdeckung $(U_i)_{i \in I}$ von M **untergeordnet**, wenn für jedes $j \in J$ ein $i \in I$ existiert mit $\operatorname{supp}(h_j) \subseteq U_i$.

Satz 12.21

Für jede σ-kompakte C^k-Mannigfaltigkeit M und jede offene Überdeckung $(U_i)_{i\in I}$ von M existiert eine dieser untergeordnete C^k-Partition der Eins $(h_j)_{j\in J}$ auf M.

Beweis. Für jedes $x \in M$ existiert ein $i(x) \in I$ mit $x \in U_{i(x)}$. Nach Lemma 12.15 gibt es eine kompakte Ausschöpfung $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von M. Wir setzen $K_{-1} := K_0 := \emptyset$. Für $n \in \mathbb{N}$ ist dann

$$L_n := K_n \setminus K^o_{n-1}$$

eine kompakte Teilmenge von M und

$$Q_n := K^o_{n+1} \setminus K_{n-2}$$

eine offene Teilmenge von M mit $L_n \subseteq Q_n$. Da $L_n \supseteq K_n \setminus K_{n-1}$, ist $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} L_n = X$. Sind $n, m \in \mathbb{N}$ und $m \leq n-3$, so ist $Q_m \subseteq K_{m+1} \subseteq K_{n-2}$, also $Q_m \cap Q_n = \emptyset$. Folglich gilt

$$(\forall n, m \in \mathbb{N}) \quad |n-m| > 2 \;\Rightarrow\; Q_n \cap Q_m = \emptyset. \tag{1}$$

Gegeben $n \in \mathbb{N}$ und $x \in L_n$ existiert nach Satz 12.10 eine

C^k-Funktion $g_{n,x} \in C^k_c(M,\mathbb{R})$ derart, dass $g_{n,x}(M) \subseteq [0,1]$, $\operatorname{supp}(g_{n,x}) \subseteq U_{i(x)} \cap Q_n$ und $g_{n,x}(x) = 1$. Dann bilden die Mengen $g_{n,x}^{-1}(]0,\infty[)$ für $x \in L_n$ eine offene Überdeckung von L_n in Q_n. Somit existiert eine endliche Teilmenge $\Phi_n \subseteq L_n$ derart, dass

$$L_n \subseteq \bigcup_{x\in\Phi_n} g_{n,x}^{-1}(]0,\infty[). \tag{2}$$

Wir setzen

$$J := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{n\} \times \Phi_n.$$

Dann ist $(\operatorname{supp}(g_{n,x}))_{(n,x)\in J}$ eine lokal endliche Familie von Teilmengen von M. Für jedes $y \in M$ existiert nämlich ein $n \in \mathbb{N}$ mit $y \in L_n$. Dann ist $W := Q_n$ eine offene y-Umgebung derart, dass $W \cap Q_m = \emptyset$ für alle $m \in \mathbb{N}$ mit $|m-n| > 2$; also ist

$$\{(m,x) \in J\colon \operatorname{supp}(g_{m,x}) \cap W \neq \emptyset\}$$

enthalten in der Vereinigung aller $\{m\} \times \Phi_m$ mit $m \in \mathbb{N}$ und $|m-n| \leq 2$, einer endlichen Menge. Dann ist

$$g\colon M \to \mathbb{R}, \quad y \mapsto \sum_{(n,x)\in J} g_{n,x}(y)$$

eine C^k-Funktion, denn für y, W und n wie zuvor ist

$$g|_W = \sum_{|m-n|\leq 2} \sum_{x\in\Phi_m} g_{m,x}|_W$$

eine endliche Summe von C^k-Funktionen. Aus (2) folgt, dass $g(x) > 0$ für alle $x \in M$. Dann ist $h_{n,x}(y) := g_{n,x}(y)/g(y) \in [0,1]$ für alle $y \in M$ und $h_{n,x}\colon M \to \mathbb{R}$ eine C^k-Funktion für alle $(n,x) \in J$. Weiter ist für jedes $y \in M$

$$\sum_{(n,x)\in J} h_{n,x}(y) = \frac{1}{g(y)} \sum_{(n,x)\in J} g_{n,x}(y) = \frac{1}{g(y)} g(y) = 1,$$

was den Beweis beendet. □

Definition 12.22

Ein topologischer Raum X heißt **parakompakt**, wenn er Hausdorffsch ist und für jede offene Überdeckung $(U_i)_{i\in I}$ von X eine lokal endliche offene Überdeckung $(V_j)_{j\in J}$ von X existiert derart, dass für jedes $j \in J$ ein $i \in I$ existiert mit $V_j \subseteq U_i$.

(So dass also $(V_j)_{j\in J}$ der Überdeckung $(U_i)_{i\in I}$ untergeordnet ist).

Wir zeigen nun nach etwas Vorbereitungen:

Satz 12.23

Ist M eine parakompakte C^k-Mannigfaltigkeit, so existiert für jede offene Überdeckung $(U_i)_{i \in I}$ von M eine ihr untergeordnete C^k-Partition der Eins auf M.

Als Hilfsmittel betrachten wir topologische Summen.

Definition 12.24

Es sei $(X_j, \mathcal{O}_j)_{j \in J}$ eine Familie topologischer Räume mit $X_i \cap X_j = \emptyset$ für alle $i \neq j$ in J. Versieht man $X := \bigcup_{j \in J} X_j$ mit der finalen Topologie $\mathcal{O}$ bezüglich den Inklusionsabbildungen $\lambda_j \colon X_j \to X$, $x \mapsto x$, so nennt man X die **topologische Summe** der topologischen Räume X_j.

Nach Lemma 1.26 ist also jedes X_j offen in X und eine Teilmenge $U \subseteq X_j$ ist genau dann offen in $(X_j, \mathcal{O}_j)$, wenn sie es in $(X, \mathcal{O})$ ist.

Lemma 12.25

Es sei X ein topologischer Raum und $(A_j)_{j \in J}$ eine lokal endliche

Familie von Teilmengen $A_j \subseteq X$. Dann gilt:

(a) Auch die Familie $(\overline{A_j})_{j \in J}$ der Abschlüsse ist lokal endlich.

(b) Für jede kompakte Teilmenge $K \subseteq X$ ist die Menge

$$\{j \in J \colon K \cap A_j \neq \emptyset\}$$

endlich.

Beweis. (a) Jedes $x \in X$ hat eine offene Umgebung W in X derart, dass die Menge

$$J_0 := \{j \in J \colon A_j \cap W \neq \emptyset\}$$

endlich ist. Ist $j \in J \setminus J_0$, so ist $A_j \subseteq X \setminus W$. Da letztere Menge abgeschlossen ist, folgt $\overline{A_j} \subseteq X \setminus W$ und somit $\overline{A_j} \cap W = \emptyset$. Also ist

$$\{j \in J \colon \overline{A_j} \cap W \neq \emptyset\} = J_0$$

endlich.

(b) Jedes $x \in K$ hat in X eine offene Umgebung $W(x)$ derart, dass

$$J_x := \{j \in J \colon A_j \cap W(x) \neq \emptyset\}$$

endlich ist. Da K kompakt ist, gibt es $x_1, \ldots, x_n \in K$ derart, dass

$$K \subseteq W(x_1) \cup \cdots \cup W(x_n).$$

Für $j \in J$ folgt aus $A_j \cap K \neq \emptyset$ dann also $A_j \cap W(x_k) \neq \emptyset$ für ein $k \in \{1 \ldots, n\}$ und somit $j \in J_{x_k}$. Folglich ist

$$\{j \in J \colon A_j \cap K \neq \emptyset\} \subseteq J_{x_1} \cup \cdots \cup J_{x_n};$$

die rechte Menge ist endlich, also auch die linke. □

Satz 12.26

Ein lokalkompakter topologischer Raum X ist genau dann parakompakt, wenn er eine topologische Summe von σ-kompakten, lokalkompakten topologischen Räumen ist.

Beweis. Ist X parakompakt, so wählen wir für jedes $x \in X$ eine relativ kompakte, offene Umgebung $U(x)$ von x in X. Es existiert eine der Überdeckung $(U(x))_{x \in X}$ untergeordnete lokal endliche offene Überdeckung $(V_j)_{j \in J}$ von X. Für jedes $j \in J$ existiert also ein $x \in X$ mit $V_j \subseteq U(x)$ und somit ist V_j relativ kompakt.

Gegeben $x, y \in X$ schreiben wir $x \sim y$ genau dann, wenn ein

$n \in \mathbb{N}$ und $x_0, x_1, \ldots, x_n \in X$ existieren derart, dass $x_0 = x$, $x_n = y$ und für alle $k \in \{0, \ldots, n-1\}$ ein $j \in J$ existiert mit

$$\{x_k, x_{k+1}\} \subseteq \overline{V_j}.$$

Mit $x_0 := x_1 := x$ sehen wir, dass $x \sim x$ für alle $x \in X$. Sei nun $x \sim y$ wie oben und $y \sim z$ mit Elementen

$$y = z_0,\ z_1,\ \ldots\ , z_m = z$$

derart, dass für jedes $k \in \{0, \ldots, m-1\}$ ein $j \in J$ existiert mit $\{z_k, z_{k+1}\} \subseteq \overline{V_j}$. Dann ist $x \sim z$ unter Benutzung der Elemente

$$x = x_0, \ldots, x_{n-1}, x_n = y = z_0, z_1, \ldots, z_m = z.$$

Ist $x \sim y$ via $x = x_0, x_1, \ldots, x_n = y$, so ist $y \sim x$ via $y = x_n, x_{n-1}, \ldots, x_0 = x$. Also ist $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf X. Wir zeigen, dass die Äquivalenzklassen $[x]$ offen in X (also lokalkompakt) sind und zudem σ-kompakt.

Ist $y \in [x]$, so existiert ein $j \in J$ mit $y \in V_j$. Für jedes $z \in V_j$ ist dann $\{y, z\} \subseteq V_j$, folglich $y \sim z$ und somit $z \in [x]$, also $V_j \subseteq [x]$ und somit $[x]$ eine Umgebung von y. Also ist $[x]$ offen.

Gegeben $x \in X$ und $n \in \mathbb{N}$ sei $C_n(x)$ die Menge aller $y \in [x]$, für welche $x = x_0, \ldots, x_n = y$ wie oben gewählt werden können zu dem gegebenen n. Da $(\overline{V_j})_{j \in J}$ nach Lemma 12.25 (a) lokal endlich ist, ist $I_1 := \{j \in J \colon x \in \overline{V_j}\}$ endlich und somit

$$C_1(x) = \bigcup_{j \in I_1} \overline{V_j}$$

kompakt. Ist bereits $C_n(x) = \bigcup_{j \in I_n} \overline{V_j}$ mit einer endlichen Teilmenge $I_n \subseteq J$, so ist für jedes $j \in I_n$ die Menge $J_j := \{i \in J \colon \overline{V_i} \cap C_n(x) \neq \emptyset\}$ endlich, nach Lemma 12.25 (a) und (b). Mit

$$I_{n+1} := \bigcup_{j \in I_n} J_j$$

ist dann $C_{n+1}(x) = \bigcup_{j \in I_{n+1}} \overline{V_j}$ kompakt. Also ist $[x] = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_n(x)$ σ-kompakt. Die Umkehrung zeigen wir nur für Mannigfaltigkeiten (Bemerkung 12.28). Allgemeiner Fall: Aufgaben P21 & P18 (d). $\square$

Beweis von Satz 11.23. Wir schreiben M als eine topologische Summe σ-kompakter offener Teilmengen M_a für $a \in A$. Für jedes $a \in A$ finden wir auf M_a eine C^k-Partition der Eins $(h_{a,j})_{j \in J_a}$, welche $(U_i \cap M_a)_{i \in I}$ untergeordnet ist. Fortsetzen durch 0 ermöglicht uns, die Funktionen $h_{a,j}$ als C^k-Funktionen auf M zu betrachten. Dann bilden die Funktionen $h_{a,j}$ mit $a \in A$ und $j \in J_a$ eine C^k-Partition der Eins auf M, die $(U_i)_{i \in I}$ untergeordnet ist. □

Bemerkung 12.27

Ist eine C^k-Mannigfaltigkeit M eine topologische Summe σ-kompakter offener Untermannigfaltigkeiten, so zeigt der vorige Beweis, dass es zu jeder offenen Überdeckung $(U_i)_{i \in I}$ von M eine ihr untergeordnete C^k-Partition der Eins $(h_j)_{j \in J}$ gibt. Dann ist $(h_j^{-1}(]0, \infty[))_{j \in J}$ eine lokal endliche offene Überdeckung von M, welche $(U_i)_{i \in I}$ untergeordnet ist; also ist M parakompakt.

Satz 12.28

Eine topologische Mannigfaltigkeit M ist genau dann σ-kompakt, wenn die Topologie von M eine abzählbare Basis besitzt.

Beweis. Für $x \in M$ sei $\phi\colon U_\phi \to V_\phi \subseteq \mathbb{R}^m$ eine Karte von M um x. Da die Topologie von V_ϕ eine abzählbare Basis besitzt, hat auch die Topologie auf $U_\phi =: W(x)$ eine abzählbare Basis $\mathcal{B}(x)$.

Ist $M = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n$ mit kompakten Teilmengen K_n, existiert für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine endliche Teilmenge $\Phi_n \subseteq K_n$ mit $K_n \subseteq \bigcup_{x\in\Phi_n} W(x)$. Dann ist $\mathcal{B} := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{x\in\Phi_n} \mathcal{B}(x)$ eine abzählbare Basis für M. Gegeben eine offene Menge $U \subseteq M$ ist für alle $n \in \mathbb{N}$ und $x \in \Phi_n$ nämlich $U \cap W(x)$ eine Vereinigung von Mengen aus $\mathcal{B}(x)$ und somit aus $\mathcal{B}$; gleiches gilt für $U = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{x\in\Phi_n} (U \cap W(x))$.

Hat umgekehrt M eine abzählbare Basis $\mathcal{B}$ der Topologie, so ist

$$\mathcal{B}' := \{V \in \mathcal{B} \colon\, V \text{ ist relativ kompakt}\}$$

eine abzählbare Menge offener Mengen. Für jede offene Teilmenge $U \subseteq M$ hat jedes $x \in U$ eine kompakte Umgebung $K_x \subseteq U$. Es existiert ein $V_x \in \mathcal{B}$ mit $x \in V_x \subseteq (K_x)^o$. Dann ist $V_x \in \mathcal{B}'$ und somit U eine Vereinigung von Mengen aus $\mathcal{B}'$, somit auch $\mathcal{B}'$ eine Basis. Insbesondere ist $M = \bigcup_{V\in\mathcal{B}'} V = \bigcup_{V\in\mathcal{B}'} \overline{V}$ σ-kompakt. $\square$

In diesem Kapitel sei $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Ist $(M, \mathcal{A})$ eine m-dimensionale C^k-Mannigfaltigkeit mit dem maximalen C^k-Atlas $\mathcal{A}$, so betrachten wir die Vereinigung

$$TM := \bigcup_{x \in M} T_x M$$

aller Tangentialräume. Wir wollen TM zu einer C^{k-1}-Mannigfaltigkeit machen, dem **Tangentialbündel** von M.

TM ist eine Vereinigung disjunkter Mengen.

Ist $v \in T_x M$ für ein $x \in M$, so ist nämlich v eine Äquivalenzklasse von C^k-Kurven $\gamma\colon\ ]-\varepsilon, \varepsilon[\to M$ mit $\varepsilon > 0$ und $\gamma(0) = x$; für jedes $\gamma \in v$ ist also $\gamma(0) = x$ und somit ist x durch v festgelegt. Insbesondere ist die Abbildung

$$\pi_{TM}\colon\ TM \to M, \quad v \mapsto x \ \text{ wenn } v \in T_x M$$

wohldefiniert und es ist $\pi_{TM}([\gamma]) = \gamma(0)$.

Für jede Karte $\phi\colon U_\phi \to V_\phi \subseteq \mathbb{R}^m$ von M erhalten wir eine Abbildung

$$T\phi\colon TU_\phi \to V_\phi \times \mathbb{R}^m, \quad [\gamma] \mapsto (\phi(\gamma(0)), (\phi \circ \gamma)'(0)). \qquad (1)$$

Diese ist injektiv, denn ist $T\phi([\gamma]) = T\phi([\eta]) =: (x, y)$, so sind $[\gamma], [\eta] \in T_{\phi^{-1}(x)}M$ und mit dem Isomorphismus $h_\phi\colon T_{\phi^{-1}(x)}M \to \mathbb{R}^m$ aus §3 ist

$$h_\phi([\gamma]) = (\phi \circ \gamma)'(0) = y = h_\phi([\eta]),$$

also $[\gamma] = [\eta]$. Umgekehrt können wir für $(x, y) \in V_\phi \times \mathbb{R}^m$ den Tangentialvektor $v := h_\phi^{-1}(y) \in T_{\phi^{-1}(x)}M$ betrachten und erhalten $T\phi(v) = (x, y)$; also ist $T\phi$ auch surjektiv und somit bijektiv.

Betrachten wir

$$T(\phi^{-1}) := (T\phi)^{-1}\colon V_\phi \times \mathbb{R}^m \to TU_\phi \subseteq TM$$

als Abbildung nach TM, so können wir TM mit der finalen Topologie bezüglich der Familie $(T(\phi^{-1}))_{\phi \in \mathcal{A}}$ versehen.

Satz 13.1

Für jede m-dimensionale C^k-Mannigfaltigkeit $(M, \mathcal{A})$ gilt:

(a) Für jede Karte $\phi \in \mathcal{A}$ ist TU_ϕ offen in TM und $T\phi\colon TU_\phi \to V_\phi \times \mathbb{R}^m$ ein Homöomorphismus;

(b) $\pi_{TM}\colon TM \to M$ ist stetig;

(c) TM ist Hausdorffsch und eine $2m$-dimensionale topologische Mannigfaltigkeit;

(d) $\{T\phi\colon \phi \in \mathcal{A}\}$ ist ein C^{k-1}-Atlas für TM. Mit dem zugehörigen maximalen C^{k-1}-Atlas ist TM also eine C^{k-1}-Mannigfaltigkeit;

(e) $\pi_{TM}\colon TM \to M$ ist C^{k-1} und eine Submersion;

(f) Hat die Topologie von M eine abzählbare Basis, so auch die Topologie von TM.

Im Falle $k = 1$ ist TM lediglich eine topologische Mannigfaltigkeit und die stetige Abbildung $\pi_{TM}\colon TM \to M$ eine Submersion im folgenden Sinn (der nicht unbedingt von anderen benutzt wird).

Definition 13.2

Es sei M eine m-dimensionale topologische Mannigfaltigkeit und N eine n-dimensionle topologische Mannigfaltigkeit mit $n \leq m$. In der Vorlesung nennen wir eine Abbildung $f\colon M \to N$ eine Submersion, wenn M lokal aussieht wir die Projektion $\mathrm{pr}_1\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n} \to \mathbb{R}^n$.

Wir benutzen hierbei Definition 4.1 auch für $k = 0$; ein C^0-Diffeomorphismus ist dann also ein Homöomorphismus.

Bemerkung 13.3

(a) Wir machen die Charakterisierung von C^k-Submersionen für $k \geq 1$ aus Satz 5.1 (b) im Falle $k = 0$ also einfach zur Definition einer Submersion.

(b) Da $\mathrm{pr}_1\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n} \to \mathbb{R}^n$ eine offene Abbildung ist, ist jede C^0-Submersion insbesondere eine offene Abbildung.

(c) Beachten Sie, dass die Sätze 6.4 (über Urbilder von Untermannigfaltigkeiten) und 6.6 (über Faserprodukte) sowie deren Beweise für $k = 0$ gültig bleiben.

Für den Beweis von Satz 13.1 ist folgende Tatsache nützlich.

Lemma 13.4

Es sei X ein topologischer Raum, dessen Topologie final ist bezüglich einer Familie $(f_j)_{j\in J}$ von Abbildungen $f_j\colon X_j \to X$ mit topologischen Räumen X_j. Für jeden topologischen Raum Y und jede Abbildung $f\colon X \to Y$ sind dann äquivalent:

(a) f ist stetig;

(b) $f \circ f_j\colon X_j \to Y$ ist stetig für jedes $j \in J$.

Beweis. (a)⇒(b): Nach Satz 1.25 ist jedes f_j stetig. Ist f stetig, so also auch $f \circ f_j$.

(b)⇒(a): Sei $f \circ f_j$ für jedes $j \in J$ stetig. Für jede offene Teilmenge $U \subseteq Y$ ist das Urbild

$$(f \circ f_j)^{-1}(U) = f_j^{-1}(f^{-1}(U))$$

dann offen in X_j. Per Definition der finalen Topologie ist also $f^{-1}(U)$ offen in X. Somit ist f stetig. □

Beweis von Satz 13.1. (b) Für alle $\phi \in \mathcal{A}$ ist $(T\phi)^{-1}\colon V_\phi \times \mathbb{R}^m \to TM$ die Abbildung

$$(x, y) \mapsto [t \mapsto \phi^{-1}(x + ty)],$$

denn $\phi(\phi^{-1}(x + 0y)) = x$ und $\frac{d}{dt}\big|_{t=0}\phi(\phi^{-1}(x + ty)) = \frac{d}{dt}\big|_{t=0}(x + ty) = y$. Folglich erfüllt $\pi_{TM} \circ T(\phi^{-1})\colon V_\phi \times \mathbb{R}^m \to M$

$$(x, y) \mapsto \pi_{TM}([t \mapsto \phi^{-1}(x + ty)]) = \phi^{-1}(x), \tag{2}$$

was stetig in (x, y) ist. Nach Lemma 13.4 ist π_{TM} also stetig.

(a), (c) und (d): Für jede Karte $\phi\colon U_\phi \to V_\phi$ von M ist

$$TU_\phi = (\pi_{TM})^{-1}(U_\phi)$$

offen in TM, da π_{TM} nach (b) stetig ist. Für $\phi, \psi \in \mathcal{A}$ ist also $TU_\phi \cap TU_\psi$ offen in TU_ϕ und folglich

$$T\phi(TU_\phi \cap TU_\psi) = (T(\phi^{-1}))^{-1}(TU_\phi \cap TU_\psi)$$

offen in $V_\phi \times \mathbb{R}^m$, da $T(\phi^{-1})$ stetig ist. Letztere Menge ist gleich dem Urbild

$$
\begin{aligned}
&(T(\phi^{-1}))^{-1}(\pi_{TM}^{-1}(U_\phi \cap U_\psi)) \\
&\qquad = (\pi_{TM} \circ T(\phi^{-1}))^{-1}(U_\phi \cap U_\psi) = (\phi^{-1} \circ \mathrm{pr}_1)^{-1}(U_\phi \cap U_\psi) \\
&\qquad = \mathrm{pr}_1^{-1}(\phi(U_\phi \cap U_\psi)) = \phi(U_\phi \cap U_\psi) \times \mathbb{R}^m
\end{aligned}
$$

mit $\mathrm{pr}_1 \colon U_\phi \times \mathbb{R}^m \to U_\phi$, $(x, y) \mapsto x$, siehe (2). Die bijektive Abbildung $T\psi \circ T(\phi^{-1}) \colon \phi(U_\phi \cap U_\psi) \times \mathbb{R}^m \to \psi(U_\phi \cap U_\psi) \times \mathbb{R}^m$ ist gegeben durch

$$
\begin{aligned}
(x, y) \mapsto T\psi([t \mapsto \phi^{-1}(x+ty)]) &= (\psi(\phi^{-1}(x)), \tfrac{d}{dt}\big|_{t=0}(\psi\circ\phi^{-1})(x+ty)) \\
&= ((\psi\circ\phi^{-1})(x), (\psi\circ\phi^{-1})'(x)(y))
\end{aligned}
$$

und somit eine C^{k-1}-Funktion. Auch die Umkehrabbildung ist C^{k-1}, da sie von der selben Form ist mit vertauschten Rollen von ϕ und ψ. Also ist $T\psi \circ T\phi^{-1}$ ein C^{k-1}-Diffeomorphismus und insbesondere ein Homöomorphismus. Nach Lemma 1.26 ist also jedes $T\phi \colon TU_\phi \to V_\phi \times \mathbb{R}^m$ ein Homöomorphismus. Nach Bemerkung 1.27 mit $g := \pi_{TM}$ ist TM Hausdorffsch.
Nach Satz 2.9 ist $\{T\phi \colon \phi \in \mathcal{A}\}$ ein C^{k-1}-Atlas auf TM.

(e) π_{TM} ist stetig und für jedes $\phi \in \mathcal{A}$ ist

$$\phi \circ \pi_{TM} \circ T(\phi^{-1})\colon V_\phi \times \mathbb{R}^m \to V_\phi$$

nach (2) die Projektion $(x, y) \mapsto x$. Da diese C^{k-1} ist, ist ϕ_{TM} eine C^{k-1}-Funktion. Nach dem Vorigen sieht weiter π_{TM} lokal aus wie die Projektion $\mathrm{pr}_1\colon \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$; daher ist π_{TM} eine Submersion.

(f) Ist $\mathcal{B}$ eine abzählbare Basis von M, so auch die Teilmenge $\mathcal{B}'$ aller $U \in \mathcal{B}$, für welche eine Karte $\phi\colon U_\phi \to V_\phi$ von M existiert mit $U \subseteq U_\phi$; man kann dann sogar $U = U_\phi$ annehmen, da $\phi|_U^{\phi(U)}$ eine Karte ist. Sei $\mathcal{B}' = \{U_n \colon n \in \mathbb{N}\}$ und $\phi_n\colon U_n \to V_n \subseteq \mathbb{R}^m$ eine Karte von M mit Definitionsbereich U_n für $n \in \mathbb{N}$. Da

$$T\phi_n\colon TU_n \to V_n \times \mathbb{R}^m$$

ein Homöomorphismus ist und die Topologie auf $V_n \times \mathbb{R}^m$ eine abzählbare Basis hat, hat die Topologie auf TU_n eine abzählbare Basis $\mathcal{B}_n$. Da $(TU_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine offene Überdeckung von TM ist, ist dann $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{B}_n$ eine Basis für die Topologie auf TM und diese ist abzählbar als abzählbare Vereinigung abzählbarer Mengen. $\square$

Satz 13.5

Ist $f\colon M \to N$ eine C^k-Abbildung zwischen C^k-Mannigfaltigkeiten, so ist

$$Tf\colon TM \to TN, \quad [\gamma] \mapsto [f \circ \gamma]$$

eine C^{k-1}-Abbildung derart, dass

$$\pi_{TN} \circ Tf = f \circ \pi_{TM},$$

also $Tf(T_x M) \subseteq T_{f(x)}N$ für alle $x \in M$. Zudem ist $Tf|_{T_x M} = T_x f\colon T_x M \to T_{f(x)}N$ linear für alle $x \in M$.

Beweis. Für jedes $x \in M$ und $[\gamma] \in T_x M$ gilt $T_{f(x)}N \ni T_x f([\gamma]) = [f \circ \gamma] = Tf([\gamma])$. Also ist Tf wohldefiniert und hat alle behaupteten Eigenschaften (siehe Definition 3.4), wenn wir noch die C^{k-1}-Eigenschaft nachweisen. Für jedes $x_0 \in M$ sei $\psi\colon U_\psi \to V_\psi \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Karte von N um $f(x_0)$ und $\phi\colon U_\phi \to V_\phi \subseteq \mathbb{R}^m$ eine Karte von M um x_0 mit $f(U_\phi) \subseteq U_\psi$. Dann sind $T\phi\colon TU_\phi \to V_\phi \times \mathbb{R}^m$ und $T\psi\colon TU_\psi \to V_\psi \times \mathbb{R}^n$ Karten für TM bzw. TN mit $Tf(TU_\phi) \subseteq TU_\psi$ und es ist

$T\psi\circ Tf\circ(T\phi)^{-1}\colon V_\phi\times\mathbb{R}^m\to V_\psi\times\mathbb{R}^n$ die Abbildung

$$\begin{aligned}(x,y) &\mapsto T\psi([t\mapsto f(\phi^{-1}(x+ty))])\\ &= ((\psi(f(\phi^{-1}(x))), \tfrac{d}{dt}\big|_{t=0}\psi(f(\phi^{-1}(x+ty))))\\ &= ((\psi\circ f\circ\phi^{-1})(x), (\psi\circ f\circ\phi^{-1})'(x)(y)),\end{aligned}$$

welche C^{k-1} ist in (x,y). Somit ist

$$Tf|_{TU_\phi} = (T\psi)^{-1}\circ(T\psi\circ Tf\circ(T\phi)^{-1})\circ T\phi$$

C^{k-1} und somit Tf eine C^{k-1}-Funktion, da die Mengen TU_ϕ eine offene Überdeckung von TM bilden. □

Satz 13.6

Für jede C^k-Mannigfaltigkeit M gilt

$$T(\mathrm{id}_M) = \mathrm{id}_{TM}\,.$$

Für alle C^k-Abbildungen $f\colon M\to N$ und $g\colon N\to L$ zwischen C^k-Mannigfaltigkeiten gilt

$$T(g\circ f) = Tg\circ Tf.$$

Beweis. Die erste Aussage gilt, da $T\,\mathrm{id}_M([\gamma]) = [\mathrm{id}_M \circ \gamma] = [\gamma]$. Die zweite Aussage ist die Kettenregel (Satz 3.5). $\square$

Bemerkung 13.7

Für jedes $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ ist T nach Satz 13.6 ein kovarianter Funktor von der Kategorie der C^k-Mannigfaltigkeiten und C^k-Abbildungen in die Kategorie der C^{k-1}-Mannigfaltigkeiten und C^{k-1}-Abbildungen. Beachten Sie, dass wir auf jedem Tangentialraum $T_xM = \pi_{TM}^{-1}(\{x\})$ eine Vektorraumstruktur gegeben haben und $Tf|_{T_xM}$ stets linear ist. Wir werden später TM als ein sogenanntes C^{k-1}-Vektorbündel betrachten und können T dann als Funktor in die Kategorie der C^{k-1}-Vektorbündel und deren Morphismen auffassen.

Konvention 13.8

Ist U eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^m$, so ist $\phi := \mathrm{id}_U \colon U \to U$ eine globale Karte und es ist

$$T\phi \colon TU \to U \times \mathbb{R}^m$$

(wie in (1)) eine Karte für TU und somit ein C^{k-1}-Diffeomorphismus. Wir identifizieren TU mit $U \times \mathbb{R}^m$ mit Hilfe des Diffeomorphismus $T\phi$.

Wir werden also alle Abbildungen nach TU stets stillschweigend von links mit $T\phi$ komponieren, um sie als Abbildungen nach $U \times \mathbb{R}^m$ auffassen zu können. Entsprechend sind alle auf TU definierten Abbildungen stets stillschweigend von rechts mit $(T\phi)^{-1}$ zu komponieren, um eine Abbildung mit Definitionsbereich $U \times \mathbb{R}^m$ zu erhalten. Mit $\mathrm{pr}_1 \colon U \times \mathbb{R}^m \to U$ ist $\mathrm{pr}_1 \circ T\phi = \pi_{TU}$.

Definition 13.9

Es sei M eine C^k-Mannigfaltigkeit und $f \colon M \to U$ eine C^k-Abbildung in eine offene Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}^n$. Identifizieren wir TU mit $U \times \mathbb{R}^n$, so ist Tf eine Abbildung $TM \to U \times \mathbb{R}^n$. Wir schreiben

$$df \colon TM \to \mathbb{R}^n$$

für die zweite Komponente dieser Abbildung.

Bemerkung 13.10. Im Detail (und ohne Identifizierungen) schauen wir in der vorigen Situation mit $\phi := \mathrm{id}_U$ also die C^{k-1}-Funktion $T\phi \circ Tf \colon TM \to U \times \mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned} [\gamma] &\mapsto T\phi([f\circ\gamma]) = (\phi((f\circ\gamma)(0)), \tfrac{d}{dt}\big|_{t=0}(\phi\circ f\circ\gamma)(t)) \\ &= (f(\gamma(0)), \tfrac{d}{dt}\big|_{t=0}(f\circ\gamma)(t)) \\ &= (f(\pi_{TM}([\gamma])), (f\circ\gamma)'(0)) \end{aligned}$$

an, mit $T\phi$ wie in (1). Deren zweite Komponente df ist C^{k-1} und nach dem Vorigen gegeben durch

$$df([\gamma]) = (f\circ\gamma)'(0).$$

Für festes $x \in M$ ist diese Funktion linear in $[\gamma] \in T_xM$, denn mit dem Isomorphismus $h_\phi \colon T_{f(x)}U \to \mathbb{R}^n$ aus Kapitel 3 ist

$$df([\gamma]) = h_\phi(T_xf([\gamma])),$$

wobei h_ϕ und T_xf linear sind.

Bemerkung 13.11. Betrachten wir eine Karte $\phi \colon U_\phi \to V_\phi \subseteq \mathbb{R}^m$ einer C^k-Mannigfaltigkeit als eine C^k-Abbildung zwischen C^k-Mannigfaltigkeiten, haben wir im Sinne von Satz 13.5 eine

Tangentialabbildung

$$T\phi\colon TU_\phi \to TV_\phi.$$

Führen wir nun die Identifizierung von TV_ϕ mit $V_\phi \times \mathbb{R}^m$ durch mithilfe des C^{k-1}-Diffeomorphismus $T\,\mathrm{id}_{V_\phi}\colon TV_\phi \to V_\phi \times \mathbb{R}^m$ wie in (1) und Konvention 13.8, so erhalten wir die Abbildung

$$T\,\mathrm{id}_{V_\phi} \circ T\phi\colon TU_\phi \to V_\phi \times \mathbb{R}^m, \quad [\gamma] \mapsto (\gamma(0), (\phi\circ\gamma)'(0)),$$

die wir in (1) als $T\phi\colon TU_\phi \to V_\phi \times \mathbb{R}^m$ bezeichnet hatten. Mit den künftig geltenden Identifizierungen aus Konvention 13.8 sind die zwei konkurrierenden Bedeutungen von $T\phi$ also konsistent.

Bemerkung 13.12

Für ein $x \in U_\phi$ können wir statt h_ϕ (wie in §3) zudem künftig $d\phi|_{T_xM}$ schreiben für den zur Karte $\phi\colon U_\phi \to V_\phi \subseteq \mathbb{R}^m$ von M um x gehörigen Isomorphismus

$$T_xM \to \mathbb{R}^m,$$

in allgemein verständlicher Notation.

Definition 13.13

Sei $V \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Man nennt

$$df\colon TM \to \mathbb{R}^n$$

das **Differential** der C^k-Abbildung $f\colon M \to V$.

Für festes $x \in M$ ist $df|_{T_xM}\colon T_xM \to \mathbb{R}^n$ linear, denn mit dem Isomorphismus

$$h_{\mathrm{id}_V}\colon T_{f(x)}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^n, \quad [\gamma] \mapsto \gamma'(0)$$

aus §3 ist $df|_{T_xM} = h_{\mathrm{id}_V} \circ T_xf\colon [\gamma] \mapsto (f \circ \gamma)'(0)$ und letztere Abbildung ist linear.

Lemma 13.14

Ist $f\colon U \to V$ eine C^k-Abbildung zwischen offenen Teilmengen $U \subseteq \mathbb{R}^m$ und $V \subseteq \mathbb{R}^n$, so ist $df\colon U \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ die Abbildung

$$(x, y) \mapsto f'(x)(y).$$

Beweis. Wir identifizieren $(x, y) \in U \times \mathbb{R}^m$ mit dem Tangentialvektor $[t \mapsto x + ty] \in T_x U$ und erhalten

$$df(x, y) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} f(x + ty) = f'(x)(y). \qquad \square$$

Lemma 13.15 (Kettenregel)

Ist $g\colon M \to N$ eine C^k-Abbildung zwischen C^k-Mannigfaltigkeiten und $f\colon N \to V$ eine C^k-Abbildung in eine offene Teilmenge $V \subseteq \mathbb{R}^n$, so ist

$$d(f \circ g) = (df) \circ Tg.$$

Beweis. $d(f \circ g)$ ist die zweite Komponente von

$$T(f \circ g) = Tf \circ Tg = (f \circ \pi_{TN}, df) \circ Tg. \qquad \square$$

Lemma 13.16

Gegeben C^k-Mannigfaltigkeiten M_1 und M_2 sei $\mathrm{pr}_j\colon M_1 \times M_2 \to M_j$ die Projektion auf die $j$te Komponente für $j \in \{1, 2\}$. Die folgende Abbildung ist ein C^{k-1}-Diffeomorphismus:

$$\Theta := (T\,\mathrm{pr}_1, T\,\mathrm{pr}_2)\colon T(M_1 \times M_2) \to TM_1 \times TM_2.$$

Beweis. Ist $x = (x_1, x_2) \in M_1 \times M_2$, so ist $\Theta(v) \in T_{x_1}M_1 \times T_{x_2}M_2$ für $v \in T_x(M_1 \times M_2)$, also $(\pi_{TM_1} \times \pi_{TM_2})(\Theta(v)) = x$. Somit ist Θ injektiv, wenn $\Theta|_{T_xM}$ injektiv ist für jedes $x = (x_1, x_2) \in M_1 \times M_2$ $=: M$. Letzteres ist erfüllt, denn nach Lemma 10.2 ist

$$\Theta|_{T_xM} = (T_x\,\mathrm{pr}_1, T_x\,\mathrm{pr}_2)\colon\, T_xM \to T_{x_1}M_1 \times T_{x_2}M_2$$

ein Isomorphismus von Vektorräumen. Daraus folgt auch, dass Θ surjektiv ist und somit eine Bijektion. Sind $\phi_j\colon U_j \to V_j \subseteq \mathbb{R}^{m_j}$ Karten für M_j für $j \in \{1, 2\}$, so ist $T\phi_j\colon TU_j \to V_j \times \mathbb{R}^{m_j}$ eine Karte für TM_j für $j \in \{1, 2\}$ und somit $T\phi_1 \times T\phi_2$ eine Karte für $TM_1 \times TM_2$. Weiter ist $\phi_1 \times \phi_2$ eine Karte für $M_1 \times M_2$ und somit $T(\phi_1 \times \phi_2)$ eine Karte für $T(M_1 \times M_2)$. Sei $\pi_j\colon V_1 \times V_2 \to V_j$ die Projektion auf die $j$te Komponente. Dann ist

$$(T\phi_1 \times T\phi_2) \circ \Theta \circ T(\phi_1 \times \phi_2)^{-1} \tag{3}$$

die Abbildung $V_1 \times V_2 \times \mathbb{R}^{m_1} \times \mathbb{R}^{m_2} \to (V_1 \times \mathbb{R}^{m_1}) \times (V_2 \times \mathbb{R}^{m_2})$ mit $j$ter Komponente

$$T(\phi_j) \circ T(\mathrm{pr}_j) \circ T(\phi_1^{-1} \times \phi_2^{-1}) = T(\phi_j \circ \mathrm{pr}_j \circ (\phi_1^{-1} \times \phi_2^{-1})) = T(\pi_j),$$

$(x_1, x_2, y_1, y_2) \mapsto (\pi_j(x_1, x_2), d\pi_j(x_1, x_2, y_1, y_2)) = (x_j, y_j)$. Die

Abbildung in (3) schickt also (x_1, x_2, y_1, y_2) auf (x_1, y_1, x_2, y_2) und ist somit ein C^{k-1}-Diffeomorphismus und folglich étale. Da Θ bijektiv und étale ist, ist Θ ein C^{k-1}-Diffeomorphismus. □

Im folgenden Lemma sei 0_x der Nullvektor des Vektorraums T_xM.

Lemma 13.17

Für jede C^k-Mannigfaltigkeit M ist

$$0_M \colon M \to TM, \quad x \mapsto 0_x \in T_xM$$

eine C^{k-1}-Abbildung mit

$$\pi_{TM} \circ 0_M = \mathrm{id}_M\,.$$

Weiter ist $0_M(M) = \{0_x \colon x \in M\}$ eine Untermannigfaltigkeit von TM und $0_M|^{0_M(M)} \colon M \to 0_M(M)$ ein C^{k-1}-Diffeomorphismus.

Man nennt 0_M (oder auch $0_M(M)$) den **Nullschnitt** von TM.

Beweis. Für jede Karte $\phi \colon U_\phi \to V_\phi \subseteq \mathbb{R}^m$ von M ist $T\phi \colon TU_\phi \to V_\phi \times \mathbb{R}^m$ eine Karte für TM, also ein

C^{k-1}-Diffeomorphismus. Da $V_\phi \times \{0\}$ eine Untermannigfaltigkeit von $V_\phi \times \mathbb{R}^m$ ist, ist

$$(T\phi)^{-1}(V_\phi \times \{0\}) = 0_M(M) \cap TU_\phi$$

eine Untermannigfaltigkeit von TU_ϕ. Also ist $0_M(M)$ eine Untermannigfaltigkeit von TM, nach Lemma 2.32. Da

$$T\phi \circ 0_M|_{U_\phi} \circ \phi^{-1} \colon V_\phi \to V_\phi \times \mathbb{R}^m$$

die Abbildung $x \mapsto (x, 0)$ und somit C^{k-1} ist, ist $0_M|_{U_\phi}$ eine C^{k-1}-Abbildung und somit 0_M eine C^{k-1}-Abbildung. Da $\pi_{TM}(0_x) = x$, ist

$$\pi_{TM} \circ 0_M = \mathrm{id}_M \,.$$

Also ist 0_M injektiv und folglich $0_M|^{0_M(M)}$ bijektiv. Weiter ist $\pi_{TM}|_{0_M(M)} \colon 0_M(M) \to M$ eine C^{k-1}-Abbildung mit $\pi_{TM}|_{0_M(M)} \circ 0_M|^{0_M(M)} = \mathrm{id}_M$. Komposition von rechts mit $(0_M|^{0_M(M)})^{-1}$ zeigt, dass $(0_M|^{0_M(M)})^{-1} = \pi_{TM}|_{0_M(M)}$ eine C^{k-1}-Abbildung, also $0_M|^{0_M(M)}$ ein C^{k-1}-Diffeomorphismus ist. □

Beispiel 13.18

Sei G eine Liegruppe mit dem Neutralelement e, der Gruppenmultiplikation $\mu\colon G \times G \to G$, $(x, y) \mapsto xy$ und der Inversion $\eta\colon G \to G$, $x \mapsto x^{-1}$. Dann ist TG eine Liegruppe mit

$$T\mu\colon TG \times TG = T(G \times G) \to TG$$

als Gruppenmultiplikation, dem Neutralelement 0_e und der Inversion $T\eta$. Der Nullschnitt $0_G\colon G \to TG$ ist ein glatter Gruppenhomomorphismus und es gilt

$$T\mu(v, w) = T\lambda_x(w) + T\rho_y(v) \tag{4}$$

für alle $v, w \in TG$ mit $v \in T_xG$ und $w \in T_yG$.

Hierbei ist $\lambda_x\colon G \to G$, $z \mapsto xz$ die Linkstranslation mit x und $\rho_y\colon G \to G$, $z \mapsto zy$ die Rechtstranslation mit y.

Beweis. Wir identifizieren $([\gamma_1],[\gamma_2]) \in TG \times TG$ mit $[(\gamma_1,\gamma_2)] \in T(G \times G)$. Dann ist

$$[\gamma_1]\cdot[\gamma_2] := T\mu([\gamma_1],[\gamma_2]) = T\mu([(\gamma_1,\gamma_2)]) = [\mu\circ(\gamma_1,\gamma_2)] = [\gamma_1\gamma_2]$$

mit $\gamma_1\gamma_2 \colon t \mapsto \gamma_1(t)\gamma_2(t)$. Wegen

$$([\gamma_1]\cdot[\gamma_2])\cdot[\gamma_3] = [t \mapsto \underbrace{(\gamma_1(t)\gamma_2(t))\gamma_3(t)}_{=\gamma_1(t)(\gamma_2(t)\gamma_3(t))}] = [\gamma_1]\cdot([\gamma_2]\cdot[\gamma_3])$$

ist die Multiplikation $\cdot$ auf TG assoziativ. Nun ist $0_e = [t \mapsto e]$, also $[\gamma]\cdot[0_e] = [t \mapsto \gamma(t)e] = [\gamma]$ für alle $[\gamma] \in TG$ und analog $0_e \cdot [\gamma] = [\gamma]$, somit 0_e ein Neutralelement für TG. Schließlich ist

$$[\gamma]\cdot T\eta([\gamma]) = [\gamma]\cdot[t \mapsto \gamma(t)^{-1}] = [t \mapsto \gamma(t)\gamma(t)^{-1}] = [t \mapsto e] = 0_e$$

für alle $[\gamma] \in TG$ und analog $T\eta([\gamma])\cdot[\gamma] = 0_e$, also jedes $[\gamma]$ invertierbar mit inversem Element $T\eta([\gamma])$. Nach Lemma 10.3 ist für alle $x, y \in G$ und $v \in T_xG$, $w \in T_yG$

$$T\mu(v,w) = T\mu^y(v) + T\mu_x(w) = T\rho_y(v) + T\lambda_x(w).$$

Schließlich ist $0_x \cdot 0_y = T\lambda_x(0_y) + T\rho_y(0_x) = 0_{xy} + 0_{xy} = 0_{xy}$. $\square$

Satz 13.19

Für jede Liegruppe G ist die Abbildung

$$G \times TG \to TG, \quad (x, v) \mapsto T\lambda_x(v) =: x.v$$

glatt und eine Wirkung von G auf TG.

Beweis. Sei $\mu\colon G \times G$ die glatte Gruppenmultiplikation. Dann ist $T\mu\colon TG \times TG \to TG$ glatt. Da auch der Nullschnitt $0_G\colon G \to TG$, $x \mapsto 0_x$ glatt ist, ist die Abbildung

$$G \times TG \to TG, \quad (x, v) \mapsto T\mu(0_x, v) = T\lambda_x(v) + T\rho_y(0_x) = T\lambda_x(v)$$

glatt, wobei $v \in T_yG$ mit $y := \pi_{TG}(v)$ und (4) benutzt wurde. Da $\lambda_e = \mathrm{id}_G$, ist $e.v = T\lambda_e(v) = T\,\mathrm{id}_G(v) = v$. Da $\lambda_x \circ \lambda_y = \lambda_{xy}$, ist $(xy).v = T\lambda_{xy}(v) = T\lambda_x T\lambda_y(v) = x.(y.v)$. Also ist $(x, v) \mapsto x.v$ eine Wirkung von G auf TG. $\square$

Identifizieren wir $x \in G$ mit $0_x \in TG$, so ist $x.v = 0_x \cdot v = x \cdot v$ mit der Multiplikation $\cdot\colon TG \times TG \to TG$.

Ist M eine C^k-Mannigfaltigkeit, so können wir für jedes $x \in M$ jeden Tangentialvektor $v \in T_x M$ im Vektorraum $T_x M$ mit einer reellen Zahl r multiplizieren und erhalten so eine Abbildung

$$\mathbb{R} \times TM \to TM, \quad (r, v) \mapsto rv.$$

Für $x, y \in M$ können wir Tangentialvektoren $v \in T_x M$, $w \in T_y M$ nur addieren, wenn $x = y$ ist und somit (v, w) im Egalisator

$$\{(v, w) \in TM \times TM \colon \pi_{TM}(v) = \pi_{TM}(w)\};$$

da $\pi_{TM} \colon TM \to M$ eine Submersion ist, ist dieser nach Satz 6.6 eine Untermannigfaltigkeit von $TM \times TM$, das Faserprodukt $TM \times_M TM$.

Satz 13.20

Für jede C^k-Mannigfaltigkeit M sind folgende Abbildungen C^{k-1}:

$$\mu \colon \mathbb{R} \times TM \to TM, \quad (r, v) \mapsto rv;$$

$$\alpha \colon TM \times_M TM \to TM, \quad T_x M \times T_x M \ni (v, w) \mapsto v + w \in T_x M.$$

Beweis. Für jede Karte $\phi\colon U_\phi \to V_\phi \subseteq \mathbb{R}^m$ von M ist $T\phi\colon TU_\phi \to V_\phi \times \mathbb{R}^m$ eine Karte für TM und

$$T\phi \circ \mu \circ (\mathrm{id}_\mathbb{R} \times T\phi^{-1})\colon \mathbb{R} \times (V_\phi \times \mathbb{R}^m) \to V_\phi \times \mathbb{R}^m$$

die Abbildung $(r, x, y) \mapsto T\phi(rT\phi^{-1}(x, y)) = (\phi(\phi^{-1}(x)), d\phi(rT\phi^{-1}(x, y)) = (x, rd\phi(T\phi^{-1}(x, y)) = (x, ry)$, also C^{k-1}. Die offenen Mengen $(TM \times_M TM) \cap (TU_\phi \times TU_\phi)$ überdecken das Faserprodukt und auf solchen ist α die Einschränkung der C^{k-1}-Funktion

$$T\phi^{-1} \circ \beta \circ (T\phi \times T\phi)\colon TU_\phi \times TU_\phi \to TU_\phi$$

mit $\beta\colon V_\phi \times \mathbb{R}^m \times V_\phi \times \mathbb{R}^m \to V_\phi \times \mathbb{R}^m$, $(x_1, y_1, x_2, y_2) \mapsto (x_1, y_1 + y_2)$, somit C^{k-1}. $\square$

Definition 13.21

Sei M eine C^k-Mannigfaltigkeit. Ein ***C^{k-1}*-Vektorfeld** auf M ist eine C^{k-1}-Abbildung $X\colon M \to TM$ derart, dass $X(p) \in T_pM$ für alle $p \in M$, also

$$\pi_{TM} \circ X = \mathrm{id}_M\,.$$

Satz 13.22

Die Menge $\mathcal{V}_{C^{k-1}}(M)$ aller C^{k-1}-Vektorfelder auf M ist ein Untervektorraum von
$$\prod_{p\in M} T_pM.$$

Beweis. Für $X, Y \in \mathcal{V}_{C^{k-1}}(M)$ sei $X + Y$ punktweise definiert via
$$(X+Y)(p) := X(p) + Y(p)$$
für $p \in M$, berechnet in T_pM. Da $(X, Y)\colon M \to TM \times TM$ eine C^{k-1}-Abbildung ist und somit auch C^{k-1} in die Untermannigfaltigkeit $TM \times_M TM$, ist
$$X + Y = \alpha \circ (X, Y)\colon M \to TM$$
(mit $\alpha\colon TM \times_M TM \to TM$ wie in Satz 13.20) eine C^{k-1}-Abbildung und somit ein C^{k-1}-Vektorfeld. Analog benutzen wir die Multiplikation mit Skalaren auf T_pM, um
$$(rX)(p) := rX(p) \in T_pM$$
zu definieren für X wie zuvor und $r \in \mathbb{R}$; wegen

$$rX = \mu(r, \cdot) \circ X$$

ist dann rX eine C^{k-1}-Funktion $M \to TM$ und somit ein C^{k-1}-Vektorfeld. $\square$

Im Falle $k = \infty$ schreiben wir kürzer $\mathcal{V}(M) := \mathcal{V}_{C^\infty}(M)$ für den Vektorraum der glatten Vektorfelder auf einer glatten Mannigfaltigkeit M.

Beispiel 13.23. Wir betrachten eine offene Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}^m$, so dass also $TU = U \times \mathbb{R}^m$ und $\pi_{TU} = \mathrm{pr}_1 \colon U \times \mathbb{R}^m \to U$, $(x, y) \mapsto x$. Genau dann ist eine C^k-Funktion $X \colon U \to U \times \mathbb{R}^m$ ein C^k-Vektorfeld, wenn $\mathrm{pr}_1 \circ X = \mathrm{id}_U$, also

$$X = (\mathrm{id}_U, a)$$

mit einer C^k-Funktion $a = (a_1, \ldots, a_m) \colon U \to \mathbb{R}^m$.

Bemerkung 13.24. Vektorfelder interessieren aus zwei Gründen.

(a) Zum einen ermöglicht jedes C^{k-1}-Vektorfeld $X \colon M \to TM$ auf einer C^k-Mannigfaltigkeit M das Studium von

Differentialgleichungen der Form

$$\dot{\gamma}(t) = X(\gamma(t))$$

auf M, wobei $\gamma\colon I \to M$ eine C^k-Kurve auf einem offenen Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ ist und

$$\dot{\gamma}(t) := T\gamma(t,1) = [s \mapsto \gamma(t+s)] \in T_{\gamma(t)}M$$

für $t \in I$. Lösungen von Differentialgleichungen und die zugehörigen Flüsse sind von großem Nutzen.

(b) Zum anderen kann jedes glatte Vektorfeld $X\colon M \to TM$ auf einer glatten Mannigfaltigkeit M genutzt werden, um glatte Funktionen $f\colon M \to \mathbb{R}^n$ zu differenzieren: es ist

$$X.f := df \circ X\colon M \to \mathbb{R}^n$$

wieder eine C^∞-Funktion. Im Falle $n = 1$ ist

$$\mathcal{L}_X\colon C^\infty(M) \to C^\infty(M), \quad f \mapsto \mathcal{L}_X(f) := X.f$$

eine sogenannte Derivation der assoziativen Algebra $C^\infty(M)$, wie wir bald sehen werden, und der Vektorraum $\mathcal{V}(M)$ der glatten Vektorfelder kann derart zu einer Liealgebra gemacht werden, dass

die Abbildung $$\mathcal{V}(M) \to \mathfrak{der}(C^\infty(M)), \quad X \mapsto \mathcal{L}_X$$
zu einem injektiven Liealgebra-Homomorphismus (und sogar einem Isomorphismus) wird. Auch die Liealgebra-Struktur auf $\mathcal{V}(M)$ und die Differentialoperatoren $\mathcal{L}_X$ sind von großem Nutzen.

Beispiel 13.25. Sei $U \subseteq \mathbb{R}^m$ eine offene Menge, $a = (a_1, \ldots, a_m)\colon U \to \mathbb{R}^m$ eine glatte Funktion und $X := (\mathrm{id}_U, a)$ das zugehörige glatte Vektorfeld auf U. Mit den Standard-Einheitsvektoren $e_1, \ldots, e_m$ für $\mathbb{R}^m$ gilt für jedes $f \in C^\infty(U)$ und jedes $x \in U$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_X(f)(x) &= (df \circ X)(x) = df(x, a(x)) = df\left(x, \sum_{j=1}^m a_j(x)e_j\right) \\
&= \sum_{j=1}^m a_j(x) df(x, e_j) = \sum_{j=1}^m a_j(x) \frac{\partial f}{\partial x_j}(x),
\end{aligned}$$

es ist also $\mathcal{L}_X$ der lineare Differentialoperator $\mathcal{L}_X = \sum_{j=1}^m a_j \frac{\partial}{\partial x_j}$ erster Ordnung mit $\frac{\partial}{\partial x_j}\colon C^\infty(U) \to C^\infty(U)$, $f \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_j}$.

13.26. Ist $\phi\colon M \to N$ ein C^k-Diffeomorphismus zwischen C^k-Mannigfaltigkeiten mit $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ und $X\colon M \to TM$ ein C^{k-1}-Vektorfeld, so können wir ein C^{k-1}-Vektorfeld $Y\colon N \to TN$ definieren via[8]

$$Y := T\phi \circ X \circ \phi^{-1}.$$

Eine C^1-Kurve $\gamma\colon I \to M$ auf einem offenen Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ erfüllt genau dann die Differentialgleichung

$$\dot{\gamma}(t) = X(\gamma(t)) \tag{5}$$

für alle $t \in I$, wenn $\phi \circ \gamma$ die folgende Differentialgleichung erfüllt:

$$(\phi \circ \gamma)^{\cdot}(t) = Y((\phi \circ \gamma)(t)). \tag{6}$$

X und Y sind wegen $Y \circ \phi = T\phi \circ X$ nämlich im folgenden Sinne ϕ-verknüpft und es greift dann Lemma 13.28. N.B. $\dot{\gamma}(t) := T\gamma(t, 1)$

[8] Es ist Y nämlich C^{k-1} und für jedes $p \in N$ ist $Y(p) = T\phi(X(\phi^{-1}(p))) \in T_{\phi(\phi^{-1}(p))}N = T_pN$.

Definition 13.27

Es sei $\phi\colon M \to N$ eine C^k-Abbildung zwischen C^k-Mannigfaltigkeiten. Zwei C^{k-1}-Vektorfelder $X\colon M \to TM$ und $Y\colon N \to TN$ werden ϕ-**verknüpft** genannt, wenn $T\phi \circ X = Y \circ \phi$.

Lemma 13.28

Gegeben eine C^k-Abbildung $\phi\colon M \to N$ zwischen C^k-Mannigfaltigkeiten seien $X\colon M \to TM$ und $Y\colon N \to TN$ über ϕ verknüpfte Vektorfelder. Sei $\gamma\colon I \to M$ eine C^1-Kurve auf einem offenen Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$. Dann gilt:

(a) Löst γ die Differentialgleichung (5), so löst $\phi \circ \gamma$ die Differentialgleichung (6).

(b) Ist ϕ eine Immersion, so löst γ genau dann die DGL (5), wenn $\phi \circ \gamma$ die DGL (6) löst.

Beweis. (a) Gilt $\dot\gamma(t) = X(\gamma(t))$, so folgt

$$T\phi(\dot\gamma(t)) = T\phi(X(\gamma(t))). \tag{7}$$

Die linke Seite von (7) ist

$$T\phi(T\gamma(t,1)) = T(\phi\circ\gamma)(t,1) = (\phi\circ\gamma)^{\cdot}(t);$$

die rechte Seite ist

$$(Y\circ\phi)(\gamma(t)) = Y((\phi\circ\gamma)(t)).$$

Also gilt (6).

(b) Ist ϕ eine Immersion, so ist $T_{\gamma(t)}\phi$ injektiv für jedes $t \in I$. Folglich ist (5) äquivalent zu (7). Wie in (a) lässt sich letztere Gleichung zu (6) umschreiben. $\square$

Bemerkung 13.29

Ist $X\colon M \to TM$ via $\phi\colon M \to N$ mit $Y\colon N \to TN$ verknüpft und Y via $\psi\colon N \to L$ mit $Z\colon L \to TL$ verknüpft, so ist X via $\psi\circ\phi\colon M \to L$ mit Z verknüpft.

In der Tat ist

$$Z\circ(\psi\circ\phi) = (Z\circ\psi)\circ\phi = T\psi\circ Y\circ\phi = T\psi\circ T\phi\circ X = T(\psi\circ\phi)\circ X.$$

Als Diffeomorphismus ϕ können wir eine Karte wählen.

Definition 13.30

Ist $X\colon M \to TM$ ein C^{k-1}-Vektorfeld auf einer C^k-Mannigfaltigkeit M, so ist für jede Karte $\phi\colon U_\phi \to V_\phi$ von M

$$T\phi \circ X|_{U_\phi} \circ \phi^{-1}\colon V_\phi \to V_\phi \times \mathbb{R}^m$$

ein C^{k-1}-Vektorfeld auf V_ϕ, also von der Form $(\mathrm{id}_{V_\phi}, X_\phi)$ mit einer C^{k-1}-Funktion $X_\phi\colon V_\phi \to \mathbb{R}^m$. Man nennt X_ϕ den **lokalen Repräsentanten** für X bezüglich der Karte ϕ.

Bemerkung 13.31

(a) Ist $U \subseteq \mathbb{R}^m$ eine offene Menge und $\eta\colon I \to U$ eine C^1-Kurve, so ist

$$\dot{\eta}(t) = (\eta(t), \eta'(t))$$

für alle $t \in I$, denn $\dot{\eta}(t) = T\eta(t,1) = (\eta(t), d\eta(t,1))$ mit $d\eta(t,1) = \frac{d}{ds}\big|_{s=0}\eta(t+s1) = \frac{d\eta}{dt}(t) = \eta'(t)$.

(b) Per Konstruktion sind $X|_{U_\phi}$ und $(\mathrm{id}_{V_\phi}, X_\phi)$ über ϕ verknüpfte Vektorfelder.

(c) Eine C^1-Kurve $\gamma\colon I \to M$ mit Bild im Definitionsbereich U_ϕ der Karte ϕ erfüllt nach Lemma 13.28 genau dann die DGL $\dot\gamma(t) = X(\gamma(t))$, wenn $\phi \circ \gamma\colon I \to V_\phi \subseteq \mathbb{R}^m$ die DGL

$$(\phi \circ \gamma)^{\cdot}(t) = (\mathrm{id}_{V_\phi}, X_\phi)((\phi \circ \gamma)(t))$$

erfüllt, also

$$((\phi \circ \gamma)(t), (\phi \circ \gamma)'(t)) = ((\phi \circ \gamma)(t), X_\phi((\phi \circ \gamma)(t))$$

gilt (unter Benutzung von (a)). Dies gilt genau dann, wenn

$$(\phi \circ \gamma)'(t) = X_\phi((\phi \circ \gamma)(t)) \tag{8}$$

erfüllt ist. Dies ist eine gewöhnliche Differentialgleichung wie in der Reellen Analysis (oder Analysis 2).

(d) Setzen wir in (c) $\eta := \phi \circ \gamma$, so zeigt Induktion nach $j \in \mathbb{N}_0$ mit $j < k$, dass η eine C^{j+1}-Funktion ist. Ist nämlich η schon C^j, so ist $\eta' = X_\phi \circ \eta$ eine C^j-Funktion, somit η eine C^{j+1}-Funktion. Also ist η und somit γ eine C^k-Funktion.

Mitunter ist es vorteilhaft, nicht nur mit offenen Teilmengen $U \subseteq \mathbb{R}^m$ zu arbeiten, sondern mit offenen Teilmengen eines beliebigen endlich-dimensionalen reellen Vektorraums E. Die folgenden Überlegungen und Konventionen sind dann von Nutzen.

13.32. Wir stellen zunächst fest, dass alle Normen auf E zueinander äquivalent sind, also die gleiche Topologie auf E definieren (mit der wir fortan arbeiten). Wählen wir einen Isomorphismus $\alpha\colon E \to \mathbb{R}^m$, so ist für jede Norm $\|\cdot\|$ auf E nämlich $\|\cdot\| \circ \alpha^{-1}$ eine Norm auf $\mathbb{R}^m$ und wir wissen aus der Analysis 2, dass all diese zueinander äquivalent sind. Wir können somit von offenen Teilmengen $U \subseteq E$ sprechen. Als Abbildung von $(E, \|\cdot\|)$ nach $(\mathbb{R}^m, \|\cdot\| \circ \alpha^{-1})$ ist α eine bijektive Isometrie, also ein Homöomorphismus.

13.33. Für jede offene Teilmenge $U \subseteq E$ und α wie zuvor ist $V := \alpha(U)$ offen in $\mathbb{R}^m$ und $\alpha|_U\colon U \to V$ ein Homöomorphismus, also U eine glatte Mannigfaltigkeit mit dem von $\{\alpha|_U\}$ erzeugten maximalen C^∞-Atlas.

13.34. Eine Abbildung $\gamma\colon I \to U$ auf einem offenen Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ heißt differenzierbar an einer Stelle $t \in I$, wenn die Ableitung $\gamma'(t) = \lim_{s\to t} \frac{1}{s-t}(\gamma(s) - \gamma(t))$ existiert. Ist γ überall differenzierbar und $\gamma'\colon I \to E$ stetig, wird γ stetig differenzierbar genannt. Ein γ wie zuvor ist genau dann C^1 nach U als C^1-Mannigfaltigkeit, wenn $\alpha \circ \gamma$ stetig differenzierbar ist (denn $\alpha|_U$ ist eine Karte). Da α und α^{-1} stetig und linear sind, ist Letzteres genau dann der Fall, wenn γ als Weg im normierten Vektorraum E stetig differenzierbar ist (also γ' existiert und stetig ist), wie man leicht sieht; es ist dann $(\alpha \circ \gamma)' = \alpha \circ \gamma'$.

13.35. Die Abbildung $\psi\colon TU \to U \times E$, $[\gamma] \mapsto (\gamma(0), \gamma'(0))$ macht das folgende Diagram kommutativ, in dem die anderen Abbildungen C^∞-DIffeomorphismen sind, also auch ψ:

$$\begin{array}{ccl} TU & \stackrel{\psi}{\to} & U \times E \\ & \searrow & \quad \downarrow (\alpha|_U) \times \alpha \\ T\alpha & & V \times E \end{array}$$

Analog zu Konvention 13.8 identifizieren wir TU mit $U \times E$ via ψ, identifizieren also $v \in TU$ mit $\psi(v) \in U \times E$. Die Umkehrabbildung ist gegeben durch $(x, y) \mapsto [t \mapsto x + ty]$.

13.36. Ist M eine C^k-Mannigfaltigkeit und $f\colon M \to U$ eine C^k-Abbildung, so schreiben wir $df\colon TM \to E$ für die zweite Komponente von $Tf\colon TM \to TU = U \times E$. Wörtlich ist dies die zweite Komponente von $\psi \circ Tf$ und somit die Abbildung $[\gamma] \mapsto (f \circ \gamma)'(0)$.

13.37. Ist M eine C^k-Mannigfaltigkeit mit $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ und $f\colon U \to M$ eine C^k-Abbildung, so betrachten wir nach 13.35 Tf als eine C^{k-1}-Abbildung $U \times E \to TM$ (die ausführlich notiert $Tf \circ \psi^{-1}$ ist). Für $x \in U$ ist $T_x U = \{x\} \times E$; wir haben also

$$T_x f = Tf|_{T_x U}\colon \{x\} \times E \to T_{f(x)} M.$$

Halten wir das erste Argument fest, so erhalten wir die Abbildung $T_x f(x, \cdot)\colon E \to T_{f(x)} M$, $y \mapsto T_x f(x, y)$. Mitunter schreiben wir einfach $T_x f$ für diese Abbildung $T_x f(x, \cdot)$, um die umständliche Notation und Doppelung des Buchstabens x zu vermeiden.

13.38. Ist $T_x f\colon T_x U = \{x\} \times E \to T_{f(x)} M$ ein Isomorphismus von Vektorräumen und somit $f(U)$ offen und $f\colon U \to f(U)$ ein C^k-Diffeomorphismus nach Verkleinern der offenen x-Umgebung U, so ist auch $T_x f(x,\cdot)\colon E \to T_{f(x)} M$ ein Isomorphismus und somit auch die Umkehrabbildung $T_x f(x,\cdot)^{-1}\colon T_{f(x)} M \to E$. Diese ist die zweite Komponente der Abbildung $(T_x f)^{-1} = T_{f(x)}(f^{-1})\colon T_{f(x)} M \to T_x U = \{x\} \times E$, so dass also

$$(T_x f(x,\cdot))^{-1} = d(f^{-1})|_{T_{f(x)} M}$$

bzw. mit der Kurzschreibweise $T_x f\colon E \to T_{f(x)} M$ aus 13.37

$$(T_x f)^{-1} = d(f^{-1})|_{T_{f(x)} M}.$$

Wir halten $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ als Grundkörper fest.

Definition 14.1

Eine **Algebra** über $\mathbb{K}$ ist ein $\mathbb{K}$-Vektorraum A, zusammen mit einer bilinearen Abbildung $\beta\colon A \times A \to A$.

Definition 14.2

Ist (A, β) eine Algebra und gilt mit $xy := \beta(x, y)$ für alle $x, y, z \in A$ das Assoziativgesetz

$$x(yz) = (xy)z,$$

so nennt man (A, β) eine **assoziative** Algebra. Existiert zudem ein Element $1 \in A$ mit $1a = a1$ für alle $a \in A$, so nennt man 1 das Einselement und (A, β) eine assoziative Algebra **mit Eins**. Eine assoziative Algebra wird **kommutativ** genannt, wenn $xy = yx$ für alle $x, y \in A$.

Insbesondere ist jede assoziative Algebra mit Eins ein Ring.

Beispiel 14.3. Für jeden $\mathbb{K}$-Vektorraum E ist die Menge $\mathrm{End}_{\mathbb{K}}(E)$ aller $\mathbb{K}$-linearen Selbstabbildungen $\alpha\colon E \to E$ ein Untervektorraum von E^E und eine assoziative $\mathbb{K}$-Algebra mit Einselement id_E mit Multiplikation

$$\mathrm{End}_{\mathbb{K}}(E) \times \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(E) \to \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(E), \quad (\alpha_1, \alpha_2) \mapsto \alpha_1 \circ \alpha_2.$$

Beispiel 14.4. Für jeden topologischen Raum X ist $C(X) := C(X, \mathbb{K})$ eine kommutative assoziative $\mathbb{K}$-Algebra mit Eins, wenn wir $(fg)(x) := f(x)g(x)$ definieren. Das Neutralelement ist die konstante Funktion $X \to \mathbb{K}$ mit Wert 1.

Beispiel 14.5. Für jede glatte Mannigfaltigkeit M ist $C^\infty(M) := C^\infty(M, \mathbb{K})$ eine kommutative assoziative Algebra mit Eins, wenn wir $(fg)(x) := f(x)g(x)$ setzen; Einselement ist die konstante Funktion mit Funktionswert 1.

Definition 14.5.

Eine $\mathbb{K}$-Algebra $\mathfrak{g}$ mit bilinearer Multiplikation

$$\mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}, \quad (x, y) \mapsto [x, y]$$

heißt **Liealgebra**, wenn gilt:

LA1 Für alle $x, y \in \mathfrak{g}$ gilt $[y, x] = -[x, y]$ (Antisymmetrie).

LA2 Für alle $x, y, z \in \mathfrak{g}$ gilt die Jacobi-Identität

$$[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0.$$

Man nennt $[x, y]$ die **Lieklammer** von x und y.

Aus $[x, [y, z]]$ gehen die weiteren Summanden der Jacobi-Identität durch zyklisches Vertauschen von x, y und z hervor.

Beispiel 14.6

Für jede assoziative Algebra A mit Multiplikation $(x, y) \mapsto xy$ ist auch die Kommutatorklammer

$$[x, y] := xy - yx$$

bilinear in $(x, y) \in A$ und diese macht A zu einer Liealgebra A_L.

Es ist nämlich $[y, x] = yx - xy = -(xy - yx) = -[x, y]$. Aus $[x, [y, z]] = x(yz - zy) - (yz - zy)x = xyz - xzy - yzx + zyx$ folgt

$$
\begin{aligned}
&[x,[y,z]]+[y,[z,x]]+[z,[x,y]] \\
&\qquad = \quad xyz - xzy - yzx + zyx + yzx - yxz - zxy + xzy \\
&\qquad\quad + zxy - zyx - xyz + yxz \;=\; 0. \qquad \square
\end{aligned}
$$

Definition 14.7

Ist E ein $\mathbb{K}$-Vektorraum, so schreibt man $\mathfrak{gl}(E) := (\mathrm{End}_{\mathbb{K}}(E))_L$ für $\mathrm{End}_{\mathbb{K}}(E)$, versehen mit der Kommutatorklammer.

Definition 14.8

Es sei (A,β) eine $\mathbb{K}$-Algebra. Ein Abbildung $\delta\colon A \to A$ wird **Derivation** genannt, wenn δ linear ist und

$$
(\forall x, y \in A) \qquad \delta(\beta(x,y)) = \beta(\delta(x),y) + \beta(x,\delta(y)).
$$

Beispiel 14.9

Für jede glatte Mannigfaltigkeit M und jedes glatte Vektorfeld $X\colon M \to TM$ ist

$$\mathcal{L}_X\colon C^\infty(M) \to C^\infty(M), \quad f \mapsto \mathcal{L}_X(f) := X.f := df \circ X$$

eine Derivation von $C^\infty(M)$.

Sind $f, g \in C^\infty(M)$ und $p \in M$, so ist $X(p) = [\gamma]$ für eine glatte Kurve $\gamma\colon\ ]-\varepsilon, \varepsilon[\to M$ mit $\gamma(0) = p$ und

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_X(fg)(p) &= d(fg)(X(p)) = ((fg) \circ \gamma)'(0) = ((f \circ \gamma)(g \circ \gamma))'(0) \\
&= (f \circ \gamma)'(0))g(\gamma(0)) + f(\gamma(0))(g \circ \gamma)'(0) \\
&= (\mathcal{L}_X f)(p)g(p) + f(p)(\mathcal{L}_X g)(p)
\end{aligned}$$

nach der Produktregel, also $\mathcal{L}_X(fg) = (\mathcal{L}_X f)g + f\mathcal{L}_X g$.

Definition 14.10

Eine Teilmenge $\mathfrak{h}$ einer Liealgebra $\mathfrak{g}$ heißt **Unter-Liealgebra**, wenn $\mathfrak{h}$ ein Untervektorraum ist und $[x, y] \in \mathfrak{h}$ für alle $x, y \in \mathfrak{h}$.

Satz 14.11

Für jede Algebra (A, β) ist die Menge $\mathfrak{der}(A)$ aller Derivationen von A eine Unter-Liealgebra von $\mathfrak{gl}(A)$.

Beweis. Offenbar sind Linearkombinationen von Derivationen wieder Derivationen. Sind $\delta_1, \delta_2 \in \mathfrak{der}(A)$, so gilt für alle $x, y \in A$

$$\delta_1(\delta_2(\beta(x,y))) = \delta_1(\beta(\delta_2(x), y) + \beta(x, \delta_2(y))$$

$$= \beta(\delta_1(\delta_2(x)), y) + \beta(\delta_2(x), \delta_1(y)) + \beta(\delta_1(x), \delta_2(y)) + \beta(x, \delta_1(\delta_2(y)).$$

Beim Abziehen von $\delta_2(\delta_1(\beta(x,y))) =$
$\beta(\delta_2(\delta_1(x)), y) + \beta(\delta_1(x), \delta_2(y)) + \beta(\delta_2(x), \delta_1(y)) + \beta(x, \delta_2(\delta_1(y))$
löschen sich die zwei mittleren Terme aus und wir erhalten

$$\begin{aligned}((\delta_1 \circ \delta_2) - (\delta_2 \circ \delta_1))(\beta(x,y))& \\ = \;\; & \beta((\delta_1 \circ \delta_2 - \delta_2 \circ \delta_1)(x), y) + \beta(x, (\delta_1 \circ \delta_2 - \delta_2 \circ \delta_1)(y)),\end{aligned}$$

also $[\delta_1, \delta_2](\beta(x,y)) = \beta([\delta_1, \delta_2](x), y) + \beta(x, [\delta_1, \delta_2](y))$. Somit ist $[\delta_1, \delta_2] \in \mathfrak{der}(A)$. $\square$

Definition 14.12

Eine Abbildung $\phi \colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ zwischen Liealgebren heißt **Liealgebra-Homomorphismus**, wenn ϕ linear ist und

$$(\forall x, y \in \mathfrak{g}) \quad \phi([x,y]) = [\phi(x), \phi(y)].$$

Im folgenden werden Liealgebren über $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ betrachtet.

Unser Ziel ist, für jede glatte Mannigfaltigkeit M eine Lieklammer $\mathcal{V}(M) \times \mathcal{V}(M) \to \mathcal{V}(M)$, $(X, Y) \mapsto [X, Y]$ von glatten Vektorfeldern einzuführen, welche die Abbildung

$$\mathcal{L}\colon \mathcal{V}(M) \to \mathfrak{der}(C^\infty(M)), \quad X \mapsto \mathcal{L}_X \tag{1}$$

zu einem Liealgebra-Homomorphismus macht. Für $f \in C^\infty(M)$ ist $\mathcal{L}_X(f) = df \circ X$ linear in X, da $df(X(p)) = df|_{T_pM}(X(p))$ für alle $p \in M$ linear in X ist. Also ist $\mathcal{L}$ aus (1) eine lineare Abbildung.

Lemma 15.1

Die lineare Abbildung $\mathcal{L}\colon \mathcal{V}(M) \to \mathfrak{der}(C^\infty(M))$ ist injektiv.

Beweis. Ist $X \in \mathcal{V}(M) \setminus \{0\}$, so gibt es ein $p \in M$ mit $X(p) \neq 0$. Ist $\phi = (\phi_1, \ldots, \phi_m)\colon U_\phi \to V_\phi \subseteq \mathbb{R}^m$ eine Karte von M um p, so ist

$$d\phi|_{T_pM} = (d\phi_1|_{T_pM}, \ldots, d\phi_m|_{T_pM})\colon T_pM \to \mathbb{R}^m$$

ein Isomorphismus, also $d\phi_j(X(p)) \neq 0$ für ein $j \in \{1, \ldots, m\}$. Nach Folgerung 12.12 existiert ein $f \in C^\infty(M)$ derart, dass

$f|_W = \phi_j|_W$ für eine p-Umgebung $W \subseteq M$. Dann ist

$$\mathcal{L}_X(f)(p) = df(X(p)) = d\phi_j(X(p)) \neq 0,$$

somit $\mathcal{L}_X \neq 0$. Also ist $\ker(\mathcal{L}) = \{0\}$, folglich $\mathcal{L}$ injektiv. $\square$

Ist $U \subseteq \mathbb{R}^m$ eine offene Teilmenge, können wir zu $a = (a_1, \ldots, a_m) \in C^\infty(U, \mathbb{R}^m)$ das zugehörige Vektorfeld (id_U, a) betrachten; wir kürzen ab

$$\mathcal{L}_a := \mathcal{L}_{(\mathrm{id}_U, a)} \tag{2}$$

und erhalten eine injektive lineare Abbildung $\mathcal{L}\colon C^\infty(U, \mathbb{R}^m) \to \mathfrak{der}(C^\infty(U))$, $a \mapsto \mathcal{L}_a$. Für $f = (f_1, \ldots, f_m)$ in $C^\infty(U, \mathbb{R}^m)$ und $a \in C^\infty(U, \mathbb{R}^m)$ sei $a.f := (\mathrm{id}_U, a).f = df \circ (\mathrm{id}_U, a)$, also

$$a.f = (df_1 \circ (\mathrm{id}_U, a), \ldots, df_m \circ (\mathrm{id}_U, a)) = (a.f_1, \ldots, a.f_m).$$

Definiere eine Abbildung $[\cdot, \cdot]\colon C^\infty(U, \mathbb{R}^m)^2 \to C^\infty(U, \mathbb{R}^m)$ via

$$[a, b] := a.b - b.a \quad \text{für } a, b \in C^\infty(U, \mathbb{R}^m);$$

diese ist bilinear und antisymmetrisch.

Lemma 15.2

Für alle $a, b \in C^\infty(U, \mathbb{R}^m)$ ist $\mathcal{L}_{[a,b]} = [\mathcal{L}_a, \mathcal{L}_b]$.

Beweis. Für $a = (a_1, \ldots, a_m)$, $b = (b_1, \ldots, b_m)$, $f \in C^\infty(U)$ ist

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_a(\mathcal{L}_b(f)) &= \mathcal{L}_a\left(\sum_{j=1}^m b_j \frac{\partial f}{\partial x_j}\right) \\
&= \sum_{j=1}^m \left(\mathcal{L}_a(b_j)\frac{\partial f}{\partial x_j} + b_j \mathcal{L}_a\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)\right) \\
&= \sum_{j,k=1}^m a_k \frac{\partial b_j}{\partial x_k}\frac{\partial f}{\partial x_j} + \sum_{j,k=1}^m a_k b_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j},
\end{aligned}$$

siehe Beispiel 13.25. Für $\mathcal{L}_b(\mathcal{L}_a(f))$ gilt eine analoge Formel mit vertauschten Rollen von a und b. Da nach dem Satz von Schwarz die Differentiationsreihenfolge in den zweiten Ableitungen keine Rolle spielt, heben sich diese in der Differenz auf und wir erhalten

$$[\mathcal{L}_a, \mathcal{L}_b](f) = \mathcal{L}_a(\mathcal{L}_b(f)) - \mathcal{L}_b(\mathcal{L}_a(f)) = \sum_{j=1}^m c_j \frac{\partial f}{\partial x_j} = \mathcal{L}_c(f) \text{ mit}$$

$$c_j = \sum_{k=1}^m \left(a_k \frac{\partial b_j}{\partial x_k} - b_k \frac{\partial a_j}{\partial x_k}\right) = a.b_j - b.a_j \text{ und } c := (c_1, \ldots, c_m),$$

also $c = a.b - b.a = [a, b]$. $\square$

Gegeben eine Algebra (A, β) schreiben wir für $x, y, z \in A$

$$\mathrm{Jac}(x, y, z) := \beta(x, \beta(y, z)) + \beta(y, \beta(z, x)) + \beta(z, \beta(x, y)).$$

Lemma 15.3

$(C^\infty(U, \mathbb{R}^m), [\cdot, \cdot])$ ist eine Liealgebra.

Nach Lemma 15.12 gilt für $a, b, c \in C^\infty(U, \mathbb{R}^m)$

$$\mathcal{L}_{\mathrm{Jac}(a,b,c)} = \mathrm{Jac}(\mathcal{L}_a, \mathcal{L}_b, \mathcal{L}_c) = 0,$$

da $\mathfrak{Der}\, C^\infty(U)$ eine Liealgebra ist und dort die Jacobi-Identität gilt. Also gilt die Jacobi-Identität auch in $(C^\infty(U, \mathbb{R}^m), [\cdot, \cdot])$. $\square$

Bisher können $\mathcal{V}(U)$ zu einer Liealgebra machen für offene Mengen $U \subseteq \mathbb{R}^m$, via

$$[(\mathrm{id}_U, a), (\mathrm{id}_U, b)] := (\mathrm{id}_U, a.b - b.a).$$

Die folgende Charakterisierung ist nützlich.

Lemma 15.4

Es seien $\phi\colon M \to N$ eine glatte Abbildung zwischen glatten Mannigfaltigkeiten und $X: M \to TM$ sowie $Y: N \to TN$ glatte Vektorfelder. Dann sind äquivalent:

(a) X und Y sind ϕ-verknüpft.

(b) Für jede glatte Funktion $f: N \to \mathbb{R}$ ist $(Y.f) \circ \phi = X.(f \circ \phi)$, also $\mathcal{L}_Y(f) \circ \phi = \mathcal{L}_X(f \circ \phi)$.

Beweis. Gilt (a), so gilt für alle $f \in C^\infty(N)$

$$(Y.f) \circ \phi = df \circ Y \circ \phi = df \circ T\phi \circ X = d(f \circ \phi) \circ X = X.(f \circ \phi),$$

also (b). Ist (a) falsch, so existiert ein $p \in M$ derart, dass

$Y(\phi(p)) \neq T\phi(X(p))$. Beides sind Elemente von $T_{\phi(p)}N$. Wählen wir eine Karte $\psi = (\psi_1, \ldots, \psi_n)\colon U_\psi \to V_\psi \subseteq \mathbb{R}^n$ von N um $\phi(p)$, so ist $d\psi|_{T_{\phi(p)}N}\colon T_{\phi(p)}N \to \mathbb{R}^n$ ein Isomorphismus, es existiert also ein $j \in \{1, \ldots, n\}$ mit

$$d\psi_j(Y(\phi(p))) \neq d\psi_j(T\phi(X(p))).$$

Nach Folgerung 12.12 gibt es ein $f \in C^\infty(N)$ derart, dass $f|_W = \psi_j|_W$ für eine $\phi(p)$-Umgebung $W \subseteq N$. Dann ist

$$(X.(f \circ \phi))(p) = d(f \circ \phi)(X(p)) = df(T\phi(X(p))) = d\psi_j(T\phi(X(p)))$$

verschieden von

$$(Y.f)(\phi(p)) = df(Y(\phi(p))) = d\psi_j(Y(\phi(p))),$$

also $(Y.f) \circ \phi \neq X.(f \circ \phi)$. $\square$

Wir formulieren eine erste Fassung des Lemmas über verknüpfte Vektorfelder (Lemma 15.9), für Vektorfelder auf offenen Mengen.

Lemma 15.5

Es sei $\phi\colon U \to V$ eine glatte Abbildung zwischen offenen Teilmengen $U \subseteq \mathbb{R}^m$ und $V \subseteq \mathbb{R}^n$. Weiter seien $X_j\colon U \to TU$ und

$Y_j\colon V \to TV$ glatte Vektorfelder für $j \in \{1,2\}$. Sind X_1 und Y_1 über ϕ verknüpft und X_2 und Y_2 über ϕ verknüpft, so sind auch $[X_1, X_2]$ und $[Y_1, Y_2]$ über ϕ verknüpft.

Beweis. Für $f \in C^\infty(V)$ wenden wir Lemma 15.4 zweimal an:

$$\mathcal{L}_{Y_1}(\mathcal{L}_{Y_2}(f)) \circ \phi = \mathcal{L}_{X_1}(\mathcal{L}_{Y_2}(f) \circ \phi) = \mathcal{L}_{X_1}(\mathcal{L}_{X_2}(f \circ \phi)).$$

Analog ist $\mathcal{L}_{Y_2}(\mathcal{L}_{Y_1}(f)) \circ \phi = \mathcal{L}_{X_2}(\mathcal{L}_{X_1}(f \circ \phi))$, folglich

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{[Y_1,Y_2]}(f) \circ \phi &= [\mathcal{L}_{Y_1}, \mathcal{L}_{Y_2}](f) \circ \phi \\
&= \mathcal{L}_{Y_1}(\mathcal{L}_{Y_2}(f)) \circ \phi - \mathcal{L}_{Y_2}(\mathcal{L}_{Y_1}(f)) \circ \phi \\
&= \mathcal{L}_{X_1}(\mathcal{L}_{X_2}(f \circ \phi)) - \mathcal{L}_{X_2}(\mathcal{L}_{X_1}(f \circ \phi)) \\
&= [\mathcal{L}_{X_1}, \mathcal{L}_{X_2}](f \circ \phi) = \mathcal{L}_{[X_1,X_2]}(f \circ \phi)
\end{aligned}$$

wobei die erste und letzte Gleichheit auf Lemma 15.2 beruht. Nach Lemma 15.4 sind somit $[X_1, X_2]$ und $[Y_1, Y_2]$ über ϕ verknüpft. $\square$

15.6 (Kartesische Produkte). Für jede Familie $(\mathfrak{g}_j)_{j\in J}$ von Liealgebren $(\mathfrak{g}_j, [\cdot,\cdot]_{\mathfrak{g}_j})$ kann man den Vektorraum $\mathfrak{g} := \prod_{j\in J} \mathfrak{g}_j$ zu einer Liealgebra machen via $[(x_j)_{j\in J}, (y_j)_{j\in J}] := ([x_j, y_j]_{\mathfrak{g}_j})_{j\in J}$.

Sei nun M eine glatte Mannigfaltigkeit mit dem maximalen C^∞-Atlas $\mathcal{A}$. Für jede Karte $\phi\colon U_\phi \to V_\phi \subseteq \mathbb{R}^m$ in $\mathcal{A}$ können wir $X \in \mathcal{V}(M)$ seinen lokalen Repräsentanten

$$X_\phi := d\phi \circ X_{U_\phi} \circ \phi^{-1} \in C^\infty(V_\phi, \mathbb{R}^m)$$

zuordnen. Dieser hängt linear von X ab, denn $X_\phi(x) = d\phi|_{T_{\phi^{-1}(x)}M} X(\phi^{-1}(x))$ ist linear in X. Die Abbildung

$$\rho\colon \mathcal{V}(M) \to \prod_{\phi \in \mathcal{A}} C^\infty(V_\phi, \mathbb{R}^m), \quad X \mapsto (X_\phi)_{\phi \in \mathcal{A}}$$

ist also linear. Dann gilt:

Lemma 15.6

Das Bild $\operatorname{im}(\rho)$ ist die Menge aller $(a_\phi)_{\phi \in A} \in \prod_{\phi \in \mathcal{A}} C^\infty(V_\phi, \mathbb{R}^m)$, welche die folgende Bedingung $(*)$ erfüllen: Für alle $\phi, \psi \in \mathcal{A}$ sind die zu

$$a_\phi|_{\phi(U_\phi \cap U_\psi)} \quad \text{und} \quad a_\psi|_{\psi(U_\phi \cap U_\psi)}$$

gehörigen Vektorfelder verknüpft sind über $\tau_{\psi,\phi} := \psi \circ \phi^{-1}\colon \phi(U_\phi \cap U_\psi) \to \psi(U_\phi \cap U_\psi)$.

Beweis. Es ist $X|_{U_\phi}$ zu $(\mathrm{id}_{V_\phi}, X_\phi)$ verknüpft, also $X|_{U_\phi\cap U_\psi}$ zu $(\mathrm{id}_{\phi(U_\phi\cap U_\psi)}, X_\phi|_{\phi(U_\phi\cap U_\psi)})$ über $\phi|_{U_\phi\cap U_\psi}$ verknüpft, folglich $(\mathrm{id}_{\phi(U_\phi\cap U_\psi)}, X_\phi|_{\phi(U_\phi\cap U_\psi)})$ zu $X|_{U_\phi\cap U_\psi}$ über $(\phi|_{U_\phi\cap U_\psi})^{-1}$ verknüpft. Weiter ist $X|_{U_\phi\cap U_\psi}$ zu $(\mathrm{id}_{\psi(U_\phi\cap U_\psi)}, X_\psi|_{\psi(U_\phi\cap U_\psi)})$ über $\psi|_{U_\phi\cap U_\psi}$ verknüpft. Nach Bemerkung 13.29 ist also $(\mathrm{id}_{\phi(U_\phi\cap U_\psi)}, X_\phi|_{\phi(U_\phi\cap U_\psi)})$ über $\psi|_{U_\phi\cap U_\psi}\circ(\phi|_{U_\phi\cap U_\psi})^{-1} = \tau_{\psi,\phi}$ zu $(\mathrm{id}_{\psi(U_\phi\cap U_\psi)}, X_\psi|_{\psi(U_\phi\cap U_\psi)})$ verknüpft, d.h. $\rho(X) = (X_\phi)_{\phi\in\mathcal{A}}$ erfüllt $(*)$.

Erfüllt $(a_\phi)_{\phi\in\mathcal{A}} \in \prod_{\phi\in\mathcal{A}} C^\infty(V_\phi, \mathbb{R}^m)$ die Bedingung $(*)$, so wählen wir für $p \in M$ eine Karte $\phi\colon U_\phi \to V_\phi$ um p und setzen

$$X(p) := T\phi^{-1}(\phi(p), a_\phi(\phi(p))).$$

Dann ist $X(p)$ unabhängig von der gewählten Karte, denn ist auch $p \in U_\psi$, so ist $\tau_{\psi,\phi}(\phi(p)) = \psi(p)$, also

$$\begin{aligned}(\psi(p), a_\psi(\psi(p))) &= ((\mathrm{id}_{V_\psi}, a_\psi)\circ\tau_{\psi,\phi})(\phi(p))\, T\tau_{\psi,\phi}((\mathrm{id}_{V_\phi}, a_\phi)(\phi(p)) \\ &= T\tau_{\psi,\phi}(\phi(p), a_\phi(\phi(p)))\end{aligned}$$

nach $(*)$ und wegen $\psi^{-1}\circ\tau_{\psi,\phi} = \phi^{-1}|_{\phi(U_\phi\cap U_\psi)}$ somit

$$
\begin{aligned}
T\psi^{-1}(\psi(p), a_\psi(\psi(p))) &= T\psi^{-1} T\tau_{\psi,\phi}(\phi(p) a_\phi(\phi(p))) \\
&= T\phi^{-1}(\phi(p), a_\phi(\phi(p))).
\end{aligned}
$$

Da $X|_{U_\phi} = T\phi^{-1} \circ (\mathrm{id}_{V_\phi}, X_\phi) \circ \phi$ glatt ist für jedes $\phi \in \mathcal{A}$, ist X ein glattes Vektorfeld auf M und per Konstruktion ist $\rho(X) = (a_\phi)_{\phi \in \mathcal{A}}$, somit $(a_\phi)_{\phi \in \mathcal{A}} \in \mathrm{im}(\rho)$. $\square$

Lemma 15.7

$\mathrm{im}(\rho)$ ist eine Unter-Liealgebra von $\prod_{\phi \in \mathcal{A}} C^\infty(V_\phi, \mathbb{R}^m)$.

Beweis. Sind $(a_\phi)_{\phi \in \mathcal{A}}$ und $(b_\phi)_{\phi \in \mathcal{A}}$ im Bild von ρ, so sind für alle $\phi, \psi \in \mathcal{A}$ mit $V_\phi^\psi := \phi(U_\phi \cap U_\psi) \subseteq V_\phi$ die Vektorfelder $(\mathrm{id}_{V_\phi^\psi}, a_\phi|_{V_\phi^\psi})$ und $(\mathrm{id}_{V_\psi^\phi}, a_\psi|_{V_\psi^\phi})$ über $\tau_{\psi,\phi}$ verknüpft. Ebenso sind $(\mathrm{id}_{V_\phi^\psi}, b_\phi|_{V_\phi^\psi})$ und $(\mathrm{id}_{V_\psi^\phi}, b_\psi|_{V_\psi^\phi})$ über $\tau_{\psi,\phi}$ verknüpft. Nach Lemma 15.5 sind dann auch

$$
[(\mathrm{id}_{V_\phi^\psi}, a_\phi|_{V_\phi^\psi}), (\mathrm{id}_{V_\phi^\psi}, a_\phi|_{V_\phi^\psi})] = (\mathrm{id}_{V_\phi^\psi}, [a_\phi|_{V_\phi^\psi}, b_\phi|_{V_\phi^\psi}]) = (\mathrm{id}_{V_\phi^\psi}, [a_\phi, b_\phi]|_{V_\phi^\psi})
$$

und $[(\mathrm{id}_{V_\psi^\phi}, a_\phi|_{V_\psi^\phi}), (\mathrm{id}_{V_\psi^\phi}, a_\psi|_{V_\psi^\phi})] = (\mathrm{id}_{V_\psi^\phi}, [a_\psi, b_\psi]|_{V_\psi^\phi})$ über $\tau_{\psi,\phi}$

verknüpft. Also erfüllt

$$[(a_\phi)_{\phi\in\mathcal{A}}, (b_\phi)_{\phi\in\mathcal{A}}] = ([a_\phi, b_\phi])_{\phi\in\mathcal{A}}$$

die Bedingung $(*)$ und somit ist $[(a_\phi)_{\phi\in\mathcal{A}}, (b_\phi)_{\phi\in\mathcal{A}}] \in \operatorname{im}(\rho)$. $\square$

Da $\rho\colon \mathcal{V}(M) \to \operatorname{im}(\rho)$ ein Isomorphismus von Vektorräumen ist, können wir auf $\mathcal{V}(M)$ via

$$[X, Y] := \rho^{-1}([\rho(X), \rho(Y)]) \quad \text{für } X, Y \in \mathcal{V}(M)$$

eine bilineare Abbildung $[\cdot,\cdot]\colon \mathcal{V}(M) \times \mathcal{V}(M) \to \mathcal{V}(M)$ definieren, die aus $\mathcal{V}(M)$ eine Liealgebra macht und $\rho\colon \mathcal{V}(M) \to \operatorname{im}(\rho)$ zu einem Isomorphismus von Liealgebren. Es ist $[X, Y]$ also dadurch festgelegt, dass

$$[X, Y]_\phi = [X_\phi, Y_\phi] = X_\phi.Y_\phi - Y_\phi.X_\phi$$

für alle Karten ϕ von M. Wir nennen $[X, Y]$ die **Lieklammer** der Vektorfelder $X, Y \in \mathcal{V}(M)$.

Satz 15.8

Für jede glatte Mannigfaltigkeit M ist die injektive lineare Abbildung

$$\mathcal{L}\colon \mathcal{V}(M) \to \mathfrak{der}(C^\infty(M)), \quad X \mapsto \mathcal{L}_X$$

ein Liealgebra-Homomorphismus, also
$\mathcal{L}_{[X,Y]} = [\mathcal{L}_X, \mathcal{L}_Y] = \mathcal{L}_X \circ \mathcal{L}_Y - \mathcal{L}_Y \circ \mathcal{L}_X$ für alle $X, Y \in \mathcal{V}(M)$.

Beweis. Sei $p \in M$ und $\phi\colon U \to V \subseteq \mathbb{R}^m$ eine Karte für M um p. Für jedes $Z \in \mathcal{V}(M)$ sind $Z|_U$ und (id_V, Z_ϕ) durch ϕ verknüpfte Vektorfelder; für jedes $g \in C^\infty(M)$ gilt somit

$$\mathcal{L}_X(g)|_U \circ \phi^{-1} = \mathcal{L}_{X|_U}(g|_U) \circ \phi^{-1} = \mathcal{L}_{\mathrm{id}_V, Z_\phi}(g \circ \phi^{-1}) = \mathcal{L}_{Z_\phi}(g \circ \phi^{-1})$$

nach Lemma 15.4, mit Kurzschreibweise wie in (2) aus §15. Gegeben $X, Y \in \mathcal{V}(M)$ und $f \in C^\infty(M)$ wenden wir letztere Formel zweimal an (zuerst mit $Z := X$ und $g := \mathcal{L}_Y(f)$, dann mit $Z := Y$ und $g := f$) und erhalten

$$\mathcal{L}_X(\mathcal{L}_Y(f)) \circ \phi^{-1} = \mathcal{L}_{X_\phi}(\mathcal{L}_Y(f) \circ \phi^{-1}) = \mathcal{L}_{X_\phi}(\mathcal{L}_{Y_\phi}(f \circ \phi^{-1})).$$

Mit vertauschten Rollen von X und Y gilt eine entsprechende Formel, so dass also

$$
\begin{aligned}
[\mathcal{L}_X, \mathcal{L}_Y](f) \circ \phi^{-1} &= \mathcal{L}_X(\mathcal{L}_Y(f)) \circ \phi^{-1} - \mathcal{L}_Y(\mathcal{L}_X(f)) \circ \phi^{-1} \\
&= \mathcal{L}_{X_\phi}(\mathcal{L}_{Y_\phi}(f \circ \phi^{-1})) - \mathcal{L}_{Y_\phi}(\mathcal{L}_{X_\phi}(f \circ \phi^{-1})) \\
&= [\mathcal{L}_{X_\phi}, \mathcal{L}_{Y_\phi}](f \circ \phi^{-1}) = \mathcal{L}_{[X_\phi, Y_\phi]}(f \circ \phi^{-1}) \\
&= \mathcal{L}_{[X,Y]_\phi}(f \circ \phi^{-1}) = \mathcal{L}_{[X,Y]}(f) \circ \phi^{-1};
\end{aligned}
$$

hierbei wurde Lemma 15.2 benutzt und schließlich die eingangs gezeigte Formel mit $Z := [X, Y]$ und $g := f$. Auswerten an der Stelle $\phi(p)$ zeigt, dass $[\mathcal{L}_X, \mathcal{L}_Y](f)(p) = \mathcal{L}_{[X,Y]}(f)(p)$ und somit $[\mathcal{L}_X, \mathcal{L}_Y](f) = \mathcal{L}_{[X,Y]}(f)$, da $p \in M$ beliebig war. Also ist $[\mathcal{L}_X, \mathcal{L}_Y] = \mathcal{L}_{[X,Y]}$. $\square$

Lemma 15.9 (Lemma über verknüpfte Vektorfelder)

Es sei $\phi\colon M \to N$ eine glatte Abbildung zwischen glatten Mannigfaltigkeiten. Weiter seien $X_j\colon M \to TM$ und $Y_j\colon N \to TN$ glatte Vektorfelder für $j \in \{1, 2\}$. Sind X_1 und Y_1 über ϕ verknüpft und X_2 und Y_2 über ϕ verknüpft, so sind auch $[X_1, X_2]$ und $[Y_1, Y_2]$ über ϕ verknüpft.

Beweis. Wir können den Beweis von Lemma 15.5 wiederholen, wobei lediglich U und V durch M bzw. N zu ersetzen sind und Lemma 15.2 durch Satz 15.8. □

Bemerkung 15.10

Für jede glatte Mannigfaltigkeit M ist $\mathcal{L}\colon \mathcal{V}(M) \to \mathfrak{der}(C^\infty(M))$ auch surjektiv, somit ein Isomorphismus von Liealgebren, $\mathcal{V}(M) \cong \mathfrak{der}(C^\infty(M))$.

Wir zeigen dies nur im Spezialfall einer offenen Menge

$$U = \prod_{j=1}^{m}]a_j, b_j[\subseteq \mathbb{R}^m$$

mit $-\infty \leq a_j < b_j \leq \infty$ für $j \in \{1, \ldots, m\}$. Daraus folgt der allgemeine Fall (Übung P27). Für $\delta \in \mathfrak{der}(C^\infty(U))$ zeigen wir, dass $\delta = \mathcal{L}_X$ mit

$$X := (\mathrm{id}_U, \delta(\mathrm{pr}_1), \ldots, \delta(\mathrm{pr}_m)),$$

wobei $\mathrm{pr}_j\colon U \to \mathbb{R}$ die Projektion auf die $j$te Komponente ist. Für die konstante Einsfunktion $1\colon U \to \mathbb{R}$ gilt $1 = 11$, also

$$\delta(1) = \delta(11) = \delta(1)1 + 1\delta(1) = 2\delta(1),$$

folglich $\delta(1) = 0$. Also ist $\delta(g) = 0$ für jede konstante Funktion g. Behauptung: Für alle $f \in C^\infty(U)$ und festes $z = (z_1, \ldots, z_m) \in U$ gibt es glatte Funktionen $h_j \in C^\infty(U)$ mit $h_j(z) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(z)$ für $j \in \{1, \ldots, m\}$ derart, dass

$$f(x) - f(z) = \sum_{j=1}^{m} h_j(x)(x_j - z_j) \quad \text{für alle } x = (x_1, \ldots, x_n) \in U,$$

also $f = \sum_{j=1}^m h_j \cdot (\mathrm{pr}_j - z_j)$ und somit wegen der Produktregel

$$\delta(f)(z) = \delta(f - f(z))(z) = \sum_{j=1}^{m} \big(\delta(h_j)(z)\underbrace{(\mathrm{pr}_j(z) - z_j)}_{=0} + h_j(z)\underbrace{\delta(\mathrm{pr}_j - z_j)(z)}_{=\delta(\mathrm{pr}_j)(z)}\big) = \mathcal{L}_X(f)(z).$$

Denn $f(x) - f(z)$ ist Teleskopsumme von Summanden der Form

$$\begin{aligned} & f(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_j, z_{j+1}, \ldots, z_m) - f(x_1, \ldots, x_{j-1}, z_j, z_{j+1}, \ldots, z_m) \\ = & \int_{t=z_j}^{x_j} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_1, \ldots, x_{j-1}, t, z_{j+1}, \ldots, z_m)\, dt = h_j(x)(x_j - z_j) \end{aligned}$$

für $j \in \{1, \ldots, m\}$ mit

$$h_j(x) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_1, \ldots, x_{j-1}, z_j + s(x_j - z_j), z_{j+1}, \ldots, z_m)\, ds,$$

wobei $t = z_j + s(x_j - z_j)$, $dt = (x_j - z_j)\, ds$ substituiert wurde.

Wir ordnen jeder Liegruppe G eine Liealgebra $L(G)$ zu und jedem glatten Gruppenhomomorphismus $f\colon G \to H$ einen Liealgebra-Homomorphismus $L(f)\colon L(G) \to L(H)$. Als Vektorraum ist $L(G) = T_e G$ der Tangentialraum von G am Neutralelement e. Für $g \in G$ sei $\lambda_g^G = \lambda_g\colon G \to G$, $h \mapsto gh$ die Linkstranslation.

Definition 16.1

Ein glattes Vektorfeld $X\colon G \to TG$ auf einer Liegruppe G heißt **linksinvariant**, wenn

$$T\lambda_g(X(h)) = X(gh) \quad \text{für alle } g, h \in G. \tag{1}$$

Die rechte Seite von (1) können wir auch als $X(\lambda_g(h))$ lesen, so dass also für jedes $g \in G$ verlangt wird, dass

$$(T\lambda_g) \circ X = X \circ \lambda_g.$$

Ein glattes Vektorfeld X auf G ist somit genau dann linksinvariant, wenn X zu X über λ_g verknüpft ist für jedes $g \in G$.

Die linksinvarianten Vektorfelder bilden einen Untervektorraum $\mathcal{V}(G)_\ell$ des Vektorraums $\mathcal{V}(G)$ der glatten Vektorfelder auf G. Es ist $\mathcal{V}(G)_\ell$ sogar eine Unter-Liealgebra von $\mathcal{V}(G)$, denn sind $X, Y \in \mathcal{V}(G)_\ell$, so sind für jedes $g \in G$ sowohl X zu X über λ_g verknüpft als auch Y zu Y über λ_g verknüpft; nach Lemma 15.9 sind $[X, Y]$ und $[X, Y]$ über λ_g verknüpft, also $[X, Y] \in \mathcal{V}(G)_\ell$.

Satz 16.2

Für jede Liegruppe G mit Neutralelement e ist die Abbildung

$$\mathrm{ev}_e \colon \mathcal{V}(G)_\ell \to T_e G, \quad X \mapsto X(e)$$

ein Isomorphismus von Vektorräumen. Für $v \in T_e G$ ist $v_\ell := (\mathrm{ev}_e)^{-1}(v) \colon G \to TG$ gegeben durch

$$v_\ell(g) := T\lambda_g(v) \quad \text{für } g \in G.$$

Die bilineare Abbildung

$$T_e G \times T_e G \to T_e G, \quad (v, w) \mapsto [v, w] := [v_\ell, w_\ell](e)$$

macht $T_e G$ zu einer Liealgebra $L(G)$ und $\mathrm{ev}_e \colon \mathcal{V}(G)_\ell \to L(G)$ zu einem Isomorphismus von Liealgebren.

Beweis. Wir benutzen die glatte Wirkung $G \times TG \to TG$, $(g, v) \mapsto g.v$ aus Satz 13.19. Zunächst ist $X \in \mathcal{V}(G)_\ell$ durch $X(e)$ festgelegt, denn für jedes $g \in G$ ist $X(g) = X(ge) = g.X(e)$; also ist ev_e injektiv. Gegeben $v \in T_e(G)$ definieren wir

$$v_\ell(g) := g.v \in T_g G$$

für alle $g \in G$. Dann ist $v_\ell \colon G \to TG$ glatt, somit $v_\ell \in \mathcal{V}(G)$. Für alle $g, h \in G$ ist $v_\ell(gh) = (gh).v = g.(h.v) = g.v_\ell(h)$, also $v_\ell \in \mathcal{V}(G)_\ell$. Da $(v_\ell)(e) = v$, ist ev_e surjektiv und $(\mathrm{ev}_e)^{-1}(v) = v_\ell$.

Satz 16.3

Für jeden glatten Homomorphismus $\phi\colon G \to H$ zwischen Liegruppen ist $L(\phi) := T_e(\phi)\colon T_eG \to T_eH$ ein Liealgebra-Homomorphismus von $L(G)$ nach $L(H)$.

Beweis. Für $g \in G$ gilt $\phi(gx) = \phi(g)\phi(x)$ für alle $x \in G$, also $\phi \circ \lambda_g^G = \lambda_{\phi(g)}^H \circ \phi$. Für $v \in L(G)$ folgt

$$T\phi(v_\ell(g)) = T\phi(T\lambda_g^G(v)) = T\lambda_{\phi(g)}^H \overbrace{T\phi(v)}^{=L(\phi)(v)} = (L(\phi)(v))_\ell(\phi(g)),$$

d.h. $v_\ell \in \mathcal{V}(G)_\ell$ und $(L(\phi)(v))_\ell \in \mathcal{V}(H)_\ell$ sind ϕ-verknüpft. Analoges gilt für $w \in L(G)$ an Stelle von v. Nach Lemma 15.9 sind auch $[v_\ell, w_\ell]$ und $[(L(\phi)(v))_\ell, (L(\phi)(w))_\ell]$ über ϕ verknüpft, also insbesondere

$$[(L(\phi)(v))_\ell, (L(\phi)(w))_\ell](\phi(e)) = T\phi([v_\ell, w_\ell](e)).$$

Die rechte Seite ist $T\phi([v,w]) = L(\phi)([v,w])$, die linke ist wegen $\phi(e) = e$ gleich $[L(\phi)(v), L(\phi)(w)]$. $\square$

Es ist $L(\mathrm{id}_G) = \mathrm{id}_{L(G)}$ da $T_e(\mathrm{id}_G) = \mathrm{id}_{T_e(G)}$ und $L(\psi \circ \phi) = L(\psi) \circ L(\phi)$ für glatte Gruppenhomomorphismen $\phi\colon G \to H$ und $\psi\colon H \to K$ zwischen Liegruppen, da $T_e(\psi \circ \phi) = T_e\psi \circ T_e\phi$. Also gilt:

L ist ein kovarianter Funktor von der Kategorie der Liegruppen und glatten Gruppenhomomorphismen in die Kategorie der endlich-dimensionalen reellen Liealgebren und Liealgebra-Homomorphismen.

Sei M eine C^k-Mannigfaltigkeit mit $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ und $X\colon M \to TM$ ein C^{k-1}-Vektorfeld. Eine auf einem offenen, nicht leeren Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ definierte C^1-Funktion $\gamma\colon I \to M$ wird eine **Lösung der Differentialgleichung**

$$\dot{y}(t) = X(y(t)) \tag{1}$$

genannt, wenn $\dot{\gamma}(t) = X(\gamma(t))$ für alle $t \in I$ gilt. Sind $t_0 \in \mathbb{R}$ und $y_0 \in M$ gegeben und gilt zudem $t_0 \in I$ und $\gamma(t_0) = y_0$, so nennt man γ eine **Lösung des Anfangswertproblems**

$$\dot{y}(t) = X(y(t)), \quad y(t_0) = y_0. \tag{2}$$

Allgemeiner:

Für ein offenes Intervall $J \subseteq \mathbb{R}$ nennen wir eine C^{k-1}-Funktion

$$f\colon J \times M \to TM$$

ein **zeitabhängiges C^{k-1}-Vektorfeld** auf M, wenn $f(t,p) \in T_pM$ für alle $t \in J$ und $p \in M$. Eine auf einem offenen, nicht leeren

Intervall $I \subseteq J$ definierte C^1-Funktion $\gamma\colon I \to M$ wird eine **Lösung der Differentialgleichung**

$$\dot{y}(t) = f(t, y(t)) \tag{3}$$

genannt, wenn $\dot{\gamma}(t) = f(t, \gamma(t))$ für alle $t \in I$ gilt. Sind $t_0 \in J$ und $y_0 \in M$ gegeben und gilt zudem $t_0 \in I$ und $\gamma(t_0) = y_0$, so nennt man γ eine **Lösung des Anfangswertproblems**

$$\dot{y}(t) = f(t, y(t)), \quad y(t_0) = y_0. \tag{4}$$

Zwei Eigenschaften sind wesentlich.

Definition 17.1

Wir sagen, die DGL (3) erfüllt **lokale Eindeutigkeit** von Lösungen, wenn für alle Lösungen $\gamma_1\colon I_1 \to M$ und $\gamma_2\colon I_2 \to M$ von (3) gilt: Ist $\gamma_1(t_0) = \gamma_2(t_0)$ für ein $t_0 \in I_1 \cap I_2$, so ist $\gamma_1|_W = \gamma_2|_W$ für eine t_0-Umgebung $W \subseteq I_1 \cap I_2$. Existiert für alle $(t_0, y_0) \in J \times M$ eine Lösung des Anfangswertproblems (4), so sagen wir, die DGL (3) erfüllt **lokale Existenz** von Lösungen.

Lemma 17.2

Erfüllt (3) lokale Eindeutigkeit von Lösungen und sind $\gamma_1 \colon I_1 \to M$ sowie $\gamma_2 \colon I_2 \to M$ Lösungen von (3) derart, dass $\gamma_1(t_0) = \gamma_2(t_0)$ für ein $t_0 \in I_1 \cap I_2$, so ist $\gamma_1|_{I_1 \cap I_2} = \gamma_2|_{I_1 \cap I_2}$.

Beweis. Die Teilmenge $E := \{t \in I_1 \cap I_2 \colon \gamma_1(t) = \gamma_2(t)\} = (\gamma_1, \gamma_2)^{-1}(\Delta_M)$ von $I_1 \cap I_2$ ist (relativ) abgeschlossen, da M Hausdorffsch und somit die Diagonale $\Delta_M \subseteq M \times M$ abgeschlossen ist. Da (3) per Voraussetzung lokale Eindeutigkeit von Lösungen erfüllt, ist E zudem offen. Weiter ist $E \neq \emptyset$, da $t_0 \in E$. Da $I_1 \cap I_2$ ein Intervall und somit zusammenhängend ist, folgt $I_1 \cap I_2 = E$, also $\gamma_1|_{I_1 \cap I_2} = \gamma_2|_{I_1 \cap I_2}$. $\square$

Lemma 17.3

Erfüllt (3) lokale Eindeutigkeit und lokale Existenz von Lösungen, so gibt es für alle $(t_0, y_0) \in J \times M$ eine Lösung $\phi_{t_0,y_0} \colon I_{t_0,y_0} \to M$ des Anfangswertproblems (4), die **maximal** ist in dem Sinne, dass $I \subseteq I_{t_0,y_0}$ und $\gamma = \phi_{t_0,y_0}|_I$ für jede Lösung $\gamma \colon I \to M$ des Anfangswertproblems (4).

Beweis. Gegeben $(t_0, y_0) \in J \times M$ betrachten wir die Menge Λ aller Lösungen $\gamma\colon I_\gamma \to M$ des Anfangswertproblems (4). Als Vereinigung von offenen Intervallen, die t_0 enthalten, ist $I_{t_0,y_0} := \bigcup_{\gamma\in\Lambda} I_\gamma$ ein offenes Intervall mit $t_0 \in I_{t_0,y_0}$. Für $t \in I_{t_0,y_0}$ sei

$$\phi_{t_0,y_0}(t) := \gamma(t) \quad \text{wenn} \;\; t \in I_\gamma \;\; \text{für ein} \;\; \gamma \in \Lambda.$$

Dies liefert eine wohldefinierte Funktion $\phi_{t_0,y_0}\colon I_{t_0,y_0} \to M$; ist nämlich $t \in I_\gamma$ und $t \in I_\eta$ mit $\gamma, \eta \in \Lambda$, so folgt mit Lemma 17.2 aus $\gamma(t_0) = y_0 = \eta(t_0)$, dass $\gamma|_{I_\gamma \cap I_\eta} = \eta|_{I_\gamma\cap I_\eta}$ und somit $\gamma(t) = \eta(t)$. Per Konstruktion ist $\phi_{t_0,y_0}|_{I_\gamma} = \gamma$ für jedes $\gamma \in \Lambda$, folglich ϕ_{t_0,y_0} eine C^1-Funktion, eine Lösung des Anfangswertproblems (4) und maximal. □

Lemma 17.4

Erfülle (3) lokale Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen. Sind $(t_0, y_0), (t_1, y_1) \in J \times M$ und existiert ein $s \in I_{t_0,y_0} \cap I_{t_1,y_1}$ mit $\phi_{t_0,y_0}(s) = \phi_{t_1,y_1}(s)$, so ist $I_{t_0,y_0} = I_{t_1,y_1}$ und $\phi_{t_0,y_0} = \phi_{t_1,y_1}$.

Beweis. Sei $z := \phi_{t_0,y_0}(s) = \phi_{t_1,y_1}(s)$. Da ϕ_{t_0,y_0} die DGL (3) löst und $\phi_{t_0,y_0}(s) = z$ gilt, ist $I_{t_0,y_0} \subseteq I_{s,z}$ und $\phi_{t_0,y_0} = \phi_{s,z}|_{I_{z_0,y_0}}$. Somit ist $\phi_{s,z}$ eine Lösung von (3) mit $\phi_{s,z}(t_0) = \phi_{t_0,y_0}(t_0) = y_0$, woraus $I_{s,z} \subseteq I_{t_0,y_0}$ folgt. Es ist also $I_{s,z} = I_{t_0,y_0}$ und somit $\phi_{t_0,y_0} = \phi_{s,z}$. Analog sehen wir, dass $\phi_{t_1,y_1} = \phi_{s,z}$, also $\phi_{t_0,y_0} = \phi_{s,z} = \phi_{t_1,y_1}$. □

Definition 17.5

Erfüllt die DGL (3) lokale Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen, so definieren wir

$$\Omega := \bigcup_{(t_0,y_0)\in J\times M} I_{t_0,y_0} \times \{(t_0, y_0)\} \subseteq J \times J \times M$$

und nennen

$$\mathrm{Fl}\colon \Omega \to M, \quad (t, t_0, y_0) \mapsto \phi_{t_0,y_0}(t)$$

den zugehörigen **Fluss**. Schreibe auch $\mathrm{Fl}_{t,t_0}(y_0) := \mathrm{Fl}(t, t_0, y_0)$. Für $(t, t_0) \in J \times J$ sei $\Omega_{t,t_0} := \{y_0 \in M\colon (t, t_0, y_0) \in \Omega\}$.

Soll die benutzte Funktion hervorgehoben werden, schreiben wir auch Ω^f und Fl^f statt Ω und Fl.

Gilt $I_{t_0,y_0} = J$ für alle $(t_0, y_0) \in J \times M$, wird das zeitabhängige Vektorfeld f **vollständig** genannt. Ein Vektorfeld $X\colon M \to TM$ heißt **vollständig**, wenn $\mathbb{R} \times M \to TM$, $(t, p) \mapsto X(p)$ es ist.

Bemerkung 17.6. Im Fall eines vollständigen zeitabhängigen Vektorfelds ist also $\Omega = J \times J \times M$, der Fluss

$$\mathrm{Fl}\colon J \times J \times M \to M$$

ist global definiert und es ist $\Omega_{t,t_0} = M$ für alle $t, t_0 \in J$.

Beispiel 17.7

Für $a \in \mathbb{C}$ betrachten wir die DGL $y'(t) = ay(t)$ auf $M := \mathbb{C} = \mathbb{R}^2$, also $\dot{y}(t) = f(t, y(t))$ mit

$$f\colon \mathbb{R} \times \mathbb{C} \to T(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \times \mathbb{C}, \quad (t, z) \mapsto (z, az).$$

Die DGL erfüllt lokale Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen und f ist vollständig mit

$$\mathrm{Fl}_{t,t_0}(y_0) = e^{a(t-t_0)} y_0 \quad \text{für alle } t, t_0 \in \mathbb{R} \text{ und } y_0 \in \mathbb{C}.$$

Für $t_0 \in \mathbb{R}$ und $y_0 \in \mathbb{C}$ ist $\phi_{t_0,y_0} \colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $t \mapsto e^{a(t-t_0)}y_0$ wegen $\phi'_{t_0,y_0}(t) = ae^{a(t-t_0)}y_0 = a\phi_{t,y_0}(t)$ eine Lösung der DGL und somit des Anfangswertproblems (4), da $\phi_{t_0,y_0}(t_0) = e^0 y_0 = y_0$. Lokale Eindeutigkeit folgt, wenn wir zeigen können, dass für jede Lösung $\gamma \colon I \to \mathbb{C}$ der DGL und $t_0 \in I$ stets $\gamma(t) = e^{a(t-t_0)}\gamma(t_0)$ gilt für alle $t \in I$, also $h(t) := e^{-a(t-t_0)}\gamma(t)$ konstant ist mit Wert $h(t) = \gamma(t_0)$. Da $h(t_0) = \gamma(t_0)$, folgt letzteres aus

$$h'(t) = -ae^{-a(t-t_0)}\gamma(t) - e^{-a(t-t_0)}\underbrace{\gamma'(t)}_{=a\gamma(t)} = 0.$$

Für alle, die die Matrix-Exponentialfunktion $\mathbb{R}^{m\times m} \to \mathbb{R}^{m\times m}$, $A \mapsto e^A := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}A^n$ kennen, sei angemerkt:

Bemerkung 17.8 Eine zu 17.7 analoge Rechnung zeigt,[9] dass für jede Matrix $A \in \mathbb{R}^{m\times m}$ die DGL $y'(t) = Ay(t)$ auf $\mathbb{R}^m$ lokale Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen erfüllt, das Vektorfeld $\mathbb{R}^m \to T(\mathbb{R}^m) = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$, $x \mapsto (x, Ax)$ vollständig ist und

$$\mathrm{Fl}_{t,t_0}(y_0) = e^{(t-t_0)A}y_0 \quad \text{für alle } t, t_0 \in \mathbb{R} \text{ und } y_0 \in \mathbb{R}^m.$$

[9] Mit $h(t) = e^{-(t-t_0)A}\gamma(t)$.

Lemma 17.9

Erfüllt (3) lokale Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen, so gilt für den zugehörigen Fluss $\mathrm{Fl}\colon \Omega \to M$:

(a) Für alle $(t_0, y_0) \in J \times M$ ist $(t_0, t_0, y_0) \in \Omega$ und $\mathrm{Fl}_{t_0,t_0}(y_0) = y_0$.

(b) Gegeben $t_0, t_1, t_2 \in J$ und $y_0 \in M$ mit $(t_1, t_0, y_0) \in \Omega$ gilt genau dann $(t_2, t_0, y_0) \in \Omega$, wenn $(t_2, t_1, \mathrm{Fl}_{t_1,t_0}(y_0)) \in \Omega$. In diesem Fall ist $\mathrm{Fl}_{t_2,t_1}(\mathrm{Fl}_{t_1,t_0}(y_0)) = \mathrm{Fl}_{t_2,t_0}(y_0)$.

(c) Für alle $t, t_0 \in J$ ist $\mathrm{Fl}_{t,t_0}(\Omega_{t,t_0}) = \Omega_{t_0,t}$ und es ist $\mathrm{Fl}_{t,t_0}\colon \Omega_{t,t_0} \to \Omega_{t_0,t}$ eine Bijektion mit $(\mathrm{Fl}_{t,t_0})^{-1} = \mathrm{Fl}_{t_0,t}$.

Beweis. (a) Es ist $t_0 \in I_{t_0,y_0}$ und $\mathrm{Fl}_{t_0,t_0}(y_0) = \phi_{t_0,y_0}(t_0) = y_0$.

(b) Mit $z_0 := \mathrm{Fl}_{t_1,t_0}(y_0)$ ist $\phi_{t_1,z_0}(t_1) = z_0 = \mathrm{Fl}_{t_1,t_0}(y_0) = \phi_{t_0,y_0}(t_1)$. Nach Lemma 17.4 ist $\phi_{t_1,z_0} = \phi_{t_0,y_0}$. Also $(t_2, t_1, z_0) \in \Omega \Leftrightarrow t_2 \in I_{t_1,z_0} = I_{t_0,y_0} \Leftrightarrow (t_2, t_0, y_0) \in \Omega$. In diesem Fall ist $\mathrm{Fl}_{t_2,t_1}(z_0) = \phi_{t_1,z_0}(t_2) = \phi_{t_0,y_0}(t_2) = \mathrm{Fl}_{t_2,t_0}(y_0)$.

(c) Für $y_0 \in \Omega_{t,t_0}$ sei $z_0 := \mathrm{Fl}_{t,t_0}(y_0)$. Dann ist $\phi_{t,z_0}(t) = z_0 = \mathrm{Fl}_{t,t_0}(y_0) = \phi_{t_0,y_0}(t)$, nach Lemma 17.4 also $\phi_{t,z_0} = \phi_{t_0,y_0}$. Insbesondere ist $t_0 \in I_{t_0,y_0} = I_{t,z_0}$, somit $(t_0, t, z_0) \in \Omega$ und folglich $z_0 \in \Omega_{t_0,t}$. Also gilt $\mathrm{Fl}_{t,t_0}(\Omega_{t,t_0}) \subseteq \Omega_{t_0,t}$. Zudem ist

$$\mathrm{Fl}_{t_0,t}(\mathrm{Fl}_{t,t_0}(y_0)) = \mathrm{Fl}_{t_0,t_0}(y_0) = y_0$$

nach (b), insbesondere

$$\mathrm{Fl}_{t_0,t} \circ \mathrm{Fl}_{t,t_0} = \mathrm{id}_{\Omega_{t,t_0}} \tag{5}$$

und $\mathrm{Fl}_{t,t_0} \colon \Omega_{t,t_0} \to M$ injektiv. Da auch $\mathrm{Fl}_{t_0,t}(\Omega_{t_0,t}) \subseteq \Omega_{t,t_0}$, ist

$$\mathrm{Fl}_{t,t_0}(\Omega_{t,t_0}) \supseteq \mathrm{Fl}_{t,t_0}(\mathrm{Fl}_{t_0,t}(\Omega_{t_0,t})) = \Omega_{t_0,t}.$$

Also ist $\mathrm{Fl}_{t,t_0}(\Omega_{t,t_0}) = \Omega_{t_0,t}$, somit $\mathrm{Fl}_{t,t_0} \colon \Omega_{t,t_0} \to \Omega_{t_0,t}$ auch surjektiv und somit bijektiv. Nach (5) ist dann $\mathrm{Fl}_{t_0,t} = \mathrm{Fl}_{t,t_0}^{-1}$. □

Definition 17.10

Es sei $f \colon X \times Y \to Z$ eine Funktion, wobei X ein topologischer Raum ist und (Y, d_Y) sowie (Z, d_Z) metrische Räume sind.

(a) Man sagt, f erfüllt eine **Lipschitzbedingung**, wenn ein $L \in [0, \infty[$ existiert mit $d_Z(f(x, y_1), f(x, y_2)) \leq L\, d_Y(y_1, y_2)$ für alle $x \in X$, $y_1, y_2 \in Y$.

(b) Man sagt, f erfüllt eine **lokale Lipschitzbedingung**, wenn für alle $(x_0, y_0) \in X \times Y$ eine x_0-Umgebung $U \subseteq X$ und eine y_0-Umgebung $V \subseteq Y$ existiert, so dass $f|_{U \times V}$ eine Lipschitzbedingung erfüllt.

Man nennt L eine **Lipschitzkonstante**. Zur Betonung spricht man in (a) auch von einer **globalen** Lipschitzbedingung. Analysis-Stoff:

Satz 17.11 (Lokaler Existenz- und Eindeutigkeitssatz)

Sei $J \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes, nicht leeres Intervall, $U \subseteq \mathbb{R}^m$ offen und $f\colon J \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ eine stetige Funktion, die eine lokale Lipschitzbedingung erfüllt. Dann erfüllt die DGL $y'(t) = f(t, y(t))$ lokale Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen. $\square$

Lemma 17.12

Seien $U \subseteq \mathbb{R}^n$ und $V \subseteq \mathbb{R}^m$ offene Teilmengen und $f\colon U \times V \to \mathbb{R}^\ell$, $(x, y) \mapsto f(x, y)$ eine stetige Funktion derart, dass die partiellen Ableitung $\frac{\partial f}{\partial y_j}\colon U \times V \to \mathbb{R}^\ell$ existiert und stetig ist, für alle $j \in \{1, \ldots, m\}$ (z.B. f ist C^1). Dann erfüllt f eine lokale Lipschitzbedingung. Sind zusätzlich alle der genannten partiellen Ableitungen beschränkte Funktionen und ist V konvex, so erfüllt f eine globale Lipschitzbedingung.

Beweis. Wir versehen $\mathbb{R}^m$ und $\mathbb{R}^\ell$ mit der Maximum-Norm. Sei $(x_0, y_0) \in U \times V$. Da die partiellen Ableitungen stetig sind, können wir nach Verkleinern der x_0-Umgebung U und der y_0-Umgebung V annehmen, dass alle der partiellen Ableitungen beschränkte Funktionen sind und V konvex (was unter der Zusatzvoraussetzung am Schluss schon ohne Verkleinern der Fall ist). Also ist

$$M := \max\{\|\partial f/\partial y_1\|_\infty, \ldots, \|\partial f/\partial y_m\|_\infty\} < \infty$$

mit $\|g\|_\infty := \sup\{\|g(x,y)\|_\infty \colon (x,y) \in U \times V\}$ für Funktionen $g \colon U \times V \to \mathbb{R}^\ell$. Für alle $x \in U$ und $y_1, y_2 \in V$ mit $y_1 = (y_{1,1}, \ldots, y_{1,m})$ und $y_2 = (y_{2,1}, \ldots, y_{2,m})$ ist

$$f(x, y_2) = f(x, y_1) + \int_0^1 \sum_{j=1}^m \frac{\partial f}{\partial y_j}(x, y_1 + t(y_2 - y_1))(y_{2,j} - y_{1,j})\, dt,$$

da $f(x, y_2) = \gamma(1)$ mit $\gamma \colon [0,1] \to \mathbb{R}^\ell$, $t \mapsto f(x, y_1 + t(y_2 - y_1))$; also

$$\|f(x,y_2)-f(x,y_1)\|_\infty \leq \sum_{j=1}^m \int_0^1 \underbrace{\|\partial f/\partial y_j\|_\infty}_{\leq M} \underbrace{|y_{2,j}-y_{1,j}|}_{\leq \|y_2-y_1\|_\infty} \, dt \leq mM\,\|y_2-y_1\|_\infty .$$

Bemerkung 17.13 Sei $f\colon U \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^\ell$ stetig und $f(x,\cdot)\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^\ell$ für jedes $x \in U$ eine lineare Abbildung, also $f(x,y) = \sum_{j=1}^m a_j(x) y_j$ mit $a_j(x) := f(x, e_j)$. Für $x_0 \in U$ existiert eine x_0-Umgebung $U_0 \subseteq U$, auf der $\partial f/\partial y_j = a_j \circ \mathrm{pr}_U$ beschränkt ist für alle $j \in \{1,\ldots,m\}$. Nach Lemma 17.11 erfüllt $f|_{U_0 \times \mathbb{R}^m}$ eine globale Lipschitzbedingung.

Definition 17.14

Es sei M eine C^k-Mannigfaltigkeit mit $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, X ein topologischer Raum und $f\colon X \times M \to TM$ eine Funktion derart, dass $f(x,p) \in T_pM$ für alle $(x,p) \in X \times M$. Wir sagen, f erfülle eine **lokale Lipschitzbedingung**, wenn für alle $(x_0, y_0) \in X \times M$ eine x_0-Umgebung $Q \subseteq X$ existiert und eine Karte $\phi\colon U_\phi \to V_\phi \subseteq \mathbb{R}^m$ um y_0 derart, dass

$$d\phi \circ f|_{Q \times U_\phi} \circ (\mathrm{id}_Q \times \phi^{-1})\colon Q \times V_\phi \to \mathbb{R}^m$$

eine lokale Lipschitzbedingung erfüllt.

Bemerkung 17.15. Nach Lemma 17.12 ist Letzteres sicher dann der Fall, wenn X eine C^{k-1}-Mannigfaltigkeit, $k \geq 2$ und f eine C^{k-1}-Funktion ist (mit $Q = X$ und für jede Karte ϕ um y_0).

Wie zuvor sei M eine C^k-Mannigfaltigkeit mit $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Es sei $J \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $f\colon J \times M \to TM$ ein zeitabhängiges C^{k-1}-Vektorfeld auf M.

17.16. Für eine Karte $\phi\colon U_\phi \to V_\phi \subseteq \mathbb{R}^m$ von M definieren wir den **lokalen Repräsentanten** von f in der Karte ϕ als

$$f_\phi\colon J \times V_\phi \to \mathbb{R}^m, \quad d\phi \circ f \circ (\mathrm{id}_J \times \phi^{-1}).$$

Lemma 17.17

Sei ϕ eine Karte für M und $I \subseteq J$ ein offenes, nicht leeres Intervall. Eine C^1-Funktion $\gamma \colon I \to M$ mit $\gamma(I) \subseteq U_\phi$ löst genau dann die DGL (3), wenn $\phi \circ \gamma$ die DGL

$$y'(t) = f_\phi(t, y(t))$$

löst, also $(\phi \circ \gamma)'(t) = f_\phi(t, (\phi \circ \gamma)(t))$ für alle $t \in I$.

Beweis. Für $t \in I$ gilt wegen der Injektivität von $d\phi|_{T_{\gamma(t)}M}$ genau dann $\dot{\gamma}(t) = f(t, \gamma(t))$, wenn

$$d\phi(\dot{\gamma}(t)) = d\phi(f(t, \gamma(t))) \tag{6}$$

gilt. Die linke Seite von (6) ist $(\phi \circ \gamma)'(t)$, die rechte $f_\phi(t, (\phi \circ \gamma)(t))$. $\square$

Satz 17.18

Sei $f\colon J \times M \to TM$ ein zeitabhängiges C^{k-1}-Vektorfeld. Ist $k \geq 2$ oder $k = 1$ und f erfüllt eine lokale Lipschitzbedingung, so erfüllt die DGL (3) lokale Existenz und lokale Eindeutigkeit von Lösungen.

Beweis. Sind $\gamma_1\colon I_1 \to M$ und $\gamma_2\colon I_2 \to M$ Lösungen der DGL (3) und $\gamma_1(t_0) = \gamma_2(t_0) =: y_0$ für ein $t_0 \in I_1 \cap I_2$, so gibt es ein offenes t_0 enthaltendes Teilintervall $Q \subseteq I_1 \cap I_2$ und eine Karte $\phi\colon U_\phi \to V_\phi \subseteq \mathbb{R}^m$ für M um y_0 derart, dass $f_\phi|_{Q \times V_\phi}$ eine lokale Lipschitzbedingung erfüllt (im Falle $k \geq 2$ gilt dies für jede Karte ϕ um y_0 mit $Q := I_1 \cap I_2$, da f_ϕ dann C^1 ist). Dann sind $\phi \circ \gamma_1|_Q$ und $\phi \circ \gamma_2|_Q$ Lösungen von $y'(t) = f_\phi(t, y(t))$ und stimmen an der Stelle t_0 überein. Nach Satz 17.11 gibt es eine t_0-Umgebung $W \subseteq Q$ mit $\phi \circ \gamma_1|_W = \phi \circ \gamma_2|_W$, woraus $\gamma_1|_W = \gamma_2|_W$ folgt.
Gegeben $(t_0, y_0) \in J \times M$ wählen wir Q und ϕ wie zuvor. Nach Satz 17.11 hat das Anfangswertproblem $y'(t) = f_\phi(t, y(t))$, $y(t_0) = \phi(y_0)$ eine Lösung $\eta\colon J \to V_\phi$ auf einem offenen, nicht

leeren Intervall $J \subseteq Q$. Dann ist $\phi^{-1} \circ \eta$ eine Lösung für $\dot{y}(t) = f(t, y(t))$, $y(t_0) = y_0$. $\square$

Bemerkung 17.19 (Lösungen autonomer Systeme)

Ist $X\colon M \to TM$ ein C^{k-1}-Vektorfeld, $\gamma\colon I \to M$ eine Lösung von

$$\dot{y}(t) = X(y(t)) \tag{7}$$

und $a \in \mathbb{R}$, so ist auch $\eta\colon I + a \to M$, $t \mapsto \gamma(t-a)$ eine Lösung der DGL (7).

Für $\psi\colon I + a \to I$, $t \mapsto t - a$ ist nämlich $T\psi\colon (I + a) \times \mathbb{R} \to I \times \mathbb{R}$ die Abbildung $(t, s) \mapsto (\psi(t), d\psi(t, s)) = (t - a, s)$ und

$$\begin{aligned} \dot{\eta}(t) &= (\gamma \circ \psi)^{\cdot}(t) = T(\gamma \circ \psi)(t, 1) = T\gamma(T\psi(t, 1)) \\ &= T\gamma(t - a, 1) = \dot{\gamma}(t - a) = X(\gamma(t - a)) = X(\eta(t)). \end{aligned}$$

Erfüllt (7) zudem lokale Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen, so gilt für alle $(t_0, y_0) \in \mathbb{R} \times M$ und $a \in \mathbb{R}$

$$I_{t_0,y_0}+a = I_{t_0+a,y_0} \text{ und } \phi_{t_0+a,y_0}(t) = \phi_{t_0,y_0}(t-a) \text{ für alle } t \in I_{t_0+a,y_0}.$$

Da $\eta\colon I_{t_0,y_0} + a \to M$, $t \mapsto \phi_{t_0,y_0}(t-a)$ eine Lösung der DGL ist mit $\eta(t_0+a) = \phi_{t_0,y_0}(t_0) = y_0$, ist nämlich

$$I_{t_0,y_0} + a \subseteq I_{t_0+a,y_0} \tag{8}$$

und

$$\eta = \phi_{t_0+a,y_0}|_{I_{t_0,y_0}+a}. \tag{9}$$

Ersetzen von t_0 durch $t_0 + a$ und a durch $-a$ in (8) liefert $I_{t_0+a,y_0} - a \subseteq I_{t_0,y_0}$ gilt. Also ist $I_{t_0,y_0} + a \supseteq I_{t_0+a,y_0}$ und folglich sind beide Mengen gleich; aus (9) wird somit $\eta = \phi_{t_0+a,y_0}$.

Beispiel 17.20 (Flüsse zu linksinvarianten Vektorfeldern)

Sei G eine Liegruppe mit Neutralelement e. Sei $v \in L(G) = T_eG$ und $v_\ell\colon G \to TG$ das zugehörige linksinvariante Vektorfeld. Da dieses (und somit auch $f\colon \mathbb{R} \times G \to TG$, $(t,g) \mapsto v_\ell(g)$) glatt ist, erfüllt die DGL

$$\dot{y}(t) = v_\ell(y(t)) \tag{10}$$

lokale Existenz und lokale Eindeutigkeit von Lösungen. Wir zeigen, dass das Anfangswertproblem

$$\dot{y}(t) = v_\ell(y(t)), \quad y(0) = e \tag{11}$$

eine auf ganz $\mathbb{R}$ definierte Lösung $\gamma_v := \phi_{0,e}$ hat und der Fluss von (10) gegeben ist durch

$$\mathrm{Fl}\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times G \to G, \quad (t, t_0, g) \mapsto g\gamma_v(t - t_0). \tag{12}$$

Sei $\gamma_v := \phi_{0,e}\colon I_{0,e} \to G$ die maximale Lösung von (11). Für jedes $g \in G$ ist das Vektorfeld v_ℓ zu sich selbst λ_g-verknüpft, nach Lemma 13.28 somit $\lambda_g \circ \gamma_v$ eine Lösung der DGL (10) mit $(\lambda_g \circ \gamma_v)(0) = g\gamma_v(0) = g$; es ist also $I_{0,e} \subseteq I_{0,g}$ und $\phi_{0,g}(t) = g\gamma_v(t)$ für alle $t \in I_{0,e}$. Nach Bemerkung 17.19 ist für alle $a \in \mathbb{R}$ weiter $I_{0,e} + a \subseteq I_{0,g} + a = I_{a,g}$ und

$$\phi_{a,g}(t) = \phi_{0,g}(t - a) \text{ für alle } t \in I_{0,e} + a. \tag{13}$$

Für ein $\varepsilon > 0$ ist $]-\varepsilon, \varepsilon[\subseteq I_{0,e}$. Für alle $a \in I_{0,e}$ können wir $g := \gamma_v(a) = \phi_{0,e}(a)$ wählen und erhalten

$$a +]-\varepsilon, \varepsilon[\subseteq a + I_{0,e} \subseteq I_{a,g} = I_{0,e}$$

wegen Lemma 17.4. Also ist $I_{0,e} = \mathbb{R}$ und nach (13) somit $I_{a,g} = \mathbb{R}$ für alle $(a, g) \in \mathbb{R} \times G$ und $\mathrm{Fl}(t, a, g) = \phi_{a,g}(t) = g\gamma_v(t - a)$.

Satz 17.21

Ist G eine Liegruppe, so gibt es für jedes $v \in L(G) = T_e G$ genau einen glatten Gruppenhomomorphismus

$$\gamma_v : (\mathbb{R}, +) \to G$$

mit $\dot{\gamma}_v(0) = v$. Dieser ist die maximale Lösung des Anfangswertproblems (11).

Man nennt γ_v auch eine **glatte Einparametergruppe**.

Beweis. Sei $\gamma_v : \mathbb{R} \to G$ die maximale Lösung von (11). Da das linksinvariante Vektorfeld v_ℓ glatt ist, ist γ_v nach Bemerkung 13.31 (d) glatt. Für alle $t, s \in \mathbb{R}$ ist nach (12)

$$\gamma_v(s+t) = \mathrm{Fl}_{s,-t}(e), \quad \gamma_v(t) = \mathrm{Fl}_{0,-t}(e) \text{ und } \mathrm{Fl}_{s,0}(\gamma_v(t)) = \gamma_v(t)\gamma_v(s).$$

Also gilt

$$\gamma_v(s+t) = \mathrm{Fl}_{s,-t}(e) = \mathrm{Fl}_{s,0}(\mathrm{Fl}_{0,-t}(e)) = \mathrm{Fl}_{s,0}(\gamma_v(t)) = \gamma_v(t)\gamma_v(s),$$

wobei das zweite Gleichheitszeichen auf Lemma 17.9 (b) beruht. Somit ist γ_v ein glatter Gruppenhomomorphismus. Weiter ist $\dot{\gamma}_v(0) = v_\ell(\gamma_v(0)) = v_\ell(e) = v$.

Ist $\gamma\colon \mathbb{R} \to G$ ein glatter Gruppenhomomorphismus mit $\dot{\gamma}(0) = e$, so betrachten wir für $t \in \mathbb{R}$ die Linkstranslationen $\lambda_t^{\mathbb{R}}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $s \mapsto t + s$ und $\lambda_{\gamma(t)}^G\colon G \to G$, $x \mapsto \gamma(t)x$. Für alle $s \in \mathbb{R}$ ist

$$(\gamma \circ \lambda_t^{\mathbb{R}})(s) = \gamma(t+s) = \gamma(t)\gamma(s) = (\lambda_{\gamma(t)}^G \circ \gamma)(s),$$

somit $\gamma \circ \lambda_t^{\mathbb{R}} = \lambda_{\gamma(t)}^G \circ \gamma$ und folglich

$$(\gamma \circ \lambda_t^{\mathbb{R}})^{\cdot}(0) = (\lambda_{\gamma(t)}^G \circ \gamma)^{\cdot}(0) = T\lambda_{\gamma(t)}^G \dot{\gamma}(0) = T\lambda_{\gamma(t)}^G v = v_\ell(\gamma(t)),$$

wobei wegen $T\lambda_t^{\mathbb{R}}(0,1)(t,1)$ die linke Seite gleich $\dot{\gamma}(t)$ ist. Zudem ist $\gamma(0) = e$. Also ist γ eine Lösung auf ganz $\mathbb{R}$ definierte Lösung des AWP (11) und wegen der Maximalität von γ_v somit $\gamma = \gamma_v$. □

Definition 17.22

Die **Exponentialfunktion** einer Liegruppe G ist definiert als

$$\exp_G\colon L(G) \to G, \quad v \mapsto \gamma_v(1),$$

wobei $\gamma_v\colon \mathbb{R} \to G$ die glatte Einparametergruppe mit $\dot{\gamma}_v(0) = v$ ist.

Satz 17.23

Ist G eine Liegruppe, so gilt $\gamma_v(t) = \exp_G(tv)$ für alle $v \in L(G)$ und $t \in \mathbb{R}$.

Beweis. Gegeben v und t ist $\psi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $s \mapsto ts$ ein glatter Gruppenhomomorphismus von $(\mathbb{R}, +)$ nach $(\mathbb{R}, +)$, also $\eta := \gamma_v \circ \psi\colon \mathbb{R} \to G$, $s \mapsto \gamma_v(st)$ eine glatte Einparametergruppe. Wegen $T\psi(0,1) = (\psi(0), d\psi(0,1)) = (0, \psi'(0)) = (0,t)$ ist $\dot{\eta}(0) = T(\gamma_v)(T\psi(0,1)) = T(\gamma_v)(0,t) = tT(\gamma_v)(0,1) = t\dot{\gamma}_v(0) = tv$, also $\eta = \gamma_{tv}$ und somit $\exp_G(tv) = \gamma_{tv}(1) = \eta(1) = \gamma_v(t)$. $\square$

Wir untersuchen nun die Abhängigkeit der Lösungen von DGLn von Parametern und Anfangsbedingungen, in folgender Situation.

17.24. Es sei M eine C^k-Mannigfaltigkeit mit $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, weiter N eine C^{k-1}-Mannigfaltigkeit, $J \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und

$$f\colon N \times J \times M \to TM$$

eine C^{k-1}-Abbildung derart, dass $f(x,t,p) \in T_pM$ für alle $(x,t,p) \in N \times J \times M$. Im Fall $k = 1$ nehmen wir zusätzlich an, dass $f\colon (N \times J) \times M \to TM$ eine lokale Lipschitzbedingung erfüllt.

Für jedes $x \in N$ können wir die Differentialgleichung

$$\dot{y}(t) = f(x, t, y(t)) = f_x(t, y(t)) \tag{14}$$

betrachten mit dem zeitabhängigen C^{k-1}-Vektorfeld $f_x := f(x, \cdot)\colon J \times M \to TM$, welches eine lokale Lipschitzbedingung erfüllt. Die DGL (14) erfüllt also lokale Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen und wir können den zugehörigen Fluss betrachten,

$$\mathrm{Fl}^{f_x}\colon \Omega^{f_x} \to M.$$

Dann ist $\mathrm{Fl}(x, t, t_0, y_0) := \mathrm{Fl}^{f_x}_{t,t_0}(y_0)$ also genau für (x, t, t_0, y_0) in

$$\Omega := \bigcup_{x \in N} \{x\} \times \Omega^{f_x}$$

definiert und wir erhalten so einen **Fluss mit Parametern**

$$\mathrm{Fl}\colon \Omega \to M$$

mit $\Omega \subseteq N \times J \times J \times M$. Wir schreiben auch

$$\phi^x_{t_0,y_0}(t) := \mathrm{Fl}^x_{t,t_0}(y_0) := \mathrm{Fl}(x, t, t_0, y_0).$$

Ziel ist der folgende Satz.

Satz 17.25

In der Situation von 17.24 ist Ω eine offene Teilmenge von $N \times J \times J \times M$. Der Fluss mit Parametern, $\mathrm{Fl}\colon \Omega \to M$, ist eine C^{k-1}-Abbildung.

Vor dem Beweis betrachten wir ein Beispiel.

Folgerung 17.26

Für jede Liegruppe G ist die Exponentialfunktion $\exp_G\colon L(G) \to G$ eine glatte Abbildung mit $T_0 \exp_G = \mathrm{id}_{L(G)}$. Insbesondere ist $\exp_G$ ein lokaler C^∞-Diffeomorphismus an der Stelle 0.

Wir identifizieren hier $T(L(G))$ mit $L(G) \times L(G)$ wie in 13.35, wobei $T_0 L(G)$ mit $\{0\} \times L(G)$ identifiziert wird. Letzteren Vektorraum identifizieren wir mit $L(G)$ via $(0, v) \mapsto v$ (vgl. 13.37).

Beweis von Folgerung 17.26. Die Linkswirkung $G \times TG \to TG$, $(g, v) \mapsto g.v$ ist glatt, somit

$$f\colon L(G) \times \mathbb{R} \times G \to TG, \ (v, t, g) \mapsto g.v = v_\ell(g)$$

eine glatte Abbildung. Für jedes $v \in L(G)$ ist das linksinvariante

Vektorfeld v_ℓ nach Beispiel 17.20 vollständig, also $f_v := f(v, \cdot)$ vollständig, somit $\Omega^{f_v} = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times G$. Der Definitionsbereich des Flusses mit Parametern ist also

$$\Omega = L(G) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times G$$

und nach (12) und Satz 17.23 ist der Fluss mit Parametern gegeben durch

$$\mathrm{Fl}(v, t, t_0, g) = g\gamma_v(t - t_0) = g \exp_G((t - t_0)v).$$

Nach Satz 17.25 ist der Fluss Fl mit Parametern eine glatte Abbildung, insbesondere also auch

$$\exp_G \colon L(G) \to G, \quad v \mapsto \mathrm{Fl}(v, 1, 0, e)$$

glatt. Wir brauchen nur noch zu beobachten, dass für $v \in L(G)$

$$\begin{aligned} T_0 \exp_G(v) &= T \exp_G(0, v) = T \exp_G([t \mapsto tv]) = [t \mapsto \exp_G(tv)] \\ &= [\gamma_v] = T\gamma_v([t \mapsto t]) = T\gamma_v(0, 1) = \dot{\gamma}_v(0) = v \end{aligned}$$

unter Benutzung geometrischer Tangentialvektoren. □

Um Satz 17.25 zu beweisen, benutzen wir ein lokales Resultat aus der Analysis-Literatur (siehe Bemerkung 17.28 (a)).

Satz 17.27

Es seien $W \subseteq \mathbb{R}^n$ und $U \subseteq \mathbb{R}^m$ offene Teilmengen, $J \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $f\colon W \times J \times U \to \mathbb{R}^m$ eine C^k-Funktion mit $k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$, die im Falle $k = 0$ eine lokale Lipschitzbedingung auf $(W \times J) \times U$ erfüllen soll. Dann gibt es für alle $(\overline{x}, \overline{t}, \overline{y}) \in W \times J \times U$ eine offene $\overline{x}$-Umgebung $W_0 \subseteq W$, ein offenes Intervall $J_0 \subseteq J$ mit $\overline{t} \in J_0$ und eine offene $\overline{y}$-Umgebung $U_0 \subseteq U$ derart, dass für alle $(x, t_0, y_0) \in W_0 \times J_0 \times U_0$ eine Lösung $\phi^x_{t_0,y_0}\colon J_0 \to U$ des Anfangswertproblems

$$y'(t) = f(x, t, y(t)), \;\; y(t_0) = y_0$$

existiert und die folgende Abbildung C^k ist:

$$\Phi\colon W_0 \times J_0 \times J_0 \times U_0 \to U, \quad (x, t, t_0, y_0) \mapsto \phi^x_{t_0,y_0}(t).$$

Beweis von Satz 17.25. Sei $(x_0, t_2, t_1, y_1) \in \Omega$; wir zeigen, dass Ω

eine Umgebung von (x_0, t_2, t_1, y_1) und Fl auf einer offenen Umgebung von (x_0, t_2, t_1, y_1) in $N \times J \times J \times M$ eine C^{k-1}-Abbildung ist. Wir nehmen an, dass $t_2 \geq t_1$; der Fall $t_2 \leq t_1$ lässt sich analog zeigen. Wir betrachten die Menge Θ aller $\tau \in J$ mit $\tau \geq t_1$ derart, dass Ω für alle $\overline{t} \in [t_1, \tau]$ eine Umgebung von $(x_0, \overline{t}, t_1, y_1)$ ist und Fl auf einer offenen Umgebung von $(x_0, \overline{t}, t_1, y_1)$ eine C^{k-1}-Abbildung ist. Aus Satz 17.27[10] folgt, dass $J_0 \cap [t_1, \infty[\subseteq \Theta$ für ein offenes Intervall $J_0 \subseteq J$ mit $t_1 \in J_0$. Also ist Θ nicht leer und

$$\theta := \sup \Theta > t_1.$$

Ist $\theta > t_2$, ist $t_2 < \tau$ für ein $\tau \in \Theta$ und wir sind fertig. Andernfalls wäre $\theta \leq t_2$, somit $\theta \in J$ und wir erhalten wie folgt einen Widerspruch: Mit Satz 17.27 finden wir ein offenes Intervall $J_2 \subseteq J$ mit $\theta \in J_2$, eine offene x_0-Umgebung $P \subseteq N$ und eine offene $\mathrm{Fl}^{x_0}_{\theta,t_1}(y_1)$-Umgebung $U_2 \subseteq M$ derart, dass

$$P \times J_2 \times J_2 \times U_2 \subseteq \Omega$$

und Fl auf dieser Menge C^{k-1} ist.

[10] Angewandt auf $f_\phi := d\phi \circ f \circ (\mathrm{id}_Q \times \mathrm{id}_{J_1} \times \phi^{-1})$ mit einer offenen x_0-Umgebung $Q \subseteq N$, einem offenen Intervall $J_1 \subseteq J$ mit $t_1 \in J_1$ und einer Karte $\phi \colon U_\phi \to V_\psi \subseteq \mathbb{R}^m$ derart, dass f_ϕ eine lokale Lipschitzbedingung erfüllt.

Es gibt ein $\tau \in \Theta$ mit $\tau \in J_2$; da $\phi^{x_0}_{t_1,y_1}$ stetig ist, dürfen wir nach Vergrößern von τ annehmen, dass

$$\phi^{x_0}_{t_1,y_1}(\tau) \in U_2.$$

Per Definition von Θ existieren offene Intervalle $J_1 \subseteq J$ und $I \subseteq J$ mit $t_1 \in J_1$ und $\tau \in I$, eine offene x_0-Umgebung $P \subseteq N$ und eine offene y_1-Umgebung $Y \subseteq M$ derart, dass $P \times I \times J_1 \times Y \subseteq \Omega$ und Fl auf dieser Menge C^{k-1} ist. Insbesondere ist der Fluss dort stetig und somit dürfen wir nach Verkleinern von P, I, J_1 und Y annehmen, dass

$$\mathrm{Fl}(P \times I \times J_1 \times Y) \subseteq U_2.$$

Wir dürfen weiter annehmen, dass $P \subseteq Q$. Für alle $(x, t, t_1, y_0) \in P \times J_2 \times J_1 \times Y$ ist dann nach Lemma 17.9 (b)

$$\mathrm{Fl}^x_{t,t_1}(y_0) = \mathrm{Fl}^x_{t,\tau}(\mathrm{Fl}^x_{\tau,t_1}(y_0)) = \mathrm{Fl}(x, t, \tau, \mathrm{Fl}(x, \tau, t_1, y_0))$$

definiert (also $P \times J_2 \times J_1 \times Y \subseteq \Omega$) und die rechte Seite C^{k-1} in (x, t, t_1, y_0) und somit $[t_1, \infty[\, \cap J_2 \subseteq \Theta$. Dies aber ist eine Umgebung von θ in $\mathbb{R}$, im Widerspruch zu $\theta = \sup \Theta$. $\square$

Bemerkung 17.28. (a) Satz 17.27 findet man ähnlich etwa in der Quelle G./Neeb. Ein entsprechendes Resultat für festes t_0 (und nur für $k \geq 1$) ist Satz 3.7.1 bei Cartan; man kann veränderliche t_0 als Parameter einführen und den Satz darauf zurückführen (siehe Aufgabe P30). Man vergleiche auch Dieudonné oder Lang.

(b) Natürlich sind auch Lösungen $\gamma\colon I \to M$ von Differentialgleichungen interessant im Falle nicht notwendig offener, nicht entarteter Intervalle $I \subseteq \mathbb{R}$. Ebenso zeitabhängige C^{k-1}-Vektorfelder $J \times M \to TM$ mit einem nicht notwendig offenen Intervall J (z.B. $J = [0,1]$) und die zugehörigen Differentialgleichungen, oder Parameter in einer nicht notwendig offenen Teilmenge eines Vektorraums (z.B. Parameter in $[0,1]$). All diese Fälle findet man in G./Neeb mit behandelt. In der Vorlesung vermeiden wir Differentialrechnung auf nicht-offenen Mengen soweit möglich, da die zusätzlichen Probleme eher im Bereich der Analysis liegen.

Wir studieren die Exponentialfunktion einer Liegruppe und zeigen:

Satz 18.1

Ist G eine Liegruppe, so sind für eine Untergruppe H äquivalent:

(a) H ist eine abgeschlossene Teilmenge von G;

(b) H ist eine Untermannigfaltigkeit von G.

Wie üblich identifizieren wir in (b) T_eH mit $T_e j_H(T_eH) \subseteq T_eG$, wobei $j_H \colon H \to G$ die Inklusionsabbildung ist; wir identifizieren also $L(H)$ mit der Unter-Liealgebra $L(j_H)(L(H))$ von $L(G)$. Der Beweis von Satz 18.1 wird zeigen, dass

$$L(H) = \{v \in L(G)\colon \exp_G(\mathbb{R}v) \subseteq H\}, \qquad (1)$$

also $L(H) = \{v \in L(G)\colon (\forall t \in \mathbb{R})\ \exp_G(tv) \in H\}$. Im Beweis nutzt

Satz 18.2 (Trottersche Produktformel)

Ist G eine Liegruppe, so gilt für alle $v, w \in L(G)$

$$\exp_G(v + w) = \lim_{n\to\infty} \big(\exp_G(v/n)\exp_G(w/n)\big)^n.$$

Beweis. Sei $\mu\colon G \times G \to G$ die Gruppenmultiplikation. Identifizieren wir $T_{(e,e)}(G \times G)$ mit $T_eG \times T_eG = L(G) \times L(G)$, so ist $T_{(e,e)}\mu$ nach Beispiel 13.18 die Abbildung

$$T_{(e,e)}\mu\colon L(G) \times L(G) \to L(G), \quad (v,w) \mapsto v + w. \qquad (2)$$

Es existiert eine offene 0-Umgebung $W \subseteq L(G)$ derart, dass $\exp_G(W)$ eine offene Einsumgebung in G ist und $\exp_G|_W\colon W \to \exp_G(W)$ ein C^∞-Diffeomorphismus, also

$$\log := (\exp_G|_W)^{-1}\colon \exp_G(W) \to W$$

eine glatte Funktion. Da $T_0(\exp_G) = \mathrm{id}_{L(G)}$, wenn wir $T_0(L(G)) = \{0\} \times L(G)$ mit $L(G)$ identifizieren, folgt aus $T_e \log = (T_0(\exp_G|_W))^{-1}$, dass

$$d\log|_{L(G)} = \mathrm{id}_{L(G)}$$

(siehe 13.38). Es existiert eine offene Einsumgebung $Q \subseteq G$ mit $QQ \subseteq \exp_G(W)$. Gegeben $v, w \in L(G)$ gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit $\exp_G(tv), \exp_G(tw) \in Q$ für alle $t \in]-\varepsilon, \varepsilon[$, so dass

$$\gamma(t) := \log(\exp_G(tv)\exp_G(tw))$$

eine C^∞-Funktion $\gamma\colon\ ]-\varepsilon,\varepsilon[\ \to L(G)$ definiert. Nach (2) ist
$\frac{d}{dt}\big|_{t=0}(\exp_G(tv)\exp_G(tw)) = \frac{d}{dt}\big|_{t=0}\exp_G(tv) + \frac{d}{dt}\big|_{t=0}\exp_G(tw) = v+w$
und somit

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(\gamma(t)-\gamma(0)) = \gamma'(0) = d\log(v+w) = v+w.$$

Mit der Nullfolge $t_n = 1/n$ (wobei n so groß, dass $1/n<\varepsilon$), folgt

$$n\,\gamma(1/n) = \frac{\gamma(1/n)-\gamma(0)}{1/n} \to \gamma'(0) = v+w$$

für $n\to\infty$; beachte $\gamma(0)=\log(e)=0$. Da $\exp_G$ stetig ist, folgt

$$(\exp_G(\gamma(1/n)))^n = \exp_G(n\,\gamma(1/n)) \to \exp_G(v+w). \ \square$$

Beweis von Satz 18.1. (a)$\Rightarrow$(b): Sei $\mathfrak{g} := L(G)$ und

$$\mathfrak{h} := \{v\in\mathfrak{g}\colon\ \exp_G(\mathbb{R}v)\subseteq H\}.$$

Für $0\in\mathfrak{g}$ gilt $0\in\mathfrak{h}$ wegen $\exp_G(\mathbb{R}0)=\exp_G(\{0\})=\{e\}\subseteq H$. Ist $v\in\mathfrak{h}$, so ist $\exp_G(\mathbb{R}tv)\subseteq\exp_G(\mathbb{R}v)\subseteq H$ für jedes $t\in\mathbb{R}$ und somit $tv\in\mathfrak{h}$. Schließlich gilt für alle $v,w\in\mathfrak{h}$ und $t\in\mathbb{R}$

$$\exp_G(t(v+w)) = \exp_G(tv+tw) = \lim_{n\to\infty}\Big(\exp_G(tv/n)\exp_G(tw/n)\Big)^n \in H,$$

da H abgeschlossen ist und $\big(\exp_G(tv/n)\exp_G(tw/n)\big)^n \in H$ für jedes $n \in \mathbb{N}$; hierbei wurde die Trottersche Produktformel benutzt. Also ist $\mathfrak{h}$ ein Untervektorraum von $\mathfrak{g}$. Dann ist $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus F$ mit einem komplementären Untervektorraum F. Die Funktion

$$\psi\colon \mathfrak{h} \times F \to G, \quad (x,y) \mapsto \exp_G(x)\exp_G(y)$$

ist glatt und erfüllt $T\psi((0,0),(x,y)) = x + y$ wegen (2), so dass also $T_0\psi\colon T_0(\mathfrak{h} \times F) \to \mathfrak{g}$ ein Isomorphismus von Vektorräumen ist. Es gibt somit eine offene $(0,0)$-Umgebung $W \subseteq \mathfrak{h} \times F$ derart, dass $U := \psi(W)$ offen in G und $\psi|_W\colon W \to \psi(W)$ ein C^∞-Diffeomorphismus ist. Ohne Einschränkung sei $W = W_1 \times W_2$ mit offenen 0-Umgebungen $W_1 \subseteq \mathfrak{h}$ und $W_2 \subseteq F$. Für alle $x \in W_1$ ist dann $\psi(x,0) = \exp_G(x) \in H$. Wir behaupten:

Nach Verkleinern von W kann erreicht werden, dass

$$(\forall (x,y) \in W)\ \ \psi(x,y) \in H \ \Rightarrow\ y = 0. \tag{3}$$

Erfüllt W (3), kann der Beweis beendet werden: Es sei $\alpha\colon \mathfrak{h} \times F \to \mathbb{R}^m$ ein Vektorraum-Isomorphismus mit $\alpha(\mathfrak{h} \times \{0\}) = \mathbb{R}^\ell \times \{0\}$ und $\alpha(\{0\} \times F) = \{0\} \times \mathbb{R}^{m-\ell}$. Dann ist

$V := \alpha(W)$ offen in $\mathbb{R}^m$ und $\phi := \alpha \circ (\psi|_W)^{-1}\colon U \to V$ eine Karte für G mit
$$\phi(U \cap H) = V \cap (\mathbb{R}^\ell \times \{0\}).$$
Nach Satz 2.36 (b) ist H also eine Untermannigfaltigkeit von G. Sei $j_H\colon H \to G$ die Inklusionsabbildung. Wir identifizieren $T_e H$ mit $\mathrm{im}(T_e j_H) \subseteq T_e G$, also mit

$$T_e j_H(T(\phi_H)^{-1}(\{0\}\times\mathbb{R}^\ell)) = T\phi^{-1}(\{0\}\times(\mathbb{R}^\ell\times\{0\})) = T\psi(\{(0,0)\}\times\mathfrak{h}\times\{0\}) = \mathfrak{h}.$$

Wäre die Behauptung falsch, so gäbe es eine Folge $(x_n, y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in W derart, dass $\psi(x_n, y_n) \in H$ und $y_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $(x_n, y_n) \to (0,0)$ für $n \to \infty$. Da $\exp_G(x_n) \in H$, folgt
$$\exp_G(y_n) = \exp_G(x_n)^{-1}\psi(x_n, y_n) \in H.$$
Wir wählen eine Norm $\|\cdot\|$ auf F und beobachten, dass
$$S := \{y \in F\colon \|y\| = 1\}$$
ein beschränkte, abgeschlossene Teilmenge von $F \cong \mathbb{R}^{m-\ell}$ ist und folglich kompakt. Nach Übergang zu einer Teilfolge dürfen wir daher annehmen, dass die Folge der $\dfrac{1}{\|y_n\|}y_n \in S$

konvergent ist gegen ein $v \in S$. Wir zeigen nun, dass $\exp_G(tv) \in H$ für alle $t > 0$. Dann ist auch $\exp_G(-tv) = \exp_G(tv)^{-1} \in H$ und $\exp_G(0v) = \exp_G(0) = e \in H$, somit $v \in \mathfrak{h}$ im Widerspruch zu $\mathfrak{h} \cap F = \{0\}$.

Sei also $t \in]0, \infty[$. Unter Benutzung der Gaußklammer setzen wir

$$k_n := [t/\|y_n\|] \in \mathbb{N}_0 \text{ und } r_n := (t/\|y_n\|) - k_n \in [0, 1[.$$

Dann gilt $r_n y_n \to 0$ für $n \to \infty$ weil $\|r_n y_n\| = r_n \|y_n\| \leq \|y_n\| \to 0$. Weiter gilt

$$k_n y_n + r_n y_n = t \frac{1}{\|y_n\|} y_n \to tv,$$

also auch $k_n y_n \to tv$. Da $\exp_G(k_n y_n) = \exp_G(y_n)^{k_n} \in H$ und H in G abgeschlossen ist, folgt $\exp_G(tv) = \lim_{n\to\infty} \exp_G(k_n y_n) \in H$.

(b)$\Rightarrow$(a): Sei $g \in G$ im Abschluss von H. Da g eine zu einer Kugel in $\mathbb{R}^m$ homöomorphe und somit metrisierbare Umgebung hat, existiert eine Folge $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in H mit $h_n \to g$. Sei K eine kompakte e-Umgebung in H und U eine e-Umgebung in G mit $U \cap H \subseteq K$. Da die Abbildung $G \times G \to G$, $(x, y) \mapsto x^{-1}y$ stetig ist, gibt es eine e-Umgebung $V \subseteq G$ mit $V^{-1}V \subseteq U$. Da gV eine

g-Umgebung ist, existiert ein $N \in \mathbb{N}$ derart, dass $h_n \in gV$ für alle $n \geq N$. Für alle $n, m \geq N$ ist dann

$$h_n^{-1} h_m \in V^{-1} g^{-1} g V = V^{-1} V \subseteq U$$

und somit $h_n^{-1} h_m \in U \cap H \subseteq K$. Da K kompakt und somit in G abgeschlossen ist, folgt für $m \to \infty$

$$h_n^{-1} g \in K \subseteq H.$$

Also ist $g = h_n(h_n^{-1} g) \in HH \subseteq H$. $\square$

Lemma 18.3

Sei $\phi\colon G \to H$ ein Gruppenhomomorphismus zwischen Liegruppen. Ist $\phi|_U$ glatt für eine offene e-Umgebung $U \subseteq G$, so ist ϕ glatt.

Beweis. Für jedes $g \in G$ ist gU eine offene g-Umgebung und $\phi|_{gU} = \lambda^H_{\phi(g)} \circ \phi|_U \circ \lambda^G_{g^{-1}}|_{gU}$ glatt, unter Benutzung von Linkstranslationen in G bzw. H. $\square$

Lemma 18.4

Jede Liegruppe G hat eine σ-kompakte offene Untergruppe.

Beweis. Ist K eine kompakte e-Umgebung in G, so ist auch $K_1 := K \cup K^{-1}$ kompakt und auch $K_{n+1} := K_1 K_n = \mu(K_1 \times K_n)$ für $n \in \mathbb{N}$, mit der Gruppenmultiplikation $\mu\colon G \times G \to G$. Die Teilmenge $U := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n$ von G ist also σ-kompakt und zudem unter Multiplikation und Invertieren abgeschlossen, also eine Untergruppe. Diese ist eine e-Umgebung in G. Für jedes $g \in U$ ist $\lambda_g(U) = U$ auch eine g-Umgebung in G, da die Linkstranslation $\lambda_g\colon G \to G$ ein Homöomorphismus ist. Also ist U offen. $\square$

Satz 18.5 (Natürlichkeit der Exponentialfunktion)

Für jeden glatten Gruppenhomomorphismus $\phi\colon G \to H$ zwischen Liegruppen gilt $\phi \circ \exp_G = \exp_H \circ L(\phi)$.

Beweis. Für $v \in L(G)$ ist $\gamma_v\colon \mathbb{R} \to G$, $t \mapsto \exp_G(tv)$ ein glatter Gruppenhomomorphismus mit $\dot{\gamma}_v(0) = v$. Weiter ist

$$\gamma_{L(\phi)(v)}\colon \mathbb{R} \to H, \;\; t \mapsto \exp_H(tL(\phi)(v))$$

der eindeutige glatte Gruppenhomomorphismus mit $\dot{\gamma}_{L(\phi)(v)}(0) = L(\phi)(v)$. Nun ist $\eta := \phi \circ \gamma_v\colon \mathbb{R} \to H$ ein glatter Gruppenhomomorphismus mit $\dot{\eta}(0) = T\phi(\dot{\gamma}_v(0)) = T\phi(v) = L(\phi)(v)$

und folglich $\eta = \gamma_{L(\phi)(v)}$, insbesondere also
$\exp_H(L(\phi)(v)) = \gamma_{L(\phi)(v)}(1) = \eta(1) = \phi(\gamma_v(1)) = \phi(\exp_G(v))$. $\square$

Folgerung 18.6

Ist $\phi\colon G \to H$ ein glatter Gruppenhomomorphismus zwischen Liegruppen, so gilt:

(a) $\ker\phi$ ist eine Untermannigfaltigkeit von G und $L(\ker\phi) = \ker L(\phi)$.

(b) Ist ϕ injektiv, so ist $L(\phi)$ injektiv und ϕ eine Immersion.

Ist G zudem σ-kompakt, so gilt:

(c) Ist ϕ surjektiv, so ist $L(\phi)$ surjektiv und ϕ eine Submersion.

(d) Ist ϕ bijektiv, so ist $L(\phi)$ bijektiv und ϕ étale (also ein C^∞-Diffeo.)

Beweis. Ist $L(\phi)$ injektiv, surjektiv oder bijektiv, so auch $T_g\phi$ für jedes $g \in G$, da $T_g\phi = T_e\lambda^H_{\phi(g)} \circ L(\phi) \circ T_g\lambda^G_{g^{-1}}$; somit ist ϕ eine Immersion, eine Submersion bzw. étale.

(a) $\ker\phi = \phi^{-1}(\{e\})$ ist abgeschlossen, also eine Untermannigfaltigkeit mit $L(\ker\phi) = \{v \in L(G)\colon \exp_G(\mathbb{R}v) \subseteq \ker\phi\}$ (Satz 18.1).

Ist $v \in \ker L(\phi)$, so ist für alle $t \in \mathbb{R}$

$$\phi(\exp_G(tv)) = \exp_H(tL(\phi)(v)) = \exp_H(0) = e,$$

also $\exp_G(\mathbb{R}v) \subseteq \ker \phi$ und somit $v \in L(\ker \phi)$. Ist umgekehrt $v \in L(\ker(\phi))$, so ist $\exp_G(\mathbb{R}v) \subseteq \ker \phi$, also

$$\exp_H(tL(\phi)(v)) = \phi(\exp_G(tv)) = e$$

für alle $t \in \mathbb{R}$. Da $\exp_H$ auf einer 0-Umgebung injektiv ist, folgt $L(\phi)(v) = 0$, also $v \in \ker L(\phi)$. Aus (a) folgt unmittelbar auch (b).

(d) Nach Satz 8.10 ist $\dim(G) \geq \dim(H)$. Da $L(\phi)\colon L(G) \to L(H)$ nach (b) injektiv ist, ist auch $\dim L(H) \geq \dim L(G)$; die Dimensionen sind also gleich und $L(\phi)$ ist ein Isomorphismus.

(c) Nach (a) und Folgerung 7.2 können wir $Q := G/\ker \phi$ so zu einer Liegruppe machen, dass $q\colon G \to Q$, $g \mapsto g \ker \phi$ eine Submersion wird. Nach dem Homomorphiesatz gibt es einen bijektiven Gruppenhomomorphismus $\psi\colon Q \to H$ derart, dass $\psi \circ q = \phi$, also $\psi(g \ker \phi) = \phi(g)$ für alle $g \in G$. Dieser ist nach Folgerung 5.2 glatt. Nach (d) ist $L(\psi)$ bijektiv, also $L(\phi) = L(\psi) \circ L(q)$ surjektiv. $\square$

Satz 18.7

Jeder stetige Gruppenhomomorphismus $\phi\colon G \to H$ zwischen Liegruppen ist glatt.

Beweis. Nach Lemma 18.3 genügt es zu zeigen, dass $\phi|_U$ glatt ist für eine offene e-Umgebung $U \subseteq G$. Wegen Lemma 18.4 dürfen wir somit annehmen, dass G σ-kompakt ist. Somit ist auch der Graph

$$\Gamma := \{(g, \phi(g))\colon g \in G\}$$

σ-kompakt, da $h := (\mathrm{id}_G, \phi)|^{\Gamma}\colon G \to \Gamma$, $g \mapsto (g, \phi(g))$ stetig und surjektiv ist. Als Graph eines Gruppenhomomorphismus ist Γ eine Untergruppe der Liegruppe $G \times H$ und diese ist abgeschlossen, da ϕ stetig ist. Nach Satz 18.1 ist Γ eine Untermannigfaltigkeit von $G \times H$. Die Abbildung $\pi\colon \Gamma \to G$, $(g, h) \mapsto g$ ist glatt und ein bijektiver Gruppenhomomorphismus, nach Folgerung 18.6 (d) also ein C^∞-Diffeomorphismus. Folglich ist $\pi^{-1} = h$ glatt, somit auch die zweite Komponente ϕ. $\square$

Wir setzen §9 fort. Sei G eine Liegruppe und (M, σ) eine G-Menge mit der Wirkung $\sigma\colon G \times M \to M$, $(g, x) \mapsto g.x$. Wir zeigen:

Satz 19.1

Ist M ein Hausdorffscher topologischer Raum und σ stetig, so gilt:

(a) Für jedes $x \in M$ ist der Stabilisator G_x eine abgeschlossene Untergruppe und Untermannigfaltigkeit von G; es gibt eine eindeutige glatte Mannigfaltigkeitsstruktur auf der Bahn $G.x$, welche die Bahnabbildung $G \to G.x$, $g \mapsto g.x$ zu einer C^∞-Submersion macht. Diese macht die Inklusion $G.x \to M$ stetig und die Abbildung $G/G_x \to G.x$, $gG_x \mapsto g.x$ zu einem C^∞-Diffeomorphismus.

Ist G σ-kompakt und M lokalkompakt, so gilt zudem:

(b) Wirkt G transitiv auf M, so ist die Abbildung $f\colon G/G_x \to M$, $gG_x \mapsto g.x$ ein Homöomorphismus.

Hierbei betrachten wir G/G_x als glatte Mannigfaltigkeit wie in Folgerung 7.2.

Satz 19.2

Ist M eine C^k-Mannigfaltigkeit mit $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ und ist σ C^k, so gilt mit der C^∞-Mannigfaltigkeit G/G_x aus Folgerung 7.2:

(a) Für jedes $x \in M$ ist die Abbildung $f\colon G/G_x \to M$, $gG_x \mapsto g.x$ eine C^k-Immersion.

Ist G σ-kompakt, so gilt zudem:

(b) Wirkt G transitiv auf M, so ist $f\colon G/G_x \to M$, $gG_x \mapsto g.x$ ein C^k-Diffeomorphismus.

Bemerkung 19.3. In der Situation von Satz 19.1 (b) bzw. 19.2 (b) können wir M die glatte Mannigfaltigkeitsstruktur (mit maximalem C^∞-Atlas $\mathcal{A}$) geben, welche f zu einem C^∞-Diffeomorphismus macht. Diese ist mit der gegebenen Topologie auf M bzw. dem gegebenen maximalen C^k-Atlas $\mathcal{B}$ verträglich (im Sinne $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$), da f für die gegebene Topologie ein Hömoomorphismus (bzw. ein C^k-Diffeomorphismus nach $(M, \mathcal{B})$) ist. Für die glatte Mannigfaltigkeitsstruktur ist $\sigma\colon G \times M \to M$ glatt, denn die Wirkung $\tau\colon G \times G/G_x \to G/G_x$, $(g, hG_x) \mapsto ghG_x$ ist nach

Folgerung 7.2 glatt. Also ist $f \circ \tau = \sigma \circ (\mathrm{id}_G \times f)$ glatt und somit auch σ, da $\mathrm{id}_G \times f \colon G \times G/G_x \to G \times M$ ein C^∞-Diffeomorphismus ist für $(M, \mathcal{A})$.

Unter den genannten Voraussetzungen lässt sich also sagen:

Stetige transitive Wirkungen $\sigma \colon G \times M \to M$ einer Liegruppe sind für eine eindeutige glatte Mannigfaltigkeitsstruktur $\mathcal{A}$ auf M glatt und war σ bereits C^k für einen maximalen C^k-Atlas $\mathcal{B}$ auf M, so ist $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$.

Beweis von Satz 19.1. a) Die Untergruppe $G_x = \sigma(\cdot, x)^{-1}(\{x\})$ ist abgeschlossen, nach Satz 18.1 also eine Untermannigfaltigkeit. Für den Rest von (a), siehe §9. (b) zeigen wir im Anhang zu §19.

Beweis von Satz 19.2. (a) Die C^∞-Mannigfaltigkeitsstruktur auf G/G_x macht $q \colon G \to G/G_x$, $g \mapsto gG_x$ zu einer Submersion. Die Bahnabbildung $\sigma^x := \sigma(\cdot, x) \colon G \to M$ ist C^∞ und $f \circ q = \sigma^x$, also f glatt (Folgerung 5.2). Für $g \in G$ sind $\sigma_g := \sigma(g, \cdot) \colon M \to M$ und $\tau_g \colon G/G_x \to G/G_x$, $hG_x \mapsto ghG_x$ Diffeomorphismen und $f \circ \tau_g = \sigma_g \circ f$, für $z := gG_x$ also $T_z f \circ T_{G_x} \tau_g = T_x \sigma_g \circ T_{G_x} f$ und somit $T_z f$ genau dann injektiv, wenn $T_{G_x} f$ es ist. Ist $w \in \ker(T_{G_x} f)$, so gibt es ein $v \in L(G)$ mit $w = T_e q(v)$. Sei $\gamma_v(t) = \exp_G(tv)$ für $t \in \mathbb{R}$. Für $g, h \in G$ ist $gh.x = g.(h.x)$, also $(\sigma^x \circ \lambda_g)(h) = (\sigma_g \circ \sigma^x)(h)$, folglich

$$\sigma^x \circ \lambda_g = \sigma_g \circ \sigma^x \text{ und } T\sigma^x \circ T\lambda_g = T\sigma_g \circ T\sigma^x. \tag{1}$$

Wegen $f \circ q = \sigma^x$ ist $T\sigma^x(v) = Tf(Tq(v)) = Tf(w) = 0$. Setzen wir $\eta(t) := \gamma_v(t).x$ für $t \in \mathbb{R}$, so ist $\eta = \sigma^x \circ \gamma_v$, somit

$$\dot\eta(t) = T\sigma^x(\dot\gamma_v(t)) = T\sigma^x(T\lambda_{\gamma_v(t)}(v)) = T\sigma_{\gamma_v(t)} T\sigma^x(v) = 0,$$

wobei die dritte Gleichheit (1) benutzt. Also ist $\eta\colon \mathbb{R} \to M$ konstant, somit $\gamma_v(t).x = \gamma_v(0).x = e.x = x$ für alle t und folglich $\gamma_v(t) \in G_x$. Also ist $q \circ \gamma_v$ konstant und somit $w = Tq(v) = Tq(\dot\gamma_v(0)) = Tq([\gamma_v]) = [q \circ \gamma_v] = 0$.

(b) Nach (a) ist für jedes $z \in G/G_x$ die Tangentialabbildung $T_z f\colon T_z(G/G_x) \to T_{f(z)}M$ injektiv und somit bijektiv, da nach dem Satz von Sard $\dim T_z(G/G_x) \geq \dim T_{f(z)}M$. Die bijektive Abbildung f ist also étale und somit ein C^k-Diffeomorphismus. $\square$

Anhang zu §19

Zum Beweis von Satz 19.1 (b) benötigen wir weitere Topologie. Ist K ein kompakter topologischer Raum, so gilt für jede Familie $(A_j)_{j\in J}$ abgeschlossener Teilmengen $A_j \subseteq K$ mit $J \neq \emptyset$:

Ist $\bigcap_{j\in\Phi} A_j \neq \emptyset$ für jede endliche, nicht leere Teilmenge $\Phi \subseteq J$, so ist $\bigcap_{j\in J} A_j \neq \emptyset$.

Sonst wäre $(K \setminus A_j)_{j\in J}$ eine offene Überdeckung von K, hätte also eine endliche Teilüberdeckung $(K \setminus A_j)_{j\in\Phi}$; es ergäbe sich $\bigcap_{j\in\Phi} A_j = \emptyset$ im Widerspruch zur Annahme.

Lemma 19.4 (Satz von Baire für lokalkompakte Räume)

Ist $X \neq \emptyset$ ein lokalkompakter topologischer Raum und $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge abgeschlossener Teilmengen von X mit $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$, so existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $A_n^o \neq \emptyset$.

Beweis. Wäre $A_n^o = \emptyset$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so wäre $U_n := X \setminus A_n$ eine nicht leere, dichte offene Teilmenge von X für jedes $n \in \mathbb{N}$ und $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n = \emptyset$. Wähle $x_1 \in U_1$; dann hat x_1 eine kompakte

Umgebung K_1 in U_1. Sind kompakte Teilmengen $K_j \subseteq U_j$ mit $K_j \neq \emptyset$ bereits gefunden für $j \in \{1, \ldots, n\}$ derart, dass $K_j \subseteq K^o_{j+1}$ für alle $j \in \{1, \ldots, n-1\}$, so ist K^o_n eine offene, nicht leere Menge. Da U_{n+1} dicht ist, existiert ein $x_{n+1} \in U_{n+1} \cap K^o_n$. Da X lokal kompakt ist, existiert eine kompakte Teilmenge $K_{n+1} \subseteq U_{n+1} \cap K^o_n$ mit $x_{n+1} \in K^o_{n+1}$. Jede der kompakten Mengen K_j ist abgeschlossen in der kompakten Menge K_1 und $\bigcap_{j=1}^n K_j = K_n \neq \emptyset$; also ist $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n \supseteq \bigcap_{n\in\mathbb{N}} K_n \neq \emptyset$, Widerspruch.

Lemma 19.5 (Offenheitssatz für transitive Wirkungen)

Es sei G eine σ-kompakte Liegruppe, X ein lokalkompakter top. Raum und $\sigma\colon G \times X \to X$ eine stetige, transitive Wirkung. Für jedes $x \in G$ ist dann die Bahnabbildung $G \to X$, $g \mapsto g.x$ offen.

Beweis. Es genügt zu zeigen, dass für jede e-Umgebung $U \subseteq G$ die Menge $U.x$ eine x-Umgebung ist, denn für jedes $g \in G$ und jede g-Umgebung $W \subseteq G$ ist dann $W.x = \sigma_g((g^{-1}W).x)$ eine $g.x$-Umgebung, da $\sigma_g := \sigma(g, \cdot)\colon X \to X$ ein Homöomorphismus ist. Nun ist $G = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n$ mit kompakten Teilmengen $K_n \subseteq G$. Es existiert eine kompakte e-Umgebung $V \subseteq G$ mit $V^{-1}V \subseteq U$. Dann ist $K_n \subseteq \Phi_n V$ mit einer endlichen Teilmenge $\Phi_n \subseteq K_n$, also $G = \bigcup_{g \in \Phi} gV$ mit der abzählbaren Menge $\Phi := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Phi_n$. Da $X = G.x = \bigcup_{g \in \Phi} (gV).x$ mit den kompakten, also abgeschlossenen Mengen $(gV).x$, gibt es nach Satz 19.4 ein $g \in \Phi$ mit $((gV).x)^o \neq \emptyset$. Anwendung von $\sigma_{g^{-1}}$ zeigt, dass $(V.x)^o \neq \emptyset$. Sei etwa $v.x \in (V.x)^o$ mit $v \in V$. Anwenden von $\sigma_{v^{-1}}$ liefert $x \in (v^{-1}V.x)^o \subseteq U.x$. $\square$

Beweis von Satz 19.1 (b). Nach Lemma 19.5 ist die Bahnabbildung $\sigma^x := \sigma(\cdot, x)\colon G \to M$ offen. Die kanonische Abbildung $q\colon G \to G/G_x$ ist ein surjektive Submersion, also eine Quotientenabbildung. Da $f \circ q = \sigma^x$ stetig ist, ist die bijektive Abbildung f nach Lemma 10.5 stetig. Für jede offene Menge $U \subseteq G/G_x$ ist $f(U) = f(q(q^{-1}(U))) = \sigma^x(q^{-1}(U))$ offen in M, also f offen. $\square$

Für $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ betrachten wir folgende Situation:

20.1 Es sei $J \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $f\colon J \times M \to TM$ ein zeitabhängiges C^{k-1}-Vektorfeld, das im Fall $k = 1$ eine lokale Lipschitzbedingung erfülle. Für $t_0 \in J$ und $y_0 \in M$ sei $\phi_{t_0,y_0}\colon I_{t_0,y_0} \to M$ die maximale Lösung des Anfangswertproblems

$$\dot{y}(t) = f(t, y(t)), \quad y(t_0) = y_0.$$

Weiter sei $\Omega := \bigcup_{(t_0,y_0)\in J\times M} I_{t_0,y_0} \times \{(t_0, y_0)\} \subseteq J \times J \times M$ und

$$\mathrm{Fl}\colon \Omega \to M, \quad (t, t_0, y_0) \mapsto \mathrm{Fl}_{t,t_0}(y_0) := \phi_{t_0,y_0}(t)$$

der zugehörige Fluss.

Wir geben ein Kriterium dafür, dass f vollständig ist, also $I_{t_0,y_0} = J$ für alle $(t_0, y_0) \in J \times M$.

Anwendung von Satz 17.25 mit Parametermenge $N := \{0\}$ liefert:

Satz 20.2

Ω ist offen in $J \times J \times M$ und der Fluss $\mathrm{Fl}\colon \Omega \to M$ ist C^{k-1}. $\square$

Satz 20.3

Ist M in 20.1 kompakt, so ist $f\colon J \times M \to TM$ vollständig.

Dies folgt aus dem nächsten Satz, da die Wahl $K := M$ andernfalls einen Widerspruch ergäbe.

Satz 20.4

Ist in der Situation von 20.1

$$\sup I_{t_0,y_0} < \sup J \tag{1}$$

(bzw. $\inf I_{t_0,y_0} > \inf J$), so existiert für jede kompakte Teilmenge $K \subseteq M$ ein $t_K \in I_{t_0,y_0}$ derart, dass $\phi_{t_0,y_0}(t) \notin K$ für alle $t \geq t_K$ (bzw. $t \leq t_K$) in J.

Beweis. Gelte (1); die zweite Situation diskutiert man analog. Wäre die Schlussfolgerung falsch, so gäbe es eine Folge $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in I_{t_0,y_0} derart, dass $z_n := \phi_{t_0,y_0}(t_n) \in K$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $t_n \to \sup I_{t_0,y_0} =: \tau$ für $n \to \infty$. Da $\tau < \sup J$ nach (1), ist $\tau \in J$. Um jeden Punkt x aus K gibt es eine Karte ϕ und x liegt im Urbild einer kompakten Kugel um $\phi(x)$; dieses ist metrisierbar. Da die Urbilder der entsprechenden offenen Kugeln K überdecken, folgt: Man kann K durch endlich viele metrisierbare kompakte Mengen $K_1, \ldots, K_\ell$ überdecken. Da eine davon z_n enthält für unendlich viele n, dürfen wir nach Übergang zu einer Teilfolge annehmen, dass K zudem metrisierbar ist. Nach Übergang zu einer Teilfolge kann somit die Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent angenommen werden. Sei z der Limes. Dann ist $(\tau, \tau, z) \in \Omega$. Da Ω offen ist und $(\tau, t_n, z_n) \to (\tau, \tau, z)$, existiert ein n mit $(\tau, t_n, \phi_{t_0,y_0}(t_n)) \in \Omega$. Nach Lemma 17.9 (b) ist dann $\tau \in I_{t_0,y_0}$ und $\mathrm{Fl}_{\tau,t_n}(\mathrm{Fl}_{t_n,t_0}(y_0)) = \mathrm{Fl}_{\tau,t_0}(y_0)$. Da I_{t_0,y_0} offen ist, folgt $\sup I_{t_0,y_0} > \tau$, Widerspruch. $\square$

Satz 20.5

In 20.1 sei N eine Untermannigfaltigkeit und abgeschlossen in M. Es sei $f(t,p) \in T_pN$ für alle $(t,p) \in J \times N$, also $h := f|_{J\times N} \colon J \times N \to TN$ ein C^{k-1}-Vektorfeld auf N. Ist $k = 1$, so erfülle h eine lokale Lipschitzbedingung. Für $(t_0, y_0) \in J \times N$ sei $\phi_{t_0,y_0} \colon I_{t_0,y_0} \to M$ die maximale Lösung des Anfangswertproblems

$$\dot{y}(t) = f(t, y(t)), \quad y(t_0) = y_0$$

auf M. Dann gilt $\gamma_{t_0,y_0}(t) \in N$ für alle $t \in I_{t_0,y_0}$ und ϕ_{t_0,y_0} ist die maximale Lösung des Anfangswertproblems $\dot{y}(t) = h(t, y(t))$, $y(t_0) = y_0$ auf N.

Beim Beweis nutzt folgende Beobachtung:

Lemma 20.6

Ist N eine n-dimensionale Untermannigfaltigkeit einer C^k-Mannigfaltigkeit M mit $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, so ist TN eine $2n$-dimensionale Untermannigfaltigkeit von TM und die C^{k-1}-Mannigfaltigkeitsstruktur auf TN als Untermannigfaltigkeit stimmt überein mit derjenigen als Tangentialbündel von N.

Ist $j \colon N \to M$ die Inklusionsabbildung, so ist Tj injektiv; wir identifizieren TN mit der Teilmenge $Tj(TN)$ von TM.

Beweis. Für $p \in N$ sei $\phi \colon U_\phi \to V_\phi \subseteq \mathbb{R}^m$ eine an N angepasste Karte von M um p, also $\phi(U_\phi \cap N) = V_\phi \cap (\mathbb{R}^n \times \{0\})$. Wir betrachten die linearen Abbildungen $\mathrm{pr}_1 \colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n} \to \mathbb{R}^n$, $(x, y) \mapsto x$ und $i \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $x \mapsto (x, 0)$. Setzen wir $W_\phi := i^{-1}(V_\phi) = i^{-1}(V_\phi \cap (\mathbb{R}^n \times \{0\}))$, so ist

$\phi_N \colon U_\phi \cap N \to W_\phi \subseteq \mathbb{R}^n$, $x \mapsto \mathrm{pr}_1(\phi(x))$ eine Karte für N und

$$T\phi_N \colon T(U_\phi \cap N) \to W_\phi \times \mathbb{R}^n$$

eine Karte des Tangentialbündels TN. Wir haben

$$Ti \colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m, \quad (x, y) \mapsto ((x, 0), (y, 0)).$$

Wegen $i \circ \phi_N = \phi \circ j|_{U_\phi \cap N}$ ist

$$\begin{aligned} T\phi(TU_\phi \cap TN) &= T\phi(T(U_\phi \cap N)) = T\phi(Tj(T(U_\phi \cap N))) = TiT\phi_N(T(U_\phi \cap N)) \\ &= Ti(W_\phi \times \mathbb{R}^n) = W_\phi \times \{0\} \times \mathbb{R}^n \times \{0\}. \end{aligned}$$

Mit dem Vektorraum-Automorphismus $\alpha \colon \mathbb{R}^{2m} \to \mathbb{R}^{2m}$, $(a, b, c, d) \mapsto (a, c, b, d)$ für $a, b \in \mathbb{R}^n$, $c, d \in \mathbb{R}^{m-n}$ ist $\alpha \circ T\phi \colon TU_\phi \to \alpha(V_\phi \times \mathbb{R}^m) =: Q$ eine Karte für TM derart, dass

$$(\alpha \circ T\phi)(TU_\phi \cap TN) = W_\phi \times \mathbb{R}^n \times \{0\} = Q \cap (\mathbb{R}^{2n} \times \{0\});$$

es ist also $\alpha \circ T\phi$ eine an TN angepasste Karte. Somit ist TN eine $2n$-dimensionale Untermannigfaltigkeit von TM. Mit der Projektion $\pi \colon \mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}^{2(m-n)} \to \mathbb{R}^{2n}$ ist $\pi \circ \alpha \circ Ti = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^{2m}}$. Die zu $\alpha \circ T\phi$ gehörige Untermannigfaltigkeitskarte $(\alpha \circ T\phi)_{TN} = \pi \circ (\alpha \circ T\phi) \circ Tj|_{TU_\phi \cap TN} = \pi \circ \alpha \circ Ti \circ T\phi_N$ stimmt mit $T(\phi_N)$ überein: Gleiche C^{k-1}-Mannigfaltigkeitsstruktur auf TN. $\square$

Beweis von Satz 20.5. Das Urbild

$$A := (\gamma_{t_0,y_0})^{-1}(N)$$

ist abgeschlossen in I_{t_0,y_0}, da γ_{t_0,y_0} stetig und N in M abgeschlossen ist. Da $\gamma_{t_0,y_0}(t_0) = y_0 \in N$, ist $t_0 \in A$, also $A \neq \emptyset$. Für jedes $\tau \in A$ hat das Anfangswertproblem $\dot{y}(t) = h(t, y(t))$, $y(\tau) = \gamma_{t_0,y_0}(\tau)$ eine Lösung $\eta\colon I \to N$ auf einem offenen Intervall $I \subseteq I_{t_0,y_0}$ mit $\tau \in I$. Ist $j\colon N \to M$ die Inklusion, so sind die Vektorfelder $h(t,\cdot)\colon N \to TN$ und $f(t,\cdot)\colon M \to TM$ für jedes $t \in J$ über j verknüpft, somit $j \circ \eta$ eine Lösung von $\dot{y}(t) = f(t, y(t))$, $y(\tau) = \phi_{t_0,y_0}(\tau)$ (vgl. Lemma 13.28) und somit $j \circ \eta = \phi_{t_0,y_0}|_I$. Es ist also $I \subseteq A$ und somit A offen. Da I_{t_0,y_0} zusammenhängend ist, folgt $A = I_{t_0,y_0}$. Also ist $\phi_{t_0,y_0}(t) \in N$ für alle $t \in I_{t_0,y_0}$. Die Abbildung $\gamma\colon I_{t_0,y_0} \to N$, $t \mapsto \gamma_{t_0,y_0}(t)$ ist C^1 und wie in Lemma 13.28 sieht man, dass γ das Anfangswertproblem $\dot{y}(t) = h(t, y(t))$, $y(t_0) = y_0$ löst. Die Lösung ist maximal, da jede Lösung auch eine von $\dot{y}(t) = f(t, y(t))$, $y(t_0) = y_0$ ist. $\square$

§21 Vektorbündel und Kozykel

Tangentialbündel wurden schon diskutiert; nun lernen wir allgemeinere Vektorbündel kennen. Zunächst ein Spezialfall.

Definition 21.1

Sei M eine C^k-Mannigfaltigkeit mit $k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ und F ein endlich-dimensionaler reeller Vektorraum. Das **triviale C^k-Vektorbündel** über M mit typischer Faser F ist die C^k-Mannigfaltigkeit
$$E := M \times F,$$
zusammen mit der Projektion $\mathrm{pr}_1 \colon E \to M$, $(x, y) \mapsto x$ und der eindeutigen Vektorraumstruktur auf $E_x := (\mathrm{pr}_1)^{-1}(\{x\}) = \{x\} \times F$, welche die bijektive Abbildung $E_x \to F$, $(x, y) \mapsto y$ zu einem Isomorphismus von Vektorräumen macht.

Allgemeine Vektorbündel sehen lokal aus wie triviale.

Definition 21.2

Sei M eine C^k-Mannigfaltigkeit mit $k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ und F ein endlich-dimensionaler reeller Vektorraum. Ein **C^k-Vektorbündel über M** ist eine C^k-Mannigfaltigkeit E, zusammen mit einer surjektiven C^k-Abbildung $\pi\colon E \to M$ und einer Vektorraumstruktur auf $E_x := \pi^{-1}(\{x\})$ für $x \in M$, wenn für jedes $x_0 \in M$ eine **lokale Trivialisierung** von E existiert über einer offenen Teilmenge $U \subseteq M$ mit $x_0 \in U$, also ein C^k-Diffeomorphismus

$$\theta\colon E|_U \to U \times F \quad \text{auf } \; E|_U := \pi^{-1}(U)$$

derart, dass gilt:

(i) Für jedes $x \in U$ ist $\theta(E_x) = \{x\} \times F$, also $\mathrm{pr}_1 \circ \theta = \pi|_{E|_U}$ mit der Projektion $\mathrm{pr}_1\colon U \times F \to U$, $(x, y) \mapsto x$;

(ii) Setzen wir $\theta_2 := \mathrm{pr}_2 \circ \theta\colon E|_U \to F$ mit $\mathrm{pr}_2\colon U \times F \to F$, $(x, y) \mapsto y$, so ist für jedes $x \in U$ die Einschränkung $\theta_2|_{E_x}\colon E_x \to F$ linear (also ein Isomorphismus von Vektorräumen).

Man nennt E den **Totalraum** des Vektorbündels, M seine **Basis**, π die **Bündelprojektion** und E_x die **Faser** von E über x.

Beispiel 21.3. Für jede m-dimensionale C^k-Mannigfaltigkeit M mit $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ ist das Tangentialbündel TM mit der Bündelprojektion $\pi_{TM}\colon TM \to M$ ein C^{k-1}-Vektorbündel über M mit typischer Faser $\mathbb{R}^n$. Für jede Karte $\phi\colon U_\phi \to V_\phi \subseteq \mathbb{R}^m$ von M ist die Abbildung

$$(\pi_{TU_\phi}, d\phi)\colon TU_\phi \to U_\phi \times \mathbb{R}^m$$

eine lokale Trivialisierung (Diffeo, da gleich $(\phi^{-1} \times \mathrm{id}_{\mathbb{R}^m}) \circ T\phi$).

Bemerkung 21.4. Ist (E, π) ein C^k-Vektorbündel über M mit typischer Faser F und H ein zu F isomorpher Vektorraum (z.B. $H := \mathbb{R}^n$ mit der Dimension n von F), so ist E auch ein C^k-Vektorbündel mit typischer Faser H, da man lokale Trivialisierungen wie oben von links mit dem C^k-Diffeomorphismus $\mathrm{id}_U \times \alpha$ komponieren kann, mit einem Isomorphismus $\alpha\colon F \to H$. Man könnte also stets $F = \mathbb{R}^n$ wählen; es ist jedoch hilfreich für manche Konstruktionen, allgemeinere Fasern zuzulassen.

Lemma 21.5

Für jedes C^k-Vektorbündel (E, π) über M ist $\pi\colon E \to M$ eine

C^k-Submersion. Weiter ist der **Nullschnitt** $O_M\colon M \to E$, $x \mapsto 0_x \in E_x$ eine Einbettung von C^k-Mannigfaltigkeiten.

Beweis. Per Definition sieht π lokal aus wie die Projektion $\mathrm{pr}_1\colon M \times F \to M$, $(x,y) \mapsto x$ und somit wie die Projektion $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, mit $m = \dim(M)$ und $n = \dim(F)$. Nach Satz 5.1 (bzw. Definition 13.2) ist π also eine Submersion. Für jedes $x \in M$ gibt es eine lokale Trivialisierung $\theta\colon E|_U \to U \times M$ von E um x. Nun ist θ ein C^k-Diffeomorphismus und

$$\theta \circ O_M|_U = (\mathrm{id}_U, 0)$$

mit der konstanten Nullfunktion $U \to F$ als zweiter Komponente, also C^k. Folglich ist $O_M|_U$ eine C^k-Abbildung. Da $(\mathrm{id}_U, 0)$ lokal aussieht wie $i\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$, $z \mapsto (z,0)$, sieht auch O_M lokal so aus, ist also eine Immersion (Satz 4.3). Da $\pi \circ O_M = \mathrm{id}_M$, ist O_M weiter eine topologische Einbettung (mit stetiger Umkehrfunktion $\pi|_{O_M(M)}$), also eine Einbettung von C^k-Mannigfaltigkeiten. $\square$

Definition 21.6.

Ein C^k-Vektorbündel $\pi\colon E \to M$ mit typischer Faser F heißt

trivialisierbar, wenn es eine **globale Trivialisierung** gibt, also eine lokale Trivialisierung $\theta\colon E \to M \times F$ mit Definitionsbereich E.

Beispiel 21.7

Für jede Liegruppe G ist das Tangentialbündel TG mit $\pi_{TG}\colon TG \to G$ ein trivialisierbares Vektorbündel mit typischer Faser $T_eG = L(G)$.

Da $\pi_{TG}\colon TG \to G$ eine Submersion ist, ist $T_eG = (\pi_{TG})^{-1}(\{e\})$ eine Untermannighfaltigkeit von TG. Mit der glatten Wirkung $G \times TG \to TG$, $(g, v) \mapsto T\lambda_g(v)$ ist also

$$\theta\colon TG \to G \times T_eG, \quad v \mapsto (\pi_{TG}(v), \pi_{TG}(v)^{-1}.v)$$

eine glatte Abbildung, deren zweite Komponente auf T_gG gleich $T_g\lambda_{g^{-1}}\colon T_gG \to T_eG$ und somit linear ist. Die glatte Abbildung

$$G \times T_eG \to TG, \quad (g, v) \mapsto g.v$$

ist die Umkehrfunktion zu θ und somit θ eine globale Trivialisierung.

Beispiel 21.8

Das **Möbiusband** kann als glattes Vektorbündel E über dem Einheitskreis $M := \mathbb{S}_1$ betrachtet werden, mit typischer Faser $\mathbb{R}$ (ein "Geradenbündel"). Es ist nicht trivialisierbar.

Das Komplement $E \setminus O_M(M)$ des Nullschnitts ist nämlich wegzusammenhängend (siehe Skizze). Für jedes triviale Geradenbündel $M \times \mathbb{R}$ ist jedoch

$$(M \times \mathbb{R}) \setminus (M \times \{0\}) = M \times (\mathbb{R} \setminus \{0\})$$

nicht wegzusammenhängend, und Analoges gilt für trivialisierbare Geradenbündel über M (siehe Übung).

21.9 Neue Vektorbündel aus gegebenen (Beweise später).
Sei $k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ und M eine C^k-Mannigfaltigkeit.

Whitney-Summe zweier Vektorbündel

Sind $\pi_1 \colon E_1 \to M$ und $\pi_2 \colon E_2 \to M$ C^k-Vektorbündel mit typischer Faser F_1 bzw. F_2, so ist $E_1 \oplus E_2 := \bigcup_{x \in M} \big((E_1)_x \times (E_2)_x\big)$ ein C^k-Vektorbündel mit typischer Faser $F_1 \times F_2$ und $\pi \colon E_1 \oplus E_2 \to M$, $(v, w) \mapsto \pi_1(v) = \pi_2(w)$.

Für einen endlich-dimensionalen reellen Vektorraum F sei $F^* := \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(F, \mathbb{R})$ sein **Dualraum**, der Vektorraum aller linearen Abbildungen $\lambda\colon F \to \mathbb{R}$ (auch "lineare Funktionale") genannt.

Dualbündel

Für jedes C^k-Vektorbündel E mit typischer Faser F ist

$$E^* := \bigcup_{x \in M} (E_x)^*$$

ein C^k-Vektorbündel mit typischer Faser F^* und der Bündelprojektion $\pi\colon E^* \to M$, $\lambda \mapsto x$ für $\lambda \in (E_x)^*$.

Beachten Sie, dass $(E_x)^* \cap (E_y)^* = \emptyset$ für $x \neq y$ in M, da $E_x \cap E_y = \emptyset$ und wir einem $\lambda \in (E_x)^*$ seinen Definitionsbereich ablesen können.

Insbesondere haben wir für jede m-dimensionale C^k-Mannigfaltigkeit M mit $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ das zum Tangentialbündel TM duale C^{k-1}-Vektorbündel

$$T^*M := (TM)^*$$

über M, mit typischer Faser $(\mathbb{R}^m)^*$ (das **Kotangentialbündel**).

Für das Tensorprodukt von Vektorräumen sei auf Aufgabe P39 verwiesen. Viele Fachmathematik-Studierende haben es bereits kennen gelernt (z.B. in der Einführung in die Funktionalanalysis im WS 20/21); für Lehramtsstudierende ist es hier kein Prüfungsstoff.

Tensorprodukte von Vektorbündeln

Sind $\pi_1 \colon E_1 \to M$ und $\pi_2 \colon E_2 \to M$ C^k-Vektorbündel mit typischer Faser F_1 bzw. F_2, so ist

$$E_1 \otimes E_2 := \bigcup_{x \in M} \big((E_1)_x \otimes (E_2)_x\big)$$

ein C^k-Vektorbündel mit typischer Faser $F_1 \otimes F_2$ und $\pi^{-1}(\{x\}) = (E_1)_x \otimes (E_2)_x$, wobei die Tensorprodukte $(E_1)_x \otimes (E_2)_x$ zueinander disjunkt gewählt werden für verschiedene x.

Für ein Vektorbündel $E \to M$ haben wir rekursiv die **Tensorpotenzen** $E^{\otimes n} := E^{\otimes (n-1)} \otimes E$ für $n \geq 2$. Wir setzen $E^{\otimes 0} := M \times \mathbb{R}$.

Tensorbündel

Ist M eine C^k-Mannigfaltigkeit mit $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, so haben wir für $n, m \in \mathbb{N}_0$ das Tensorbündel

$$(TM)^{\otimes n} \otimes (T^*M)^{\otimes m}.$$

Weitere Konstruktionen sind möglich, z.B.

Vektorbündel linearer Abbildungen

Sind $\pi_1 \colon E_1 \to M$ und $\pi_2 \colon E_2 \to M$ C^k-Vektorbündel mit typischer Faser F_1 bzw. F_2, so ist

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(E_1, E_2) := \bigcup_{x \in M} \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}((E_1)_x, (E_2)_x)$$

ein C^k-Vektorbündel mit typischer Faser $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(F_1, F_2)$ und $\pi \colon \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(E_1, E_2) \to M$, $\alpha \mapsto x$ für $\alpha \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}((E_1)_x, (E_2)_x)$.

Definition 21.10

Sei $k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$. Für $j \in \{1, 2\}$ sei (E_j, π_j) ein C^k-Vektorbündel mit typischer Faser F_j über einer C^k-Mannigfaltigkeit M_j. Eine C^k-Abbildung $\phi\colon E_1 \to E_2$ heißt **Morphismus von C^k-Vektorbündeln**, wenn für jedes $x \in M_1$ ein $f(x) \in M_2$ existiert derart, dass $\phi((E_1)_x) \subseteq (E_2)_{f(x)}$ und die Einschränkung von ϕ zu einer Abbildung $(E_1)_x \to (E_2)_{f(x)}$ linear ist.

Dann ist also
$$\pi_2 \circ \phi = f \circ \pi_1,$$
folglich f eine C^k-Abbildung, da π_1 eine surjektive Submersion ist.

Ist $\pi_2 \circ \phi = f \circ \pi_1$, so nennt man ϕ auch einen Morphismus von C^k-Vektorbündeln **über f.**

Ein Morphismus $\phi\colon E_1 \to E_2$ von C^k-Vektorbündeln wird **Isomorphismus von C^k-Vektorbündeln** genannt, wenn ein Morphismus $\psi\colon E_2 \to E_1$ existiert mit $\psi \circ \phi = \mathrm{id}_{E_1}$ und $\phi \circ \psi = \mathrm{id}_{E_2}$.

Ist $M := M_1 = M_2$ und ϕ ein Isomorphismus von C^k-Vektorbündeln über id_M, so nennen wir ϕ eine **Äquivalenz von Vektorbündeln**. Existiert eine solche, heißen die C^k-Vektorbündel (E_1, π_1) und (E_2, π_2) über M **äquivalent**.

Beispiel 21.11 Für jede C^k-Abbildung $f\colon M_1 \to M_2$ zwischen C^k-Mannigfaltigkeiten mit $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ ist $Tf\colon TM \to TN$ ein Morphismus von C^{k-1}-Vektorbündeln über f (da $\pi_{TN} \circ Tf = f \circ \pi_{TM}$ und $Tf|_{T_xM}\colon T_xM \to T_{f(x)}N$ linear ist).

21.12. Ist F ein endlich-dimensionaler reeller Vektorraum, so schreiben wir $\mathrm{GL}(F)$ für die Gruppe aller Vektorraum-Automorphismen von F (also $\mathrm{GL}(F) := \mathrm{Aut}_{\mathbb{R}}(F)$). Ist $\alpha\colon F \to \mathbb{R}^n$ ein Isomorphismus von Vektorräumen, so ist die Abbildung

$$\mathrm{End}_{\mathbb{R}}(F) \to \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n), \quad \beta \mapsto \alpha \circ \beta \circ \alpha^{-1}$$

ein Isomorphismus unitaler assoziativer $\mathbb{R}$-Algebren, bildet also $\mathrm{GL}(F)$ auf $\mathrm{GL}(\mathbb{R}^n)$ ab. Durch Zuordnung der darstellenden Matrix bezüglich der Standard-Basis von $\mathbb{R}^n$ haben wir weiter einen Isomorphismus unitaler assoziativer $\mathbb{R}$-Algebren,

$$\mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^{n\times n},$$

der $\mathrm{GL}(\mathbb{R}^n)$ auf die offene Menge $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}^{n\times n}$ der Algebra der reellen $(n \times n)$-Matrizen abbildet. Also ist $\mathrm{GL}(F)$ eine offene Teilmenge des Vektorraums $\mathrm{End}_{\mathbb{R}}(F) \cong \mathbb{R}^{n\times n}$ aller Endomorphismen von F und somit eine glatte Mannigfaltigkeit. Eine Abbildung $f\colon N \to \mathrm{GL}(F)$ von einer C^k-Mannigfaltigkeit N nach $\mathrm{GL}(F)$ (oder $\mathrm{End}_{\mathbb{R}}(F)$) ist genau dann C^k, wenn

$$\widehat{f}\colon N \times F \to F, \quad (x,y) \mapsto f(x)(y)$$

eine C^k-Abbildung ist (Aufgabe P35).

Definition 21.13

Es sei M eine C^k-Mannigfaltigkeit mit $k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ und (E,π) ein C^k-Vektorbündel über M mit typischer Faser F. Eine Familie $(\theta_j)_{j\in J}$ von lokalen Trivialisierungen $\theta_j\colon E|_{U_j} \to U_j \times F$ von E heißt **Vektorbündel-Atlas**, wenn $M = \bigcup_{j\in J} U_j$.

Sei $\mathrm{pr}_2\colon M \times F \to F$ die Projektion $(x,y) \mapsto y$. Per Definition einer lokalen Trivialisierung ist für jedes $j \in J$ und $x \in U_j$ die Abbildung

$$\mathrm{pr}_2 \circ \theta_j|_{E_x}\colon E_x \to F$$

ein Isomorphismus von Vektorräumen. Für alle $i,j \in J$ und x in der offenen Menge $U_{ij} := U_i \cap U_j$ ist also

$$g_{ij}(x) := \mathrm{pr}_2 \circ \theta_i|_{E_x} \circ (\mathrm{pr}_2 \circ \theta_j|_{E_x})^{-1} \in \mathrm{GL}(F).$$

Es ist weiter $\theta_i(E|_{U_{ij}}) = U_{ij} \times F = \theta_j(E|_{U_{ij}})$ und

$$\theta_i \circ \theta_j^{-1} \colon U_{ij} \times F \to U_{ij} \times F$$

ein C^k-Diffeomorphismus, gegeben durch $(x, y) \mapsto (x, g_{ij}(x)(y))$ für alle $(x, y) \in U_{ij} \times F$. Für $x \in U_{ij}$ und $v \in E_x$ ist nämlich

$$\theta_j(v) = (x, y) \quad \text{mit } \ y := (\mathrm{pr}_2 \circ \theta_j|_{E_x})(v)$$

und somit $(\theta_i \circ \theta_j^{-1})(x, y) = \theta_i(v) = (x, (\mathrm{pr}_2 \circ \theta_i)(v))$ mit $v = (\mathrm{pr}_2 \circ \theta_j|_{E_x})^{-1}(y)$. Die Abbildung

$$(g_{ij})^{\wedge} \colon U_{ij} \times F \to F, \quad (x, y) \mapsto g_{ij}(x)(y)$$

ist C^k als zweite Komponente der C^k-Abbildung $\theta_i \circ \theta_j^{-1}$. Also ist $g_{ij} \colon U_{ij} \to \mathrm{GL}(F)$ eine C^k-Abbildung. Für alle $i \in J$ und $x \in U_i$ ist $g_{ii}(x) = \mathrm{id}_F$, da

$$g_{ii}(x) = \mathrm{pr}_2 \circ \theta_i|_{E_x} \circ (\mathrm{pr}_2 \circ \theta_i|_{E_x})^{-1}.$$

Für alle $i, j, \ell \in J$ und $x \in U_{i,j,\ell} := U_i \cap U_j \cap U_\ell$ ist weiter

$g_{ij}(x) \circ g_{j\ell}(x) = g_{i\ell}(x)$, denn

$$g_{ij}(x) \circ g_{j\ell}(x) = (\mathrm{pr}_2 \circ \theta_i|_{E_x}) \circ (\mathrm{pr}_2 \circ \theta_j|_{E_x})^{-1} \circ (\mathrm{pr}_2 \circ \theta_j|_{E_x}) \circ (\mathrm{pr}_2 \circ \theta_\ell|_{E_x})^{-1} = g_{i\ell}(x),$$

da die Komposition der mittleren zwei Isomorphismen (die zueinander invers sind) gleich id_{E_x} ist.

Man nennt $(g_{ij})_{i,j \in J}$ den vom Vektorbündel-Atlas $(\theta_j)_{j \in J}$ induzierten **Kozyklus**.

Nach dem Vorigen ist dieser ein $\mathrm{GL}(F)$-wertiger C^k-Kozyklus zur offenen Überdeckung $(U_j)_{j \in J}$, im folgenden Sinn.

Definition 21.14

Ist G eine Liegruppe, M eine C^k-Mannigfaltigkeit mit $k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ und $(U_j)_{j \in J}$ eine offene Überdeckung von M, so setzt man $U_{ij} := U_i \cap U_j$ sowie $U_{ij\ell} := U_i \cap U_j \cap U_\ell$ für alle $i, j, \ell \in J$ und nennt eine Familie $(g_{ij})_{i,j \in J}$ von C^k-Abbildungen $g_{ij} \colon U_{ij} \to G$ einen ***G*-wertigen *C*^{k}-Kozyklus** zur Überdeckung, wenn $g_{ii}(x) = e$ für alle $i \in J$ und $x \in U_i$ und

$$g_{ij}(x) g_{j\ell}(x) = g_{i\ell}(x) \quad \text{für alle } i, j, \ell \in J \text{ und } x \in U_{ij\ell}.$$

Wegen $g_{ij}(x)g_{ji}(x) = g_{ii}(x) = e$ ist stets $g_{ji}(x) = g_{ij}(x)^{-1}$.

Satz 21.15 (Eindeutigkeitssatz)

Es seien M eine C^k-Mannigfaltigkeit mit $k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$, F ein endlich-dimensionaler Vektorraum und (E_1, π_1) sowie (E_2, π_2) C^k-Vektorbündel über M mit typischer Faser F. Gibt es für eine offene Überdeckung $(U_j)_{j\in J}$ von M Vektorbündel-Atlanten von lokalen Trivialisierungen $\theta_j \colon E_1|_{U_j} \to U_j \times F$ für E_1 und $\Theta_j \colon E_2|_{U_j} \to U_j \times F$ für E_2, die den gleichen $\mathrm{GL}(F)$-wertigen Kozyklus $(g_{ij})_{i,j\in J}$ induzieren, so sind E_1 und E_2 äquivalente C^k-Vektorbündel.

Genauer: Die Abbildung

$$\psi \colon E_1 \to E_2, \quad v \mapsto \Theta_j^{-1}(\theta_j(v)) \text{ für } j \in J \text{ und } v \in E_1|_{U_j}$$

ist eine Äquivalenz von C^k-Vektorbündeln.

Beweis. ψ ist wohldefiniert, denn für $v \in (E_1)_x$ mit $x \in U_i \cap U_j$ ist

$$\Theta_j^{-1}(\theta_j(v)) = \Theta_j^{-1}(x, (\mathrm{pr}_2 \circ \theta_j|_{(E_1)_x})(v))$$

$$\begin{aligned}
&= \left((\mathrm{pr}_2 \circ \Theta_j|_{(E_2)_x})^{-1} \circ \mathrm{pr}_2 \circ \theta_j|_{(E_1)_x}\right)(v) \\
&= \left((\mathrm{pr}_2 \circ \Theta_i|_{(E_2)_x})^{-1} \circ g_{ij}(x) \circ g_{ji}(x) \circ \mathrm{pr}_2 \circ \theta_i|_{(E_1)_x}\right)(v) \\
&= (\mathrm{pr}_2 \circ \Theta_i|_{(E_2)_x})^{-1} \circ \mathrm{pr}_2 \circ \theta_i|_{(E_1)_x}\big)(v) \\
&= \Theta_i^{-1}(\theta_i(v)).
\end{aligned}$$

Für alle $j \in J$ ist $\Theta_j^{-1} \circ \theta_j \colon E_1|_{U_j} \to E_2|_{U_j}$ ein C^k-Diffeomorphismus. Ist $x \in M$, so existiert ein $j \in J$ mit $x \in U_j$. Für alle $v \in (E_1)_x$ ist dann

$$\psi(v) = (\mathrm{pr}_2 \circ \Theta_j|_{(E_2)_x})^{-1}((\mathrm{pr}_2 \circ \theta_j|_{(E_1)_x})(v)) \tag{1}$$

in $(E_2)_x$, also $\pi_2 \circ \psi = \pi_1$. Nach (1) ist $\psi|_{(E_1)_x} \colon (E_1)_x \to (E_2)_x$ zudem linear in v. $\square$

Satz 21.16 (Existenzsatz)

Es seien M eine C^k-Mannigfaltigkeit mit $k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$, F ein endlich-dimensionaler Vektorraum und $(U_j)_{j \in J}$ eine offene Überdeckung von M. Zu jedem $\mathrm{GL}(F)$-wertigen C^k-Kozyklus $(g_{ij})_{i,j \in J}$ zu $(U_j)_{j \in J}$ existiert dann ein C^k-Vektorbündel (E, π)

mit typischer Faser F, für das ein Vektorbündel-Atlas von lokalen Trivialisierungen $\theta_j\colon E|_{U_j} \to U_j \times F$ existiert, der den gegebenen Kozyklus induziert.

Wir folgern dies aus einem Lemma.

Lemma 21.17

Es seien M eine C^k-Mannigfaltigkeit mit $k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$, F ein endlich-dimensionaler Vektorraum und $(g_{ij})_{i,j\in J}$ ein $\mathrm{GL}(F)$-wertiger C^k-Kozyklus zu einer offenen Überdeckung $(U_j)_{j\in J}$ von M. Für eine Menge E und eine surjektive Abbildung $\pi\colon E \to M$ sei auf jeder Faser $E_x := \pi^{-1}(\{x\})$ eine Vektorraumstruktur gegeben. Weiter gebe es bijektive Abbildungen $\theta_j\colon E|_{U_j} \to U_j \times F$ für $j \in J$ derart, dass $\mathrm{pr}_2 \circ \theta_j|_{E_x}$ linear ist für alle $x \in U_j$ (mit $E|_{U_j} := \pi^{-1}(U_j)$) und

$$(\theta_i \circ \theta_j^{-1})(x, y) = (x, g_{ij}(x)(y)) \tag{2}$$

für alle $i, j \in J$, $x \in U_i \cap U_j$ und $y \in F$. Dann existiert eine C^k-Mannigfaltigkeitsstruktur auf E, die (E, π) zu einem C^k-Vektorbündel mit typischer Faser F macht und $(\theta_j)_{j\in J}$

zu einem Vektorbündel-Atlas. Dieser induziert den gegebenen Kozyklus $(g_{ij})_{i,j\in J}$.

Beweis. Die Abbildungen $\theta_j^{-1}\colon U_j \times F \to E$ sind injektiv für alle $j \in J$ und haben Bild $E|_{U_j}$. Für alle $i, j \in J$ ist das Urbild $((\theta_j)^{-1})^{-1}(E|_{U_i}) = (U_i \cap U_j) \times F$ offen und $(\theta_i^{-1})^{-1} \circ \theta_j^{-1}\colon U_{ij} \times F \to U_{ij} \times F$ ist die C^k-Abbildung aus (2). Nach Lemma 1.26 macht die finale Topologie auf E bezüglich der Familie $(\theta_j^{-1})_{j\in J}$ jede der Mengen $E|_{U_j}$ zu einer offenen Teilmenge von E und θ_j zu einem Homöomorphismus; nach Bemerkung 1.27 (angewandt mit $\pi\colon E \to M$) ist E Hausdorffsch. Unter Benutzung der C^k-Mannigfaltigkeitsstruktur auf $E|_{U_j}$, welche $\theta_j\colon E|_{U_j} \to U_j \times F$ zu einem C^k-Diffeomorphismus macht, sind die Voraussetzungen von Aufgabe P14 (a) erfüllt; es gibt also eine eindeutige C^k-Mannigfaltigkeitsstruktur auf E, welches jedes θ_j zu einem C^k-Diffeomorphismus (und somit zu einer lokalen Trivialisierung) macht. Nach (2) ist der von $(\theta_j)_{j\in J}$ induzierte Kozyklus gleich $(g_{ij})_{i,j\in J}$. □

Beweis von Satz 21.16. Es sei

$$X := \bigcup_{j\in J} \{j\} \times U_j \times F \subseteq J \times M \times F.$$

Für (i, x_1, y_1), (j, x_2, y_2) schreiben wir $(i, x_1, y_1) \sim (j, x_2, y_2)$, wenn $x_1 = x_2$ und $y_1 = g_{ij}(x)(y_2)$. Aus den Kozyklus-Bedingungen folgt, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf X ist. Schreibe $[i, x, y]$ für die Äquivalenzklasse von $(i, x, y) \in X$ und $E := X/\sim$ für die Menge aller Äquivalenzklassen. Die Abbildung $\pi\colon E \to M$, $[i, x, y] \mapsto x$ ist wohldefiniert, denn aus $[i, x_1, y_1] = [j, x_2, y_2]$ folgt $x_1 = x_2$. Wir schreiben $E|_U := \pi^{-1}(U)$ für offene Mengen $U \subseteq M$ und $E_x := \pi^{-1}(\{x\})$ für $x \in M$. Für jedes $j \in J$ ist

$$\psi_j\colon U_j \times F \to E,\ \ (x, y) \mapsto [j, x, y]$$

injektiv, denn $[j, x_1, y_1] = [j, x_2, y_2]$ gilt genau dann, wenn $x_1 = x_2$ und $y_1 = g_{jj}(x)(y_2) = y_2$. Per Konstruktion gilt

$$(\pi \circ \psi_j)(x, y) = x \quad \text{für alle } (x, y) \in U_j \times F,$$

also $\psi_j(\{x\} \times F) \subseteq E_x$. Es gilt sogar $\psi_j(\{x\} \times F) = E_x$, denn ist $[i, x, y] \in E_x$, so ist $(j, x, g_{ji}(x)(y)) \sim (i, x, y)$, also

$[i,x,y] = [j,x,g_{ji}(x)(y)] = \psi_j(x, g_{ji}(x)(y))$. Somit ist $\psi_j(U_j \times F) = E|_{U_j}$, also

$$\theta_j := \psi_j^{-1} \colon E|_{U_j} \to U_j \times F$$

eine Bijektion. Nach dem Vorigen ist $\psi_i(x, g_{ij}(x)(y)) = \psi_j(x,y)$ für alle $i,j \in J$, $x \in U_i \cap U_j$ und $y \in F$, somit

$$(\theta_i \circ \theta_j^{-1})(x,y) = (x, g_{ij}(x)(y)).$$

Für $x \in M$ wählen wir $j \in J$ mit $x \in U_j$ und geben E_x die Vektorraumstruktur, die $\mathrm{pr}_2 \circ \theta_j|_{E_x} \colon E_x \to F$ zu einem Isomorphismus von Vektorräumen macht. Ist auch $x \in U_i$ für ein $i \in I$, so ist nach dem Vorigen dann auch $\mathrm{pr}_2 \circ \theta_i|_{E_x} = g_{ij}(x) \circ \mathrm{pr}_1 \circ \theta_j|_{E_x}$ ein Isomorphismus von Vektorräumen. Wir können nun Lemma 21.17 anwenden. □

21.18. Ist F ein endlich-dimensionaler Vektorraum, so sei $F^* := \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(F, \mathbb{R})$ sein Dualraum aller linearen Funktionale $\lambda \colon F \to \mathbb{R}$. Für eine lineare Abbildung $\alpha \colon F_1 \to F_2$ betrachten wir die duale lineare Abbildung

$$\alpha^* \colon F_2^* \to F_1^*, \quad \lambda \mapsto \lambda \circ \alpha;$$

es gilt $(\mathrm{id}_F)^* = \mathrm{id}_{F^*}$ und $(\alpha \circ \beta)^* = \beta^* \circ \alpha^*$. Ist α wie oben invertierbar, so auch α^* und es ist $(\alpha^{-1})^* = (\alpha^*)^{-1}$, da $(\alpha^{-1})^* \circ \alpha^* = (\alpha \circ \alpha^{-1})^* = (\mathrm{id}_{F_2})^* = \mathrm{id}_{F_2{}^*}$ und analog $\alpha^* \circ (\alpha^{-1})^* = \mathrm{id}_{F_1{}^*}$.

Beispiel 21.19 (Dualbündel)

Ist F ein endlich-dimensionaler Vektorraum, $k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ und (E, π) ein C^k-Vektorbündel mit typischer Faser F über einer C^k-Mannigfaltigkeit M, so sei J die Menge aller lokalen Trivialisierungen von E. Für $j \in J$ sei $\theta_j := j \colon E|_{U_j} \to U_j \times F$ mit der offenen Teilmenge $U_j \subseteq M$. Dann kann

$$E^* := \bigcup_{x \in M} (E_x)^*$$

mit $\pi_{E^*} \colon E^* \to M$, $\lambda \mapsto x$ wenn $\lambda \in (E_x)^*$ in eindeutiger Weise derart zu einem C^k-Vektorbündel mit typischer Faser F^* gemacht werden, dass für jedes $j \in J$ die Abbildung $\Theta_j \colon E^*|_{U_j} \to U_j \times F^*$, $\lambda \mapsto \big(x, ((\mathrm{pr}_2 \circ \theta_j|_{E_x})^{-1})^*(\lambda)\big)$ für $\lambda \in (E_x)^*$ eine lokale Trivialisierung ist.

Sei $(g_{ij})_{i,j \in J}$ der vom Vektorbündel-Atlas $(\theta_j)_{j \in J}$ induzierte $\mathrm{GL}(F)$-wertige C^k-Kozyklus. Die Abbildung $\mathrm{End}_{\mathbb{R}}(F) \to \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(F^*)$,

$\alpha \mapsto \alpha^*$ ist linear, also C^k. Mit $U_{ij} := U_i \cap U_j$ bilden die Abbildungen $h_{ij} \colon U_{ij} \to \mathrm{GL}(F^*)$, $x \mapsto (g_{ij}(x)^{-1})^* = g_{ji}(x)^*$ einen $\mathrm{GL}(F^*)$-wertigen C^k-Kozyklus zur Überdeckung $(U_j)_{j\in J}$. Weiter ist $\Theta_i \circ \Theta_j^{-1}(x,\lambda) = (x, h_{ij}(x)(\lambda))$ für alle $i,j \in J$, $x \in U_i \cap U_j$ und $\lambda \in F^*$, da

$$\begin{aligned}
\mathrm{pr}_2((\Theta_i \circ \Theta_j^{-1})(x,\lambda)) &= (((\mathrm{pr}_2 \circ \theta_i|_{E_x})^{-1})^* \circ (\mathrm{pr}_2 \circ \theta_j|_{E_x})^*)(\lambda) \\
&= \big(\mathrm{pr}_2 \circ \theta_j|_{E_x} \circ (\mathrm{pr}_2 \circ \theta_i|_{E_x})^{-1}\big)^*(\lambda) \\
&= (g_{ji}(x))^*(\lambda) = h_{ij}(x)(\lambda).
\end{aligned}$$

Also ist Lemma 21.17 anwendbar.

Beispiel 21.20 (Whitney-Summen)

Es seien (E_1, π_1) und (E_2, π_2) C^k-Vektorbündel über einer C^k-Mannigfaltigkeit M mit $k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$; die typischen Fasern seien F_1 bzw. F_2. Es sei J die Menge aller Paare (θ^1, θ^2) von lokalen Trivialisierungen θ^1 von E_1 und θ^2 von E_2 über der gleichen offenen Menge $U \subseteq M$. Für $j \in J$ schreiben wir $j = (\theta_j^1, \theta_j^2)$ mit $\theta_j^1 \colon E_1|_{U_j} \to U_j \times F_1$ und $\theta_j^2 \colon E_2|_{U_j} \to U_j \times F_2$. Dann kann

$$E_1 \oplus E_2 := \bigcup_{x \in M} ((E_1)_x \times (E_2)_x)$$

mit $\pi\colon E_1 \oplus E_2 \to M$, $(v_1, v_2) \mapsto \pi_1(v_1) = \pi_2(v_2)$ in eindeutiger Weise derart zu einem C^k-Vektorbündel mit typischer Faser $F_1 \times F_2$ gemacht werden, dass für jedes $j \in J$ die Abbildung $\Theta_j\colon (E_1 \oplus E_2)|_{U_j} \to U_j \times (F_1 \times F_2)$,

$$v = (v_1, v_2) \mapsto (\pi(v), (\mathrm{pr}_2^1 \circ \theta_j^1)(v_1), (\mathrm{pr}_2^2 \circ \theta_j^2)(v_2))$$

eine lokale Trivialisierung ist, wobei $\mathrm{pr}_1^\ell\colon M \times F_\ell \to M$, $(x, y) \mapsto x$ für $\ell \in \{1, 2\}$.

Sei $(g_{ij}^1)_{i,j \in J}$ der induzierte $\mathrm{GL}(F_1)$-wertige C^k-Kozyklus und $(g_{ij}^2)_{i,j \in J}$ der $\mathrm{GL}(F_2)$-wertige. Da die Abbildung $\mathrm{End}_{\mathbb{R}}(F_1) \times \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(F_2) \to \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(F_1 \times F_2)$, $(\alpha, \beta) \mapsto \alpha \times \beta$ linear, also C^k ist und ein Homomorphismus assoziativer unitaler $\mathbb{R}$-Algebren, sind die Funktionen

$$h_{ij}\colon U_i \cap U_j \to \mathrm{GL}(F_1 \times F_2), \quad x \mapsto g_{ij}^1(x) \times g_{ij}^2(x)$$

C^k und bilden einen $\mathrm{GL}(F_1 \times F_2)$-wertigen Kozyklus. Weiter ist $\Theta_i \circ \Theta_j^{-1}(x, y_1, y_2) = (x, h_{ij}(x)(y_1, y_2))$ für alle $i, j \in J$, $x \in U_i \cap U_j$ und $(y_1, y_2) \in F_1 \times F_2$, da mit $\mathrm{pr}_2 \colon M \times (F_1 \times F_2) \to F_1 \times F_2$ und $\mathrm{pr}_2^\ell \colon M \times F_\ell \to F_\ell$ für $\ell \in \{1, 2\}$ die ℓ-te Komponente von $\mathrm{pr}_2((\Theta_i \circ \Theta_j^{-1})(x, y_1, y_2))$ gegeben ist durch

$$(\mathrm{pr}_2^\ell \circ \theta_i^\ell|_{(E_\ell)_x} \circ (\mathrm{pr}_2^\ell \circ \theta_j^\ell|_{(E_\ell)_x})^{-1})(x, y_\ell) = g_{ij}^\ell(x)(y_\ell).$$

Also ist Lemma 21.17 anwendbar.

Die weiteren in 21.9 angekündigten Konstruktionen führt man analog aus (siehe Aufgaben P36 und P43).

Ist E ein endlich-dimensionaler Vektorraum, so wird bekanntlich eine bilineare Abbildung

$$E \times E \to \mathbb{R}, \quad (v, w) \mapsto \langle v, w \rangle$$

ein **inneres Produkt** auf E genannt, wenn $\langle w, v \rangle = \langle v, w \rangle$ für alle $v, w \in E$ (Symmetrie) und $\langle v, v \rangle \geq 0$ für alle $v \in E$ mit $\langle v, v \rangle = 0$ genau dann, wenn $v = 0$ (positive Definitheit).

Definition 21.21

Es sei M eine C^k-Mannigfaltigkeit mit $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Eine C^{k-1}-Abbildung $g\colon TM \oplus TM \to \mathbb{R}$ wird eine $k-1$ mal stetig differenzierbare **Riemannsche Metrik** auf M genannt, wenn für jedes $x \in M$ die Einschränkung

$$g_x := g|_{T_xM \times T_xM}\colon T_xM \times T_xM \to \mathbb{R}$$

ein inneres Produkt auf T_xM ist.

Bemerkung 21.22. (a) Meist nimmt man $k = \infty$ und reserviert das Wort "Riemannsche Metrik" für glatte Riemannsche Metriken.

(b) Viel mehr über Riemannsche Metriken und die zugehörige Riemannsche Geometrie können Sie ab dem Wintersemester in Prof. Fleischhacks Differentialgeometrie I+II lernen. Hier im Kurs "Mannigfaltigkeiten" berühren wir nur das Gebiet.

Satz 21.23

Auf jeder parakompakten C^k-Mannigfaltigkeit M mit $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ existiert eine $k-1$ mal stetig differenzierbare Riemannsche Metrik.

Beweis. Für jedes $z \in M$ existiert eine Karte $\phi_z \colon U_z \to V_z \subseteq \mathbb{R}^m$ von M um z und eine C^k-Funktion $\xi_z \in C^k_c(M, \mathbb{R})$ mit $\xi_z(M) \subseteq [0, 1]$, $\operatorname{supp}(\xi_z) \subseteq U_z$ und $\xi_z(z) = 1$ (siehe Satz 12.10). Dann ist $W_z := (\xi_z)^{-1}(]0, \infty[)$ eine offene z-Umgebung in M. Sei $\langle \cdot, \cdot \rangle \colon \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ das Standard-Skalarprodukt. Wir definieren $s^z \colon TM \oplus TM \to \mathbb{R}$ via

$$s^z(v, w) := \begin{cases} \xi_z(x)\langle d\phi_z(v), d\phi_z(w)\rangle & \text{wenn } x \in U_z; \\ 0 & \text{wenn } x \in M \setminus \operatorname{supp}(\xi_z) \end{cases}$$

für $x \in M$ und $(v, w) \in T_xM \times T_xM$. Die Funktion s^z ist C^{k-1} (s. 21.40 für Details) und $(s^z)_x := s^z|_{T_xM \times T_xM}$ ist positiv semidefinit für alle $x \in M$. Für $x \in W_z$ ist $(s^z)_x$ positiv definit, also ein inneres Produkt. Wir wählen nun eine C^{k-1}-Partition $(h_j)_{j \in J}$ der Eins, welche der offenen Überdeckung $(W_z)_{z \in M}$ untergeordnet ist (siehe Satz 12.21). Für jedes $j \in J$ existiert also ein $z(j) \in M$ mit $\operatorname{supp}(h_j) \subseteq W_{z(j)}$. Jedes $x_0 \in M$ hat eine offene Umgebung Q derart, dass $J_0 := \{j \in J \colon \operatorname{supp}(h_j) \cap Q \neq \emptyset\}$ eine endliche Menge ist. Für alle $x \in Q$ ist dann

$$g_x := \sum_{j \in J} h_j(x)(s^{z(j)})_x = \sum_{j \in J_0} h_j(x)(s^{z(j)})_x \colon T_xM \times T_xM \to \mathbb{R}$$

eine endliche Summe von symmetrischen Bilinearformen, die positiv semidefinit sind, und somit positiv semidefinit. Für jedes $x \in M$ existiert ein $j \in J_0$ mit $h_j(x) > 0$, so dass für alle $v \in T_xM$ mit $v \neq 0$ also

$$g_x(v, v) \geq h_j(x)(s^{z(j)})_x(v, v) = h_j(x)\xi_{z(j)}(x)\langle d\phi_{z(j)}(v), d\phi_{z(j)}(v)\rangle > 0,$$

da $x \in \operatorname{supp}(h_j) \subseteq W_{z(j)}$ und $\xi_{z(j)}(w) > 0$ für alle $w \in W_{z(j)}$. Somit ist $g_x \colon T_xM \times T_xM \to \mathbb{R}$ positiv definit, also ein inneres

Produkt. Definieren wir $g(v,w) := g_x(v,w)$ für $x \in M$ und $v, w \in T_xM$, so ist für $x_0 \in M$ und Q wie oben $g(v,w) = \sum_{j \in J_0} h_j(\pi_{TM}(v)) s^{z(j)}(v,w)$ eine C^{k-1}-Funktion von $(v,w) \in (TM \oplus TM)|_Q$, also g eine C^{k-1}-Funktion.

21.24. Ist E ein reeller Vektorraum und $n \in \mathbb{N}_0$, so nennt man eine n-lineare Abbildung

$$\beta \colon E^n \to \mathbb{R}$$

eine **alternierende *n*-Linearform auf *E***, wenn $\beta(x) = 0$ für alle $x = (x_1, \ldots, x_n) \in E^n$ derart, dass $0 < i < j \leq n$ existieren mit $x_i = x_j$; oder äquivalent, wenn für alle $0 < i < j \leq n$ und $x = (x_1, \ldots, x_n) \in E^n$

$$\beta(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_j, x_{i+1} \ldots, x_{j-1}, x_i, x_{j+1}, \ldots, x_n) = -\beta(x)$$

(dies folgt aus Aufgabe P42). Eine alternierende 0-Linearform ist eine beliebige Abbildung $\{0_E\} = E^0 \to \mathbb{R}$, mit dem Nullvektor $0_E \in E$.

Definition 21.25

Es sei M eine C^k-Mannigfaltigkeit mit $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Weiter sei $n \in \mathbb{N}_0$ und

$$TM^{\oplus n} := TM \oplus \cdots \oplus TM$$

die Whitney-Summe von n Kopien von TM (mit $TM^{\oplus 0} := \bigcup_{x \in M} (T_x M)^0 = \bigcup_{x \in M} \{0_x\} = O_M(M) \cong M \times \{0\}$). Eine C^{k-1}-Abbildung

$$\omega\colon\ TM^{\oplus n} \to \mathbb{R}$$

wird eine $k-1$ mal stetig differenzierbare **Differentialform** vom Grad n auf M genannt, wenn für jedes $x \in M$ die Einschränkung

$$\omega_x := \omega|_{(TM^{\oplus n})_x}$$

eine alternierende n-Linearform ist. Im Falle $n \geq 1$ ist hierbei $(TM^{\oplus n})_x = T_x M \times \cdots \times T_x M$ das n-fache kartesische Produkt, wir haben also

$$\omega_x\colon\ T_x M \times \cdots \times T_x M \to \mathbb{R}.$$

Bemerkung 21.26.

(a) Meist nimmt man $k = \infty$ und reserviert das Wort "Differentialform" für glatte Differentialformen. Differentialformen vom Grad n werden kürzer auch ***n*-Formen** genannt.

(b) Im Falle $n = 0$ entspricht eine $k - 1$ mal stetig differenzierbare 0-Form $\omega\colon TM^{\oplus 0} = O_M(M) \to \mathbb{R}$ der C^{k-1}-Abbildung $f\colon M \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \omega(0_x)$.

Sei M eine C^k-Mannigfaltigkeit mit $k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$, weiter F ein endlich-dimensionaler Vektorraum und (E, π) ein C^k-Vektorbündel über M mit typischer Faser F. Sei J die Menge aller lokalen Trivialisierungen von M. Für $j \in J$ schreiben wir $\theta_j := j\colon E|_{U_j} \to U_j \times F$. Sei $(g_{ij})_{i,j \in J}$ der vom Vektorbündel-Atlas $(\theta_j)_{j \in J}$ induzierte $\mathrm{GL}(F)$-wertige C^k-Kozyklus und $U_{ij} := U_i \cap U_j$ für $i, j \in J$.

Satz/Definition 21.27

Für jede C^k-Mannigfaltigkeit N und jede C^k-Abbildung $f\colon N \to M$ bilden die Urbilder $W_j := f^{-1}(U_j)$ für $j \in J$ eine offene

Überdeckung von N und die C^k-Abbildungen $h_{ij} := g_{ij} \circ f|_{W_i \cap W_j}$ für $i, j \in J$ einen $\mathrm{GL}(F)$-wertigen C^k-Kozyklus auf N. Wir schreiben $(f^*(E), \pi_f)$ für ein C^k-Vektorbündel über N mit typischer Faser F derart, dass ein Vektorbündel-Atlas $(\Theta_j)_{j \in J}$ mit $\Theta_j \colon f^*(E)|_{W_j} \to W_j \times F$ den Kozyklus $(h_{ij})_{i,j \in J}$ induziert.

Bemerkung 21.28 (a) Ist $N \subseteq M$ eine Untermannigfaltigkeit und $f \colon N \to M$ die Inklusionsabbildung, so können wir

$$f^*(E) := E|_N := \bigcup_{x \in N} E_x \subseteq E$$

wählen und $\pi_f := \pi|_{E|_N} \colon E|_N \to N$. Für jedes $j \in J$ ist nämlich

$$\theta_j(E|_{U_j} \cap E|_N) = (U_j \cap N) \times F$$

eine Untermannigfaltigkeit von $U_j \times F$ und folglich $E|_{U_j} \cap E|_N$ eine Untermannigfaltigkeit von $E|_{U_j}$. Da $E|_{U_j}$ in E offen ist, ist folglich $E|_N$ eine Untermannigfaltigkeit von E, der Durchschnitt $E|_{U_j} \cap E|_N$ offen in $E|_N$ und

$$\Theta_j := \theta_j|_{E|_N \cap E|_{U_j}} \colon E|_N \cap E|_{U_j} \to (N \cap U_j) \times F$$

ein C^k-Diffeomorphismus. Für die gegebene Vektorraumstruktur auf E_x für $x \in N$ ist $\mathrm{pr}_2 \circ \Theta_j|_{E_x} = \mathrm{pr}_2 \circ \theta_j|_{E_x}$ linear und weiter

$$(\Theta_j \circ \Theta_i^{-1})(x,y) = (x, g_{ij}(x)(y)) = (x, (g_{ij} \circ f)(x))$$

für alle $(x,y) \in W_j \times F$ mit $W_j = U_j \cap N = f^{-1}(U_j)$.

Man nennt $E|_N$ auch die **Einschränkung von E auf N.**

(b) Für allgemeines f kann man

$$f^*(E) := \bigcup_{x \in N} (\{x\} \times E_{f(x)}) \subseteq N \times E$$

wählen, $\pi_f \colon f^*(E) \to N$, $(x,v) \mapsto x$ und für $W_j := f^{-1}(U_j)$ die lokalen Trivialisierungen

$$\Theta_j \colon \bigcup_{x \in W_j} (\{x\} \times E_{f(x)}) \to W_j \times F, \quad (x,v) \mapsto (x, \mathrm{pr}_2(\theta_j(v)))$$

mit $\mathrm{pr}_2 \colon M \times F \to F$, $(x,y) \mapsto y$ (Übung). Hierbei ist $f^*(E)$ das Faserprodukt $N \times_M E$ bezüglich $f \colon N \to M$ und der Submersion $\pi \colon E \to M$ und somit eine Untermannigfaltigkeit von $N \times E$.

Definition 21.29

Es sei M eine C^k-Mannigfaltigkeit, F ein endlich-dimensionaler Vektorraum, (E, π) ein C^k-Vektorbündel über M mit typischer Faser F und $Y \subseteq F$ ein Untervektorraum. Eine Teilmenge $D \subseteq E$ heißt **Untervektorbündel** mit typischer Faser Y, wenn ein Vektorbündelatlas $(\theta_j)_{j \in J}$ von lokalen Trivialisierungen $\theta_j \colon E|_{U_j} \to U_j \times F$ existiert derart, dass für alle $j \in J$

$$\theta_j(D \cap E|_{U_j}) = U_j \times Y.$$

Bemerkung 21.30. Da $U_j \times Y$ eine Untermannigfaltigkeit von $U_j \times F$ ist, ist $D \cap E|_{U_j}$ eine Untermannigfaltigkeit der offenen Teilmenge $E|_{U_j}$ von E und somit D eine Untermannigfaltigkeit von E. Die Abbildung $\pi|_D$ ist C^k und es ist

$$D_x := (\pi|_D)^{-1}(\{x\}) = D \cap E_x = \theta_j^{-1}(\{x\} \times Y)$$

ein Untervektorraum von E_x. Jede der Abbildungen

$$\Theta_j := \theta_j|_{D \cap E|_{U_j}} \colon D \cap E|_{U_j} \to U_j \times Y$$

ist ein C^k-Diffeomorphismus und $\mathrm{pr}_2 \circ \Theta_j|_{D_x} = (\mathrm{pr}_2 \circ \theta_j|_{E_x})|_{D_x}$ ist linear für alle $x \in U_j$. Also ist D ein C^k-Vektorbündel mit typischer Faser Y.

Beispiele:

Definition 21.31

Ist M eine m-dimensionale C^k-Mannigfaltigkeit mit $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, so nennt man für $n \in \{0, \ldots, m\}$ ein Untervektorbündel $D \subseteq TM$ mit typischer Faser $\mathbb{R}^n \times \{0\}$ auch eine n-dimensionale **reguläre Vektordistribution** auf M.

Beispiel 21.32

Ist M eine m-dimensionale C^k-Mannigfaltigkeit mit $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ und $N \subseteq M$ eine Untermannigfaltigkeit, so ist $TM|_N$ ein C^k-Vektorbündel über N mit typischer Faser $\mathbb{R}^m$. Ist M parakompakt, so existiert eine Riemannsche Metrik $g\colon TM \oplus TM \to \mathbb{R}$ und wir können das zugehörige **Normalenbündel**

$$(TN)^\perp := \bigcup_{x \in N} (T_x N)^\perp$$

bilden mit $(T_xN)^\perp := \{v \in T_xM : (\forall w \in T_xN)\; g_x(v,w) = 0\}$.

Um zu sehen, dass $(TN)^\perp$ ein Untervektorbündel von $TM|_N$ ist, nutzen uns sogenannte *lokale Rahmen*. Auch bei der Diskussion regulärer Vektordistributionen (Satz von Frobenius) werden sie ein wichtiges Hilfsmittel sein.

Definition 21.33

Sei (E,π) ein C^k-Vektorbündel über einer C^k-Mannigfaltigkeit M, mit $k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$. Ein **lokaler C^k-Schnitt** der Bündelprojektion $\pi\colon E \to M$ ist eine C^k-Abbildung $\sigma\colon U \to E$ auf einer offenen Teilmenge $U \subseteq M$ derart, dass $\pi \circ \sigma = \mathrm{id}_U$.

Beispiel 21.34. Ist M eine C^k-Mannigfaltigkeit mit $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, so ist ein lokaler C^{k-1}-Schnitt für $\pi_{TM}\colon TM \to M$ eine C^{k-1}-Abbildung $X\colon U \to TM$ auf einer offenen Menge $U \subseteq M$ mit $\pi_{TM} \circ X = \mathrm{id}_U$; also ist X ein C^{k-1}-Vektorfeld $X\colon U \to TU$ auf U.

Definition 21.35

Es sei F ein endlich-dimensionaler Vektorraum der Dimension

$n \in \mathbb{N}_0$. Weiter sei $k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ und (E, π) ein C^k-Vektorbündel mit typischer Faser F über einer C^k-Mannigfaltigkeit M. Gegeben $\ell \in \{0, \ldots, n\}$ nennt man ein ℓ-Tupel $(\sigma_1, \ldots, \sigma_\ell)$ von lokalen C^k-Schnitten

$$\sigma_1, \ldots, \sigma_\ell \colon U \to E$$

auf einer offenen Teilmenge $U \subseteq M$ einen **ℓ-dimensionalen lokalen Rahmen** für E, wenn für alle $x \in U$ die Vektoren $\sigma_1(x), \ldots, \sigma_\ell(x)$ in E_x linear unabhängig sind. Lokale n-dimensionale Rahmen mit $n = \dim_{\mathbb{R}}(F)$ nennt man einfach **lokale Rahmen** für E.

Beispiel 21.36. Ist (E, π) ein C^k-Vektorbündel über M mit n-dimensionaler typischer Faser F und $\theta \colon E|_U \to U \times F$ eine lokale Trivialisierung von M, so bilden für jede Basis $b_1, \ldots, b_n$ von F die C^k-Funktionen

$$\sigma_j \colon U \to E, \quad x \mapsto \theta^{-1}(x, b_j)$$

für $j \in \{1, \ldots, n\}$ einen lokalen Rahmen für E auf U. Denn es ist $(\pi \circ \sigma_j)(x) = \pi(\theta^{-1}(x, b_j)) = (\mathrm{pr}_1 \circ \theta)(\theta^{-1}(x, b_j)) = x$ für jedes

$x \in U$, also jedes σ_j ein lokaler C^j-Schnitt. Da die Vektoren $b_1, \ldots, b_n$ in F linear unabhängig sind und $\mathrm{pr}_2 \circ \theta|_{E_x} \colon E_x \to F$ ein Isomorphismus von Vektorräumen ist, sind die Vektoren

$$\sigma_j(x) = (\mathrm{pr}_2 \circ \theta|_{E_x})^{-1}(b_j)$$

für $j \in \{1, \ldots, n\}$ in E_x linear unabhängig.

Satz 21.37

Es sei $k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ und (E, π) ein C^k-Vektorbündel mit typischer Faser F über einer C^k-Mannigfaltigkeit M. Es sei $n := \dim_{\mathbb{R}}(F)$, $\ell \in \{0, \ldots, n\}$ und $D \subseteq E$ eine Teilmenge derart, dass

$$D_x := D \cap E_x \text{ für jedes } x \in M$$

ein ℓ-dimensionaler Untervektorraum von E_x ist. Sei $Y \subseteq F$ ein ℓ-dimensionaler Untervektorraum. Dann sind äquivalent:

(a) D ist ein Untervektorbündel von E mit typischer Faser Y;

(b) Für jedes $x_0 \in M$ existiert ein ℓ-dimensionaler Rahmen $(\sigma_1, \ldots, \sigma_\ell)$ von E auf einer offenen x_0-Umgebung $U \subseteq M$ derart, dass $D_x = \mathrm{span}_{\mathbb{R}}(\sigma_1(x), \ldots, \sigma_\ell(x))$ für alle $x \in U$.

Beweis. (a)⇒(b): Für $x_0 \in M$ gibt es eine offene x_0-Umgebung $U \subseteq M$ und eine lokale Trivialisierung $\theta\colon E|_U \to U \times F$ von E derart, dass $\theta(E|_U \cap D) = U \times Y$. Ist $b_1, \ldots, b_\ell$ eine Basis für Y, so bilden die C^k-Funktionen

$$\sigma_j\colon U \to E, \;\; x \mapsto \theta^{-1}(x, b_j)$$

für $j \in \{1, \ldots, \ell\}$ einen ℓ-dimensionalen Rahmen für E auf U. Da $\mathrm{pr}_2 \circ \theta|_{E_x \cap D}\colon D_x \to Y$ ein Isomorphismus von Vektorräumen ist, bilden die Vektoren $\sigma_j(x) = (\mathrm{pr}_2 \circ \theta|_{D_x})^{-1}(b_j)$ für $j \in \{1, \ldots, \ell\}$ eine Basis für D_x.

(b)⇒(a): Nach Bemerkung 21.4 dürfen wir annehmen, dass $F = \mathbb{R}^n$ und $Y = \mathbb{R}^\ell \times \{0\}$. Mit x_0, U und $\sigma_1, \ldots, \sigma_\ell$ wie in (b) dürfen wir nach Verkleinern von U annehmen, dass eine lokale Trivialisierung $\theta\colon E|_U \to U \times F$ existiert. Sei $\theta_2 := \mathrm{pr}_2 \circ \theta\colon E|_U \to F$. Nach dem Basiergänzungssatz gibt es $b_{\ell+1}, \ldots, b_n \in F$, die zusammen mit den $b_j := \theta_2(\sigma_j(x_0))$ für $j \in \{1, \ldots, \ell\}$ eine Basis für $F = \mathbb{R}^n$ bilden. Da $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ offen in $\mathbb{R}^{n \times n}$ ist, können wir nach Verkleinern von U erreichen, dass für alle $x \in U$ die Matrix $\Phi(x)$ mit den Spalten

$$(\theta_2 \circ \sigma_j)(x)$$

für $j \in \{1, \ldots, \ell\}$ sowie $b_{\ell+1}, \ldots, b_n$ invertierbar ist. Dann ist auch die Abbildung

$$\Theta\colon E|_U \to U \times F, \quad v \mapsto (\pi(v), \Phi(\pi(v))^{-1}(\theta_2(v)))$$

eine lokale Trivialisierung für E und da $\Theta(\sigma_j(x)) = (x, e_j)$, ist $\Theta(D_x) = \Theta(\mathrm{span}_{\mathbb{R}}(\sigma_1(x), \ldots \sigma_\ell(x))) = \{x\} \times \mathrm{span}_{\mathbb{R}}(e_1, \ldots, e_\ell) = \{x\} \times Y$ mit $Y := \mathbb{R}^\ell \times \{0\}$, also D ein Untervektorbündel von E mit typischer Faser Y. $\square$

Zwei Beobachtungen helfen, Differenzierbarkeit von Abbildungen in Whitney-Summen von Vektorbündeln oder auf Whitney-Summen von Tangentialbündeln nachzuprüfen.

Bemerkung 21.38

In der Situation von Beispiel 21.20 ist $E_1 \oplus E_2$ eine Untermannigfaltigkeit von $E_1 \times E_2$. Somit ist für eine C^k-Mannigfaltigkeit N eine Abbildung $f\colon N \to E_1 \oplus E_2$ genau dann C^k, wenn $\mathrm{pr}_1 \circ f\colon N \to E_1$ und $\mathrm{pr}_2 \circ f\colon N \to E_2$ beide C^k sind mit den Projektionen $\mathrm{pr}_j\colon E_1 \times E_2 \to E_j$, $(v_1, v_2) \mapsto v_j$ für $j \in \{1, 2\}$.

Jedes $x \in M$ hat eine offene Umgebung $U \subseteq M$, zu der es lokale Trivialisierungen $\theta^\ell\colon E_\ell|_U \to U \times F_\ell$ gibt für $\ell \in \{1, 2\}$; es ist

$$\Theta\colon (E_1 \oplus E_2)|_U \to U \times F_1 \times F_2, \quad (v_1, v_2) \mapsto (\theta^1(v_1), \mathrm{pr}_2^2(\theta^2(v_2)))$$

eine lokale Trivialisierung mit $\mathrm{pr}_2^\ell\colon U \times F_\ell \to F_\ell$. Nun ist

$$\psi\colon U \times U \times F_1 \times F_2 \to U \times F_1 \times U \times F_2,\ (x_1, x_2, y_1, y_2) \mapsto (x_1, y_1, x_2, y_2)$$

ein C^k-Diffeomorphismus und $\phi\colon U \to U \times U$, $x \mapsto (x,x)$ eine Einbettung von C^k-Mannigfaltigkeiten. Also ist auch

$$h := \psi \circ (\phi \times \mathrm{id}_{F_1 \times F_2}) \circ \Theta\colon (E_1 \oplus E_2)|_U \to U \times F_1 \times U \times F_2$$

eine Einbettung von C^k-Mannigfaltigkeiten, das Bild also eine Untermannigfaltigkeit S der rechten Seite. Die Abbildung ist jedoch die Einschränkung des C^k-Diffeomorphismus

$$\theta^1 \times \theta^2\colon E_1|_U \times E_2|_U \to U \times F_1 \times U \times F_2$$

auf $(E_1 \oplus E_2)|_U$, also $(E_1 \oplus E_2)|_U$ eine Untermannigfaltigkeit der offenen Teilmenge $E_1|_U \times E_2|_U$ von $E_1 \times E_2$. Für die gegebene Mannigfaltigkeitsstruktur auf $(E_1 \oplus E_2)|_U$ und diejenige als Untermannigfaltigkeit ist $h\colon (E_1 \oplus E_2)|_U \to S$ ein C^k-Diffeomorphismus, die Strukturen sind also gleich.

Bemerkung 21.39. Ist M eine C^k-Mannigfaltigkeit mit $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, so ist für jede Karte $\phi\colon U_\phi \to V_\phi \subseteq \mathbb{R}^m$ die Abbildung $TU_\phi \to U_\phi \times \mathbb{R}^m$, $v \mapsto (\pi_{TM}(v), d\phi(v))$ eine lokale Trivialisierung für TM, also

$$(TM \oplus TM)|_{U_\phi} \to U_\phi \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m,\ (v_1, v_2) \mapsto (\pi_{TM}(v_1), d\phi(v_1), d\phi(v_2))$$

eine lokale Trivialisierung für $TM \oplus TM$. Folglich gilt:

Die Abbildung $\psi\colon (TM \oplus TM)|_{U_\phi} \to V_\phi \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$,

$$(v_1, v_2) \mapsto (\phi(\pi_{TM}(v_1)), d\phi(v_1), d\phi(v_2))$$

ist eine Karte für $TM \oplus TM$ mit Umkehrfunktion $(x, y_1, y_2) \mapsto (T\phi^{-1}(x, y_1), T\phi^{-1}(x, y_2))$.

Analog für $TM^{\oplus n}$ mit $n \in \mathbb{N}$. Beachte $(\phi(\pi_{TM}(v_1)), d\phi(v_1)) = T\phi(v_1)$.

Beispiel 21.40. Im Beweis von Satz 21.23 wurde für eine Karte $\phi_z\colon U_z \to V_z$ eine Abbildung $s^z\colon TM \oplus TM \to \mathbb{R}$ betrachtet, die auf $(TM \oplus TM)|_{U_z}$ gegeben war durch

$$(v, w) \mapsto \xi_z(\pi_{TM}(v))\langle d\phi_z(v), d\phi_z(w)\rangle.$$

Mit obiger Karte ψ für $TM \oplus TM$ (zu $\phi := \phi_z$) ist

$$(s^z \circ \psi^{-1})(x, y_1, y_2) = \xi_z(\phi^{-1}(x))\langle y_1, y_2\rangle$$

eine C^{k-1}-Funktion von $(x, y_1, y_2) \in V_\phi \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$, folglich s^z eine C^{k-1}-Funktion auf $(TM \oplus TM)|_{U_\phi}$.

Lemma 21.41

Für jede C^k-Mannigfaltigkeit M und jedes C^k-Vektorbündel (E, π) über M ist die folgende Abbildung C^k (die Multiplikation mit Skalaren):

$$\mu\colon \mathbb{R} \times E \to E, \quad (t, v) \mapsto tv.$$

Beweis. Für jedes lokale Trivialisierung $\theta\colon E|_U \to U \times F$ (mit der typischen Faser F) gilt

$$tv = \theta^{-1}(\theta(tv)) = \theta^{-1}(\pi(v), t\,\mathrm{pr}_2(\theta(v)))$$

für alle $(t, v) \in \mathbb{R} \times E|_U$, mit der Projektion $\mathrm{pr}_2\colon U \times F \to F$. Also ist $\mu|_{\mathbb{R}\times E|_U}$ und somit μ eine C^k-Abbildung. $\square$

21.42. Ist F ein Vektorraum, $\langle \cdot, \cdot \rangle\colon F \times F \to \mathbb{R}$ ein inneres Produkt und sind $v_1, \ldots, v_\ell \in F$ linear unabhängig, so können wir das Gram-Schmidtsche Orthonormalisierungsverfahren anwenden: Wir definieren rekursiv

$$w_j := \frac{1}{\sqrt{\langle h_j, h_j \rangle}} h_j$$

für $j \in \{1, \ldots, \ell\}$ mit

$$h_j := v_j - \sum_{i=1}^{j-1} \langle w_i, v_j \rangle w_i.$$

In Falle $j = 1$ haben wir $h_1 = v_1$ und $w_1 = \frac{1}{\sqrt{\langle v_1, v_1 \rangle}} v_1$. Dann gilt

$$\langle w_i, w_j \rangle = \delta_{ij} \text{ für alle } i, j \in \{1, \ldots, \ell\} \tag{3}$$

und

$$\operatorname{span}_{\mathbb{R}}(w_1, \ldots, w_j) = \operatorname{span}_{\mathbb{R}}(v_1, \ldots, v_j) \text{ für alle } j \in \{1, \ldots, \ell\}. \tag{4}$$

Wir setzen $\mathrm{GSO}(\langle \cdot, \cdot \rangle, v_1, \ldots, v_\ell) := (w_1, \ldots, w_\ell) \in F^\ell$.

Lemma 21.43

Sei M eine m-dimensionale C^k-Mannigfaltigkeit mit $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ und $g\colon TM \oplus TM \to \mathbb{R}$ eine $k-1$ mal stetig differenzierbare Riemannsche Metrik auf M; für $x \in M$ sei $g_x := g|_{T_xM \times T_xM}$. Es sei $N \subseteq M$ eine Untermannigfaltigkeit, $\ell \in \{1, \ldots, m\}$ und $\sigma_1, \ldots, \sigma_\ell\colon U \to TM|_N$ ein ℓ-dimensionaler lokaler Rahmen für

$TM|_N$ auf einer offenen Teilmenge $U \subseteq N$. Setzen wir für $x \in U$

$$(\tau_1(x), \ldots, \tau_\ell(x)) := \mathrm{GSO}(g_x, \sigma_1(x), \ldots, \sigma_\ell(x)),$$

so ist $\tau_1, \ldots, \tau_\ell \colon U \to TM|_N$ ein lokaler Rahmen für $TM|_N$ und

(a) $\operatorname{span}_{\mathbb{R}}(\sigma_1(x), \ldots, \sigma_j(x)) = \operatorname{span}_{\mathbb{R}}(\tau_1(x), \ldots, \tau_j(x))$ für alle $x \in U$ und $j \in \{1, \ldots, \ell\}$;

(b) $(\tau_1, \ldots \tau_\ell)$ ist ein **orthonormaler** Rahmen in dem Sinne, dass $g_x(\tau_i(x), \tau_j(x)) = \delta_{ij}$ für alle $x \in U$ und $i, j \in \{1, \ldots, \ell\}$.

Beweis. (a) und (b) gelten nach (3) und (4). Wir müssen nur noch sehen, dass $\tau_1, \ldots, \tau_\ell$ alle C^{k-1} sind. Da $TM|_N$ nach Bemerkung 21.28 eine Untermannigfaltigkeit von TM ist, sind $\sigma_1, \ldots, \sigma_\ell$ auch C^{k-1} als Abbildungen nach TM. Also ist (σ_1, σ_1) eine C^{k-1}-Abbildung $U \to TM \times TM$ und somit auch C^{k-1} als Abbildung nach $TM \oplus TM$ (siehe Bemerkung 21.38). Folglich ist

$$\tau_1 = \frac{1}{\sqrt{\cdot} \circ g \circ (\sigma_1, \sigma_1)}\, \sigma_1$$

eine C^{k-1}-Abbildung (unter Benutzung von Lemma 21.43).
Ebenso ist für $j \in \{2, \ldots, \ell\}$

$$\tau_j \;=\; \frac{1}{\sqrt{\cdot} \circ g \circ (h_j, h_j)}\; h_j$$

C^{k-1}, weil die folgende Funktion C^{k-1} ist:

$$h_j \;:=\; \sigma_j - \sum_{i=1}^{j-1} (g \circ (\tau_i, \sigma_j))\, \tau_i. \qquad \square$$

Lemma 21.44

Es seien M eine C^k-Mannigfaltigkeit mit $k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ und $g\colon TM \oplus TM \to \mathbb{R}$ eine Riemannsche Metrik der Klasse C^{k-1}. Weiter seien N eine Untermannigfaltigkeit, $E \subseteq TM|_N$ ein Untervektorbündel und $H \subseteq E$ ein Untervektorbündel. Dann ist

$$H^\perp := \{v \in E\colon g_x(v, w) = 0 \;\text{ für alle } w \in H_x \text{ mit } x := \pi_{TM}(v)\}$$

ein Untervektorbündel von E. [Also $(H^\perp)_x = (H_x)^\perp \subseteq E_x$.]

Insb. erhalten wir mit $E := TM|_N$ und $H := TN$, dass $(TN)^\perp$ (wie in Beispiel 21.32) ein Untervektorbündel von $TM|_N$ ist.

Beweis. Es sei n die Dimension der typischen Faser von E und $\ell \in \{0, \ldots, n\}$ die Dimension der typischen Faser von H. Gegeben $x \in M$ gibt es eine lokale Trivialisierung $\theta \colon E|_U \to U \times \mathbb{R}^n$ mit $x \in U$ derart, dass $\theta(H|_U) = U \times (\mathbb{R}^\ell \times \{0\})$. Setzen wir

$$\sigma_j(z) := \theta^{-1}(z, e_j)$$

für $j \in \{1, \ldots, n\}$ mit den Standard-Basisvektoren $e_1, \ldots, e_n$ für $\mathbb{R}^n$, so ist $\sigma_1, \ldots, \sigma_\ell \colon U \to H$ ein lokaler Rahmen für H und $\sigma_1, \ldots, \sigma_n \colon U \to E$ ein lokaler Rahmen für E. Es sei $\tau_1, \ldots, \tau_n \colon U \to E$ der zugehörige orthonormale Rahmen aus Lemma 21.43. Für jedes $z \in U$ ist dann

$$H_z = \operatorname{span}_{\mathbb{R}}\{\sigma_1(z), \ldots, \sigma_\ell(z)\} = \operatorname{span}_{\mathbb{R}}\{\tau_1(z), \ldots, \tau_\ell(z)\},$$

somit $\tau_{\ell+1}(z), \ldots, \tau_n(z)$ eine Orthonormalbasis für $(H_z)^\perp \subseteq E_z$. Insbesondere ist $\tau_{j+1}, \ldots, \tau_n \colon U \to E$ ein $(n-\ell)$-dimensionaler Rahmen mit $(H^\perp)_z = (H_z)^\perp = \operatorname{span}_{\mathbb{R}}\{\tau_{\ell+1}(z), \ldots, \tau_n(z)\}$ und nach Satz 21.37 somit $H^\perp$ ein Untervektorbündel von E. $\square$

21.45. Es sei M eine C^k-Mannigfaltigkeit mit $k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ und (E, π) ein C^k-Vektorbündel über M mit typischer Faser F. Wir schreiben $\Gamma_{C^k}(E)$ für die Menge alle globalen C^k-Schnitte von E, also C^k-Funktionen $\sigma\colon M \to E$ mit $\pi \circ \sigma = \mathrm{id}_M$. Ist $k = \infty$, kürzen wir $\Gamma(E) := \Gamma_{C^\infty}(E)$ ab.

Lemma 21.46

In der Situation von 21.45 gilt:

(a) $\Gamma_{C^k}(E)$ ist ein Untervektorraum von $\prod_{x \in M} E_x$.

(b) Für jede C^k-Funktion $f\colon M \to \mathbb{R}$ und jedes $\sigma \in \Gamma_{C^k}(E)$ gilt $f\sigma \in \Gamma_{C^k}(E)$ für die Funktion $f\sigma\colon M \to E$, $x \mapsto f(x)\sigma(x)$.

(c) Die $\mathbb{R}$-bilineare Abbildung $C^k(M) \times \Gamma_{C^k}(E) \to \Gamma_{C^k}(E)$, $(f, \sigma) \mapsto f\sigma$ macht $\Gamma_{C^k}(E)$ zu einem Modul über der unitalen assoziativen $\mathbb{R}$-Algebra $C^k(M)$.

Beweis. (a) Es ist $O_M \in \Gamma_{C^k}(E)$. Sind $\sigma_1, \sigma_2 \in \Gamma_{C^k}(E)$, so ist $\sigma_1(x) + \sigma_2(x) \in E_x$ für jedes $x \in M$, also $\pi((\sigma_1 + \sigma_2)(x)) = x$. Für jede lokale Trivialisierung $\theta = (\pi|_U, \theta_2)\colon E|_U \to U \times F$ ist

$$(\sigma_1+\sigma_2)(x) = \theta^{-1}(\theta(\sigma_1(x)+\sigma_2(x))) = \theta^{-1}(x, (\theta_2\circ\sigma_1)(x)+(\theta_2\circ\sigma_2)(x))$$

eine C^k-Funktion von $x \in U$. Ebenso ist $t\sigma \in \Gamma_{C^k}(E)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ und $\sigma \in \Gamma_{C^k}(E)$, als Spezialfall der folgenden Rechnung mit der konstanten Funktion $f\colon M \to \mathbb{R}$, $x \mapsto t$.

(b) Für $x \in M$ ist $f(x)\sigma(x) \in E_x$, also $\pi(f(x)\sigma(x)) = x$. Nach Lemma 21.41 ist $f\sigma = \mu \circ (f, \sigma)$ eine C^k-Funktion nach E.

(c) Durch Auswerten an $x \in M$ verifiziert man, dass $1\sigma = \sigma$, $(f_1 f_2)\sigma = f_1(f_2\sigma)$, $(f_1 + f_2)\sigma = f_1\sigma + f_2\sigma$ und $f(\sigma_1 + \sigma_2) = f\sigma_1 + f\sigma_2$ für alle $f, f_1, f_2 \in C^k(M)$ und $\sigma, \sigma_1, \sigma_2 \in \Gamma_{C^k}(E)$. $\square$

Bemerkung 21.47. Für eine C^k-Mannigfaltigkeit M mit $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ ist $\Gamma_{C^{k-1}}(TM) = \mathcal{V}_{C^{k-1}}(M)$ der bereits zuvor betrachtete Vektorraum der C^{k-1}-Vektorfelder auf M. Für $k = \infty$ ist insbesondere $\Gamma(TM) = \mathcal{V}(M)$.

Ein weiteres Lemma über Rahmen ist von Nutzen.

Lemma 21.48

Es sei M eine C^k-Mannigfaltigkeit mit $k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$, (E, π) ein C^k-Vektorbündel über M mit n-dimensionaler Faser F und $\sigma_1, \ldots, \sigma_n \colon U \to E$ ein lokaler Rahmen auf einer offenen Teilmenge $U \subseteq M$. Dann ist

$$\psi \colon U \times \mathbb{R}^n \to E|_U, \quad (x, t) \mapsto \sum_{j=1}^{n} t_j \, \sigma_j(x)$$

mit $t = (t_1, \ldots, t_n)$ ein C^k-Diffeomorphismus und ψ^{-1} eine lokale Trivialisierung für E. Für jeden lokalen C^k-Schnitt $\sigma \colon U \to E$ ist

$$\sigma = \sum_{j=1}^{n} f_j \, \sigma_j$$

mit eindeutigen $f_1, \ldots, f_n \in C^k(U)$.

Beweis. Offenbar ist ψ bijektiv und C^k. Es genügt, U durch die Mengen einer offenen Überdeckung von U zu ersetzen. Wir dürfen daher annehmen, dass eine lokale Trivialisierung

$$\theta = (\pi|_{E|_U}, \theta_2)\colon E|_U \to U \times \mathbb{R}^n$$

existiert. Für jedes $x \in U$ ist die Matrix $\Phi(x)$ mit den Spalten $\theta_2(\sigma_1(x))$, …, $\theta_2(\sigma_n(x))$ in $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ und $\Phi\colon U \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ ist C^k. Wenn wir t als Spaltenvektor betrachten, ist

$$\theta(\psi(x,t)) = \left(x, \sum_{j=1}^{n} t_j \theta_2(\sigma_j(x))\right) = (x, \Phi(x)t).$$

Also ist $\Theta\colon E|_U \to U \times \mathbb{R}^n$, $v \mapsto (\pi(v), \Phi(\pi(v))^{-1}(\theta_2(v)))$ die Umkehrfunktion für ψ. Diese ist C^k, also ψ ein C^k-Diffeomorphismus. Da $\Theta|_{E_x}$ linear ist, ist Θ eine lokale Trivialisierung für E.

Es ist $\mathrm{pr}_2 \circ \Theta \circ \sigma = (f_1, \ldots, f_n)$ mit C^k-Funktionen $f_1, \ldots, f_n\colon U \to \mathbb{R}$. Für jedes $x \in U$ ist dann

$$\sigma(x) = \psi(\Theta(\sigma(x))) = \psi\left(x, \sum_{j=1}^{n} f_j(x) e_j\right) = \sum_{j=1}^{n} f_j(x)\sigma_j(x).$$

Für jedes $x \in U$ ist $\sigma_1(x), \ldots, \sigma_n(x)$ eine Basis für E_x, also sind $f_1(x), \ldots, f_n(x)$ eindeutig festgelegt durch $\sigma(x) = \sum_{j=1}^{n} f_j(x)\sigma_j(x)$.

Wir stellen den Satz von Frobenius vor; er wird in Anhang B bewiesen.

22.1. Es sei M eine glatte Mannigfaltigkeit.

Eine Teilmenge $N \subseteq M$, zusammen mit einer glatten Mannigfaltigkeitsstruktur auf N, wird eine **immersierte Untermannigfaltigkeit** von M genannt, wenn die Inklusionsabbildung $j_N \colon N \to M$, $x \mapsto x$ eine glatte Immersion ist.

Für $x \in N$ identifizieren wir dann $T_x N$ mit $T_x j_N(T_x N) \subseteq T_x M$. Die Topologie $\mathcal{T}$ der Mannigfaltigkeit N kann echt feiner sein als die von M induzierte Topologie $\mathcal{O}_N$. Ist $(N, \mathcal{T})$ zusammenhängend, so sprechen wir von einer zusammenhängenden immersierten Untermannigfaltigkeit.

Eine immersierte Untermannigfaltigkeit N von M heißt **initiale Untermannigfaltigkeit**, wenn für jede glatte Mannigfaltigkeit L eine Abbildung $f \colon L \to N$ genau dann glatt ist, wenn $j_N \circ f \colon L \to M$ glatt ist.

22.2. Es sei M eine σ-kompakte glatte Mannigfaltigkeit und $D \subseteq TM$ eine reguläre Vektordistribution auf M. Eine zusammenhängende immersierte Untermannigfaltigkeit $N \subseteq M$ wird eine **Integralmannigfaltigkeit** zu D genannt, wenn $T_x N = D_x$ für alle $x \in N$.

Satz 22.3 (Satz von Frobenius)

Es sei M eine σ-kompakte glatte Mannigfaltigkeit und $D \subseteq TM$ eine reguläre Vektordistribution auf M. Dann sind äquivalent:

(a) D ist **integrabel**, d.h. zu jedem $x \in M$ existiert eine Integralmannigfaltigkeit $N \subseteq M$ zu D mit $x \in N$;

(b) D ist **involutiv**, d.h. $\Gamma(D)$ ist eine Unter-Liealgebra von $\mathcal{V}(M)$.

Sind die Bedingungen erfüllt, so existiert für jedes $x \in M$ eine Integralmannigfaltigkeit B zu D mit $x \in B$, die eine initiale Untermannigfaltigkeit von M ist und maximal im folgenden Sinne: Jede Integralmannigfaltigkeit $N \subseteq M$ zu D mit $N \cap B \neq \emptyset$ ist eine offene Untermannigfaltigkeit von B.

Man nennt B das **Blatt** zu D um x; die Blätter bilden eine Partition von M.

Involutivität bedeutet: Für alle glatten Vektorfelder $X, Y\colon M \to TM$ mit $X(M), Y(M) \subseteq D$ ist auch $[X, Y](M) \subseteq D$.

Beispiel 22.4. Auf der gelochten Ebene $M := \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ betrachten wir

$$D := \{(x, y) \in M \times \mathbb{R}^2 \colon \langle x, y\rangle = 0\} \subseteq M \times \mathbb{R}^2 = TM$$

unter Benutzung des Standard-Skalarprodukts $\langle \cdot, \cdot \rangle$ auf $\mathbb{R}^2$. Es ist D eine reguläre Vektordistribution (Aufgabe P37). Diese ist integrabel, denn die Kreise

$$S_r := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \colon x_1^2 + x_2^2 = r^2\}$$

um den Ursprung sind Integralmannigfaltigkeiten (und die Blätter).

Mit Lemma 22.5 und 22.6 kann man oft Involutivität nachrechnen.

Lemma 22.5

Es seien M eine glatte Mannigfaltigkeit, $X, Y\colon M \to TM$ glatte Vektorfelder und $f, g \in C^\infty(M)$. Dann haben die glatten Vektorfelder fX und gY die Lieklammer

$$[fX, gY] = fg[X, Y] + f(\mathcal{L}_X g)Y - (\mathcal{L}_Y f)gX.$$

Beweis. Für jede Karte $\phi\colon U_\phi \to V_\phi \subseteq \mathbb{R}^m$ von M seien $X_\phi := d\phi \circ X \circ \phi^{-1} \in C^\infty(V_\phi, \mathbb{R}^m)$, $Y_\phi := d\phi \circ Y \circ \phi^{-1}$, $f_\phi := f \circ \phi^{-1}\colon V_\phi \to \mathbb{R}$ und $g_\phi := g \circ \phi^{-1}$. Dann ist $(fX)_\phi = f_\phi X_\phi$, $(gY)_\phi = g_\phi Y_\phi$ und mit der Produktregel

$$\begin{aligned}
((f_\phi X_\phi).(g_\phi Y_\phi))(x) &= d(g_\phi Y_\phi)(x, f_\phi(x)X_\phi(x)) = f_\phi(x)d(g_\phi Y_\phi)(x, X_\phi(x)) \\
&= f_\phi(x)d(g_\phi)(x, X_\phi(x))Y_\phi(x) + f_\phi(x)g_\phi(x)dY_\phi(x, X_\phi(x)) \\
&= f_\phi(x)(X_\phi.g_\phi)(x)Y_\phi(x) + f_\phi(x)g_\phi(x)(X_\phi.Y_\phi)(x).
\end{aligned}$$

Analog ist $((g_\phi Y_\phi).(f_\phi X_\phi))(x) = g_\phi(x)(Y_\phi.f_\phi)(x)X_\phi(x) + g_\phi(x)f_\phi(x)(Y_\phi.X_\phi)(x)$, somit

$$[f_\phi X_\phi, g_\phi Y_\phi] = f_\phi g_\phi [X_\phi, Y_\phi] + f_\phi (X_\phi.g_\phi) Y_\phi - g_\phi (Y_\phi.f_\phi) X_\phi.$$

Mit Lemma 15.4 (b) folgt die Behauptung. □

Lemma 22.6

Es sei D eine reguläre Vektordistribution auf einer glatten Mannigfaltigkeit M, mit typischer Faser der Dimension n. Gibt es einen Rahmen $X_1, \ldots, X_n \in \Gamma(D) \subseteq \mathcal{V}(M)$ derart, dass $[X_i, X_j] \in \Gamma(D)$ für alle $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, so ist D involutiv.

Beweis. Sind $X, Y \in \Gamma(D)$, so existieren nach Lemma 21.48 $f_1, \ldots, f_n \in C^\infty(M)$ und $g_1, \ldots, g_n \in C^\infty(M)$ derart, dass $X = \sum_{i=1}^n f_i X_i$ und $Y = \sum_{j=1}^n g_j X_j$. Dann ist

$$[X, Y] = \sum_{i,j=1}^n [f_i X_i, g_j X_j]$$

mit $[f_i X_i, g_j X_j] = f_i g_j [X_i, X_j] + f_i (\mathcal{L}_{X_i} g_j) X_j - (\mathcal{L}_{X_j} f_i) g_j X_i \in \Gamma(D)$, also D involutiv. □

Aus dem Satz von Frobenius folgern wir:

Folgerung 22.7

Ist G eine Liegruppe, so gibt es für jede Unter-Liealgebra $\mathfrak{h} \subseteq L(G)$ auf der von $\exp_G(\mathfrak{h})$ erzeugten Untergruppe $H \subseteq G$ eine eindeutige initiale Untermannigfaltigkeitsstruktur. Diese macht H zu einer zusammenhängenden Liegruppe mit $T_e H = \mathfrak{h}$.

Beweis. Unter Benutzung der Wirkung $G \times TG \to TG$, $(g, v) \mapsto g.v := T\lambda_g(v)$ ist $\theta\colon TG \to G \times T_e G$, $v \mapsto (\pi_{TG}(v), \pi_{TG}(v)^{-1}.v)$ eine globale Trivialisierung für TG. Setzen wir

$$D := \bigcup_{g \in G} g.\mathfrak{h},$$

so ist $\theta(D) = G \times \mathfrak{h}$, also D ein Untervektorbündel von TG und somit eine reguläre Vektordistribution. Wir wählen eine Basis $b_1, \ldots, b_n$ für $\mathfrak{h}$ und schreiben $X_j := (b_j)_\ell \in \mathcal{V}(G)$ für das zu b_j gehörige linksinvariante Vektorfeld für $j \in \{1, \ldots, n\}$. Dann ist $X_1, \ldots, X_n\colon G \to D$ ein Rahmen für D. Für alle $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ ist

$$[X_i, X_j] = ([b_i, b_j])_\ell$$

das zu $[b_i, b_j] \in \mathfrak{h}$ gehörige linksinvariante Vektorfeld auf G, also $[X_i, X_j](g) = g.[b_i, b_j] \in D$ für alle $g \in G$. Nach Lemma 22.6 ist D somit involutiv, nach dem Satz von Frobenius folglich integrabel. Gegeben $g \in G$ sei $B_g \subseteq G$ das Blatt zu D mit $g \in B_g$. Wir zeigen

$$yB_g = B_{yg} \quad \text{für alle } y, g \in G. \tag{1}$$

Daraus wird folgen, dass $H := B_e$ eine Untergruppe ist.

Für jedes $g \in G$ ist die Inklusionsabbildung $j_g \colon B_g \to G$ eine Immersion und $Tj_g(T_x B_g) = D_x$ für alle $x \in B_g$. Gegeben $y, g \in G$ geben wir $N := yB_g$ die glatte Mannigfaltigkeitsstruktur, die $\lambda_y|_{B_g} \colon B_g \to N$, $x \mapsto yx$ zu einem C^∞-Diffeomorphismus macht. Dann ist N zusammenhängend. Für die Inklusion $j \colon N \to G$ gilt

$$j = \lambda_y \circ j_g \circ \lambda_y^{-1}|_N;$$

also ist j eine C^∞-Immersion und für alle $x \in N$ gilt

$$T_x j(T_x N) = T\lambda_y Tj_g T\lambda_y^{-1} T_x N = T\lambda_y Tj_g T_{y^{-1}x} B_g = T\lambda_y D_{y^{-1}x} = D_x.$$

Somit ist N eine Integralmannigfaltigkeit für D mit $yg \in N$ und somit N eine offene Untermannigfaltigkeit von B_{yg}. Insbesondere ist $yB_g \subseteq B_{yg}$. Analog ist $y^{-1}B_{yg} \subseteq B_{y^{-1}yg} = B_g$, also $B_{yg} \subseteq yB_g$ und folglich gilt (1).

Wir zeigen nun, dass $H := B_e$ eine Untergruppe von G ist. Zunächst ist $e \in B_e = H$. Für alle $x \in H$ ist $e \in x^{-1}H = B_{x^{-1}}$, also $B_{x^{-1}} = B_e = H$ und somit $x^{-1} \in H$. Gegeben $x, y \in H$ ist $x^{-1} \in H$, also $e \in xH = B_x$ und somit $B_x = B_e = H$, woraus $xy \in xH = xB_e = B_x = H$ folgt. Also ist H eine Untergruppe.

Sei $\mu_G \colon G \times G \to G$, $(x, y) \mapsto xy$ bzw. $\mu_H \colon H \times H \to H$ die Gruppenmultiplikation, $\eta_G \colon G \to G$, $x \mapsto x^{-1}$ bzw. $\eta_H \colon H \to H$ die Gruppeninversion. Da G eine Liegruppe ist, sind μ_G und η_G glatt. Mit der Inklusion $j_e \colon B_e = H \to G$, $x \mapsto x$ sind

$$j_e \circ \mu_H = \mu_G \circ (j_e \times j_e) \text{ und } j_e \circ \eta_H = \eta_G \circ j_e$$

glatt. Da H eine initiale Untermannigfaltigkeit von G ist, sind folglich μ_H und η_H glatt, also H eine Liegruppe. Die von $\exp_H(T_eH)$ erzeugte Untergruppe S von H ist eine e-Umgebung in H, da $\exp_H$ an der Stelle 0 ein lokaler Diffeomorphismus ist.

und somit $e \in (\exp_H(T_eH))^o \subseteq S^o$. Das folgende Lemma liefert nun $S = H$. Wegen der Natürlichkeit der Exponentialfunktion ist

$$\exp_G(\mathfrak{h}) = \exp_G(T_e j_e(T_eH)) = j_e(\exp_H(T_eH)) = \exp_H(T_eH),$$

also $S = \langle \exp_G(\mathfrak{h}) \rangle$. Die initiale Untermannigfaltigkeitsstruktur ist eindeutig nach Lemma 22.9. $\square$

Die Liegruppe $H = \langle \exp_G(\mathfrak{h}) \rangle$ aus Folgerung 22.8 nennen wir die **integrale Untergruppe** von G zur Unter-Liealgebra $\mathfrak{h} \subseteq L(G)$.

Traditionell nennt man H eine **analytische Untergruppe**.

Lemma 22.8

Es sei G eine Gruppe, versehen mit einer Topologie, welche $\lambda_g\colon G \to G$, $x \mapsto gx$ stetig macht für alle $g \in G$. Dann gilt: Hat eine Untergruppe $H \subseteq G$ nicht leeres Inneres, so ist H offen in G und abgeschlossen. Ist G zudem zusammenhängend, so ist $H = G$.

Die Voraussetzungen an G sind für jede Liegruppe erfüllt sowie jede topologische Gruppe.

Beweis. Für jedes $g \in G$ ist λ_g ein Homöomorphismus, da $(\lambda_g)^{-1} = \lambda_{g^{-1}}$. Sei $x \in H^o$. Für jedes $y \in H$ ist dann $y = \lambda_{yx^{-1}}(x)$ ein innerer Punkt von $\lambda_{yx^{-1}}(H) = H$, da $\lambda_{yx^{-1}}$ ein Homöomorphismus ist. Also ist H offen in G. Das Komplement von H ist von der Form
$$G \setminus H = \bigcup_{x \in G \setminus H} xH$$
und somit offen als Vereinigung der offenen Mengen $xH = \lambda_x(H)$. Somit ist H abgeschlossen. Ist G zusammenhängend, so muss $H = G$ sein, das H offen, abgeschlossen und nicht leer ist. □

Lemma 22.9

Es sei M eine glatte Mannigfaltigkeit und $N \subseteq M$ eine Teilmenge. Für $\ell \in \{1, 2\}$ sei $\mathcal{O}_\ell$ eine Topologie auf N und $\mathcal{A}_\ell$ ein maximaler C^∞-Atlas derart, dass $(N, \mathcal{O}_\ell, \mathcal{A}_\ell)$ eine initiale Untermannigfaltigkeit von M ist. Dann gilt $\mathcal{O}_1 = \mathcal{O}_2$ und $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_2$.

Beweis. Für $\ell \in \{1, 2\}$ sei $N_\ell := (N, \mathcal{O}_\ell, \mathcal{A}_\ell)$; die Inklusion $j_\ell \colon N_\ell \to M$ ist glatt. Betrachte $f \colon N_1 \to N_2$, $x \mapsto x$. Da $j_2 \circ f = j_1$ glatt ist und N_2 initial, ist f glatt. Analog ist $f^{-1} \colon N_2 \to N_1$ glatt. Also ist $\mathrm{id}_N = f \colon N_1 \to N_2$ ein C^∞-Diffeomorphismus. □

Ein Satz der Differentialtopologie wird in Anhang C–E bewiesen:

Satz 23.1 (Existenz tubularer Umgebungen)

Es sei M eine parakompakte glatte Mannigfaltigkeit und N eine Untermannigfaltigkeit von M, die eine abgeschlossene Teilmenge von M ist. Dann existiert ein C^∞-Vektorbündel (E, π) über N, eine offene Menge $Q \subseteq E$ mit $O_N(N) \subseteq Q$ und ein C^∞-Diffeomorphismus $\psi\colon Q \to P$ für eine offene Menge $P \subseteq M$ mit $N \subseteq P$.

Man nennt P eine **tubulare Umgebung** von N in M. Diese ist also diffeomorph zu einer offenen Umgebung des Nullschnitts $O_N(N) = \{0_x \in E_x \colon x \in N\}$ in einem Vektorbündel E über N. Der Beweis zeigt, dass man für E das Normalenbündel $(TN)^\perp \subseteq TM|_N$ nehmen kann für eine Riemannsche Metrik auf M.

Beispiel 23.2. Der zum Kreis $\mathbb{S}_1$ diffeomorphe Äquator $\mathbb{S}_1 \times \{0\}$ in der Sphäre $\mathbb{S}_2 \subseteq \mathbb{R}^3$ hat eine tubulare Umgebung, die zu einer offenen Umgebung des 0-Schnitts im Zylinder $\mathbb{S}_1 \times \mathbb{R}$ (dem trivialen Geradenbündel über $\mathbb{S}_1$) diffeomorph ist: siehe Skizze (+Aufg.P41).

§24 Alternierende Multilinearformen

Es seien E und F reelle Vektorräume und $k \in \mathbb{N}_0$.

Definition 24.1

Eine k-lineare Abbildung $\omega\colon E^k \to F$ heißt **alternierend**, wenn

$$\omega(v_1, \ldots, v_k) = 0$$

für alle $v_1, \ldots, v_k \in E$ derart, dass $i < j$ in $\{1, \ldots, k\}$ existieren mit $v_i = v_j$. Alternierende k-lineare Abbildungen $\omega\colon E^k \to \mathbb{R}$ nennt man **alternierende k-Linearformen**.

Wir schreiben $\mathrm{Alt}^k(E, F) \subseteq F^{E^k}$ für den Vektorraum aller alternierenden k-linearen Abbildungen $\omega\colon E^k \to F$ und $\mathrm{Alt}^k(E) := \mathrm{Alt}^k(E, \mathbb{R})$. Weiter sei $E^* := \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(E, \mathbb{R})$ der Dualraum von E.

Beispiel 24.2

Für alle $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in E^*$ erhalten wir ein Element

$\lambda_1 \wedge \ldots \wedge \lambda_k \in \mathrm{Alt}^k(E)$ via

$$(\lambda_1 \wedge \ldots \wedge \lambda_k)(v_1, \ldots, v_k) := \det \begin{pmatrix} \lambda_1(v_1) & \ldots & \lambda_1(v_k) \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_k(v_1) & \ldots & \lambda_k(v_k) \end{pmatrix}.$$

Es sei $\mathrm{Lin}^k_{\mathbb{R}}(E,F)$ der Vektorraum aller k-linearen Abbildungen $\omega\colon E^k \to F$ und S_k die symmetrische Gruppe aller Permutationen von $\{1, \ldots, k\}$. Dann ist

$$S_k \times \mathrm{Lin}^k_{\mathbb{R}}(E,F) \to \mathrm{Lin}^k_{\mathbb{R}}(E,F), \quad (\sigma, \omega) \mapsto \sigma.\omega$$

mit $(\sigma.\omega)(v_1, \ldots, v_k) := \omega(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(k)})$ eine Wirkung von S_k auf $\mathrm{Lin}^k_{\mathbb{R}}(E,F)$ derart, dass für jede Permutation σ die Abbildung $\sigma.\omega \in \mathrm{Lin}^k_{\mathbb{R}}(E,F)$ linear von $\omega \in \mathrm{Lin}^k_{\mathbb{R}}(E,F)$ abhängt (Übung).

Satz 24.3

Für $\omega \in \mathrm{Lin}^k_{\mathbb{R}}(E,F)$ sind äquivalent:

(a) $\omega \in \mathrm{Alt}^k(E,F)$;

(b) $\sigma.\omega = \mathrm{sgn}(\sigma)\omega$ für alle $\sigma \in S_k$;

(c) $\tau.\omega = -\omega$ für alle Transpositionen $\tau \in S_k$, d.h. wenn zwei Argumente vertauscht werden.

Beweis. Vergleiche Aufgabe P42 für (a)$\Leftrightarrow$(c). Die Implikation (b)$\Rightarrow$(c) ist trivial. Gilt (c), so schreiben wir $\sigma \in S_k$ also Produkt von Transpositionen, $\sigma = \tau_n \cdots \tau_1$. Wir haben $\tau_1.\omega = -\omega$. Ist $(\tau_j \cdots \tau_1).\omega = (-1)^j\omega$ für ein $j \in \{1, \ldots, n-1\}$, so ist

$$(\tau_{j+1} \cdots \tau_1).\omega = \tau_{j+1}.((-1)^j\omega) = (-1)^j\tau_{j+1}.\omega = (-1)^{j+1}\omega.$$

Per Induktion ist also $\sigma.\omega = (\tau_n \cdots \tau_1).\omega = (-1)^n\omega = \mathrm{sgn}(\sigma)\omega$ und somit gilt (b). $\square$ Sei E nun endlich-dimensional in 24.4 bis 24.6.

Lemma 24.4

Es sei $b_1, \ldots, b_m$ eine Basis für E und $\omega \in \mathrm{Alt}^k(E, F)$.

(a) Sind $j_1, \ldots, j_k \in \{1, \ldots, m\}$ paarweise verschieden und $\{j_1, \ldots, j_k\} = \{i_1, \ldots, i_k\}$ mit $i_1 < \cdots < i_k$, so ist

$$\omega(b_{j_1}, \ldots, b_{j_k}) = \mathrm{sgn}(\sigma)\,\omega(b_{i_1}, \ldots, b_{i_k})$$

mit $\sigma = \sigma_{j_1,\ldots,j_k} \in S_k$ derart, dass $i_{\sigma(\ell)} = j_\ell$ für $\ell \in \{1, \ldots, k\}$.

(b) Ist auch $\eta \in \mathrm{Alt}^k(E,F)$ und

$$\omega(b_{i_1},\ldots,b_{i_k}) = \eta(b_{i_1},\ldots,b_{i_k})$$

für alle $i_1,\ldots,i_k \in \{1,\ldots,m\}$ mit $i_1 < \cdots < i_k$, so ist $\omega = \eta$.

Beweis. (a) Setzen wir $v_\ell := b_{i_\ell}$ für $\ell \in \{1,\ldots,k\}$, so ist $b_{j_\ell} = b_{i_{\sigma(\ell)}} = v_{\sigma(\ell)}$, somit

$$\begin{aligned} \omega(b_{j_1},\ldots,b_{j_k}) &= \omega(v_{\sigma(1)},\ldots,v_{\sigma(k)}) = \mathrm{sgn}(\sigma)\omega(v_1,\ldots,v_k) \\ &= \mathrm{sgn}(\sigma)\omega(b_{i_1},\ldots b_{i_k}). \end{aligned}$$

(b) Für $v_1,\ldots,v_k \in E$ schreiben wir $v_\ell = \sum_{j_\ell=1}^m a_{\ell,j_\ell} b_{j_\ell}$ mit $a_{\ell,j_\ell} \in \mathbb{R}$. Dann ist (wobei "p.v." für "paarweise verschieden" steht)

$$\begin{aligned} \omega(v_1,\ldots,v_k) &= \sum_{j_1,\ldots,j_k=1}^m a_{1,j_1}\cdots a_{k,j_k}\omega(b_{j_1},\ldots,b_{j_k}) \\ &= \sum_{p.v.\, j_1,\ldots,j_k=1}^m a_{1,j_1}\cdots a_{k,j_k}\omega(b_{j_1},\ldots,b_{j_k}) \end{aligned}$$

$$= \sum_{p.v.\, j_1,\ldots,j_k=1}^{m} a_{1,j_1} \cdots a_{k,j_k} \operatorname{sgn}(\sigma_{j_1,\ldots,j_k}) \omega(b_{i_1}, \ldots, b_{i_k}) \qquad (1)$$

mit $\{j_1, \ldots, j_k\} = \{i_1, \ldots, i_k\}$ und $i_1 < \cdots < i_k$. Die analoge Rechnung für $\eta(v_1, \ldots, v_k)$ mit η statt ω führt ebenfalls auf (1), so dass also $\omega(v_1, \ldots, v_k) = \eta(v_1, \ldots, v_k)$. $\square$

Erinnerung an lineare Algebra: Ist $b_1, \ldots, b_m$ eine Basis für E, so können wir jedes $v \in E$ schreiben als

$$v = \sum_{j=1}^{m} b_j^*(v) b_j$$

mit eindeutigen Koeffizienten $b_j^*(v) \in \mathbb{R}$. Diese hängen linear von $v \in E$ ab, so dass also $b_1^*, \ldots, b_m^* \in E^*$. Man nennt $b_1^*, \ldots, b_m^*$ die duale Basis für E^*; es gilt

$$b_i^*(b_j) = \delta_{ij} \text{ für alle } i, j \in \{1, \ldots, m\}.$$

Sind $i_1 < \cdots < i_k$ und $j_1 < \cdots < j_k$ in $\{1, \ldots, m\}$, so gilt

$$(b_{i_1}^* \wedge \ldots \wedge b_{i_k}^*)(b_{j_1}, \ldots, b_{j_k}) = \det\left((\delta_{i_\mu, j_\nu})_{\mu,\nu=1}^{k}\right) = \delta_{i_1,j_1} \cdots \delta_{i_k,j_k}. \quad (2)$$

Soll die Determinante von Null verschieden sein, muss jede Spalte nämlich von 0 verschieden sein, woraus $\{j_1, \ldots, j_k\} \subseteq \{i_1, \ldots, i_k\}$ folgt und somit Gleichheit der zwei Mengen.

Satz 24.5

Die Elemente $b_{i_1}^* \wedge \ldots \wedge b_{i_k}^*$ mit $i_1 < \cdots < i_k$ in $\{1, \ldots, m\}$ bilden eine Basis für $\mathrm{Alt}^k(E)$. Für jedes $\omega \in \mathrm{Alt}^k(E)$ ist

$$\omega = \sum_{i_1 < \cdots < i_k} \omega(b_{i_1}, \ldots, b_{i_k})\, b_{i_1}^* \wedge \ldots \wedge b_{i_k}^*. \tag{3}$$

Beweis. Lineare Unabhängigkeit: Ist $\sum_{i_1 < \cdots < i_k} r_{i_1, \ldots, i_k} b_{i_1}^* \wedge \ldots \wedge b_{i_k}^* = 0$ mit Koeffizienten $r_{i_1, \ldots, i_k} \in \mathbb{R}$, so ist wegen (2)

$$0 = \sum_{i_1 < \cdots < i_k} r_{i_1, \ldots, i_k} \underbrace{b_{i_1}^* \wedge \ldots \wedge b_{i_k}^*(b_{j_1}, \ldots, b_{j_k})}_{= \delta_{i_1, j_1} \cdots \delta_{i_k, j_k}} = r_{j_1, \ldots, j_k}$$

für alle $j_1 < \cdots < j_k$ in $\{1, \ldots, m\}$.

Erzeugendensystem: Schreiben wir η für die rechte Seite von (3), so gilt wegen (2) für alle $j_1 < \ldots < j_k$

$$\eta(b_{j_1}, \ldots, b_{j_k}) = \omega(b_{j_1}, \ldots, b_{j_k}).$$

Nach Lemma 24.4 (a) folgt hieraus $\eta = \omega$. $\square$
Für jede Teilmenge $I \subseteq \{1, \ldots, m\}$ mit k Elementen gibt es eindeutige $i_1 < \cdots < i_k$ in $\{1, \ldots, m\}$ mit $I = \{i_1, \ldots, i_k\}$. Es gibt daher so viele k-Tupel $(i_1, \ldots, i_k)$ wie k-elementige Teilmengen von $\{1, \ldots, m\}$, also $\binom{m}{k}$ Stück. Also:

Bemerkung 24.6

Ist $m := \dim_{\mathbb{R}}(E)$, so ist $\mathrm{Alt}^k(E)$ ist ein reeller Vektorraum der Dimension $\binom{m}{k}$. Ist $k > m$, so ist $\mathrm{Alt}^k(E) = \{0\}$. Weiter ist $\mathrm{Alt}^m(E)$ eindimensional, nämlich $\mathrm{Alt}^m(E) = \mathbb{R}\, b_1^* \wedge \ldots \wedge b_m^*$.

Zudem hat $\mathrm{Alt}^1(E) = E^*$ die Dimension m und es ist $\mathrm{Alt}^0(E) \cong \mathbb{R}$.

Sie kennen die Leibnizsche Regel: Für $A = (a_{ij})_{i,j=1}^k \in \mathbb{R}^{k\times k}$ ist

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_k} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{k\sigma(k)}.$$

Satz 24.7

Sind $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in E^*$ und $\mu_i := \sum_{j=1}^k a_{ij}\lambda_j$ mit $A = (a_{ij})_{i,j=1}^k \in \mathbb{R}^{k\times k}$, so ist

$$\mu_1 \wedge \ldots \wedge \mu_k = \det(A)\, \lambda_1 \wedge \ldots \wedge \lambda_k.$$

Beweis. Für paarweise verschiedene (p.v.) $j_1, \ldots, j_k \in \{1, \ldots, k\}$ sei $\sigma_{j_1,\ldots,j_k} \in S_k$ die Permutation mit $\sigma(i) = j_i$ für alle $i \in \{1, \ldots, k\}$. Dann gilt

$$\mu_1 \wedge \ldots \wedge \mu_k = \sum_{j_1=1}^k \cdots \sum_{j_k=1}^k a_{1j_1} \cdots a_{kj_k} \lambda_{j_1} \wedge \ldots \wedge \lambda_{j_k}$$

$$= \sum_{j_1,\ldots,j_k \text{ p.v.}} a_{1j_1}\cdots a_{kj_k} \underbrace{\lambda_{j_1}\wedge\ldots\wedge\lambda_{j_k}}_{=\operatorname{sgn}(\sigma_{j_1,\ldots,j_k})\lambda_1\wedge\ldots\wedge\lambda_k}$$

$$= \sum_{\sigma\in S_k} \operatorname{sgn}(\sigma)\, a_{1\sigma(1)}\cdots a_{k\sigma(k)}\,\lambda_1\wedge\ldots\wedge\lambda_k = \det(A)\,\lambda_1\wedge\ldots\wedge\lambda_k;$$

das vorletzte Gleichheitszeichen gilt, da die Abbildung $(j_1,\ldots,j_k)\mapsto\sigma_{j_1,\ldots,j_k}$ nach S_k bijektiv ist. $\square$

Satz 24.8

Für $k,\ell\in\mathbb{N}$ gibt es genau eine bilineare Abbildung

$$\wedge\colon\ \operatorname{Alt}^k(E)\times\operatorname{Alt}^\ell(E)\to\operatorname{Alt}^{k+\ell}(E),\quad (\omega,\eta)\mapsto\omega\wedge\eta$$

derart, dass

$$(\lambda_1\wedge\ldots\wedge\lambda_k)\wedge(\lambda_{k+1}\wedge\ldots\wedge\lambda_{k+\ell}) = \lambda_1\wedge\ldots\wedge\lambda_{k+\ell} \qquad (4)$$

für alle $\lambda_1\ldots,\lambda_{k+\ell}\in E^*$.

Im Beweis nutzen simple Vorüberlegungen. Es sei $X := \{k+1, \ldots, k+\ell\}$ und $S'_\ell := S_X$ die Gruppe aller Permutationen von X. Sind $\pi_1 \in S_k$ und $\pi_2 \in S'_\ell$, so erhalten wir ein Element $\pi_1 \sqcup \pi_2 \in S_{k+\ell}$ via

$$j \mapsto \begin{cases} \pi_1(j) & \text{wenn } j \in \{1, \ldots, k\}; \\ \pi_2(j) & \text{wenn } j \in \{k+1, \ldots, k+\ell\}. \end{cases}$$

(a) Ist $\sigma \in S_k$, so ist $\hat{\sigma} := \sigma \sqcup \mathrm{id}_X \in S_{k+\ell}$ und

$$\mathrm{sgn}(\sigma) = \mathrm{sgn}(\hat{\sigma}), \tag{5}$$

denn ist σ ein Produkt von j Transpositionen, so auch $\hat{\sigma}$.

(b) Die Abbildung $\phi\colon \{1, \ldots, \ell\} \to X$, $i \mapsto i+k$ ist bijektiv und $S'_\ell \to S_\ell$, $\sigma \mapsto \phi^{-1} \circ \sigma \circ \phi$ ein Isomorphismus von Gruppen. Für $\sigma \in S'_\ell$ definieren wir

$$\mathrm{sgn}(\sigma) := \mathrm{sgn}(\phi^{-1} \circ \sigma \circ \phi).$$

Dies ist $(-1)^j$, wenn wir σ (und somit $\phi^{-1} \circ \sigma \circ \phi$) als Produkt von j Transpositionen schreiben können, also auch $\hat{\sigma} := \mathrm{id}_{\{1,\ldots,k\}} \sqcup \sigma$. Wiederum gilt daher (5).

(c) Für $\pi_1 \in S_k$ und $\pi_2 \in S'_\ell$ ist $\pi_1 \sqcup \pi_2 = \widehat{\pi_1} \circ \widehat{\pi_2}$, folglich

$\mathrm{sgn}(\pi_1 \sqcup \pi_2) = \mathrm{sgn}(\widehat{\pi_1} \circ \widehat{\pi_2}) = \mathrm{sgn}(\widehat{\pi_1})\,\mathrm{sgn}(\widehat{\pi_2})$, also

$$\mathrm{sgn}(\pi_1 \sqcup \pi_2) = \mathrm{sgn}(\pi_1)\,\mathrm{sgn}(\pi_2). \tag{6}$$

(d) Es sei $S_{k,\ell}$ die Menge aller $\sigma \in S_{k+\ell}$ derart, dass $\sigma|_{\{1,\ldots,k\}}$ und $\sigma|_X$ monoton wachsend sind. Die Abbildung

$$S_{k,\ell} \times S_k \times S'_\ell \to S_{k+\ell}, \quad (\sigma, \pi_1, \pi_2) \mapsto \sigma \circ (\pi_1 \sqcup \pi_2)$$

ist dann eine Bijektion.

Beweis von Satz 24.8. (i) Für $\omega \in \mathrm{Alt}^k(E)$ und $\eta \in \mathrm{Alt}^\ell(E)$ ist

$$\omega \otimes \eta \colon E^{k+\ell} \to \mathbb{R},\ (y_1, \ldots, y_{k+\ell}) \mapsto \omega(y_1, \ldots, y_k)\eta(y_{k+1}, \ldots, y_{k+\ell})$$

eine $(k+\ell)$-lineare Abbildung. Wir definieren

$$\omega \wedge \eta := \frac{1}{k!\ell!} \sum_{\sigma \in S_{k+\ell}} \mathrm{sgn}(\sigma)\, \sigma.(\omega \otimes \eta), \tag{7}$$

so dass also für alle $y_1, \ldots, y_{k+\ell} \in E$

$$(\omega \wedge \eta)(y_1, \ldots, y_{k+\ell}) = \frac{1}{k!\ell!} \sum_{\sigma \in S_{k+\ell}} \mathrm{sgn}(\sigma)\, \omega(y_{\sigma(1)}, \ldots, y_{\sigma(k)})\eta(y_{\sigma(k+1)}, \ldots, y_{\sigma(k+\ell)}).$$

Als Linearkombination $(k+\ell)$-linearer Abbildungen ist auch $\omega \wedge \eta$ $(k+\ell)$-linear. Wir zeigen $\omega \wedge \eta \in \mathrm{Alt}^{k+\ell}(E)$. Für jedes $\pi \in S_{k+\ell}$ ist

$$\begin{aligned}\pi.(\omega \wedge \eta) &= \frac{1}{k!\ell!} \sum_{\sigma \in S_{k+\ell}} \operatorname{sgn}(\sigma)\, \underbrace{\pi.(\sigma.(\omega \otimes \eta))}_{=(\pi\circ\sigma).(\omega\otimes\eta)} \\ &= \operatorname{sgn}(\pi) \frac{1}{k!\ell!} \sum_{\rho \in S_{k+\ell}} \operatorname{sgn}(\rho)\, \rho.(\omega \otimes \eta) = \operatorname{sgn}(\pi)\, (\omega \wedge \eta),\end{aligned}$$

da $\operatorname{sgn}(\sigma) = \operatorname{sgn}(\pi) \operatorname{sgn}(\pi) \operatorname{sgn}(\sigma) = \operatorname{sgn}(\pi) \operatorname{sgn}(\rho)$ mit $\rho := \pi \circ \sigma$ und $S_{k+\ell} \to S_{k+\ell}$, $\sigma \mapsto \pi \circ \sigma = \rho$ bijektiv ist. Also $\omega \wedge \eta \in \mathrm{Alt}^{k+\ell}(E)$.

(ii) Wir zeigen nun, dass

$$\omega \wedge \eta = \sum_{\sigma \in S_{k,\ell}} \operatorname{sgn}(\sigma)\, \sigma.(\omega \otimes \eta). \tag{8}$$

Ist $\pi_1 \in S_k$, $\pi_2 \in S'_\ell$ und $\theta := \phi^{-1} \circ \pi_2 \circ \phi$ die entsprechende Permutation von $\{1, \ldots, \ell\}$, so ist für $y_1, \ldots, y_{k+\ell} \in E$ mit $v_i := y_{k+i} = y_{\phi(i)}$ für $i \in \{1, \ldots, \ell\}$

$$\begin{aligned}\eta(y_{\pi_2(k+1)}, \ldots, y_{\pi_2(k+\ell)}) &= \eta(v_{\theta(1)}, \ldots, v_{\theta(\ell)}) = \operatorname{sgn}(\theta) \eta(v_1, \ldots, v_\ell) \\ &= \operatorname{sgn}(\pi_2)\, \eta(y_{k+1}, \ldots, y_{k+\ell}).\end{aligned}$$

Somit gilt

$$\begin{aligned}
&((\pi_1 \sqcup \pi_2).(\omega \otimes \eta))(y_1, \ldots, y_{k+\ell}) \\
&\qquad = \omega(y_{\pi_1(1)}, \ldots, y_{\pi_1(k)})\eta(y_{\pi_2(k+1)}, \ldots, y_{\pi_2(k+\ell)}) \\
&\qquad = \operatorname{sgn}(\pi_1)\operatorname{sgn}(\pi_2)\,(\omega \otimes \eta)(y_1, \ldots, y_{k+\ell})
\end{aligned}$$

und folglich $(\pi_1 \sqcup \pi_2).(\omega \otimes \eta) = \operatorname{sgn}(\pi_1)\operatorname{sgn}(\pi_2)(\omega \otimes \eta)$. Also ist

$$\begin{aligned}
\omega \wedge \eta &= \frac{1}{k!\ell!} \sum_{\sigma \in S_{k+\ell}} \operatorname{sgn}(\sigma)\, \sigma.(\omega \otimes \eta) \\
&= \frac{1}{k!\ell!} \sum_{\sigma \in S_{k,\ell}} \sum_{\pi_1 \in S_k} \sum_{\pi_2 \in S'_\ell} \operatorname{sgn}(\sigma \circ (\pi_1 \sqcup \pi_2))\,(\sigma \circ (\pi_1 \sqcup \pi_2)).(\omega \otimes \eta) \\
&= \frac{1}{k!\ell!} \sum_{\sigma \in S_{k,\ell}} \sum_{\pi_1 \in S_k} \sum_{\pi_2 \in S'_\ell} \operatorname{sgn}(\sigma)\operatorname{sgn}(\pi_1)\operatorname{sgn}(\pi_2)\,\sigma.(\underbrace{(\pi_1 \sqcup \pi_2).(\omega \otimes \eta)}_{=\operatorname{sgn}(\pi_1)\operatorname{sgn}(\pi_2)\,(\omega \otimes \eta)}) \\
&= \frac{1}{k!\ell!} \sum_{\sigma \in S_{k,\ell}} \sum_{\pi_1 \in S_k} \sum_{\pi_2 \in S'_\ell} \operatorname{sgn}(\sigma)\, \sigma.(\omega \otimes \eta) \\
&= \sum_{\sigma \in S_{k,\ell}} \operatorname{sgn}(\sigma)\, \sigma.(\omega \otimes \eta).
\end{aligned}$$

(iii) Wir verifizieren nun (4). Sei $\omega := \lambda_1 \wedge \ldots \wedge \lambda_k$ und $\eta := \lambda_{k+1} \wedge \ldots \wedge \lambda_{k+\ell}$. Sei $y_1, \ldots, y_{k+\ell} \in E$. Für $\sigma \in S_{k,\ell}$ ist

$$\begin{aligned}\omega(y_{\sigma(1)}, \ldots, y_{\sigma(k)}) &= \det((\lambda_i(y_{\sigma(j)}))_{i,j=1}^k) \\ &= \sum_{\pi_1 \in S_k} \operatorname{sgn}(\pi_1)\lambda_1(y_{\sigma(\pi_1(1))}) \cdots \lambda_k(y_{\sigma(\pi_1(k))})\end{aligned}$$

nach der Leibnizregel. Gegeben $\pi_2 \in S'_\ell$ ist hierbei $\pi_1(j) = (\pi_1 \sqcup \pi_2)(j)$ für $j \in \{1, \ldots, k\}$. Ebenso ist

$$\begin{aligned}&\eta(y_{\sigma(k+1)}, \ldots, y_{\sigma(k+\ell)}) \\ &= \det((\lambda_{k+i}(y_{\sigma(k+j)}))_{i,j=1}^\ell) \\ &= \sum_{\theta \in S_\ell} \operatorname{sgn}(\theta)\lambda_{k+1}(y_{\sigma(k+\theta(1))}) \cdots \lambda_{k+\ell}(y_{\sigma(k+\theta(\ell))}) \\ &= \sum_{\pi_2 \in S'_\ell} \operatorname{sgn}(\pi_2)\lambda_{k+1}(y_{\sigma(\pi_2(k+1))}) \cdots \lambda_{k+\ell}(y_{\sigma(\pi_2(k+\ell))}),\end{aligned}$$

denn substituieren wir $\theta := \phi^{-1} \circ \pi_2 \circ \phi$ mit $\pi_2 \in S'_\ell$, so ist $k + \theta(j) = \phi(\theta(j)) = (\pi_2 \circ \phi)(j) = \pi_2(k+j)$ für $j \in \{1, \ldots, \ell\}$. Für $\pi_1 \in S_k$ ist hier $\pi_2(k+j) = (\pi_1 \sqcup \pi_2)(k+j)$ für alle $j \in \{1, \ldots, \ell\}$.

Nach (8) ist $(\omega \wedge \eta)(y_1, \ldots, y_{k+\ell}) = \sum_{\sigma \in S_{k,\ell}} \operatorname{sgn}(\sigma)\, \omega(y_{\sigma(1)}, \ldots, y_{\sigma(k)})\eta(y_{\sigma(k+1)}, \ldots, y_{\sigma(k+\ell)})$, was sich durch Einsetzen der vorigen Identitäten umschreiben lässt zu

$$\begin{aligned}
&\sum_{\sigma \in S_{k,\ell}} \sum_{\pi_1 \in S_k} \sum_{\pi_2 \in S'_\ell} \underbrace{\operatorname{sgn}(\sigma)\operatorname{sgn}(\pi_1)\operatorname{sgn}(\pi_2)}_{=\operatorname{sgn}(\sigma\circ(\pi_1 \sqcup \pi_2))} \lambda_1(y_{(\sigma\circ(\pi_1\sqcup\pi_2))(1)}) \cdots \lambda_{k+\ell}(y_{(\sigma\circ(\pi_1\sqcup\pi_2))(k+\ell)}) \\
&= \sum_{\pi \in S_{k+\ell}} \operatorname{sgn}(\pi)\lambda_1(y_{\pi(1)}) \cdots \lambda_{k+\ell}(y_{\pi(k+\ell)}) \\
&= (\lambda_1 \wedge \ldots \wedge \lambda_{k+\ell})(y_1, \ldots, y_{k+\ell}).
\end{aligned}$$

(iv) Da $\operatorname{Alt}^k(E)$ aufgespannt wird von Elementen der Form $\lambda_1 \wedge \ldots \wedge \lambda_k$ und $\operatorname{Alt}^\ell(E)$ durch Elemente der Form $\lambda_{k+1} \wedge \ldots \wedge \lambda_{k+\ell}$, ist eine bilineare Abbildung $\beta\colon \operatorname{Alt}^k(E) \times \operatorname{Alt}^\ell(E) \to \operatorname{Alt}^{k+\ell}(E)$ durch die Vorgabe von

$$\beta(\lambda_1 \wedge \ldots \wedge \lambda_k, \lambda_{k+1} \wedge \ldots \wedge \lambda_{k+\ell})$$

festgelegt. Insbesondere ist $\wedge$ durch (4) festgelegt. $\square$

24.9. Wie zuvor identifizieren wir $\omega \in \operatorname{Alt}^0(E) = \mathbb{R}^{\{0\}}$ mit $\omega(0) \in \mathbb{R}$. Für $k \in \mathbb{N}_0$ definieren wir

$$r \wedge \omega := \omega \wedge r := r\omega$$

für $r \in \mathrm{Alt}^0(E) = \mathbb{R}$ und $\omega \in \mathrm{Alt}^k(E)$ und erhalten bilineare Abbildungen $(\omega, \eta) \mapsto \omega \wedge \eta$ von

$$\mathrm{Alt}^0(E) \times \mathrm{Alt}^k(E) \to \mathrm{Alt}^k(E) \text{ bzw. } \mathrm{Alt}^k(E) \times \mathrm{Alt}^0(E) \to \mathrm{Alt}^k(E).$$

Satz 24.10

Für alle $k, \ell, n \in \mathbb{N}_0$ und $\omega \in \mathrm{Alt}^k(E)$, $\eta \in \mathrm{Alt}^\ell(E)$ und $\zeta \in \mathrm{Alt}^n(E)$ gilt:

(a) Es ist $\eta \wedge \omega = (-1)^{k\ell} \omega \wedge \eta$.

(b) Es ist $(\omega \wedge \eta) \wedge \zeta = \omega \wedge (\eta \wedge \zeta)$.

Beweis. (a) Beide Seiten sind bilinear in (ω, η), wir brauchen Gleichheit also nur zeigen für $\omega = \lambda_1 \wedge \ldots \wedge \lambda_k$ und $\eta = \lambda_{k+1} \wedge \ldots \wedge \lambda_{k+\ell}$. In der Tat ist dann

$$\lambda_{k+1} \wedge \ldots \wedge \lambda_{k+\ell} \wedge \lambda_1 \wedge \ldots \wedge \lambda_k = (-1)^{k\ell} \lambda_1 \wedge \ldots \wedge \lambda_{k+\ell};$$

wenn wir nacheinander $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ an $\lambda_{k+\ell}, \ldots, \lambda_{k+1}$ vorbeitauschen, entsteht nämlich jeweils ein Vorzeichen -1.

(b) Ist $0 \notin \{k, \ell, n\}$, so sind beide Seiten trilinear in (ω, η, ζ); wir brauchen also nur zu zeigen, dass sie übereinstimmen im Falle

$\omega = \lambda_1 \wedge \ldots \wedge \lambda_k$, $\eta = \lambda_{k+1} \wedge \ldots \wedge \lambda_{k+\ell}$ und $\zeta = \lambda_{k+\ell+1} \wedge \ldots \wedge \lambda_{k+\ell+n}$. Beide Seiten sind dann gleich $\lambda_1 \wedge \ldots \wedge \lambda_{k+\ell+n}$. Im Fall $0 \in \{k, \ell, n\}$ sind beide Seiten der Skalar mal dem Dachprodukt der zwei anderen Multilinearformen. $\square$

Ist $\alpha\colon E \to F$ eine lineare Abbildung zwischen reellen Vektorräumen und $k \in \mathbb{N}$, so schreiben wir $\alpha^{\times k}$ für die Abbildung $E^k \to F^k$, $(y_1, \ldots, y_k) \mapsto (\alpha(y_1), \ldots, \alpha(y_k))$. Wir definieren $\alpha^{\times 0}\colon E^0 = \{0_E\} \to \{0_F\} = F^0$, $0_E \mapsto 0_F$.

Definition 24.11

Es sei F ein reeller Vektorraum, $\alpha\colon E_1 \to E_2$ eine lineare Abbildung zwischen reellen Vektorräumen und $k \in \mathbb{N}_0$. Für $\omega \in \mathrm{Alt}^k(E_2, F)$ ist dann $\alpha^*(\omega) := \omega \circ \alpha^{\times k} \in \mathrm{Alt}^k(E_1, F)$.

Für $k \geq 1$ haben wir also $\alpha^*(\omega) = \omega \circ (\alpha \times \cdots \times \alpha)\colon (E_1)^k \to F$,

$$(v_1, \ldots, v_k) \mapsto \omega(\alpha(v_1), \ldots, \alpha(v_k)).$$

Identifiziert man 0-Formen mit Skalaren, ist α^* für $k = 0$ die Abbildung $\mathrm{id}_{\mathbb{R}}\colon \mathrm{Alt}^0(E_2) \to \mathrm{Alt}^0(E_1)$.

Für jedes $k \in \mathbb{N}_0$ ist $\alpha^*\colon \operatorname{Alt}^k(E_2, F) \to \operatorname{Alt}^k(E_1, F)$, $\omega \mapsto \alpha^*(\omega)$ linear.

Beispiel 24.12. Für alle $k \in \mathbb{N}$ und $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in (E_2)^*$ ist

$$\alpha^*(\lambda_1 \wedge \ldots \wedge \lambda_k) = (\lambda_1 \circ \alpha) \wedge \ldots \wedge (\lambda_k \circ \alpha),$$

denn auf $(v_1, \ldots, v_k) \in (E_1)^k$ nimmt die linke Seite den Wert $(\lambda_1 \wedge \ldots \wedge \lambda_k)(\alpha(v_1), \ldots \alpha(v_k)) = \det((\lambda_i(\alpha(v_j)))_{i,j=1}^k)$ an, wie auch die rechte Seite.

Satz 24.13

Für alle $k, \ell \in \mathbb{N}_0$ und jede lineare Abbildung $\alpha\colon E_1 \to E_2$ zwischen reellen Vektorräumen gilt

$$\alpha^*(\omega \wedge \eta) = \alpha^*(\omega) \wedge \alpha^*(\eta)$$

für alle $\omega \in \mathrm{Alt}^k(E_2)$ und $\eta \in \mathrm{Alt}^\ell(E_2)$.

Beweis. Der Fall $0 \in \{k, \ell\}$ ist klar. Sei $0 \notin \{k, \ell\}$. Für alle $y_1, \ldots, y_{k+\ell} \in E_1$ ist dann $\alpha^*(\omega \wedge \eta)(y_1, \ldots, y_{k+\ell})$ gleich

$$\begin{aligned}
&\sum_{\sigma \in S_{k,\ell}} \operatorname{sgn}(\sigma)\, \omega(\alpha(y_{\sigma(1)}), \ldots, \alpha(y_{\sigma(k)}))\eta(\alpha(y_{\sigma(k+1)}), \ldots, \alpha(y_{\sigma(k+\ell)}))\\
&= \sum_{\sigma \in S_{k,\ell}} \operatorname{sgn}(\sigma)\, \alpha^*(\omega)(y_{\sigma(1)}, \ldots, y_{\sigma(k)})\alpha^*(\eta)(y_{\sigma(k+1)}, \ldots, y_{\sigma(k+\ell)})\\
&= (\alpha^*(\omega) \wedge \alpha^*(\eta))(y_1, \ldots, y_{k+\ell}). \ \square
\end{aligned}$$

Für die Allgemeinbildung seien Bezüge zu äußeren Potenzen und äußeren Algebren erwähnt.

Definition 24.14

Es sei V ein reeller Vektorraum und $k \in \mathbb{N}_0$. Ein reeller Vektorraum $\bigwedge^k V$, zusammen mit einer alternierenden k-linearen Abbildung $\tau\colon V^k \to \bigwedge^k V$, wird ***k*-te äußere Potenz** von V genannt, wenn für jeden reellen Vektorraum W und jede alternierende k-lineare Abbildung $\beta\colon V^k \to W$ genau eine lineare Abbildung $\overline{\beta}\colon \bigwedge^k V \to W$ mit $\overline{\beta} \circ \tau = \beta$ existiert.

Satz 24.15

Für jeden endlich-dimensionalen reellen Vektorraum E ist $(\mathrm{Alt}^k(E), \tau)$ eine k-te äußere Potenz $\bigwedge^k(E^*)$, mit $\tau\colon (E^*)^k \to \mathrm{Alt}^k(E)$, $(\lambda_1, \ldots, \lambda_k) \mapsto \lambda_1 \wedge \ldots \wedge \lambda_k$.

Beweis. Sei $m := \dim_{\mathbb{R}}(E)$ und weitere Notation wie oben. Gegeben eine alternierende k-lineare Abbildung $\beta\colon (E^*)^k \to W$ sei $\overline{\beta}\colon \mathrm{Alt}^k(E) \to W$ die eindeutige lineare Abbildung mit

$$\overline{\beta}(b_{i_1}^* \wedge \ldots \wedge b_{i_k}^*) = \beta(b_{i_1}^*, \ldots, b_{i_k}^*)$$

für alle $i_1 < \cdots < i_k$ in $\{1, \ldots, m\}$ (vgl. Satz 24.5). Dann sind $\bar{\beta} \circ \tau \colon (E^*)^k \to W$ und $\beta \colon (E^*)^k \to W$ alternierend und stimmen auf allen $(b^*_{i_1}, \ldots, b^*_{i_k})$ überein, so dass $\beta = \bar{\beta} \circ \tau$ nach Lemma 24.4 (b). Ist auch $\gamma \colon \operatorname{Alt}^k(E) \to W$ linear und $\gamma \circ \tau = \beta$, so ist $\gamma(b^*_{i_1} \wedge \ldots \wedge b^*_{i_k}) = \beta(b^*_{i_1}, \ldots, b^*_{i_k})$ und somit $\gamma = \bar{\beta}$. $\square$

Bemerkung 24.16

Setzen wir $\operatorname{Alt}(E) := \bigoplus_{k \in \mathbb{N}_0} \operatorname{Alt}^k(E)$, so ist $\operatorname{Alt}(E) \times \operatorname{Alt}(E) \to \operatorname{Alt}(E)$,

$$((\omega_k)_{k \in \mathbb{N}_0}, (\eta_\ell)_{\ell \in \mathbb{N}_0}) \mapsto \left(\sum_{k+\ell=n} \omega_k \wedge \eta_\ell \right)_{n \in \mathbb{N}_0}$$

eine bilineare Abbildung, die $\operatorname{Alt}(E)$ wegen Satz 24.10 (b) zu einer unitalen assoziativen $\mathbb{R}$-Algebra macht. Aus Satz 24.15 folgt, dass $\operatorname{Alt}(E)$ mit $E^* \to \operatorname{Alt}(E)$, $\lambda \mapsto (0, \lambda, 0, 0, \ldots)$ eine äußere Algebra für E^* ist, also $\operatorname{Alt}(E) = \bigwedge E^*$.

Sei M eine m-dimensionale glatte Mannigfaltigkeit und $k \in \mathbb{N}_0$. Zur Erinnerung: Eine k-Form auf M ist eine Abbildung $\omega\colon (TM)^{\oplus k} \to \mathbb{R}$ derart, dass gilt:

(a) Für jedes $p \in M$ ist $\omega_p := \omega|_{(T_pM)^k} \in \mathrm{Alt}^k(T_pM)$;

(b) $\omega\colon (TM)^{\oplus k} \to \mathbb{R}$ ist glatt.

Bemerkung 25.1

Gilt (a) im Fall $k \geq 1$, so ist ω genau dann glatt, wenn

$$\omega_\phi\colon V_\phi \times (\mathbb{R}^m)^k \to \mathbb{R},\ (x, y_1, \ldots, y_k) \mapsto \omega(T\phi^{-1}(x, y_1), \ldots, T\phi^{-1}(x, y_k))$$

glatt ist für alle Karten $\phi\colon U_\phi \to V_\phi \subseteq \mathbb{R}^m$ von M (vergleiche Bemerkung 21.39).

Für jedes $x \in V_\phi$ ist $\omega_\phi(x, \cdot) = (T\phi^{-1}(x, \cdot))^*(\omega_{\phi^{-1}(x)}) \in \mathrm{Alt}^k(\mathbb{R}^m)$.

25.2. Wir schreiben $\Omega^k(M) \subseteq C^\infty((TM)^{\oplus k}, \mathbb{R})$ für den Untervektorraum aller k-Formen. Dieser ist ein $C^\infty(M)$-Modul via

$$f\omega := (f \circ \pi_{(TM)^{\oplus k}}) \cdot \omega \text{ in } C^\infty((TM)^{\oplus k}, \mathbb{R}),$$

also $(f\omega)(v) = f(p)\omega(v)$ für alle $p \in M$ und $v \in (T_pM)^k$.

25.3. Ist $\omega \in \Omega^k(M)$ und $U \subseteq M$ offen, so ist $\omega|_{(TU)^{\oplus k}} \in \Omega^k(U)$. Allgemeiner:

Definition 25.4 (Zurückholen von Differentialformen)

Ist $\phi\colon M \to N$ eine glatte Abbildung zwischen glatten Mannigfaltigkeiten und $\omega \in \Omega^k(N)$ mit $k \in \mathbb{N}$, so definiert

$$\phi^*(\omega)(v_1, \ldots, v_k) := \omega(T\phi(v_1), \ldots, T\phi(v_k))$$

für $p \in M$ und $v_1, \ldots, v_k \in T_pM$ eine k-Form $\phi^*(\omega) \in \Omega^k(M)$. Für $\omega \in \Omega^0(N)$ sei $\phi^*(\omega)(0_p) := \omega(0_{\phi(p)})$.

Für alle $k \in \mathbb{N}_0$ und $p \in M$ ist also

$$(\phi^*(\omega))_p = (T_p\phi)^*(\omega_{\phi(p)}).$$

Identifiziert man $\omega \in \Omega^0(N)$ mit $f := \omega \circ O_N \in C^\infty(N)$, so ist

$$\phi^*(f) = f \circ \phi.$$

Im Fall $k \in \mathbb{N}$ ist für jedes $j \in \{1, \ldots, k\}$ die Projektion $\mathrm{pr}_j\colon (TM)^{\oplus k} \to TM$, $(v_1, \ldots, v_k) \mapsto v_j$ glatt, da $(TM)^{\oplus k}$ eine

Untermannigfaltigkeit von $(TM)^k$ ist. Folglich ist $h := (T\phi \circ \mathrm{pr}_1, \ldots, T\phi \circ \mathrm{pr}_k) \colon (TM)^{\oplus k} \to (TN)^k$ glatt und somit auch $h|^{(TN)^{\oplus k}}$ sowie $\phi^*(\omega) = \omega \circ h|^{(TN)^{\oplus k}}$.

Definition 25.5 (Dachprodukt von Differentialformen)

Seien $\omega \in \Omega^k(M)$ und $\eta \in \Omega^\ell(M)$ mit $k, \ell \in \mathbb{N}_0$. Dann definiert

$$(\omega \wedge \eta)(v_1, \ldots, v_{k+\ell}) := (\omega_p \wedge \eta_p)(v_1, \ldots, v_{k+\ell})$$

für $p \in M$ und $y_1, \ldots, y_{k+\ell} \in T_pM$ eine $(k+\ell)$-Form $\omega \wedge \eta \in \Omega^{k+\ell}(M)$ (wobei man $(y_1, \ldots, y_{k+\ell}) = 0_p$ lese wenn $k + \ell = 0$).

Per Konstruktion ist nämlich $(\omega \wedge \eta)_p = \omega_p \wedge \eta_p \in \mathrm{Alt}^{k+\ell}(T_pM)$. Für jede Karte $\phi \colon U_\phi \to V_\phi \subseteq \mathbb{R}^m$ von M ist für $x \in V_\phi$ mit $p := \phi^{-1}(x)$ nach Satz 24.13

$$\begin{aligned}(\omega \wedge \eta)_\phi(x, \cdot) &= (T\phi^{-1}(x, \cdot))^*(\omega_p \wedge \eta_p) \\ &= (T\phi^{-1}(x, \cdot))^*(\omega_p) \wedge (T\phi^{-1}(x, \cdot))^*(\eta_p) \\ &= \omega_\phi(x, \cdot) \wedge \eta_\phi(x, \cdot).\end{aligned}$$

Der Funktionswert an der Stelle $(y_1, \ldots, y_{k+\ell}) \in (\mathbb{R}^m)^{k+\ell}$ ist

$$\sum_{\sigma \in S_{k,\ell}} \operatorname{sgn}(\sigma)\omega_\phi(x, y_{\sigma(1)}, \ldots, y_{\sigma(k)})\eta_\phi(x, y_{\sigma(k+1)}, \ldots, y_{\sigma(k+\ell)}),$$

hängt also glatt von $(x, y_1, \ldots, y_{k+\ell}) \in V_\phi \times (\mathbb{R}^m)^{k+\ell}$ ab.

Wir tragen noch zwei Rechenregeln nach für das Zurückholen von alternierenden Multilinearformen.

Lemma 25.6

(a) Für jeden reellen Vektorraum E, jedes $k \in \mathbb{N}_0$ und jedes $\omega \in \mathrm{Alt}^k(E)$ ist $(\mathrm{id}_E)^*(\omega) = \omega$.

(b) Für alle reellen Vektorräume E_1, E_2, E_3 und lineare Abbildungen $\alpha\colon E_2 \to E_3$ sowie $\beta\colon E_1 \to E_2$ gilt

$$(\alpha \circ \beta)^*(\omega) = \beta^*(\alpha^*(\omega)) \text{ für alle } k \in \mathbb{N}_0 \text{ und } \omega \in \mathrm{Alt}^k(E_3).$$

Beweis. (a) Es ist $(\mathrm{id}_E)^*(\omega) = \omega \circ (\mathrm{id}_E)^{\times k} = \omega$.
(b) Es ist $(\alpha \circ \beta)^*(\omega) = \omega \circ (\alpha \circ \beta)^{\times k} = \omega \circ \alpha^{\times k} \circ \beta^{\times k} = \alpha^*(\omega) \circ \beta^{\times k} = \beta^*(\alpha^*(\omega))$. $\square$

Lemma 25.7

Es seien $\phi\colon M \to N$ eine glatte Abbildung zwischen glatten Mannigfaltigkeiten, $k, \ell \in \mathbb{N}_0$ und $\omega \in \Omega^k(N)$, $\eta \in \Omega^\ell(N)$. Dann ist

$$\phi^*(\omega \wedge \eta) = \phi^*(\omega) \wedge \phi^*(\eta).$$

Ist auch L eine glatte Mannigfaltigkeit und $\psi\colon L \to M$ glatt, so ist

$$(\phi \circ \psi)^*(\omega) = \psi^*(\phi^*(\omega)).$$

Weiter ist $(\mathrm{id}_N)^*(\omega) = \omega$.

Beweis. Für alle $p \in M$ ist nach Satz 24.13

$$\begin{aligned}(\phi^*(\omega \wedge \eta))_p &= (T_p\phi)^*((\omega \wedge \eta)_{\phi(p)}) = (T_p\phi)^*(\omega_{\phi(p)} \wedge \eta_{\phi(p)}) \\ &= (T_p\phi)^*(\omega_{\phi(p)}) \wedge (T_p\phi)^*(\eta_{\phi(p)}) = (\phi^*\eta)_p \wedge (\phi^*\eta)_p \\ &= (\phi^*\omega \wedge \phi^*\eta)_p.\end{aligned}$$

Wegen $T_p(\phi \circ \psi) = T_{\psi(p)}\phi \circ T_p\psi$ und Lemma 29.6 (b) ist weiter

$$\begin{aligned}((\phi \circ \psi)^*(\omega))_p &= (T_p(\phi \circ \psi))^*(\omega_{\phi(\psi(p))}) \\ &= (T_p\psi)^*((T_{\psi(p)}\phi)^*(\omega_{\phi(\psi(p))})) \\ &= (T_p\psi)^*((\phi^*\omega)_{\psi(p)}) = (\psi^*(\phi^*(\omega)))_p.\end{aligned}$$

Für alle $\omega \in \Omega^k(N)$ und $p \in N$ ist nach Lemma 25.6 (a) $((\mathrm{id}_N)^*(\omega))_p = (T_p \,\mathrm{id}_N)^*(\omega_p) = \omega_p$. $\square$

Unser Ziel ist nun, jeder k-Form $\omega \in \Omega^k(M)$ eine $(k+1)$-Form $d\omega$ zuzuordnen, ihre **äußere Ableitung**. Im Falle von 0-Formen, aufgefasst als glatte Funktionen $f\colon M \to \mathbb{R}$, ist dies das Differential

$$df\colon TM \to \mathbb{R},\ [\gamma] \mapsto (f\circ\gamma)'(0).$$

Dieses ist verträglich mit Zurückholen:

Lemma 25.8

Für jede glatte Abbildung $\phi\colon M \to N$ zwischen glatten Mannigfaltigkeiten und jedes $f \in C^\infty(N)$ ist

$$\phi^*(df) = d(\phi^*(f)).$$

Beweis. Für $p \in M$ ist $(\phi^*(df))_p = (T_p\phi)^*((df)_{\phi(p)}) = (df)_{\phi(p)} \circ T_p\phi = df \circ T_p\phi = d(f\circ\phi)|_{T_pM} = (d(\phi^*(f)))_p$. $\square$

Die Definition der äußeren Ableitung von k-Formen mit $k \geq 1$ erfordert Vorbereitungen. Wir arbeiten in Karten.

Lokale Darstellung von Vektorfeldern und Differentialformen

Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit, $\phi\colon U \to V \subseteq \mathbb{R}^m$ eine Karte.

25.9. Nach dem Beweis von Satz 21.37 bilden die glatten Vektorfelder

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)_\phi : U \to TU,\ p \mapsto T\phi^{-1}(\phi(p), e_j)$$

für $j \in \{1, \ldots, m\}$ einen Rahmen für TU. Nach Lemma 21.48 ist jedes glatte Vektorfeld $X\colon U \to TU$ also von der Form

$$X = \sum_{j=1}^{m} a_j \left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)_\phi$$

mit eindeutigen glatten Funktionen $a_1, \ldots, a_m\colon U \to \mathbb{R}$.
(Im Sinne von Definition 13.30 ist dann $X_\phi = (a_1, \ldots, a_m) \in C^\infty(V, \mathbb{R}^m)$).

Lemma 25.10

Sei $\phi = (\phi_1, \ldots, \phi_m)$. Für jedes $p \in U$ bilden die Differentiale $(d\phi_1)_p, \ldots, (d\phi_m)_p$ eine Basis für $(T_pM)^*$; dies ist die duale Basis zur Basis der $\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)_\phi(p)$ für T_pM, mit $j \in \{1, \ldots, m\}$.

Beweis. Bezeichnet $\mathrm{pr}_i \colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ die Projektion auf die i-te Komponente, so ist

$$\begin{aligned} d\phi_i\left(\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)_\phi(p)\right) &= d\phi_i(T\phi^{-1}(x,e_j)) = d(\mathrm{pr}_i|_V)(x,e_j) \\ &= d(\mathrm{pr}_i)(x,e_j) = \mathrm{pr}_i(e_j) = \delta_{ij}. \square \end{aligned}$$

Für jedes $f \in C^\infty(U,\mathbb{R})$ ist

$$df = \sum_{j=1}^m \left(\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)_\phi .f\right) d\phi_j. \tag{1}$$

Für $p \in M$ und $v \in T_pM$ ist nämlich mit $x := \phi(p)$ wegen $d\phi(v) = \sum_{j=1}^m d\phi_j(v)e_j$

$$T_p\phi(v) = (x, d\phi(v)) = \sum_{j=1}^m d\phi_j(v)(x,e_j)$$

und somit
$df(v) = df(T\phi^{-1}(T\phi(v))) = \sum_{j=1}^m d\phi_j(v) df(T\phi^{-1}(x,e_j))$, wie in (1) verlangt.

Sei nun $k \in \mathbb{N}$ und $\omega\colon (TU)^{\oplus k} \to \mathbb{R}$ eine Funktion derart, dass $\omega_p := \omega|_{(T_pM)^k} \in \mathrm{Alt}^k(T_pM)$ für jedes $p \in U$ und somit

$$\omega_p = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq m} f_{i_1,\ldots,i_k}(p)\,(d\phi_{i_1})_p \wedge \ldots \wedge (d\phi_{i_k})_p$$

mit eindeutigen Koeffizienten $f_{i_1,\ldots,i_k}(p) \in \mathbb{R}$, nach Satz 24.5.

Lemma 25.11

Es sind äquivalent:

(a) $\omega \in \Omega^k(U)$;

(b) $f_{i_1,\ldots,i_k}\colon U \to \mathbb{R}$ ist glatt für alle $i_1 < \cdots < i_k$ in $\{1, \ldots, m\}$.

Beweis. (a)$\Rightarrow$(b): Nach Lemma 25.10 und Satz 24.5 ist

$$f_{i_1,\ldots,i_k}(p) = \omega\left(\left(\frac{\partial}{\partial x_{i_1}}\right)_\phi(p), \ldots, \left(\frac{\partial}{\partial x_{i_k}}\right)_\phi(p)\right)$$

für $p \in U$, hängt wegen Bemerkung 21.38 also glatt von p ab.

(b)⇒(a): Mit $f_{i_1,\ldots,i_k}$ ist $f_{i_1,\ldots,i_k}\, d\phi_{i_1} \wedge \ldots \wedge d\phi_{i_k}$ glatt und somit auch $\omega = \sum_{i_1<\cdots<i_k} f_{i_1,\ldots,i_k}\, d\phi_{i_1} \wedge \ldots \wedge d\phi_{i_k}$ (siehe 25.2). □

Lemma 25.12

Es gibt höchstens eine Folge $(d_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ von $\mathbb{R}$-linearen Abbildungen $d_k\colon \Omega^k(U) \to \Omega^{k+1}(U)$ derart, dass (a)–(c) gelten:

(a) Für alle $f \in C^\infty(U) = \Omega^0(U)$ ist $d_0 f = df$ das Differential von f.

(b) Für alle $\omega \in \Omega^k(U)$ und $\eta \in \Omega^\ell(U)$ mit $k, \ell \in \mathbb{N}_0$ ist

$$d_{k+\ell}(\omega \wedge \eta) = (d_k\omega) \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge d_\ell \eta.$$

(c) Für alle $k \in \mathbb{N}_0$ ist $d_{k+1} \circ d_k = 0$.

Beweis. Wir zeigen per Induktion nach $k \in \mathbb{N}_0$, dass d_k eindeutig festgelegt ist. Für $k = 0$ gilt dies nach (a). Ist $\omega \in \Omega^{k+1}(U)$, so ist

$$\omega = \sum_{i_1<\cdots<i_{k+1}} f_{i_1,\ldots,i_{k+1}}\, d\phi_{i_1} \wedge \ldots \wedge d\phi_{i_{k+1}}$$

mit $f_{i_1,\ldots,i_{k+1}} \in C^\infty(U)$. Es genügt, zu zeigen, dass die Summanden in $d_k\omega = \sum_{i_1<\cdots<i_{k+1}} d_k(f_{i_1,\ldots,i_{k+1}}\, d\phi_{i_1} \wedge \ldots \wedge d\phi_{i_{k+1}})$ festgelegt sind. Sei also o.B.d.A. $\omega = f\, d\phi_{i_1} \wedge \ldots \wedge d\phi_{i_{k+1}}$ mit $f \in C^\infty(U)$, d.h.

$$\omega = f\, \eta \wedge d\phi_{i_{k+1}}$$

mit $\eta := d\phi_{i_1} \wedge \ldots \wedge d\phi_{i_k}$ (wenn $k \geq 1$) bzw. $\eta := 1 \in C^\infty(U)$ wenn $k = 0$. Zweimalige Anwendung von (b) liefert

$$\begin{aligned} d_{k+1}\omega &= (d_0 f) \wedge \eta \wedge d\phi_{i_{k+1}} + f\, d_{k+1}(\eta \wedge d\phi_{i_{k+1}}) \\ &= (d_0 f) \wedge \eta \wedge d\phi_{i_{k+1}} + f\, (d_k\eta) \wedge d\phi_{i_{k+1}} \\ &\quad +(-1)^k f\, \eta \wedge d_1(d\phi_{i_{k+1}}). \end{aligned}$$

Nach (a) und (c) ist der letzte Summand gleich $(-1)^k f\, \eta \wedge d_1(d_0\phi_{i_{k+1}}) = 0$; die vorigen zwei liegen schon fest. $\square$

Lemma 25.13

Setzt man $d_0 f := df$ für $f \in C^\infty(U)$ und

$$d_k\omega := \sum_{i_1<\cdots<i_k} df_{i_1,\ldots,i_k} \wedge d\phi_{i_1} \wedge \ldots \wedge d\phi_{i_k}$$

für $k \in \mathbb{N}$ und $\omega \in \Omega^k(U)$ von der Form

$$\omega = \sum_{i_1<\cdots<i_k} f_{i_1,\ldots,i_k}\, d\phi_{i_1} \wedge \ldots \wedge d\phi_{i_k},$$

so erfüllt $(d_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ die Bedingungen aus Lemma 25.12.

Beweis. Offenbar ist $d_k\omega \in \Omega^{k+1}(U)$ und $d_k\colon \Omega^k(U) \to \Omega^{k+1}(U)$ linear. Per Definition gilt (a). Für $k = \ell = 0$ ist (b) erfüllt, denn

$$d_0(f \wedge g) = d_0(fg) = d(fg) = g\,df + f\,dg = d_0f \wedge g + f \wedge d_0g$$

nach der Produktregel. Sei nun $k + \ell \geq 1$. Da beide Seiten der Formel in (b) $\mathbb{R}$-bilinear in (ω, η) sind, sei o.B.d.A.

$$\omega = f\,d\phi_{i_1} \wedge \ldots \wedge d\phi_{i_k} \text{ und } \eta = g\,d\phi_{j_1} \wedge \ldots \wedge d\phi_{j_\ell}$$

mit $f, g \in C^\infty(U)$ und $i_1 < \cdots < i_k$, $j_1 < \cdots < j_\ell$ in $\{1, \ldots, m\}$. Mit $\Omega := d\phi_{i_1} \wedge \ldots \wedge d\phi_{i_k} \wedge d\phi_{j_1} \wedge \ldots \wedge d\phi_{j_\ell}$ ist $\omega \wedge \eta = fg\,\Omega$ und

$$d_{k+\ell}(\omega \wedge \eta) = d(fg) \wedge \Omega; \qquad (2)$$

ist $\{i_1, \ldots, i_k\} \cap \{j_1, \ldots, j_\ell\} \neq \emptyset$, so ist nämlich $\omega \wedge \eta = 0$ und $\Omega = 0$, so dass beide Seiten von (2) verschwinden. Andernfalls schreibe $\{i_1, \ldots, i_k\} \cup \{j_1, \ldots, j_\ell\} = \{\mu_1, \ldots, \mu_{k+\ell}\}$ mit $\mu_1 < \cdots < \mu_{k+\ell}$; dann ist

$$\Omega = (-1)^\nu \, d\phi_{\mu_1} \wedge \ldots \wedge d\phi_{\mu_{k+\ell}}$$

für ein $\nu \in \{0, 1\}$ und somit gilt wieder (2):

$$\begin{aligned} d_{k+\ell}(\omega \wedge \eta) &= d_{k+\ell}(fg\,\Omega) = d_{k+\ell}(fg(-1)^\nu d\phi_{\mu_1} \wedge \ldots \wedge d\phi_{\mu_{k+\ell}}) \\ &= (-1)^\nu d(fg) \wedge d\phi_{\mu_1} \wedge \ldots \wedge d\phi_{\mu_{k+\ell}} = d(fg) \wedge \Omega. \end{aligned}$$

Also ist

$$\begin{aligned} d_{k+\ell}(\omega \wedge \eta) &= d(fg) \wedge \Omega = df \wedge g\Omega + dg \wedge f\Omega \\ &= df \wedge d\phi_{i_1} \wedge \ldots \wedge d\phi_{i_k} \wedge \eta \\ &\quad + f \underbrace{dg \wedge d\phi_{i_1} \wedge \ldots d\phi_{i_k}}_{=(-1)^k d\phi_{i_1} \wedge \ldots \wedge d\phi_{i_k} \wedge dg} \wedge d\phi_{j_1} \wedge \ldots \wedge d\phi_{j+\ell} \\ &= d\omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge d\eta. \end{aligned}$$

Zum Nachweis von (c) braucht $d_{k+1}(d_k\omega) = 0$ nur für $\omega = f\, d\phi_{i_1} \wedge \ldots \wedge d\phi_{i_k}$ gezeigt zu werden. Dann ist

$$d_k(\omega) = df \wedge d\phi_{i_1} \wedge \ldots \wedge d\phi_{i_k} = \sum_{j=1}^{m} \left(\left(\frac{\partial}{\partial x_j} \right)_{\phi} f \right) \wedge d\phi_j \wedge d\phi_{i_1} \wedge \ldots \wedge d\phi_{i_k}$$

und somit

$$d_{k+1}(d_k\omega) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} \left(\left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_{\phi} . \left(\left(\frac{\partial}{\partial x_j} \right)_{\phi} .f \right) \right) \wedge d\phi_i \wedge d\phi_j \wedge d\phi_{i_1} \wedge \ldots \wedge d\phi_{i_k}.$$

Die Summanden mit $i = j$ verschwinden; die Summe der verbleibenden ist (unter Benutzung von Satz 15.8)

$$\sum_{i<j} \left(\left[\left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_{\phi}, \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \right)_{\phi} \right] .f \right) \wedge d\phi_i \wedge d\phi_j \wedge d\phi_{i_1} \wedge \ldots \wedge d\phi_{i_k} = 0;$$

die Lieklammer der zwei Vektorfelder verschwindet nämlich jeweils, da ihre lokalen Repräsentanten bzgl. ϕ konstant sind und somit verschwindende Richtungsableitungen haben. $\square$

25.14. Für jede offene Teilmenge $U \subseteq M$, die Definitionsbereich einer Karte ist, existiert nach Lemma 25.12 und Lemma 25.13 genau eine Folge $(d_k^U)_{k \in \mathbb{N}_0}$ linearer Abbildungen $d_k^U \colon \Omega^k(U) \to \Omega^{k+1}(U)$ wie in Lemma 25.12. Ist $W \subseteq U$ eine offene Teilmenge, so zeigt die Konstruktion in Lemma 25.13, dass

$$(d_k^U \omega)|_{(TW)^{\oplus(k+1)}} = d_k^W(\omega|_{(TW)^{\oplus k}}) \text{ für alle } \omega \in \Omega^k(U).$$

Definition 25.15

Für $\omega \in \Omega^k(M)$ mit $k \in \mathbb{N}_0$ definieren wir die **äußere Ableitung** $d_k\omega \colon (TM)^{\oplus(k+1)} \to \mathbb{R}$ via

$$d_k\omega(y_1, \ldots, y_{k+1}) := d_k^U(\omega|_{(TU)^{\oplus k}})(y_1, \ldots, y_{k+1})$$

für alle $(y_1, \ldots, y_{k+1}) \in (TU)^{\oplus(k+1)}$ für eine Karte $\phi \colon U \to V \subseteq \mathbb{R}^m$. Wir schreiben auch kurz $d\omega$ statt $d_k\omega$.

Nach 25.14 ist $d_k\omega$ wohldefiniert. Per Konstruktion ist

$$(d_k\omega)|_{(TU)^{\oplus(k+1)}} = d_k^U(\omega|_{(TU)^{\oplus k}}) \tag{3}$$

für jede Karte $\phi \colon U \to V$ für M, die Einschränkung links also glatt und $(d_k\omega)|_{(T_pM)^{k+1}} \in \mathrm{Alt}^{k+1}(T_pM)$ für $p \in U$, also $d_k\omega \in \Omega^{k+1}(M)$. Aus (3) und den Eigenschaften der d_k^U aus Lemma 25.12 folgt:

Satz 25.16

Für jede glatte Mannigfaltigkeit M und jedes $k \in \mathbb{N}_0$ ist $d_k \colon \Omega^k(M) \to \Omega^{k+1}(M)$ eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung. Zudem gilt:

(a) Für alle $f \in C^\infty(M)$ ist $d_0 f = df$ das Differential von f.

(b) Für alle $k, \ell \in \mathbb{N}_0$ ist $d_{k+\ell}(\omega \wedge \eta) = (d_k\omega) \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge d_\ell \eta$.

(c) Für alle $k \in \mathbb{N}_0$ ist $d_{k+1} \circ d_k = 0$. $\square$

Definition 25.17

Eine Differentialform $\omega \in \Omega^k(M)$ heißt **geschlossen**, wenn $d_k\omega = 0$. Ist $k \geq 1$ und existiert ein $\eta \in \Omega^{k-1}(M)$ mit $\omega = d_{k-1}\eta$, so wird ω **exakt** genannt.

Nach Satz 25.16 (c) ist jede exakte Differentialform geschlossen. Ebenfalls nach Satz 25.16 (c) ist $\mathrm{im}(d_{k-1}) \subseteq \ker(d_k)$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und dies bleibt für $k = 0$ gültig, wenn wir d_{-1} als die Nullfunktion $\{0\} \to C^\infty(M)$, $0 \mapsto 0$ definieren.

Definition 25.18

Für $k \in \mathbb{N}_0$ wird der Faktorraum

$$H^k_{dR}(M) := \frac{\ker(d_k)}{\operatorname{im}(d_{k-1})}$$

***k*-te de Rham-Kohomologie** von M genannt.

Äußeres Ableiten ist verträglich mit Zurückholen von Differentialformen.

Satz 25.19

Ist $h\colon M \to N$ eine glatte Abbildung zwischen glatten Mannigfaltigkeiten, so ist $h^*(d\omega) = d(h^*\omega)$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$ und $\omega \in \Omega^k(N)$.

Beweis. (a) Aufgrund der lokalen Konstruktion gilt dies, wenn M eine offene Untermannigfaltigkeit von N und h die Inklusion ist.

(b) Im allgemeinen Fall erfolgt der Beweis per Induktion nach $k \in \mathbb{N}_0$, wobei $k = 0$ in Lemma 25.8 behandelt wurde. Für $p \in M$ wählen wir eine Karte $\psi\colon U_\psi \to V_\phi \subseteq \mathbb{R}^n$ für N um $h(p)$ und eine Karte $\phi\colon U_\phi \to V_\phi \subseteq \mathbb{R}^m$ für M um p, mit $h(U_\phi) \subseteq U_\psi$. Wegen (a) und $h^*(\omega)|_{(TU_\phi)^{\oplus k}} = (h|^{U_\psi}_{U_\phi})^*(\omega|_{(TU_\psi)^{\oplus k}})$,

$h^*(d\omega)|_{(TU_\phi)^{\oplus(k+1)}} = (h|_{U_\phi}^{U_\psi})^*((d\omega)|_{(TU_\psi)^{\oplus(k+1)}})$ dürfen wir nun o.B.d.A. annehmen, dass $M = U_\phi$ und $N = U_\psi$. Da $h^*(d\omega)$ und $dh^*(\omega)$ in ω reell linear sind, brauchen wir Gleichheit nur zu zeigen, wenn ein $f \in C^\infty(N)$ existiert und $i_1 < \cdots < i_k$ in $\{1, \ldots, n\}$ mit

$$\omega = f\, d\psi_{i_1} \wedge \ldots \wedge d\psi_{i_k};$$

im Falle $k \geq 2$ ist dann also

$$\omega = f\, \eta \wedge d\psi_j \tag{4}$$

mit $j := i_k$ und $\eta := d\psi_{i_1} \wedge \ldots \wedge d\psi_{i_{k-1}}$; im Fall $k = 1$ ist $\omega = f\, d\psi_j$ mit $j := i_k$, so dass mit der konstanten Einsfunktion $\eta := 1 \in C^\infty(N)$ ebenfalls (4) gilt. Wegen $d(d\psi_j) = 0$ folgt

$$d\omega = df \wedge \eta \wedge d\psi_j + f(d\eta) \wedge d\psi_j + f(-1)^{k-1}\eta \wedge d(d\psi_j) = df \wedge \eta \wedge d\psi_j + f d\eta \wedge d\psi_j.$$

Mit Lemma 25.7, Induktionsanfang und Induktionsvoraussetzung erhalten wir nun wie gewünscht

$$\begin{aligned} h^*(d\omega) &= h^*(df) \wedge h^*(\eta) \wedge h^*(d\psi_j) + h^*(f)\, h^*(d\eta) \wedge h^*(d\psi_j) \\ &= d(h^*(f)) \wedge h^*(\eta) \wedge dh^*(\psi_j) + h^*(f)\, (dh^*(\eta)) \wedge dh^*(\psi_j) \\ &= d((h^*f)\, h^*(\eta) \wedge h^*(d\psi_j)) = d(h^*(\omega)). \square \end{aligned}$$

Bemerkung 25.20. (a) Traditionell schreibt man Karten $\phi\colon U \to V \subseteq \mathbb{R}^m$ als $\phi = (x_1, \ldots, x_m)$ in Komponenten und somit

$$dx_j$$

statt $d\phi_j$; an Stelle von $\left(\partial/\partial x_j\right)_\phi$ schreibt man $\partial/\partial x_j$. Im Skript werden diese Notationen nicht benutzt, außer im Fall einer offenen Menge $V \subseteq \mathbb{R}^m$: Ist $\mathrm{pr}_j\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ die Projektion auf die j-te Komponente, so ist $\mathrm{id}_V = (\mathrm{pr}_1|_V, \ldots, \mathrm{pr}_m|_V)$ und wir schreiben

$$dx_j := d(\mathrm{pr}_j|_V),$$

so dass also $dx_j(x, y) = \mathrm{pr}_j(y)$ für alle $(x, y) \in V \times \mathbb{R}^m = TV$.
(b) Werden in der Literatur auch Tensorfelder (also Schnitte von Tensorbündeln $(TM)^{\otimes m} \otimes (T^*M)^{\otimes n}$) diskutiert, so werden zudem Konventionen festgelegt über hoch- und tiefgestellte Indizes. Man schreibt dann z.B. dx^j und $\partial_j = \partial/\partial x^j$ statt dx_j und $\partial/\partial x_j$. Um den Schreibaufwand zu verringern, wird oft die Einsteinsche Summenkonvention angewandt, also über Paare aus einem hoch- und tiefgestellten Index summiert, etwa $a_j\, y^j = \sum_{j=1}^m a_j\, y^j$.

Satz 25.21 Poincaré-Lemma

Ist V eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^m$ und sternförmig, so ist für jedes $k \in \mathbb{N}$ jede geschlossene Differentialform $\omega \in \Omega^k(V)$ exakt.

Ist also $d\omega = 0$, so existiert ein $\eta \in \Omega^{k-1}(V)$ mit $\omega = d\eta$. Bevor wir das Poincaré-Lemma beweisen, beschreiben wir Anwendungen in der klassischen Vektoranalysis.

Beispiel 25.22. Es sei $V \subseteq \mathbb{R}^m$ eine offene Teilmenge.

(a) Nullformen auf V identifizieren wir mit glatten Funktionen $f\colon V \to \mathbb{R}$. Dann ist

$$df = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_j}\, dx_j$$

das "totale Differential" von f (vgl. (1) nach Lemma 25.10).

(b) Eine 1-Form ω auf V ist von der Gestalt

$$\omega = f_1\, dx_1 + \cdots + f_m\, dx_m$$

mit eindeutigen glatten Funktionen $f_1, \ldots, f_m\colon V \to \mathbb{R}$. Dann ist

$$
\begin{aligned}
d\omega &= \sum_{j=1}^{m} df_j \wedge dx_j = \sum_{i\neq j} \frac{\partial f_j}{\partial x_i}\, dx_i \wedge dx_j \\
&= \sum_{i<j} \left(\frac{\partial f_j}{\partial x_i} - \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right) dx_i \wedge dx_j. \qquad (5)
\end{aligned}
$$

Ist V sternförmig, so ist ω nach dem Poincaré-Lemma genau dann exakt, also $\omega = d\phi$ für $\phi \in C^\infty(V)$, wenn ω geschlossen ist, also $d\omega = 0$, was nach (5) äquivalent ist zur (aus der Analysis 2 bekannten) Integrabilitätsbedingung

$$
\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \text{ für alle } i, j \in \{1, \ldots, m\}.
$$

Im Falle $m = 3$ ist für $F := (f_1, f_2, f_3)\colon V \to \mathbb{R}^3$ also genau dann $F = \operatorname{grad}(\phi)$ für eine glatte Funktion $\phi\colon V \to \mathbb{R}$, wenn $\operatorname{rot}(F) = 0$.

(c) Eine $(m-1)$-Form ω auf V ist von der Gestalt

$$
\omega = \sum_{j=1}^{m} (-1)^{j-1} f_j \, dx_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_j} \wedge \ldots \wedge dx_m,
$$

wobei der Hut bedeutet, dass der Term weggelassen wird (und das Hinzufügen der Vorzeichen $(-1)^{j-1}$ nützlich sein wird). Dann ist

$$\begin{aligned} d\omega &= \sum_{j=1}^{m} (-1)^{j-1} df_j \wedge dx_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_j} \wedge \ldots \wedge dx_m \\ &= \sum_{i,j=1}^{m} \frac{\partial f_j}{\partial x_i} (-1)^{j-1}\, dx_i \wedge dx_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_j} \wedge \ldots \wedge dx_m \\ &= \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f_j}{\partial x_j} (-1)^{j-1}\, dx_j \wedge dx_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_j} \wedge \ldots \wedge dx_m \\ &= \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f_j}{\partial x_j} dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_m. \end{aligned}$$

(d) Eine m-Form ω auf V ist von der Gestalt

$$\omega = f\, dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_m$$

mit einer glatten Funktion $f\colon V \to \mathbb{R}$. Da $\Omega^{m+1}(V) = \{0\}$, ist jede m-Form geschlossen. Ist V sternförmig, so ist also $\omega = d\eta$ für eine $(m-1)$-Form η auf V. Schreiben wir

$\eta = \sum_{j=1}^m (-1)^{j-1} f_j \, dx_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_j} \wedge \ldots \wedge dx_m$, so ist nach (c) also

$$f = \sum_{j=1}^m \frac{\partial f_j}{\partial x_j} = \operatorname{div}(F)$$

mit $F := (f_1, \ldots, f_m)\colon V \to \mathbb{R}^m$.

(e) Ist $m = 3$ und $\omega = \sum_{j=1}^3 (-1)^{j-1} f_j \, dx_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_j} \wedge \ldots \wedge dx_m$ eine 2-Form auf V, also

$$\omega = f_1 \, dx_2 \wedge dx_3 - f_2 \, dx_1 \wedge dx_3 + f_3 \, dx_1 \wedge dx_2,$$

so ist ω nach (c) genau dann geschlossen, wenn $F := (f_1, f_2, f_3)\colon V \to \mathbb{R}^3$ die Bedingung $\operatorname{div}(F) = 0$ erfüllt, also **quellenfrei** ist. Ist V sternförmig, so ist $\operatorname{div}(F) = 0$ nach dem Poincaré-Lemma äquivalent zur Existenz einer 1-Form $\eta = g_1 \, dx_1 + g_2 \, dx_2 + g_3 \, dx_3$ mit

$$\omega = d\eta = \left(\frac{\partial g_3}{\partial x_2} - \frac{\partial g_2}{\partial x_3}\right) dx_2 \wedge dx_3 + \left(\frac{\partial g_3}{\partial x_1} - \frac{\partial g_1}{\partial x_3}\right) dx_1 \wedge dx_3 + \left(\frac{\partial g_2}{\partial x_1} - \frac{\partial g_1}{\partial x_2}\right) dx_1 \wedge dx_2,$$

was äquivalent ist zu $F = \operatorname{rot}(G)$ mit $G := (g_1, g_2, g_3)\colon V \to \mathbb{R}^3$. Man nennt G ein **Vektorpotential** für F.

Das folgende Lemma ermöglicht uns den Beweis des Poincaré-Lemmas (siehe Forster).

Lemma 25.23

Es sei V eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^m$ und $W \subseteq \mathbb{R}^{m+1}$ eine offene Teilmenge mit $[0,1] \times V \subseteq W$. Wir betrachten

$$\psi_0 \colon V \to W, \quad x \mapsto (0, x)$$

und $\psi_1 \colon V \to W$, $x \mapsto (1, x)$. Für jedes $k \in \mathbb{N}$ und jede geschlossene k-Form $\omega \in \Omega^k(W)$ gibt es dann ein $\eta \in \Omega^{k-1}(V)$ mit

$$\psi_1^* \omega - \psi_0^* \omega = d\eta.$$

Beweis. Schreiben wir Elemente von $\mathbb{R}^{m+1} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$ als $(t, x_1, \ldots, x_m)$, so ist

$$\omega = \sum_{i_1 < \cdots < i_k} f_I \, dx_I + \sum_{j_1 < \cdots < j_{k-1}} g_J \, dt \wedge dx_J$$

mit $i_1, \ldots, i_k, j_1, \ldots, j_{k-1} \in \{1, \ldots, m\}$, $I := \{i_1, \ldots, i_k\}$, $J := \{j_1, \ldots, j_{k-1}\}$, $dx_I := dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k} \in \Omega^k(W)$,

$dx_J := dx_{j_1} \wedge \ldots \wedge dx_{j_{k-1}} \in \Omega^{k-1}(W)$ und eindeutigen glatten Funktionen $f_I, g_J \in C^\infty(W)$ (wobei man $dx_J = 1 \in C^\infty(W) = \Omega^0(W)$ lese, falls $k=1$). Dann ist

$$\psi_0^*\omega = \sum_{i_1<\cdots<i_k} (f_I \circ \psi_0)\, dx_I, \quad \psi_1^*\omega = \sum_{i_1<\cdots<i_k} (f_I \circ \psi_1)\, dx_I \qquad (6)$$

mit $dx_I := dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k} \in \Omega^k(V)$. Es ist

$$d\omega = \sum_{i_1<\cdots<i_k} \frac{\partial f_I}{\partial t}\, dt \wedge dx_I + \sum_{i_1<\cdots<i_k} \sum_{i=1}^m \frac{\partial f_I}{\partial x_i}\, dx_i \wedge dx_I - \sum_{j_1<\ldots<j_{k-1}} \sum_{i=1}^m \frac{\partial g_J}{\partial x_i}\, dt \wedge dx_i \wedge dx_J.$$

Da $d\omega = 0$ per Voraussetzung, folgt

$$\sum_{i_1<\cdots<i_k} \frac{\partial f_I}{\partial t}\, dt \wedge dx_I = \sum_{j_1<\ldots<j_{k-1}} \sum_{i=1}^m \frac{\partial g_J}{\partial x_i}\, dt \wedge dx_i \wedge dx_J \qquad (7)$$

und somit

$$\sum_{i_1<\cdots<i_k} \frac{\partial f_I}{\partial t}\, dx_I = \sum_{j_1<\ldots<j_{k-1}} \sum_{i=1}^m \frac{\partial g_J}{\partial x_i}\, dx_i \wedge dx_J; \qquad (8)$$

um (7) zu folgern, kann man zum Beispiel für $p \in W$ die Basis für $\mathrm{Alt}^{k+1}(T_pW)$ benutzen aus Satz 24.5, zur Basis $(dt)_p$, $(dx_1)_p, \ldots, (dx_m)_p$ von $(T_pW)^*$. Um (8) zu folgern, beachten wir, dass Beiträge mit $i \in J$ jeweils 0 sind; die lineare Abbildung $\sigma \mapsto (dt)_p \wedge \sigma$ vom Spann der $(dx_i)_p \wedge (dx_J)_p$ mit $i \notin J$ nach $\mathrm{Alt}^{k+1}(T_pW)$ ist injektiv.

Für jedes $h \in C^\infty(W)$ erhalten wir eine glatte Funktion $\Phi(h)\colon V \to \mathbb{R}$ via

$$\Phi(h)(x) := \int_0^1 h(t,x)\, dt;$$

die Abbildung $\Phi\colon C^\infty(W) \to C^\infty(V)$ ist $\mathbb{R}$-linear. Wir erhalten eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung[11]

$$\Psi\colon \sum_{i_1<\cdots<i_k} C^\infty(W)\, dx_I \to \Omega^k(V), \quad \sum_{i_1<\cdots<i_k} h_I\, dx_I \mapsto \sum_{i_1<\cdots<i_k} \Phi(h_I)\, dx_I.$$

Wir integrieren nun die Koeffizienten auf beiden Seiten von (8) über $t \in [0,1]$, wenden also auf beiden Seiten Ψ an. Da

[11] Diese ist wohldefiniert, denn die linke Seite ist ein freier $C^\infty(W)$-Modul mit den dx_I als freien Erzeugern; vgl. die Diskussion vor Lemma 25.12.

$$\int_0^1 \frac{\partial f_I}{\partial t}(t,x)\,dt = f_I(1,x) - f_I(0,x)$$

für $x \in V$, ergibt Anwendung von Ψ auf die linke Seite von (8)

$$\sum_{i_1<\cdots<i_k} \Psi\Big(\frac{\partial f_I}{\partial t}\,dx_I\Big) = \sum_{i_1<\cdots<j_k} (f_I \circ \psi_1 - f_I \circ \psi_0)\,dx_I = \psi_1^*\omega - \psi_0^*\omega,$$

wobei im letzten Schritt (6) angewandt wurde. Anwendung von Ψ auf die rechte Seite von (8) liefert wegen

$$\int_0^1 \frac{\partial g_J}{\partial x_i}(t,x)\,dt = \frac{\partial}{\partial x_i}\int_0^1 g_J(t,x)\,dt$$

nun $\psi_1^*\omega - \psi_0^*\omega = d\eta$ mit $\eta := \sum_{j_1<\cdots<j_{k-1}} \Phi(g_J)\,dx_J$. $\Box$

Beweis des Poincaré-Lemmas (Satz 25.21). Da wir Differentialformen mit Translationen Zurückholen können, dürfen wir annehmen, dass $0 \in V$ gilt und V sternförmig bezüglich 0 ist. Wir betrachten die glatte Abbildung

$$\phi\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m, \quad (t,x) \mapsto tx.$$

Dann ist $W := \phi^{-1}(V)$ offen in $\mathbb{R}^{m+1}$ und $[0,1] \times V \subseteq W$. Seien ψ_0 und ψ_1 wie in Lemma 25.23. Ist $k \geq 1$ und $\omega \in \Omega^k(V)$ geschlossen, so ist auch die k-Form $\sigma := (\phi|_W^V)^*\omega$ auf W geschlossen (vgl. Satz 25.19). Nach Lemma 25.23 existiert also eine $(k-1)$-Form η auf V derart, dass

$$\psi_1^*\sigma - \psi_0^*\sigma = d\eta. \tag{9}$$

Da $\phi|_W^V \circ \psi_1 = \mathrm{id}_V$, ist $\psi_1^*\sigma = (\phi|_W^V \circ \psi_1)^*\omega = \omega$. Da $\phi|_W^V \circ \psi_0 = 0$ die konstante Nullfunktion ist, ist $\psi_0^*\sigma = 0$. Einsetzen in (9) liefert $d\eta = \omega$. $\square$

Bemerkung 25.24 Gegeben eine glatte Mannigfaltigkeit M kann man für jedes $k \in \mathbb{N}_0$

$$\mathrm{Alt}^k(TM) = \bigcup_{p \in M} \mathrm{Alt}^k(T_pM)$$

zu einem Vektorbündel machen und eine Differentialform $\omega\colon TM^{\oplus k} \to \mathbb{R}$ als glatten Schnitt $(\omega_p)_{p\in M}$ in $\mathrm{Alt}^k(TM)$ betrachten;[12] insb. entsprechen 1-Formen Schnitten in T^*M.

[12]Oder in $\bigwedge^k(T^*M) := \bigcup_{p\in M} \bigwedge^k((T_pM)^*)$.

Die Modulmultiplikation $C^\infty(M) \times \Omega^k(M) \to \Omega^k(M)$ wird dann zur üblichen punktweisen Multiplikation

$$C^\infty(M) \times \Gamma(\mathrm{Alt}^k(TM)) \to \Gamma(\mathrm{Alt}^k(TM))$$

von Schnitten mit Funktionen, $f \cdot (\omega_p)_{p\in M} = (f(p)\omega_p)_{p\in M}$.

In diesem Kapitel sei stets $\dim(M) \geq 1$ (vgl. Bem. 28.3 für $m = 0$).

Definition 26.1

Ist $V \subseteq \mathbb{R}^m$ eine offene Menge und $\omega \in \Omega^m(V)$, so ist $\omega = f\, dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_m$ mit einer eindeutig festgelegten glatten Funktion $f\colon V \to \mathbb{R}$. Wir nennen ω **integrierbar**, wenn f bezüglich des Lebesgue-Borel-Maßes λ_m auf $\mathbb{R}^m$ über V integrierbar ist. In diesem Fall sei

$$\int_V \omega := \int_V f\, d\lambda_m.$$

Bemerkung 26.2. Für $k \in \mathbb{N}_0$ ist der **Träger** $\operatorname{supp}(\omega)$ einer k-Form $\omega \in \Omega^k(M)$ auf einer glatten Mannigfaltigkeit M definiert als der Abschluss

$$\operatorname{supp}(\omega) := \overline{\{p \in M \colon \omega_p \neq 0\}} \subseteq M.$$

Hat $\omega \in \Omega^m(V)$ in Definition 26.1 kompakten Träger, so ist ω über $V \subseteq \mathbb{R}^m$ integrierbar.

Definition 26.3

Ein C^∞-Diffeomorphismus $\tau\colon V \to W$ zwischen offenen

Teilmengen $V, W \subseteq \mathbb{R}^m$ heißt **orientierungserhaltend**, wenn

$$\det \tau'(x) > 0$$

für alle $x \in V$. Ist $\det \tau'(x) < 0$ für alle $x \in V$, so wird τ **orientierungsumkehrend** genannt.

In Lemma 26.4 sei $dy_j := d(\mathrm{pr}_j|_W)$ und $dx_j := d(\mathrm{pr}_j|_V)$ mit der Projektion $\mathrm{pr}_j\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ auf die $j$te Komponente, für $j \in \{1, \ldots, m\}$.

Lemma 26.4

Es sei $\tau\colon V \to W$ eine glatte Abbildung zwischen offenen Teilmengen $V, W \subseteq \mathbb{R}^m$ und $\omega \in \Omega^m(W)$, etwa $\omega = f\, dy_1 \wedge \ldots \wedge dy_m$. Dann ist

$$\tau^*(\omega) = (f \circ \tau)\,(\det \circ \tau')\, dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_m.$$

Ist τ ein Diffeomorphismus, so gilt

$$\int_V \tau^*(\omega) = \begin{cases} \int_W \omega & \text{wenn } \tau \text{ orientierungserhaltend;} \\ -\int_W \omega & \text{wenn } \tau \text{ orientierungsumkehrend ist.} \end{cases}$$

Beweis. Zunächst ist zu zeigen, dass für alle $p \in V$

$$(\tau^*(\omega))_p = \det(\tau'(p))\,(dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_m)_p. \tag{1}$$

Nach Lemma 25.7 ist

$$(\tau^*(\omega))_p = f(\tau(p))\,((dy_1) \circ T_p\tau) \wedge \ldots \wedge ((dy_m) \circ T_p\tau).$$

Schreiben wir $\tau = (\tau_1, \ldots, \tau_m)$ mit den Komponenten $\tau_i \colon V \to \mathbb{R}$ für $i \in \{1, \ldots, m\}$, so ist

$$(dy_i) \circ T_p\tau = (d(\mathrm{pr}_i \circ \tau))_p = (d\tau_i)_p = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial \tau_i}{\partial x_j}(p)\,(dx_j)_p.$$

Unter Benutzung der Jacobimatrix $J_\tau(p) = ((\partial\tau_i/\partial x_j)(p))_{i,j=1}^m$ ist nach Satz 24.7 also wie in (1) behauptet

$$(\tau^*(\omega))_p = \det(J_\tau(p))\,(dx_1)_p \wedge \ldots \wedge (dx_m)_p = \det(\tau'(p))\,(dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_m)_p.$$

Sei nun $\sigma := 1$ wenn τ orientierungserhaltend ist, $\sigma := -1$ wenn τ orientierungsumkehrend ist. Nach der Transformationsformel der Reellen Analysis ist dann

$$\int_W \omega = \int_W f(y)\,d\lambda_m(y) = \int_V f(\tau(x))\,\overbrace{|\det\tau'(x)|}^{=\sigma\det\tau'(x)}\,d\lambda_m(x)$$
$$= \sigma\int_V f(\tau(x))\,\det\tau'(x)\,d\lambda_m(x) = \sigma\int_V \tau^*(\omega).\,\square$$

Definition 26.5

Sei M eine C^∞-Mannigfaltigkeit mit dem maximalen C^∞-Atlas $\mathcal{A}$. Ein Atlas $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ wird **orientiert** genannt, wenn $\psi \circ \phi^{-1}$ orientierungserhaltend ist für alle $\phi, \psi \in \mathcal{B}$. Ein maximaler orientierter Atlas σ wird eine **Orientierung** auf M genannt. Existiert eine solche, wir die Mannigfaltigkeit M **orientierbar** genannt.

Definition 26.6

Eine m-Form ω auf einer m-dimensionalen glatten Mannigfaltigkeit M wird **Volumenform** genannt, wenn $\omega_p \neq 0$ für alle $p \in M$.

Sei M eine m-dimensionale glatte Mannigfaltigkeit. Sind $\phi\colon U_\phi \to V_\phi \subseteq \mathbb{R}^m$ und $\psi\colon U_\psi \to V_\psi \subseteq \mathbb{R}^m$ Karten für M und $\tau := \psi \circ \phi^{-1}\colon \phi(U_\phi \cap U_\psi) \to \psi(U_\phi \cap U_\psi)$, so ist nach Lemma 25.11 für $\omega \in \Omega^m(U_\psi)$

$$\omega|_{(TU_\psi)^{\oplus m}} = f\, d\psi_1 \wedge \ldots \wedge d\psi_m$$

mit einer eindeutigen glatten Funktion $f\colon U_\psi \to \mathbb{R}$. Dann ist

$$\omega = (\det \circ \tau' \circ \phi)\, f\, d\phi_1 \wedge \ldots \wedge d\phi_m \tag{2}$$

auf $T(U_\phi \cap U_\psi)^{\oplus m}$. Zum Nachweis sei o.B.d.A. $U_\phi = U_\psi =: U$. Da $(\psi^{-1})^*(d\psi_j) = d(\psi_j) \circ T(\psi^{-1}) = d(\mathrm{pr}_j|_{V_j}) = dy_j$ für $j \in \{1, \ldots, m\}$, ist nach Lemma 25.7

$$(\psi^{-1})^*(\omega) = (f \circ \psi^{-1})\, dy_1 \wedge \ldots \wedge dy_m.$$

Nach Lemma 26.4 ist dann

$$\begin{aligned}(\phi^{-1})^*(\omega) &= \tau^*((\psi^{-1})^*(\omega)) = \tau^*((f \circ \psi^{-1})\, dy_1 \wedge \ldots \wedge dy_m) \\ &= (\det \circ \tau')\,(f \circ \psi^{-1} \circ \tau)\, dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_m.\end{aligned}$$

Da $\psi^{-1} \circ \tau \circ \phi = \mathrm{id}_{V_\phi}$, liefert Zurückholen mit ϕ (unter Benutzung von Lemma 25.7 und Lemma 25.8) wie benötigt (2).

Satz 26.7

Eine σ-kompakte glatte Mannigfaltigkeit $(M, \mathcal{A})$ ist genau dann orientierbar, wenn auf ihr eine Volumenform ω existiert. Die Karten $\phi\colon U_\phi \to V_\phi$ aus $\mathcal{A}$ mit

$$\omega\left(\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_\phi (p), \ldots, \left(\frac{\partial}{\partial x_m}\right)_\phi (p)\right) > 0 \ \text{ für alle } p \in U_\phi \tag{3}$$

bilden dann eine Orientierung σ auf M. Ist M zusammenhängend, sind diese und

$$-\sigma := \{\phi \circ \kappa\colon \phi \in \sigma\}$$

mit $\kappa\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$, $(x_1, \ldots, x_m) \mapsto (x_1, \ldots, x_{m-1}, -x_m)$ die einzigen Orientierungen auf M.

Beweis. Ist ω eine Volumenform auf M, so sei σ die Menge aller Karten ϕ von M, welche (3) erfüllen. Sind $\phi\colon U_\phi \to V_\phi \subseteq \mathbb{R}^m$ und $\psi\colon U_\psi \to V_\psi \subseteq \mathbb{R}^m$ in σ, so ist

$$\omega = f\, d\psi_1 \wedge \ldots \wedge d\psi_m = g\, d\phi_1 \wedge \ldots \wedge d\phi_m$$

auf $T(U_\phi \cap U_\psi)^{\oplus m}$ mit

$$f := \omega \circ \Big((\partial/\partial x_1)_\psi, \ldots, (\partial/\partial x_m)_\psi \Big)$$

und $g := \omega \circ \Big((\partial/\partial x_1)_\phi, \ldots, (\partial/\partial x_m)_\phi \Big)$. Da $\phi, \psi \in \sigma$, ist für alle $p \in U_\phi \circ U_\psi$ $f(p) > 0$ und $g(p) > 0$. Mit $\tau := \psi \circ \phi^{-1}$ ist nach (2)

$$g(p) = \det \tau'(\phi(p))\, f(\tau(p));$$

wir schließen, dass $\det \tau'(\phi(p)) > 0$. Also ist σ ein orientierter Atlas für M und dieser ist offenbar maximal.

Ist M zusammenhängend und σ_1 eine Orientierung auf M, so wählen wir ein $p \in M$ und finden Karten $\phi\colon \in \sigma$ und $\psi \in \sigma_1$ um p und dürfen (nach dem wir notfalls σ_1 durch $-\sigma_1$ ersetzen) annehmen, dass $(\psi \circ \phi^{-1})'(\phi(p)) > 0$. Da $]0, \infty[$ offen in $\mathbb{R}^\times$ ist und det stetig, dürfen wir nach Verkleinern von U_ϕ und U_ψ annehmen, dass $U_\phi = U_\psi$ ist und $(\psi \circ \phi^{-1})'(x) > 0$ für alle $x \in V_\phi$. Somit sind $\phi, \psi \in \sigma \cap \sigma_1$. Die Menge Q aller $q \in M$, für die eine

Karte $\phi \in \sigma \cap \sigma_1$ um q existiert, ist also nicht leer. Per Definition ist Q offen in M. Ist q im Abschluss von Q, so wählen wir Karten $\phi\colon U_\phi \to V_\phi$ in σ und $\psi\colon U_\psi \to V_\psi$ in σ_1 um q und dürfen nach Verkleinern annehmen, dass $U_\phi = U_\psi$ und $(\psi \circ \phi^{-1})'(x)$ entweder für alle $x \in V_\phi$ positiv (und somit $\phi \in \sigma \cap \sigma_1$ und $q \in Q$) ist, oder für alle $x \in V_\phi$ negativ. Der zweite Fall kann nicht auftreten, da ein $r \in Q$ mit $r \in U_\phi = U_\psi$ existiert; es gibt eine Karte $\theta\colon U_\kappa \to V_\kappa$ in $\sigma \cap \sigma_1$ um r. Die Kettenregel liefert

$$\begin{aligned}(\psi \circ \phi^{-1})(\phi(r)) &= (\psi \circ \kappa^{-1} \circ \kappa \circ \phi^{-1})'(\phi(r))\\ &= (\psi \circ \kappa^{-1})'(\kappa(r)) \circ (\kappa \circ \phi^{-1})'(\phi(r)),\end{aligned}$$

so dass

$$\det(\psi \circ \phi^{-1})'(\phi(p)) = \det(\psi \circ \kappa^{-1})'(\kappa(r)) \det(\kappa \circ \phi^{-1})'(\phi(r)) > 0.$$

Da Q eine offene, abgeschlossene, nicht leere Teilmenge von M und M zusammenhängend ist, folgt $Q = M$. Mit Einschieben von Karten aus $\sigma \cap \sigma_1$ sehen wir, dass $\sigma \subseteq \sigma_1$, also $\sigma = \sigma_1$.

Sei schließlich M orientierbar und Σ eine Orientierung auf M. Da M σ-kompakt und somit parakompakt ist, finden wir eine der

Überdeckung U_ϕ mit $(\phi\colon U_\phi \to V_\phi) \in \Sigma$ untergeordnete Partition der Eins $(h_j)_{j\in J}$ auf M. Für jedes $j \in J$ existiert also eine Karte $(\phi_j\colon U_j \to V_j) \in \Sigma$ mit $\operatorname{supp}(h_j) \subseteq U_j$. Wir definieren punktweise

$$\omega := \sum_{j\in J} h_j \, d(\phi_j)_1 \wedge \ldots \wedge d(\phi_j)_m,$$

wobei der Summand zu $j \in J$ außerhalb $\operatorname{supp}(h_j)$ als 0 zu lesen ist. Für jedes $p \in M$ gibt es eine Umgebung W derart, dass $J_W := \{j \in J\colon \operatorname{supp}(h_j) \cap W \neq \emptyset\}$ endlich ist; dann ist

$$\omega|_{(TW)^{\oplus m}} = \sum_{j\in J_W} h_j \, d(\phi_j)_1 \wedge \ldots \wedge d(\phi_j)_m$$

und somit $\omega \in \Omega^m(M)$. Sei $J_p := \{j \in J\colon h_j(p) > 0\}$, $i \in J_p$ und $\tau_j := \phi_i \circ \phi_j^{-1}$ für $j \in J_p$. Dann ist $a := \sum_{j\in J_p} h_j(p) \det(\tau_j)'(\phi_i(p)) \geq h_i(p) > 0$. Mit (2) erhalten wir

$$\omega_p = \sum_{j\in J_p} h_j(p) \, d(\phi_j)_1 \wedge \ldots \wedge d(\phi_j)_m = a \, (d(\phi_i)_1 \wedge \ldots \wedge d(\phi_i)_m)_p \neq 0.$$

Also ist ω eine Volumenform auf M. $\square$

26.8. Wir betrachten eine σ-kompakte, orientierbare glatte Mannigfaltigkeit $(M, \mathcal{A})$ und eine Volumenform ω auf M. Sei σ die durch (3) festgelegte Orientierung auf M und $\mathcal{B}(M)$ die σ-Algebra der Borelmengen von M. Ist $\phi\colon U \to V \subseteq \mathbb{R}^m$ in σ, so ist

$$(\phi^{-1})^*(\omega) = \rho\, dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_m$$

mit $\rho(x) := \Big(\omega \circ \big((\partial/\partial x_1)_\phi, \ldots, (\partial/\partial x_m)_\phi\big)\Big)(\phi^{-1}(x)) > 0$. Wir schreiben $\rho \odot (\lambda_m|_V)$ für das Maß mit Dichte ρ bezüglich des Lebesgue-Borel-Maßes $\lambda_m|_V$ auf $(V, \mathcal{B}(V))$ und $(\phi^{-1})_*(\rho \odot \lambda_m|_V)$ für das Bildmaß auf $(M, \mathcal{B}(M))$ bezüglich $\phi^{-1}\colon V \to U \subseteq M$. Weiter sei $\mathbf{1}_A\colon M \to \{0, 1\}$ für $A \subseteq M$ die charakteristische Funktion (Indikatorfunktion) von A.

Satz 26.9

In 26.8 gibt es genau ein Maß μ_ω auf $(M, \mathcal{B}(M))$ derart, dass

$$\mu_\omega = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{1}_{A_n} \odot (\phi_n^{-1})_*(\rho_n \odot d\lambda_m|_{V_n}) \tag{4}$$

für jede Folge $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Karten $\phi_n\colon U_n \to V_n \subseteq \mathbb{R}^m$ mit $\phi_n \in \sigma$ und $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n = M$ und jede Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ paarweise disjunkter Borelmengen $A_n \subseteq U_n$ mit $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = M$, wobei $(\phi_n^{-1})^*(\omega) = \rho_n\, dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_m$.

Beweis. Seien $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wie im Satz; analoge Eigenschaften seien von einer Folge von Karten $\psi_n\colon P_n \to Q_n$ in σ erfüllt, Funktionen $r_n \in C^\infty(Q_n)$ und Borelmengen $B_n \in \mathcal{B}(M)$ mit $B_n \subseteq P_n$. Wir definieren μ_ϕ via (4) und

$$\mu'_\omega := \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{1}_{B_k} \odot (\psi_k^{-1})_*(r_k \odot d\lambda_m|_{Q_k}). \tag{5}$$

Wir zeigen, dass $\mu_\omega = \mu'_\omega$. Hierzu sei $A \in \mathcal{B}(M)$. Da die Borelmengen $A \cap A_\nu \cap B_\kappa$ für $(\mu, \kappa) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ paarweise disjunkt sind mit Vereinigung A, brauchen wir wegen der σ-Additivität von μ_ω und μ'_ω nur zu zeigen, dass

$$\mu_\omega(A \cap A_\nu \cap B_\kappa) = \mu'_\omega(A \cap A_\mu \cap B_\kappa). \tag{6}$$

Ist $A \cap A_\nu \cap B_\kappa = \emptyset$, so ist (6) trivial. Andernfalls ist

$U_\nu \cap P_\kappa \neq \emptyset$; wir betrachten $\tau\colon \psi_\kappa(U_\nu \cap P_\kappa) \to \phi_\nu(U_\nu \cap P_\kappa)$, $x \mapsto \phi_\nu(\psi_\kappa^{-1}(x))$. Für $n \in \mathbb{N}$ mit $n \neq \nu$ ist $A_n \cap A_\nu = \emptyset$ und somit

$$(\mathbf{1}_{A_n} \odot (\phi_n^{-1})_*(\rho_n \odot \lambda_m|_{V_n}))(A \cap A_\nu \cap B_\kappa) = 0.$$

Also ist

$$\begin{aligned}
\mu_\omega(A \cap A_\nu \cap B_\kappa) \\
&= (\mathbf{1}_{A_\nu} \odot (\phi_\nu^{-1})_*(\rho_\nu \odot \lambda_m|_{V_\nu}))(A \cap A_\nu \cap B_\kappa) \\
&= \int_{\phi_n(A \cap A_\nu \cap B_\kappa)} \mathbf{1}_{A_\nu}(\phi_\nu^{-1}(y))\, \rho_\nu(y)\, d\lambda_m(y) \\
&= \int_{\phi_\nu(U_\nu \cap P_\kappa)} \mathbf{1}_{A \cap A_\nu \cap B_\kappa}(\phi_\nu^{-1}(y))\, \rho_\nu(y)\, d\lambda_m(y) \\
&= \int_{\psi_\kappa(U_\nu \cap P_\kappa)} \mathbf{1}_{A \cap A_\nu \cap B_\kappa}(\psi_\kappa(x))\, \rho_\nu(\tau(x))\, |\det \tau'(x)|\, d\lambda_m(x) \\
&= \int_{\psi_\kappa(U_\nu \cap P_\kappa)} \mathbf{1}_{A \cap A_\nu \cap B_\kappa}(\psi_\kappa(x))\, r_\kappa(x)\, d\lambda_m(x) \\
&= \mu'_\omega(A \cap A_\nu \cap B_\kappa),
\end{aligned}$$

wobei für die vierte Gleichheit die Transformationsformel angewandt wurde mit $y = \tau(x)$ und dann benutzt wurde, dass $r_\kappa(x) = \rho_\nu(\tau(x))\det(\tau'(x)) = \rho_\nu(\tau(x))|\det\tau'(x)|$ als Konsequenz von (2). □

Satz 26.10

Ist ω eine Volumenform auf der m-dimensionalen glatten Mannigfaltigkeit M, so gibt es für jedes $\eta \in \Omega^m(M)$ genau eine glatte Funktion $f \in C^\infty(M)$ mit $\eta = f\omega$.

Beweis. Für jedes $p \in M$ ist $\mathrm{Alt}^m(T_pM)$ eindimensional, also $\omega_p \neq 0$ eine Basis für $\mathrm{Alt}^m(T_pM)$. Es gibt somit genau eine reelle Zahl $f(p)$ derart, dass

$$\eta_p = f(p)\,\omega_p.$$

Für jede Karte $\phi\colon U \to V \subseteq \mathbb{R}^m$ von M gibt es eindeutige glatte Funktionen $g, h\colon U \to \mathbb{R}$ derart, dass

$$\eta = g\, d\phi_1 \wedge \ldots \wedge d\phi_m \quad \text{und} \quad \omega = h\, d\phi_1 \wedge \ldots \wedge d\phi_m$$

mit $\phi = (\phi_1, \ldots, \phi_m)$. Für alle $p \in U$ ist dann $h(p) \neq 0$ und es ist

$$f(p) = g(p)/h(p)$$

eine glatte reellwertige Funktion von $p \in U$. □

Definition 26.11

Es sei M eine m-dimensionale, σ-kompakte glatte Mannigfaltigkeit mit einer Orientierung σ. Eine m-Form η auf M heißt **integrierbar**, wenn für eine Volumenform ω auf M mit (3) die glatte Funktion f aus Satz 26.10 bezüglich μ_ω integrierbar ist; man setzt dann

$$\int_{(M,\sigma)} \eta := \int_M f \, d\mu_\omega.$$

Bemerkung 26.12

(a) Integrierbarkeit von $\eta \in \Omega^m(M)$ und das Integral $\int_{(M,\sigma)} \eta$ sind unabhängig von der Wahl der Volumenform ω mit (3).

Ist auch Ω eine Volumenform auf M mit (3), so gibt es eine glatte Funktion $\rho\colon M \to \mathbb{R}$ mit $\Omega = \rho\,\omega$; da beide Volumenformen (3) erfüllen, muss $\rho(p) > 0$ sein für alle $p \in M$. Betrachtung der Definition zeigt, dass dann $\mu_\Omega = \rho \odot \mu_\omega$. Gegeben $\eta \in \Omega^m(M)$ ist $\eta = f\,\Omega$ mit einer glatten Funktion $f\colon M \to \mathbb{R}$ und somit

$$\eta = f \rho\, \omega.$$

Aus der Reellen Analysis wissen wir, dass f genau dann bezüglich $\rho \odot \mu_\omega$ integrierbar ist, wenn $f\rho$ bezüglich μ_ω integrierbar ist; weiter ist in diesem Fall $\int_M f\, d(\rho \odot \mu_\omega) = \int_M f\rho\, d\mu_\omega$.

(b) Die integrierbaren m-Formen auf einer m-dimensionalen, σ-kompakten glatten Mannigfaltigkeit M bilden einen Untervektorraum von $\Omega^m(M)$ und $\int_{(M,\sigma)} \eta$ ist linear in der integrierbaren m-Form η.

Sind $\eta, \zeta \in \Omega^m(M)$ integrierbar und $a, b \in \mathbb{R}$, so finden wir $f, g \in C^\infty(M)$ mit $\eta = f\,\omega$ und $\zeta = f\,\omega$. Dann ist

$$a\eta + b\zeta = (af + bg)\,\omega.$$

Aus der Reellen Analysis ist bekannt, dass mit f und g auch $af + bg$ bezüglich μ_ω integrierbar ist und $\int_M (af + bg)\, d\mu_\omega = a\int_M f\, d\mu_\omega + b\int_M g\, d\mu_\omega$. Die linke Seite ist $\int_M (a\eta + b\zeta)$, die rechte $a\int_M \eta + b\int_M \zeta$.

(c) Ist η integrierbar, so ist
$$\int_{(M,-\sigma)} \eta = -\int_{(M,\sigma)} \eta.$$

Erfüllt ω die Bedingung (3) für σ, so erfüllt $-\omega$ die entsprechende Bedingung für $-\sigma$. Betrachtung der Definition zeigt, dass $\mu_\omega = \mu_{-\omega}$. Ist nun $\eta = f\,\omega$, so ist $\eta = (-f)\,(-\omega)$, also $\int_{(M,-\sigma)} \eta = \int_M (-f)\, d\mu_{-\omega} = -\int_M f\, d\mu_\omega = -\int_{(M,\sigma)} \eta$.

(d) Jedes $\eta \in \Omega^m(M)$ mit kompaktem Träger ist integrierbar. Ist $\operatorname{supp}(\eta) \subseteq U$ für eine offene Teilmenge $U \subseteq M$ und $\sigma_U = \{(\phi\colon U_\phi \to V_\phi) \in \sigma \colon U_\phi \subseteq U\}$, so ist $\int_{(M,\sigma)} \eta = \int_{(U,\sigma_U)} \eta|_{(TU)^{\oplus M}}$.

(i) Sei zunächst $\operatorname{supp}(\eta) \subseteq U_1$ für eine Karte $\phi\colon U_1 \to V_1 \subseteq \mathbb{R}^m$ von M. Dann ist $\eta = f\,\omega$ mit einem $f \in C^\infty(M)$ mit $\operatorname{supp}(f) \subseteq U_1$. Wir wählen Karten $\phi_n\colon U_n \to V_n \subseteq \mathbb{R}^m$ für $n \geq 2$ mit $M = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n$, setzen $A_1 := U_1$ und $A_n := U_n \setminus (U_1 \cup \cdots \cup U_{n-1})$ für $n \geq 2$. Mit ρ_n wie oben ist dann

$$\int_M |f|\, d\mu_\omega = \sum_{n=1}^{\infty} \int_M |f|\, \mathbf{1}_{A_n}\, d(\phi_n^{-1})_*(\rho_n \odot \lambda_m|_{V_n})$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_M |f|\, \mathbf{1}_{A_1}\, d(\phi_1^{-1})_*(\rho_1 \odot \lambda_m|_{V_1}) \\
&= \int_{V_1} |f| \circ \phi_1^{-1}\, \rho_1\, d\lambda_m < \infty;
\end{aligned}
$$

da der zweite Integrand für $n \neq 1$ verschwindet, gilt die zweite Gleichheit.

(ii) Ist η beliebig, wählen wir eine Partition der Eins $(h_j)_{j\in J}$ auf M, die den Definitionsbereichen U_ϕ der Karten $\phi \in \sigma$ untergeordnet ist. Dann ist die Menge J_0 aller $j \in J$ mit $\operatorname{supp}(h_j) \cap \operatorname{supp}(\eta)$ endlich und $\eta = \sum_{j\in J_0} h_j\eta$. Nach dem Spezialfall ist $h_j\eta$ integrierbar für alle $j \in J_0$ und somit auch $h_j = \sum_{j\in J_0} h_j\eta$, nach (b).

(iii) Ist $\operatorname{supp}(\eta) \subseteq U$, so können wir die Partition der Eins derart wählen, dass $\operatorname{supp}(h_j) \subseteq M \setminus \operatorname{supp}(\eta)$ oder $\operatorname{supp}(h_j) \subseteq U_{\phi_j}$ für eine Karte $\phi_j \in \sigma$ mit Definitionsbereich $U_{\phi_j} \subseteq U$. Wir dürfen daher annehmen, dass $\operatorname{supp}(\eta) \subseteq U_1$ für eine Karte $(\phi_1 \colon U_1 \to V_1) \in \sigma_U$. Mit U_n, A_n und ρ_n wie in (i) ist dann

$$\int_{(M,\sigma)} \eta = \int_{V_1} |f| \circ \phi_1^{-1}\, \rho_1 \, d\lambda_m.$$

Das gleiche Integral erhält man, wenn man in (i) M durch U ersetzt und ω durch $\omega|_{(TU)^{\oplus m}}$.

(e) Für jede Orientierung σ auf M gibt es eine Volumenform ω mit (3).

Wir wählen hierzu eine Orientierung ω. Ist (3) an einer Stelle $p \in M$ verletzt für eine Karte um p aus σ, so ersetzen wir ω_q durch $-\omega_q$ für alle q in der Zusammenhangskomponente von p in M. Das so neue gewonnene ω erfüllt (3).

Beispiel 26.13. Ist V offen in $\mathbb{R}^m$, so ist $\omega := dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_m$ eine Volumenform auf V und id_V eine Karte in der zugehörigen Orientierung σ. Es ist $\mu_\omega = \lambda_m|_V$ (wir können nämlich $\phi_n := \mathrm{id}_V$, $A_1 := V$, $A_n := \emptyset$ für $n \geq 2$ wählen in Satz 26.9). Für $\eta \in \Omega^m(V)$

mit $\eta = f\omega$ ist also genau dann η integrierbar, wenn f bzgl. λ_m integrierbar ist, und in diesem Fall ist

$$\int_V \eta = \int_V f\, d\mu_\omega = \int_V f\, d\lambda_m \quad \text{(wie in Definition 30.1).}$$

Beispiel 26.14

Die glatte Mannigfaltigkeit M habe eine globale Karte $\phi = (\phi_1, \ldots, \phi_m)\colon M \to V \subseteq \mathbb{R}^m$. Dann gilt:

(a) Es ist $\omega := \phi^{-1}(dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_m)$ eine Volumenform auf M und $\mu_\omega = (\phi^{-1})_*(\lambda_m|_V)$.

(b) Sei σ eine Orientierung auf M mit $\phi \in \sigma$. Für $\eta \in \Omega^m(M)$ gibt es genau eine glatte Funktion $f\colon M \to \mathbb{R}$ mit $\eta = f\, d\phi_1 \wedge \ldots \wedge \phi_m$. Dann gilt: η ist genau dann integrierbar, wenn $f \circ \phi^{-1}$ bezüglich λ_m über V integrierbar ist. In diesem Fall ist

$$\int_{(M,\sigma)} \eta = \int_V (f \circ \phi^{-1})\, d\lambda_m.$$

Nehmen wir $\phi_1 := \phi$ mit $\rho_1 = 1$ in Satz 26.9 und $A_1 := M$, so folgt $\mu_\omega = (\phi^{-1})_*(\lambda_m|_V)$, also (a). Aus der Reellen Analysis wissen wir, dass f genau dann bezüglich des vorigen Bildmaßes integrierbar ist, wenn $f \circ \phi^{-1}$ bezüglich $\lambda_m|_V$ integrierbar ist und die Integrale dann übereinstimmen ("Allgemeine Transformationsformel"). Somit gilt (b).

Definition 26.15

Es sei M eine glatte Mannigfaltigkeit, N eine n-dimensionale, σ-kompakte, orientierbare glatte Mannigfaltigkeit mit einer fest gewählten Orientierung σ und $\eta \in \Omega^n(M)$. Ist $\gamma\colon N \to M$ eine glatte Abbildung, so definiert man

$$\int_\gamma \eta := \int_{(N,\sigma)} \gamma^*(\eta),$$

wenn $\gamma^*(\eta) \in \Omega^n(N)$ integrierbar ist.

Definition 27.1

Seien $n, m \in \mathbb{N}_0$ und $k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$. Eine Funktion $f\colon V \to \mathbb{R}^n$ auf einer relativ offenen Menge $V \subseteq [0, \infty[\times \mathbb{R}^{m-1}$ (bzw. auf $V = \mathbb{R}^0$, falls $m = 0$) heißt C^k, wenn es eine offene Menge $\widetilde{V} \subseteq \mathbb{R}^m$ mit $V \subseteq \widetilde{V}$ und eine C^k-Funktion $\widetilde{f}\colon \widetilde{V} \to \mathbb{R}^n$ gibt mit $f = \widetilde{f}|_V$.

Analog für relativ offene Teilmengen $V \subseteq]-\infty, 0] \times \mathbb{R}^{m-1}$.

Bemerkung 27.2. (a) Da wir Funktionen mit glatten Partitionen der Eins zusammenmischen können, ist $f\colon V \to \mathbb{R}^n$ genau dann C^k im vorigen Sinn, wenn für jedes $x \in V$ die Einschränkung $f|_W$ eine C^k-Abbildung ist für eine offene x-Umgebung $W \subseteq V$.

(b) Mit einigem Aufwand lässt sich zeigen, dass f genau dann C^k ist, wenn f stetig ist, $f|_{V^o}$ eine C^k-Abbildung und für alle $\alpha \in (\mathbb{N}_0)^m$ mit $|\alpha| \leq k$ die partielle Ableitung $\frac{\partial^{|\alpha|}(f|_{V^o})}{\partial x^\alpha}\colon V^o \to \mathbb{R}^n$ eine stetige Fortsetzung $\frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x^\alpha}\colon V \to \mathbb{R}^n$ besitzt.

(c) $f'(x) := (\widetilde{f})'(x)$ ist wohldefiniert und die Kettenregel gilt für C^k-Abbildungen zwischen offenen Teilmengen von Halbräumen.

Definition 27.3

Ein Hausdorffscher topologischer Raum M heißt m-dimensionale **topologische Mannigfaltigkeit mit Rand**, wenn es für jedes $p \in M$ einen Homöomophismus $\phi\colon U_\phi \to V_\phi$ von einer offenen p-Umgebung $U_\phi \subseteq M$ auf eine relativ offene Teilmenge V_ϕ von $[0, \infty[\, \times \mathbb{R}^{m-1}$ gibt (bzw. auf $V_\phi = \mathbb{R}^0$, wenn $m = 0$).[a] Man nennt $(M, \mathcal{A})$ eine ***C*^{k}-Mannigfaltigkeit mit Rand**, wenn $\mathcal{A}$ ein maximaler C^k-Atlas von Karten $\phi\colon U_\phi \to V_\phi$ im vorigen Sinne ist.

[a] Ebenso möchte man relativ offene Teilmengen von $]-\infty, 0] \times \mathbb{R}^{m-1}$ als Bilder von Karten verwenden, um auch im Fall $m = 1$ zwei Orientierungen zu ermöglichen. Solche Karten sind im Folgenden stillschweigend mitzudenken.

Man definiert den **Rand** $\partial M \subseteq M$ von M als die Menge aller $p \in M$ derart, dass $\phi(p) \in \partial V_\phi \subseteq \mathbb{R}^m$ für eine Karte $\phi\colon U_\phi \to V_\phi$ von M um p (und somit für jede solche Karte).[13]

[13] Im Fall $k \geq 1$ ist die Bedingung $p \notin \partial M$ kartenunabhängig aufgrund des Satzes über die Umkehrabbildung. Für $k = 0$ beruht der Beweis auf **Gebietsinvarianz**, einem aufwendigeren Resultat der algebraischen Topologie.

Stetige Abbildungen zwischen C^k-Mannigfaltigkeiten mit Rand heißen C^k, wenn sie in Karten C^k sind.

Im Falle $k \geq 1$ kann für eine C^k-Mannigfaltigkeit M mit Rand $\partial M \neq \emptyset$ der Tangentialraum T_pM nicht über geometrische Tangentialvektoren definiert werden, da es durch Randpunkte nicht Kurven in allen erwünschten Richtungen gibt. Stattdessen definiert man T_pM als Raum der Äquivalenzklassen $[\phi, x, y]$ für alle Karten ϕ um p mit $x = \phi(p)$ und $y \in \mathbb{R}^m$, wobei

$$(\phi, x, y) \sim (\psi, a, b) \text{ wenn } b = (\psi \circ \phi^{-1})'(x)(y).$$

Die Bündelprojektion des Tangentialbündels ist dann

$$\pi_{TM} \colon TM \to M, \quad [\phi, x, y] \mapsto \phi^{-1}(x)$$

und $T\phi \colon TU_\phi \to V_\phi \times \mathbb{R}^m$, $[\phi, x, y] \mapsto (x, y)$ ist ein C^{k-1}-Diffeomorphismus. Weiter ist $Tf([\phi, x, y]) := [\psi, (\psi \circ f \circ \phi^{-1})(x), (\psi \circ f \circ \phi^{-1})'(x)(y)]$ für eine Karte ϕ für M um p und eine Karte ψ für N um $f(p)$, im Fall einer C^k-Abbildung $f \colon M \to N$. Glatte Vektorfelder und

Differentialformen auf glatten Mannigfaltigkeiten mit Rand können ohne Änderungen diskutiert werden, ebenso wie Volumenformen und Integration von Differentialformen (sowie Abschneide funktionen und Partitionen der Eins). Flüsse zu Vektorfeldern auf Mannigfaltigkeiten mit Rand sind subtiler und können nur diskutiert werden, wenn das Vektorfeld auf dem Rand tangential zum Rand ist; wir benötigen sie nicht. Im Falle eines Randes wären zudem auch Untermannigfaltigkeiten, Immersionen, Einbettungen, Submersionen und lokale Diffeomorphismen subtilere Begriffe, die im Skript vermieden werden. Das Produkt $M_1 \times M_2$ einer C^k-Mannigfaltigkeit mit Rand M_1 und einer gewöhnlichen C^k-Mannigfaltigkeit M_2 (ohne Rand) kann mit Produktkarten zu einer Mannigfaltigkeit mit Rand gemacht werden. Jedoch ist $[0,\infty[\, \times [0,\infty[$ lediglich eine sogenannte "Mannigfaltigkeit mit Ecken." Wir bemerken:

Bemerkung 27.4

Ist M eine m-dimensionale C^k-Mannigfaltigkeit mit Rand und $m \geq 1$, so ist ∂M eine abgeschlossene Teilmenge von M und in natürlicher Weise eine $(m-1)$-dimensionale C^k-Mannigfaltigkeit; die Inklusionsabbildung $\partial M \to M$ ist C^k. Ist $m \geq 2$ und σ eine Orientierung auf M, so erbt ∂M eine Orientierung $\sigma_{\partial M}$.

Ist $p \in M \setminus \partial M$, so wählen wir eine Karte $\phi\colon U_\phi \to V_\phi \subseteq [0,\infty[\,\times \mathbb{R}^{m-1}$ für M um p. Dann ist $\phi(p) \in (V_\phi)^o$ und $\phi^{-1}(V_\phi^o) \subseteq M \setminus \partial M$. Also ist $M \setminus \partial M$ eine Umgebung von p in M und somit $M \setminus \partial M$ offen, also ∂M abgeschlossen in M.

Ist $p \in \partial M$, so wählen wir eine Karte $\phi\colon U_\phi \to V_\phi \subseteq [0,\infty[\,\times \mathbb{R}^{m-1}$ für M um p. Schreibe $\phi = (\phi_1, \ldots, \phi_m)$. Da $V_\phi \cap (]0,\infty[\,\times \mathbb{R}^{m-1})$ in $\mathbb{R}^m$ offen ist, ist $\partial V_\phi \subseteq \{0\} \times \mathbb{R}^{m-1}$ und somit $V_\phi \cap \partial V_\phi = V_\phi \cap (\{0\} \times \mathbb{R}^{m-1})$. Also ist

$$\phi(V_\phi \cap \partial M) = V_\phi \cap (\{0\} \times \mathbb{R}^{m-1}).$$

Dann ist $W_\phi := \{x \in \mathbb{R}^{m-1} \colon (0,x) \in V_\phi\}$ offen in $\mathbb{R}^{m-1}$ und $\phi_{\partial M}\colon (U_\phi \cap \partial M) \to W_\phi$, $q \mapsto (\phi_2(q), \ldots, \phi_m(q))$ ist ein Homöomorphismus. Analog können wir $\phi_{\partial M}$ bilden im Fall einer Karte mit $V_\phi \subseteq \,]-\infty, 0] \times \mathbb{R}^{m-1}$. Wie in 2.29 rechnet man nach, dass die $\phi_{\partial M}$ einen C^k-Atlas für ∂M bilden.

Ist $m \geq 2$ und σ eine Orientierung auf M, so bilden die $\phi_{\partial M}$ mit $\phi \in \sigma$ einen orientierten Atlas auf ∂M; dieser ist in einem maximalen orientierten Atlas $\sigma_{\partial M}$ für ∂M enthalten, den wir die **induzierte Orientierung** nennen.

Auch im Fall $m = 1$ kann man von einer auf ∂M induzierten Orientierung sprechen, siehe Bemerkung 28.3.

Satz 28.1 (Satz von Stokes)

Sei $m \geq 2$. Für jede σ-kompakte, m-dimensionale glatte Mannigfaltigkeit M mit Rand mit einer Orientierung σ und jede $(m-1)$-Form ω auf M mit kompaktem Träger ist

$$\int_{\partial M} \omega = \int_{(M,\sigma)} d\omega,$$

wobei ∂M mit der von σ induzierten Orientierung versehen ist.

Genauer ist der linke Integrand $(j_{\partial M})^*(\omega) = \omega|_{(T\partial M)^{\oplus(m-1)}}$ mit der Inklusionsabbildung $j_{\partial M} \colon \partial M \to M$.

Folgerung 28.2

Für jede σ-kompakte, m-dimensionale glatte Mannigfaltigkeit mit einer Orientierung σ und jede $(m-1)$-Form ω auf M mit kompaktem Träger ist

$$\int_{(M,\sigma)} d\omega = 0.$$

Beweis des Satzes von Stokes. Um jedes $p \in M \setminus \partial M$ existiert eine Karte $\phi_p \colon U_p \to V_p$ in σ derart, dass V_p eine offene 0-Umgebung in $\mathbb{R}^m$ ist und nach Verkleinern von der Form $]-\varepsilon_p, \varepsilon_p[^m$ für ein $\varepsilon_p > 0$. Nach Ersetzen von ϕ_p durch $\frac{2}{\varepsilon_p}\phi_p$ ist o.B.d.A. $\varepsilon_p = 2$. Wir setzen $Q_p := \phi_p^{-1}(]-1,1[^m)$. Um $p \in \partial M$ existiert eine Karte $\phi = (\phi_1, \ldots, \phi_m) \colon U_p \to V_p$ in σ derart, dass $\phi_1(p) = 0$ und V_ϕ eine relativ offene Teilmenge von $[0, \infty[\, \times \mathbb{R}^{m-1}$ oder $]-\infty, 0] \times \mathbb{R}^{m-1}$ ist. Da $m \geq 2$, dürfen wir (notfalls nach Komposition von ϕ mit $(y_1, \ldots, y_m) \mapsto (-y_1, -y_2, y_3, \ldots, y_m)$ von links) annehmen, dass V eine relativ offene Teilmenge von $]-\infty, 0] \times \mathbb{R}^{m-1}$ ist. Nach Ersetzen durch $\phi - \phi(p)$ dürfen wir annehmen, dass $\phi(p) = 0$. Nach Verkleinern dürfen wir annehmen, dass $V_\phi = \,]-\varepsilon_p, 0]\times\,]-\varepsilon_p, \varepsilon_p[$, wobei wie oben o.B.d.A. $\varepsilon_p = 2$. Wir setzen $Q_p := \phi_p^{-1}(]-1,0]\times\,]-1,1[^{m-1})$. Wir wählen eine glatte Partition der Eins $(h_j)_{j \in J}$ auf M, die der offenen Überdeckung $(Q_p)_{p \in M}$ untergeordnet ist. Die Menge J_0 aller $j \in J$ mit $\operatorname{supp}(h_j) \cap \operatorname{supp}(\omega) \neq \emptyset$ ist endlich. Da $\omega = \sum_{j \in J_0} h_j \omega$, ist $d\omega = \sum_{j \in J_0} d(h_j \omega)$ und

$$\int_{(M,\sigma)} d\omega = \sum_{j\in J_0} \int_{(M,\sigma)} d(h_j\omega) \quad \text{sowie} \quad \int_{\partial M} \omega = \sum_{j\in J_0} h_j\omega.$$

Es genügt daher, den Satz von Stokes unter der Annahme zu beweisen, dass $\operatorname{supp}(\omega) \subseteq Q_p$ für ein $p \in M$. Wir kürzen $\phi := \phi_p$, $U := U_p$, $V := V_p$ und $Q := Q_p$ ab. Wir schreiben $(\phi^{-1})^*(\omega) = \sum_{j=1}^m f_j\,(-1)^{j-1}\,dx_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_j} \wedge \ldots \wedge dx_m$ mit $f_j \in C^\infty_c(V)$. Dann ist

$$(\phi^{-1})^*(d\omega) = d((\phi^{-1})^*\omega) = \sum_{j=1}^m \frac{\partial f_j}{\partial x_j}\, dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_m.$$

Fall 1. Ist $p \in M \setminus \partial M$, so ist $\operatorname{supp}(f_j) \subseteq \,]-1,1[^m$ für jedes $j \in \{1,\ldots,m\}$. Unter Benutzung des Satzes von Fubini ist also

$$\int_{(M,\sigma)} d\omega = \sum_{j=1}^m \int_V \frac{\partial f_j}{\partial x_j}(x)\, d\lambda_m(x)$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{j=1}^{m} \int_{[-1,1]^m} \frac{\partial f_j}{\partial x_j}(x)\, d\lambda_m(x) \\
&= \sum_{j=1}^{m} \int_{[-1,1]^{m-1}} \underbrace{\int_{-1}^{1} \frac{\partial f_j}{\partial x_j}(y_1, \ldots, y_{j-1}, t, y_j, \ldots, y_{m-1})\, dt}_{=0}\, d\lambda_{m-1}(y) \\
&= 0;
\end{aligned}
$$

das innere Integral ist nach dem Hauptsatz der Integral- und Differentialrechung gleich $f(y_1, \ldots, y_{j-1}, 1, y_j, \ldots, y_{m-1}) - f(y_1, \ldots, y_{j-1}, -1, y_j, \ldots, y_{m-1}) = 0$, wobei beide Summanden wegen $\operatorname{supp}(f) \subseteq]-1, 1[^m$ verschwinden. Da $\operatorname{supp}(\omega) \cap \partial M \subseteq U \cap \partial M = \emptyset$, ist auch $\int_{\partial M} \omega = 0$.

Fall 2. Ist $p \in \partial M$, so ist $\operatorname{supp}(f_j) \subseteq]-1, 0] \times]-1, 1[^{m-1}$ für jedes $j \in \{1, \ldots, m\}$. Dann ist

$$
\int_{(M,\sigma)} d\omega = \sum_{j=1}^{m} \int_V \frac{\partial f_j}{\partial x_j}(x)\, d\lambda_m(x) = \sum_{j=1}^{m} \int_{[-1,0]\times[-1,1]^{m-1}} \frac{\partial f_j}{\partial x_j}(x)\, d\lambda_m(x).
$$

Für $j \in \{2, \ldots, m\}$ ist das Integral in der letzten Summe gleich

$$\int_{[-1,0]\times[-1,1]^{m-2}} \underbrace{\int_{-1}^{1} \frac{\partial f_j}{\partial x_j}(y_1, \ldots, y_{j-1}, t, y_j, \ldots, y_{m-1})\, dt}_{=0}\, d\lambda_{m-1}(y) = 0,$$

mit dem Satz von Fubini und weiterer Argumentation wie oben.
Für $j = 1$ erhalten wir das Integral

$$\begin{aligned}
&\int_{[-1,1]^{m-1}} \underbrace{\int_{-1}^{0} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(t, y)\, dt}_{=f_1(0,y)-f_1(-1,y)=f_1(0,y)} \quad d\lambda_{m-1}(y) \\
&= \int_{[-1,1]^{m-1}} f_1(0, y)\, d\lambda_{m-1}(y) = \int_{]-2,2[^{m-1}} f_1(0, y)\, d\lambda_{m-1}(y) \\
&= \int_{\partial M} \omega, \qquad (1)
\end{aligned}$$

was den Beweis beendet, sobald wir die Gleichheit in (1) begründet haben. Setzen wir $P := U \cap \partial M$, so ist
$\mathrm{supp}(j_{\partial M}\omega) \subseteq \mathrm{supp}(\omega) \cap \partial M \subseteq U \cap \partial M = P$ und folglich

$$\int_{\partial M} (j_{\partial M})^*(\omega) = \int_P j_P^*(\omega)$$

mit der Inklusionsabbildung $j_P \colon P \to M$, nach Bemerkung 26.12 (d). Mit $W := \{y \in \mathbb{R}^{m-1} \colon (0, y) \in V\} =]{-2}, 2[^{m-1}$ betrachten wir die Karte $\phi_{\partial M} \colon P = U \cap \partial M \to W$ von ∂M wie in Bemerkung 31.4. Dies ist eine globale Karte für P. Sei $\pi_k \colon \mathbb{R}^{m-1} \to \mathbb{R}$ die Projektion auf die k-te Komponente für $k \in \{1, \ldots, m-1\}$ und $dy_k := d(\mathrm{pr}_k|_W)$ Man beachte, dass die glatte Abbildung $i = (i_1, \ldots, i_m) \colon W \to V$, $y \mapsto (0, y)$ die Komponenten $i_1 = 0$ und $i_k = \mathrm{pr}_{k-1}|_W$ hat für $k \in \{2, \ldots, m\}$ Da $di_0 = 0$, ist für jedes $j \in \{2, \ldots, m\}$

$$i^*(dx_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_j} \wedge \ldots \wedge dx_m) = di_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{di_j} \wedge \ldots \wedge di_m = 0. \quad (2)$$

Weiter ist

$$i^*(\widehat{dx_1} \wedge dx_2 \wedge \ldots \wedge dx_m) = di_2 \wedge \ldots \wedge di_m = dy_1 \wedge \ldots \wedge dy_{m-1}. \quad (3)$$

Da $j_P \circ \phi_{\partial M}^{-1} = \phi^{-1} \circ i$, ist

$$\begin{aligned}(\phi_{\partial M}^{-1})^*(j_P^*\omega) &= i^*((\phi^{-1})^*\omega)\\ &= \sum_{j=1}^m (-1)^j (f_j\circ i)\, i^*(dx_1\wedge\ldots\wedge\widehat{dx_j}\wedge\ldots\wedge dx_m)\\ &= (f_1\circ i)\, dy_1\wedge\ldots\wedge dy_{m-1}\end{aligned}$$

unter Benutzung von (2) und (3). In Anbetracht von Beispiel 26.14 erhalten wir nun – wie für (1) verlangt –

$$\int_P (j_P)^*(\omega) = \int_W (f_1\circ i)(y)\, d\lambda_{m-1}(y). \quad \square$$

Bemerkung 28.3. Mit geeigneten Definitionen bliebt der Satz von Stokes auch gültig im Falle $m = 1$ (so dass ∂M diskret ist).

(a) Eine Orientierung auf einer 0-dimensionalen Mannigfaltigkeit definieren wir als eine beliebige Funktion $\sigma\colon M\to\{-1,1\}$. Eine 0-Form ω auf M entspricht einer Funktion $f\colon M\to\mathbb{R}$. Hat f kompakten (also endlichen) Träger, so definieren wir

$$\int_{(M,\sigma)} \omega := \sum_{x \in M} \sigma(x) f(x);$$

die Summe ist sinnvoll, da nur endlich viele Summanden von 0 verschieden sind.

(b) Ist M eine 1-dimensionale Mannigfaltigkeit mit Rand und σ eine Orientierung auf M, so induziert σ eine Orientierung $\sigma_{\partial M}$ auf ∂M wie folgt: Ist $p \in \partial M$ und gibt es eine Karte $\phi\colon U_\phi \to V_\phi$ in σ um p mit $V_\phi \subseteq]-\infty, 0]$, so definieren wir $\sigma(p) = 1$ (dann ist $p = 0$ und eine anschauliche Interpretation ist: "p ist ein Endpunkt von M"). Gibt es eine Karte $\phi\colon U_\phi \to V_\phi$ in σ um p mit $V_\phi \subseteq [0, \infty[$, so setzen wir $\sigma(p) = -1$ (dann ist $\phi(p) = 0$ und wir könnten p einen "Anfangspunkt" von M nennen).

(c) Durch Benutzung einer Partition der Eins genügt es auch im Falle $m = 1$, den Satz von Stokes unter der Annahme zu beweisen, dass $\mathrm{supp}(\omega) \subseteq U$ für eine Karte $\phi\colon U \to V$ in σ derart, dass $V =]-2, 2[$ und $\phi(\mathrm{supp}(\phi)) \subseteq]-1, 1[$ oder $V =]-2, 0]$ und $\phi(\mathrm{supp}(\omega)) \subseteq]-1, 0]$ oder $V = [0, 2[$ und $\phi(\mathrm{supp}(\omega)) \subseteq [0, 1[$. Der erste Fall kann wie oben diskutiert werden und liefert Integrale vom Zahlenwert 0 (wobei der Satz von Fubini und die zusätzlichen Integrationsvariablen und Integrale wegfallen); der dritte Fall kann analog zum zwwiten behandelt werden. Im zweiten Fall entspricht $\omega \in \Omega^0(M)$ einer glatten Funktion $f \in C_c^\infty(M)$ und $d\omega$ deren Differential df. Es ist dann

$$(\phi^{-1})^*(df) = d(f \circ \phi^{-1}) = (f \circ \phi^{-1})' \, dx$$

und somit

$$\begin{aligned}
\int_{(M,\sigma)} d\omega &= \int_{(U,\sigma_U)} (d\omega)|_{TU} = \int_{]-2,0]} (f \circ \phi)'(x) \, d\lambda_1(x) \\
&= \int_{-1}^{0} (f \circ \phi^{-1})'(x) \, dx = f(\phi^{-1})(0) - f(\phi^{-1}(-1)) \\
&= f(\phi^{-1}(0)) = f(p) = \sigma_{\partial M}(p) f(p) = \int_{\partial M} \omega
\end{aligned}$$

mit $p := \phi^{-1}(0) \in \partial M$ (an anderen Randpunkten verschwinden f und ω).

(d) Im Spezialfall $M = [a, b]$ mit $a < b$ und der durch $\mathrm{id}_M \in \sigma$

festgelegten Orientierung σ auf M ist $\partial M = \{a, b\}$ und die auf ∂M induzierte Orientierung ist gegeben durch $\sigma_{\partial M}(b) = 1$, $\sigma_{\partial M}(a) = -1$. Wir können eine 0-Form ω auf M mit einer glatten Funktion $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ identifizieren. Dann ist $df = f'\,dx$. Nach dem Satz von Stokes ist

$$\int_{[a,b]} d\omega = \int_{(\partial M, \sigma_{\partial M})} \omega = \sigma(b)f(b) + \sigma(a)f(a) = f(b) - f(a). \quad (4)$$

Die Differentialform $d\omega$ im linken Integral kann nach dem Vorigen $f'\,dx$ geschrieben werden, so dass (4) die Gestalt

$$\int_{[a,b]} f'\,dx = f(b) - f(a)$$

annimmt, analog zum Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung.

§29 Affine Zusammenhänge

In diesem Kapitel und den zwei folgenden stellen wir für die Allgemeinbildung weitere Begriffe noch kurz vor. Stets sei M eine glatte Mannigfaltigkeit. Wir beginnen mit den Begriffen eines affinen Zusammenhangs, kovarianten Ableitungen und Paralleltransport.

Definition 29.1

Ein **affiner Zusammenhang** auf einer glatten Mannigfaltigkeit M ist eine reell bilineare Abbildung

$$\nabla\colon \mathcal{V}(M)\times\mathcal{V}(M)\to\mathcal{V}(M),\ (X,Y)\mapsto\nabla_X(Y)$$

derart, dass

(i) $\nabla_{fX}(Y)=f\nabla_X(Y)$ und

(ii) $\nabla_X(fY)=(X.f)Y+f\nabla_X(Y)$ für alle $X,Y\in\mathcal{V}(M)$ und $f\in C^\infty(M)$.

29.2. Gegeben $X,Y\in\mathcal{V}(M)$ und $p\in M$ sieht man wie in Aufgabe P25, dass $(\nabla_X Y)(p)$ unverändert bleibt, wenn wir X außerhalb einer p-Umgebung abändern; entsprechend für Y.

29.3. Ist $U \subseteq M$ eine offene Teilmenge, so kann man für $X, Y \in \mathcal{V}(U)$ und $p \in U$ Vektorfelder $\tilde{X}, \tilde{Y} \in \mathcal{V}(M)$ wählen, die auf einer offenen p-Umgebung $W \subseteq U$ mit X bzw. Y übereinstimmen. Nach dem Vorigen ist

$$\nabla^U_X(Y)(p) := (\nabla_{\tilde{X}}\tilde{Y})(p)$$

wohldefiniert. Dann ist $\nabla^U_X(Y)|_W := (\nabla_{\tilde{X}}\tilde{Y})|_W$, also $\nabla^U_X Y$ glatt.

Man rechnet leicht nach:

Lemma 29.4

∇^U ist ein affiner Zusammenhang auf U. Für alle $X, Y \in \mathcal{V}(M)$ ist $(\nabla_X Y)|_U = \nabla^U_{X|_U}(Y|_U)$.

29.5. Sei nun $\phi\colon U \to V \subseteq \mathbb{R}^m$ eine Karte für M und

$$\partial_j := \left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)_\phi \quad \text{für } j \in \{1, \ldots, m\}.$$

Für alle $i, j \in \{1, \ldots, m\}$ ist dann

$$\nabla^U_{\partial_i}(\partial_j) = \sum_{k=1}^{m} \Gamma^k_{ij}\,\partial_k$$

mit eindeutigen glatten Funktionen $\Gamma^1_{ij}, \ldots, \Gamma^m_{ij} \colon U \to \mathbb{R}$, den sogenannten **Christoffel-Symbolen** zu ∇ in der Karte ϕ.

Lemma 29.6

Für $X, Y \in \mathcal{V}(U)$ schreiben wir $X = \sum_{i=1}^m a_i\partial_i$ und $Y = \sum_{j=1}^m b_j\partial_j$ mit eindeutigen $a_i, b_j \in C^\infty(U)$. Dann ist

$$\nabla^U_X Y = \sum_{k=1}^{m} \left(\sum_{i,j=1}^{m} a_i b_j \Gamma^k_{ij} + X.b_k \right) \partial_k .$$

Beweis. Es ist

$$\nabla^U_X Y = \sum_{i,j=1}^{m} a_i \overbrace{\nabla^U_{\partial_i}(b_j\partial_j)}^{=(\partial_i b_j)\partial_j + b_j \nabla^U_{\partial_i}\partial_j}$$

mit $\sum_{i=1}^m a_i\partial_i b_j = X.b_j$. $\square$

Für $Y \in \mathcal{V}(M)$ und $p \in M$ hängt also $(\nabla_X Y)(p)$ nur von $X(p)$ ab. Für $v \in T_pM$ kann man folglich ein $X \in \mathcal{V}(M)$ mit $X(p) = v$ wählen und definieren:

$$\nabla_v Y := (\nabla_X Y)(p). \tag{1}$$

Definition 29.7

Ist $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $\gamma\colon I \to M$ eine glatte Kurve, so nennen wir eine glatte Kurve $\eta\colon I \to TM$ ein **Vektorfeld längs γ**, wenn

$$\eta(t) \in T_{\gamma(t)}M \text{ für alle } t \in I.$$

Es ist also (id_I, η) eine glatte Kurve im Pullbackbündel $\gamma^*(TM) \subseteq I \times TM$.

Beispielsweise ist $\dot\gamma$ ein Vektorfeld längs γ.

Satz 29.8

Zu einem Zusammenhang ∇ auf M gibt es genau eine Abbildung, die für jede glatte Kurve $\gamma\colon I \to M$ jedem Vektorfeld $\eta\colon I \to TM$ längs γ ein Vektorfeld $D_\nabla \eta$ längs γ zuordnet, mit folgenden Eigenschaften:

(a) $D_\nabla(r\eta + s\zeta) = rD_\nabla\eta + sD_\nabla\zeta$ für alle $r, s \in \mathbb{R}$ und Vektorfelder η, ζ längs γ;

(b) $D_\nabla(\alpha\eta) = \alpha'\eta + \alpha D_\nabla\eta$ für jedes Vektorfeld η längs γ und jede glatte Funktion $\alpha\colon I \to \mathbb{R}$;

(c) Für jedes $Y \in \mathcal{V}(M)$ ist $(D_\nabla(Y \circ \gamma))(t) = \nabla_{\dot\gamma(t)}Y$ für alle $t \in I$.

Man nennt $D_\nabla\eta$ die **kovariante Ableitung** von η bezüglich ∇.

Beweis (Skizze). Ähnlich wie oben sieht man, dass eine kovariante Ableitung D_∇ auf M für jede Karte $\phi\colon U \to V \subseteq \mathbb{R}^m$ von M eine kovariante Ableitung D_{∇^U} auf U induziert. Ist $\gamma\colon I \to U$ eine glatte Kurve und $\eta\colon I \to TU$ ein Vektorfeld längs γ, so ist

$$d\phi \circ \eta = (b_1, \ldots, b_m)$$

mit glatten Funktionen $b_1, \ldots, b_m\colon I \to \mathbb{R}$. Dann ist

$$\eta = \sum_{j=1}^{m} b_j(\partial_j \circ \gamma)$$

und folglich nach (a), (b) und (c)

$$(D_{\nabla^U}\eta)(t) = \sum_{j=1}^{m} \Big(b_j'(t)(\partial_j \circ \gamma)(t) + b_j(t)\nabla^U_{\dot\gamma(t)}\partial_j \Big) \qquad (2)$$

für jedes $t \in I$ eindeutig festgelegt. Definieren wir $D_{\nabla^U}\eta$ durch die vorige Gleichung, so erhält man eine kovariante Ableitung D_{∇^U} auf U (wie leicht nachzurechnen ist). Ist auch auf W eine Karte definiert, so induzieren D_{∇^U} und D_{∇^W} auf $U \cap W$ wegen der Eindeutigkeit die gleiche kovariante Ableitung. Für $\eta\colon I \to TM$ kann man $D_\nabla \eta$ somit auf wohldefinierte Weise stückweise definieren (mit Teilwegen, die jeweils im Definitionsbereich einer Karte liegen) und erhält eine kovariante Ableitung auf M. $\square$

Bemerkung 29.9. Es ist nützlich, (2) noch expliziter zu machen. Hierzu schreiben wir

$$d\phi \circ \dot\gamma = (a_1, \ldots, a_m)$$

mit glatten Funktionen $a_1, \ldots, a_m\colon I \to \mathbb{R}$. Dann ist

$$\dot\gamma(t) = \sum_{i=1}^{m} a_i(t)\partial_i(\gamma(t)) = \left(\sum_{i=1}^{m} a_i(t)\partial_i\right)(\gamma(t)), \text{ also mit (1)}$$

$\nabla^U_{\dot\gamma(t)}\partial_j = \sum_{i=1}^m a_i(t)(\nabla^U_{\partial_i}\partial_j)(\gamma(t)) = \sum_{i,k=1}^m a_i(t)\Gamma^k_{ij}(\gamma(t))\partial_k(\gamma(t))$.
Gleichung (2) können wir somit umschreiben als

$$(D_{\nabla^U}\eta)(t) = \sum_{k=1}^m \left(b_k'(t) + \sum_{i,j=1}^m \Gamma^k_{ij}(\gamma(t))a_i(t)b_j(t) \right) \partial_k(\gamma(t)). \quad (3)$$

Definition 29.10

Sei ∇ ein affiner Zusammenhang auf M. Ein Vektorfeld $\eta\colon I \to TM$ längs einer glatten Kurve $\gamma\colon I \to M$ wird bzgl. ∇ **parallel** genannt, wenn $D_\nabla \eta = 0$.

Satz 29.11

Sei ∇ ein affiner Zusammenhang auf M. Für jede glatte Kurve $\gamma\colon I \to M$, jedes $t_0 \in I$ und $v \in T_{\gamma(t_0)}M$ gibt es genau ein paralleles Vektorfeld η längs γ mit $\eta(t_0) = v$.

Man nennt η den **Paralleltransport** von v längs γ.

Beweis. Sei zunächst $\gamma(I) \subseteq U$ angenommen für eine Karte $\phi\colon U \to V \subseteq \mathbb{R}^m$ von M. Es ist $v = \sum_{k=1}^m v_k \partial_k(\gamma(t_0))$ für eindeutige $v_1, \ldots, v_m \in \mathbb{R}$. Mit Notationen wie in Bemerkung 29.9 ist η nach (3) genau dann parallel, wenn für alle $t \in I$

$$0 = \sum_{k=1}^{m} \left(b_k'(t) + \sum_{i,j=1}^{m} \Gamma_{ij}^{k}(\gamma(t)) a_i(t) b_j(t) \right) \partial_k(\gamma(t)),$$

also für alle $k \in \{1, \ldots, m\}$

$$b_k'(t) = -\sum_{i,j=1}^{m} \Gamma_{ij}^{k}(\gamma(t)) a_i(t) b_j(t)$$

gilt. Dies ist ein lineares Differentialgleichungssystem erster Ordnung für $(b_1, \ldots, b_m)\colon I \to \mathbb{R}^m$, welches lokale Existenz und Eindeutigkeit erfüllt und hat zu den Anfangsbedingungen $b_k(t_0) = v_k$ für $k \in \{1, \ldots, m\}$ eine eindeutige auf ganz I definierte Lösung $(b_1, \ldots, b_m)$, aufgrund der Linearität (siehe Reelle Analysis).

Im allgemeinen Fall folgt aus der lokalen Eindeutigkeit, dass es ein größtes offenes Teilintervall $J \subseteq I$ mit $t_0 \in J$ gibt mit der Eigenschaft, dass v längs $\gamma|_J$ einen Paralleltransport besitzt. Wir zeigen, dass $\tau \in J$ für alle $\tau \in I$ mit $\tau > t_0$; den Fall $\tau < t_0$ behandelt man analog, so dass also $J = I$. Es gibt $t_0 < t_1 < \cdots < t_n = \tau$ derart, dass $\gamma([t_\nu, t_{\nu+1}])$ im Definitionsbereich U_ν einer Karte enthalten ist für alle $\nu \in \{0, \ldots, n-1\}$. Es sei $I_\nu \subseteq \gamma^{-1}(U_\nu)$ ein offenes Intervall mit $[t_\nu, t_{\nu+1}] \subseteq I_\nu$. Nach dem Spezialfall gibt es einen eindeutigen Paralleltransport η_0 von $v_0 := v$ längs $\gamma|_{I_0}$. Wir setzen $v_1 := \eta_0(t_1)$ und haben nach dem Spezialfall einen eindeutigen Paralleltransport η_1 von v_1 längs $\gamma|_{I_1}$. Rekursiv finden wir einen Paralleltransport η_ν von v_ν längs $\gamma|_{I_\nu}$ und setzen $v_{\nu+1} := \eta_\nu(t_{\nu+1})$. Wir können dann η stückweise auf $I_1 \cup \cdots \cup I_n$ definieren durch Zusammensetzen von $\eta_1, \ldots, \eta_n$ und schließen, dass $\tau \in I_1 \cup \cdots \cup I_n \subseteq J$. $\square$

Definition 29.12

Ein affiner Zusammenhang ∇ auf M wird **symmetrisch** genannt, wenn $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$ für alle $X, Y \in \mathcal{V}(M)$.

Bemerkung 29.13. Man kann zeigen, dass jeder symmetrische affine Zusammenhang ∇ auf M ein Spray X auf M festlegt und umgekehrt, vgl. Lang; für jede Karte $\phi\colon U_\phi \to V_\phi$ und alle

$x = (x_1, \ldots, x_m) \in V_\phi$, $v = (v_1, \ldots, v_m) \in \mathbb{R}^m$ ist
$(T^2\phi \circ X \circ T\phi^{-1})(x, v) = \big(x, v, v, -\sum_{i,j,k=1}^m \Gamma_{ij}^k(\phi^{-1}(x))x_i v_j e_k\big)$.

Wir schließen mit einem Beispiel.

Beispiel 29.14. Ist M eine m-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$ und identifizieren wir T_pM mit $\{p\}\times\mathbb{R}^m \subseteq \{p\}\times\mathbb{R}^n = T_p(\mathbb{R}^n)$, so ist nach Lemma 20.6 TM eine Untermannigfaltigkeit von $T(\mathbb{R}^n)$. Ein glattes Vektorfeld auf M ist somit von der Form $X = (\mathrm{id}_M, a)$ mit einer glatten Funktion $a\colon M \to \mathbb{R}^n$ derart, dass $(p, a(p)) \in T_pM$ für alle $p \in M$. Für X wie zuvor und $Y = (\mathrm{id}_M, b)$ definieren wir

$$(\nabla_X Y)(p) := O_p(p, (a.b)(p)) = O_p(p, db(p, a(p))),$$

wobei $O_p\colon \{p\} \times \mathbb{R}^n \to T_pM$ die Orthogonalprojektion ist bezüglich des üblichen Skalarprodukts, wenn wir $\{p\} \times \mathbb{R}^n$ mit $\mathbb{R}^n$ identifizieren durch Weglassen der ersten Komponente. Dann ist ∇ ein affiner Zusammenhang auf M.

[Um eine Stelle p können wir einen lokalen Rahmen für TM lokal zu einem Rahmen $X_1, \ldots, X_n\colon U \to T(\mathbb{R}^n)$ für $T(\mathbb{R}^n)|_M$ ergänzen und dann das Gram-Schmidtsche Orthonormalisierungsverfahren anwenden (siehe Lemma 21.43); der Rahmen $X_1, \ldots X_n$ darf also als orthonormal angenommen werden. Nach Lemma 21.48 ist dann

$$(p, db(p, a(p))) = \sum_{j=1}^{n} c_j(p)\, X_j(p)$$

mit $c_1, \ldots, c_n \in C^\infty(U)$ und es ist

$$(\nabla_X Y)(p) = \sum_{j=1}^{m} c_j(p) X_j(p)$$

eine glatte Funktion von $p \in U$. Die reelle Bilinearität und (i) in Definition 29.1 sind klar; (ii) folgt aus der Produktregel, $d(fb) \circ (\mathrm{id}_M, a) = ((df) \circ (\mathrm{id}_M, a))b + f(db \circ (\mathrm{id}_M, a))$.]

Allgemeiner gibt es auf jeder Riemannschen Mannigfaltigkeit den Levi-Civita-Zusammenhang (siehe 31.4).

Hauptfaserbündel sind eine weitere wichtige Struktur. Jedem Vektorbündel lässt sich ein Hauptfaserbündel zuordnen und umgekehrt lassen sich einem Hauptfaserbündel Vektorbündel assoziieren.

Definition 30.1

Eine **Rechtswirkung** einer Gruppe G auf einer Menge X ist eine Abbildung $X \times G \to X$, $(x, g) \mapsto x.g$ derart, dass $x.e = x$ und $(x.g_1).g_2 = x.(g_1 g_2)$ für alle $x \in X$ und $g_1, g_2 \in G$.

Eine äquivalente Bedingung ist, dass die Abbildung $G \times X \to X$, $(g, x) \mapsto x.(g^{-1})$ eine (Links-)Wirkung ist, wie bisher behandelt.

Beispiel 30.2. Für jede Gruppe G ist die Gruppenmultiplikation $\mu\colon G \times G \to G$ eine Rechtswirkung von G auf G und ist G eine Liegruppe, so ist μ glatt. Wir können dann allgemeiner eine glatte Mannigfaltigkeit M wählen und erhalten eine glatte Rechtswirkung $\sigma\colon P \times G \to P$ auf $P := M \times G$ via

$$\sigma\colon P \times G \to P, \quad ((p, h), g) \mapsto (p, hg).$$

Hauptfaserbündel verallgemeinern dieses Beispiel und sind lokal von dieser Gestalt.

Definition 30.2

Es sei G eine Liegruppe. Ein **Hauptfaserbündel** mit Strukturgruppe G über einer glatten Mannigfaltigkeit M ist eine glatte Mannigfaltigkeit P, zusammen mit einer glatten Rechtswirkung $P \times G \to P$, $(y, g) \mapsto y.g$ und einer glatten Abbildung $\pi\colon P \to M$ derart, dass

$$\pi(y.g) = \pi(y) \text{ für alle } (y, g) \in P \times G$$

und für jedes $p \in M$ ein offene p-Umgebung $U \subseteq M$ und ein C^∞-Diffeomorphismus

$$\theta\colon \pi^{-1}(U) \to U \times G$$

existiert derart, dass $\mathrm{pr}_1 \circ \theta = \pi|_{\pi^{-1}(U)}$ mit $\mathrm{pr}_1\colon U \times G \to U$, $(q, g) \mapsto q$ und $\theta\colon \pi^{-1}(U) \to U \times G$ äquivariant ist, also

$$\theta(y.g) = \theta(y).g \text{ für alle } (y, g) \in \pi^{-1}(U) \times G.$$

Man nennt θ eine **lokale Trivialisierung** für P.

Mit der zweiten Komponente $\theta_2\colon \pi^{-1}(U) \to G$ von θ ist also

$$\theta(y) = (\pi(y), \theta_2(y))$$

für alle $y \in \pi^{-1}(U)$ und die Äquivarianz verlangt, dass

$$\theta(y.g) = \theta(y).g = (\pi(y), \theta_2(y)g) \text{ für alle } (y, g) \in \pi^{-1}(U) \times G.$$

Beispiel 30.3

Für jede Liegruppe G und abgeschlossene Untergruppe H von G ist G ein Hauptfaserbündel mit Strukturgruppe H über G/H, zusammen mit der kanonischen Abbildung $\pi\colon G \to G/H$, $g \mapsto gH$ und der glatten Rechtswirkung $\tau\colon G \times H \to G$, $(g, h) \mapsto gh$.

Hierbei trägt G/H die eindeutige glatte Mannigfaltigkeitsstruktur, die π zu einer Submersion macht (s. Satz 18.1 und Folgerung 7.2). Für jedes $p \in G/H$ gibt es nach Satz 5.1 eine offene p-Umgebung $U \subseteq G/H$ und eine glatte Abbildung $\sigma\colon U \to G$ mit $\pi \circ \sigma = \mathrm{id}_U$, also einen glatten lokalen Schnitt für π. Dann ist

$$\psi\colon U \times H \to \pi^{-1}(U), \quad (q, h) \mapsto \sigma(q)h$$

eine glatte Bijektion mit glatter Umkehrabbildung

$$\theta\colon \pi^{-1}(U) \to U \times H, \quad g \mapsto (\pi(g), \sigma(\pi(g))^{-1}g).$$

Offenbar ist ψ äquivariant und somit auch $\theta = \psi^{-1}$.

Definition 30.4

Sei wie zuvor P ein Hauptfaserbündel über M mit Strukturgruppe G und Bündelprojektion $\pi\colon P \to M$. Eine Familie $(\theta_j)_{j \in J}$ von lokalen Trivialisierungen $\theta_j\colon \pi^{-1}(U_j) \to U_j \times G$ heißt **Atlas von lokalen Trivialisierungen**, wenn $M = \bigcup_{j \in J} U_j$.

Ist $(\theta_j)_{j \in J}$ ein Atlas von lokalen Trivialisierungen $\theta_i\colon \pi^{-1}(U_j) \to U_j \times G$ von P, so ist $U_{ij} := U_i \cap U_j$ offen in M für alle $i, j \in J$ und es ist für alle $x \in U_{ij}$

$$(\theta_i \circ \theta_j^{-1})(x, e) = (x, g_{ij}(x))$$

mit einer C^∞-Funktion $g_{ij}\colon U_{ij} \to G$. Wegen der Äquivarianz folgt

$$\begin{aligned}(\theta_i \circ \theta_j^{-1})(x, g) &= (\theta_i \circ \theta_j^{-1})((x, e)g) = ((\theta_i \circ \theta_j^{-1})(x, e))g \\ &= (x, g_{ij}(x))g \qquad (1)\end{aligned}$$

für alle $x \in U_{ij}$ und $g \in G$.

Lemma 30.5

$(g_{ij})_{i,j\in J}$ ist ein G-wertiger C^∞-Kozyklus auf M.

Beweis. Gegeben $i, j, k \in J$ haben wir für alle $x \in U_i \cap U_j \cap U_k$

$$\begin{aligned}(x, g_{ik}(x)) &= (\theta_i \circ \theta_k^{-1})(x, e) = (\theta_i \circ \theta_j^{-1})((\theta_j \circ \theta_k^{-1})(x, e)) \\ &= (\theta_i \circ \theta_j^{-1})(x, g_{jk}(x)) = (x, g_{ij}(x))g_{jk}(x) = (x, g_{ij}(x)g_{jk}(x)),\end{aligned}$$

wobei die vorletzte Gleichheit (1) benutzt. Also ist
$g_{ik}(x) = g_{ij}(x)g_{jk}(x)$. $\square$

Satz 30.6

Es sei G eine Liegruppe, M eine glatte Mannigfaltigkeit, $(U_j)_{j\in J}$ eine offene Überdeckung für M und $(g_{ij})_{i,j\in J}$ mit $g_{ij}\colon U_i \cap U_j \to G$ ein G-wertiger glatter Kozyklus. Dann existiert ein Hauptfaserbündel P über M mit Strukturgruppe G und Bündelprojektion $\pi\colon P \to M$ derart, dass ein Atlas $(\theta_j)_{j\in J}$ von lokalen Trivialisierungen $\theta_j\colon \pi^{-1}(U_j) \to U_j \times G$ für P den gegebenen Kozyklus $(g_{ij})_{i,j\in J}$ induziert.

Beweis. Es sei Y die Menge aller Tripel (i, x, g) mit $i \in J$, $x \in U_i$ und $g \in G$. Für (i, x, g), (j, y, h) in Y schreiben wir $(i, x, g) \sim (j, y, h)$, wenn $x = y$ und $g = g_{ij}(x)h$. Unter Benutzung der Kozyklusbedingung sieht man, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf Y ist. Wir definieren $P := Y/\sim$ und schreiben $[i, x, g]$ für die Äquivalenzklasse von (i, x, g). Für jedes $i \in J$ ist die Abbildung

$$\psi_i \colon U_i \times G \to P, \quad (x, g) \mapsto [i, x, g]$$

injektiv. Für alle $i, j \in J$ ist

$$\psi_i^{-1}(\psi_j(U_j \times G) = (U_i \cap U_j) \times G$$

offen in $U_i \times G$ und die Abbildung $\psi_i^{-1} \circ \psi_j \colon (U_i \cap U_j) \times G \to (U_i \cap U_j) \times G$ ist gegeben durch $(x, g) \mapsto (x, g_{ij}(x)g)$, also glatt und somit ein C^∞-Diffeomorphismus (denn die Umkehrabbildung ist analog). Die Abbildung $\pi \colon P \to M$, $[i, x, g] \mapsto x$ ist wohldefiniert und stetig bezüglich der finalen Topologie $\mathcal{O}$ auf P bezüglich den Abbildungen ψ_i, denn es ist $\pi \circ \psi_i \colon U_i \times G \to U_i$ die Projektion auf die erste Komponente. Nach Lemma 1.26 und Bemerkung 1.27 ist $\mathcal{O}$

Hausdorffsch, macht $\psi_i(U_i \times G) = \pi^{-1}(U_i)$ offen in P für jedes $i \in J$ und $\psi_i \colon U_i \times G \to \pi^{-1}(U_i)$ zu einem Homöomorphismus. Geben wir $\pi^{-1}(U_i)$ die glatte Mannigfaltigkeitsstruktur, die $\psi_i \colon U_i \times G \to \pi^{-1}(U_i)$ zu einem C^∞-Diffeomorphismus macht, so folgt mit der Glattheit der $\psi_i \circ \psi_j^{-1}$ aus Aufgabe P14 (a), dass es eine eindeutige glatte Mannigfaltigkeitsstruktur auf P gibt, die jedes $\pi^{-1}(U_i)$ zu einer offenen Untermannigfaltigkeit und somit jedes ψ_i zu einem C^∞-Diffeomorphimus auf eine offene Teilmenge von P macht. Die Abbildung

$$\tau \colon P \times G \to P, \quad ([i,x,g],h) \mapsto [i,x,gh]$$

ist wohldefiniert, eine Rechtswirkung von G auf P, und sie ist glatt, da $(\tau \circ (\psi_i \circ \mathrm{id}_G))(x,g,h) = \psi_i(x,gh)$ glatt in (x,g,h) ist für alle $i \in J$. Man rechnet direkt nach, dass die Diffeomorphismen $\theta_j := \psi_j^{-1} \colon \pi^{-1}(U_j) \to U_j \times G$ lokale Trivialisierungen für P sind und somit P ein Hauptfaserbündel über M mit Strukturgruppe G. Ebenso rechnet man direkt nach, dass $(g_{ij})_{i,j\in J}$ wie vorgegeben der vom Atlas $(\theta_j)_{j\in J}$ induzierte Kozyklus ist. $\square$

Sei P ein Hauptfaserbündel über M mit Strukturgruppe G und Bündelprojektion $\pi\colon P \to M$. Ist F ein endlich-dimensionaler reeller Vektorraum und $\rho\colon G \to \mathrm{GL}(F)$ ein glatter Gruppenhomomorphismus, so ist

$$G \times F \to F, \quad (g, v) \mapsto g.v := \rho(g)(v)$$

eine (Links-) Wirkung von G auf F und glatt (vgl. Aufgabe P35). Für $(y_1, v_1), (y_2, v_2) \in P \times F$ schreiben wir $(y_1, v_1) \sim (y_2, v_2)$, wenn ein $g \in G$ existiert mit

$$y_2 = y_1.g \quad \text{und} \quad v_2 = g^{-1}.v_1.$$

Man rechnet direkt nach, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf $P \times F$ ist. Wir schreiben $[y, v]$ für die Äquivalenzklasse von $(y, v) \in P \times F$. Per Definition der Äquivalenzrelation ist dann

$$[yg, v] = [y, gv] \text{ für alle } (y, v) \in P \times F \text{ und } g \in G.$$

Wir schreiben

$$P \times_\rho F := (P \times F)/\sim$$

für die Menge der Äquivalenzklassen, oder kurz E. Die Abbildung

$$\pi_E\colon E \to M, \quad [y,v] \mapsto \pi(y)$$

ist wohldefiniert. Für jede lokale Trivialisierung $\theta\colon \pi^{-1}(U) \to U \times G$ von P mit 2. Komponente $\theta_2\colon U \to G$ ist

$$\tilde{\theta}\colon (\pi_E)^{-1}(U) \to U \times F, \quad [y,v] \mapsto (\pi(y), \theta_2(y).v)$$

eine wohldefinierte Abbildung und man rechnet direkt nach, dass diese bijektiv ist, mit Umkehrabbildung

$$(x,v) \mapsto [\theta^{-1}(x,e), v].$$

Sei $(\theta_j)_{j\in J}$ ein Familie von lokalen Trivialisierungen $\theta_j\colon \pi^{-1}(U_j) \to U_j \times G$, die sämtliche lokalen Trivialisierungen von P umfasst. Nach dem Vorigen ist

$$\begin{aligned}\widetilde{\theta_i} \circ (\widetilde{\theta_j})^{-1}(x,v) &= (x, \theta_{i,2}(\theta_j^{-1}(x,e)).v) = (x, g_{ij}(x).v) \\ &= (x, \rho(g_{ij}(x))(v)). \qquad (2)\end{aligned}$$

Satz 30.7

$P \times_\rho F$ kann in eindeutiger Weise derart zu einem glattem Vektorbündel über M mit typischer Faser F gemacht werden, dass $\tilde{\theta}$ eine lokale Trivialisierung von $P \times_\rho F$ ist für jede lokale Trivialisierung θ von P. Ist $(\theta_j)_{j\in J}$ ein Atlas von lokalen Trivialisierungen für P und $(g_{ij})_{i,j\in J}$ der zugehörige G-wertige glatte Kozyklus, so ist $(\rho \circ g_{ij})_{i,j\in J}$ der vom Vektorbündelatlas $(\widetilde{\theta_j})_{j\in J}$ induzierte $\mathrm{GL}(F)$-wertige glatte Kozyklus.

Beweis. Gegeben $p \in M$ wählen wir eine Trivialisierung $\theta\colon \pi^{-1}(U) \to U \times G$ von P mit $p \in U$ und geben $E_p := \pi_E^{-1}(\{p\})$ die Vektorraumstruktur, welche die Bijektion $\mathrm{pr}_2 \circ \tilde{\theta}|_{E_p}\colon E_p \to F$ zu einem Isomorphismus von Vektorräumen macht. Wegen (2) gilt dies dann für jede solche Trivialisierung. Mit den Bijektionen $(\widetilde{\theta_j})_{j\in J}$ an Stelle von $(\theta_j)_{j\in J}$ können wir nun Lemma 21.17 anwenden und erhalten eine eindeutige glatte Vektorbündelstruktur auf E mit typischer Faser F, die jedes $\widetilde{\theta_j}$ zu einer lokalen Trivialisierung macht und $(\rho \circ g_{ij})_{i,j\in J}$ zum zugehörigen

$\mathrm{GL}(F)$-wertigen Kozyklus. Für die Vektorbündel-Trivialisierungen zu anderen Atlanten für P gilt dies dann auch. $\square$

Beispiel 30.8. Es sei F ein endlich-dimensionaler Vektorraum und E ein glattes Vektorbündel über der glatten Mannigfaltigkeit M, mit typischer Faser F und der Bündelprojektion $\pi_E\colon E \to M$. Wählen wir einen Atlas $(\theta_j)_{j\in J}$ von lokalen Trivialisierungen $\theta_j\colon E|_{U_j} \to U_j \times F$, so induziert dieser einen $\mathrm{GL}(F)$-wertigen glatten Kozyklus $(g_{ij})_{i,j\in J}$ mit $g_{ij}\colon U_i \cap U_j \to \mathrm{GL}(F)$. Diesem können wir mit Satz 30.6 ein Hauptfaserbündel P über M mit Strukturgruppe $G := \mathrm{GL}(F)$ zuordnen. Das zu P assoziierte Vektorbündel zu $\rho := \mathrm{id}_G$ lässt sich durch den Kozyklus $(\rho \circ g_{ij})_{i,j\in J} = (g_{ij})_{i,j\in J}$ beschreiben, ist nach Satz 21.15 also zum gegebenen Vektorbündel E äquivalent.

Beispiel 30.9. Ist M eine m-dimensionale glatte Mannigfaltigkeit und $\mathcal{A}$ der maximale glatte Atlas auf M mit den Karten $\phi\colon U_\phi \to V_\phi \subseteq \mathbb{R}^m$, so schreiben wir kürzer $J := \mathcal{A}$ und $\phi_j := j$ für $j \in \mathcal{A}$. Für $j \in J$ bilden die Diffeomorphismen

$$\theta_j := TU_j \to U_j \times \mathbb{R}^m, \quad v \mapsto (\pi_{TM}(v), d\phi_j(v))$$

dann einen Vektorbündelatlas für das Tangentialbündel TM. Der zugehörige $\mathrm{GL}(\mathbb{R}^m)$-wertige glatte Kozyklus $(g_{ij})_{i,j\in J}$ mit $g_{ij}\colon U_i \cap U_j \to \mathrm{GL}(\mathbb{R}^m)$ ist gegeben durch

$$g_{ij}(x) = (\phi_i \circ \phi_j^{-1})'(\phi(x)) \text{ für } x \in U_i \cap U_j.$$

(a) Wir können nun wie in Satz 21.16 das Vektorbündel E zum Kozyklus $(\det \circ g_{ij})_{i,j\in J}$ bilden (oder zuerst das zu $(g_{ij})_{i,j\in J}$ gehörige Hauptfaserbündel P und dann das zu det assoziierte Vektorbündel nehmen). Dann ist E zu $\mathrm{Alt}^m(TM) = \bigwedge^m(T^*M)$ äquivalent.

(b) Zu einer reellen Zahl $\alpha > 0$ ist auch $\rho\colon\ \mathrm{GL}(\mathbb{R}^m) \to (]0,\infty[,\cdot)$, $A \mapsto |\det(A)|^\alpha$ ein glatter Gruppen-Homomorphismus. Wir können also das zum Kozyklus $(\rho \circ g_{ij})_{i,j\in J}$ gehörige Vektorbündel E bilden (ohne oder mit Umweg über P). Glatte Schnitte in E nennt man **α-Dichten** auf M. Besonders wichtig sind 1-Dichten auf M. Analog zur Integration von m-Formen auf orientierbaren m-dimensionalen Mannigfaltigkeiten lässt sich eine Integrationstheorie für 1-Dichten auf nicht notwendig orientierbaren glatten Mannigfaltigkeiten formulieren.

In der Differentialgeometrie betrachtet man meist Mannigfaltigkeiten mit zusätzliche Strukturen, etwa Mannigfaltigkeiten mit einer riemannschen (oder pseudo-riemannschen) Metrik, einer symplektischen Struktur oder einer Poisson-Klammer. Für die Allgemeinbildung gehen wir auf diese Begriffe kurz ein, die auch in der mathematischen Physik eine wichtige Rolle spielen.

Riemannsche Mannigfaltigkeiten

Definition 31.1

Eine **Riemannsche Mannigfaltigkeit** ist eine glatte Mannigfaltigkeit M, zusammen mit einer glatten Riemannschen Metrik g auf M (wie in Definition 21.21).

31.2. Ist (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit, so ist für jedes $p \in M$ die Abbildung

$$\|\cdot\|_p\colon\ T_pM \to [0,\infty[,\quad v \mapsto \sqrt{g(v,v)}$$

eine Norm auf T_pM. Dies ermöglicht uns (analog zur Analysis 2) die Definition der **Weglänge** eines C^1-Wegs $\gamma\colon [a,b] \to M$ via

$$L(\gamma) := \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\|_{\gamma(t)}\, dt.$$

Für eine Karte $\phi\colon U_\phi \to V_\phi \subseteq \mathbb{R}^m$ von M definieren wir für $i, j \in \{1, \ldots, m\}$ eine glatte Funktion $g_{ij}^\phi\colon U_\phi \to \mathbb{R}$ via

$$g_{ij}^\phi := g \circ \Big(\big(\partial/\partial x_i\big)_\phi, \big(\partial/\partial x_j\big)_\phi \Big).$$

Satz 31.3

Ist (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit der Dimension $m \geq 1$ und σ eine Orientierung auf M, so ist

$$\omega_p := \sqrt{\det\left((g_{ij}^\phi(p))_{i,j=1}^m \right)}\, (d\phi_1 \wedge \ldots \wedge d\phi_m)_p \tag{1}$$

für $p \in M$ und $(\phi\colon U_\phi \to V_\phi) \in \sigma$ mit $p \in U_\phi$ wohldefiniert und liefert eine Volumenform ω auf M.

Man nennt ω das **Riemannsche Volumen** auf M.

Beweis. Gegeben $p \in M$ seien $\phi\colon U_\phi \to V_\phi$ und $\psi\colon U_\psi \to V_\psi$ Karten in σ um p. Nach Ersetzen von U_ϕ und U_ψ durch ihre Schnittmenge sei o.B.d.A. $U_\phi = U_\psi =: U$. Wir betrachten die glatte Funktion $\tau := \psi \circ \phi^{-1}\colon V_\phi \to V_\psi$ und kürzen ab

$$a_{ij} := \frac{\partial \tau_i}{\partial x_j}(\phi(p)) \text{ für } i, j \in \{1, \ldots, m\}$$

und $A := (a_{ij})_{i,j=1}^m$. Da $\phi^{-1} = \psi^{-1} \circ \tau$, ist für alle $i \in \{1, \ldots, m\}$

$$\begin{aligned}
(\partial/\partial x_i)_\phi(p) &= d\phi^{-1}(\phi(p), e_i) = d\psi^{-1} T\tau(\phi(p), e_i) \\
&= d\psi^{-1}(\psi(p), d\tau(\phi(p), e_i)) \\
&= \sum_{k=1}^m a_{ki} d\psi^{-1}(\psi(p), e_k) = \sum_{k=1}^m a_{ki} (\partial/\partial x_k)_\psi(p)
\end{aligned}$$

wobei $d\tau(\phi(p), e_i) = \sum_{k=1}^m (\partial \tau_k/\partial x_i)(\phi(p)) e_k = \sum_{k=1}^m a_{ki} e_k$ benutzt wurde. Also ist

$$g_{ij}^\phi(p) = g((\partial/\partial x_i)_\phi(p), (\partial/\partial x_j)_\phi(p))$$

$$= \sum_{k,\ell=1}^{m} a_{ki}a_{\ell j}g((\partial/\partial x_k)_\psi(p), (\partial/\partial x_\ell)_\psi(p)) = \sum_{k,\ell=1}^{m} a_{ki}a_{\ell j}g^{\psi}_{k,\ell}(p),$$

somit $(g^{\phi}_{ij}(p))^m_{i,j=1} = A^T(g^{\psi}_{k,\ell}(p))^m_{k,\ell=1}A$ und folglich

$$\det\left((g^{\phi}_{ij}(p))^m_{i,j=1}\right) = (\det A)^2 \det\left((g^{\psi}_{k,\ell}(p))^m_{k,\ell=1}\right) \tag{2}$$

mit $\det(A) = \det\left(\tau'(\phi(p))\right)$. Wir benutzen (2) und dann (2):

$$\begin{aligned}
&\sqrt{\det\left((g^{\psi}_{ij}(p))^m_{i,j=1}\right)}\,(d\psi_1 \wedge \ldots \wedge d\psi_m)_p \\
&\qquad = \det(A)\sqrt{\det\left((g^{\psi}_{ij}(p))^m_{i,j=1}\right)}\,(d\phi_1 \wedge \ldots \wedge d\phi_m)_p \\
&\qquad = \sqrt{\det\left((g^{\phi}_{ij}(p))^m_{i,j=1}\right)}\,(d\phi_1 \wedge \ldots \wedge d\phi_m)_p.
\end{aligned}$$

Also ist ω_p wohldefiniert. Die Formel (1) ist für alle $p \in U_\phi$ anwendbar, so dass nach Lemma 25.11 $\omega|_{(TU_\phi)^{\oplus m}}$ glatt ist und somit ω eine Differentialform. Da stets $\omega_p \neq 0$ per Konstruktion, ist ω eine Volumenform. $\square$

31.4 Man kann zeigen, dass es auf einer Riemannschen Mannigfaltigkeit (M, g) genau einen affinen Zusammenhang ∇ gibt, welcher (im Sinne von Definition 29.12) symmetrisch ist und

$$\frac{d}{dt} g(\eta(t), \zeta(t)) = g((D_\nabla \eta(t), \zeta(t)) + g(\eta(t), (D_\nabla \zeta)(t))$$

erfüllt für jede glatte Kurve $\gamma \colon I \to M$ und alle Vektorfelder η und ζ längs γ. Man nennt ∇ den **Levi-Civita-Zusammenhang** zu g.

Kurven γ in M mit $D_\nabla \dot{\gamma} = 0$ nennt man **geodätische Kurven** (oder kurz **Geodäten**); dies sind Lösungen der Differentialgleichung 2. Ordnung des zu ∇ gehörigen Sprays auf M (vgl. Bemerkung 29.13 und Lemma E.10). Man kann zeigen, dass geodätische Kurven wenigstens lokal kürzeste Verbindungsstrecken sind. Daraus lässt sich z.B. folgern: Ist (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit und zusammenhängend, so ist

$$d(x, y) := \inf_\gamma L(\gamma)$$

eine die Topologie definierende Metrik auf M, wenn γ die Menge aller C^1-Wege von x nach y durchläuft. Insbesondere ist M parakompakt und somit (da zusammenhängend) σ-kompakt.

31.5. Allgemeiner betrachtet man (z.B. in der relativistischen Physik) **pseudo-riemannsche Mannigfaltigkeiten**: Ist M eine glatte Mannigfaltigkeit, so nennt man eine glatte Abbildung $g\colon TM \oplus TM \to \mathbb{R}$ eine **pseudo-riemannsche Metrik**, wenn für jedes $p \in M$ die Einschränkung $g_p := g|_{T_pM \times T_pM}$ eine symmetrische bilineare Abbildung ist und nicht entartet (also für jede Basis $v_1, \ldots, v_m$ von T_pM die Matrix $(g_p(v_i, v_j))_{i,j=1}^m$ invertierbar ist). Ein Beispiel ist die Minkowski-Metrik $g\colon TM \oplus TM \to \mathbb{R}$ auf $M := \mathbb{R}^4$,

$$g((p,x),(p,y)) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 - x_4 y_4$$

für $p \in M$ und $x = (x_1, \ldots, x_4)$, $y = (y_1, \ldots, y_4)$ in $\mathbb{R}^4$.

Symplektische Mannigfaltigkeiten

Definition 31.6

Eine **symplektische Form** auf einer glatten Mannigfaltigkeit M ist eine geschlossene 2-Form $\omega\colon TM \oplus TM \to \mathbb{R}$ derart, dass für jedes $p \in M$ die alternierende bilineare Abbildung $\omega_p\colon T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$ nicht entartet ist.

Man nennt dann (M, ω) eine **symplektische Mannigfaltigkeit**.

Man kann zeigen, dass jede symplektische Mannigfaltigkeit von gerader Dimension ist.

Beispiel 31.7. Unter Benutzung von Einheitsmatrizen in $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ ist für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Blockmatrix

$$J := \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1} \\ -\mathbf{1} & 0 \end{pmatrix}$$

in $\mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{R})$, da die Spalten Standard-Einheitsvektoren oder deren Negative sind und somit eine Basis für $\mathbb{R}^{2n}$ bilden. Die bilineare Abbildung

$$\beta \colon \mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R},\ (v, w) \mapsto v^T J w$$

ist also nicht entartet und sie ist alternierend, da $J^T = -J$. Sei $U \subseteq \mathbb{R}^{2n}$ eine offene Teilmenge. Schreiben wir

$$\mathrm{id}_V = (x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n)$$

mit den Projektionen auf die $2n$ Komponenten, so können wir auf V die 2-Form

$$\omega := \sum_{j=1}^{n} dx_j \wedge dy_j$$

betrachten. Da $d1 = 0$, ist diese geschlossen. Für jedes $p \in V$ und alle $v, w \in \mathbb{R}^{2n}$ ist

$$\omega_p((p, v), (p, w)) = \sum_{j=1}^{n} (v_j w_{n+j} - v_{n+j} w_j) = \beta(v, w),$$

also ω_p nicht entartet. Somit ist ω eine symplektische Form auf V.

Bemerkung 31.8. Es lässt sich zeigen, dass jede symplektische Mannigfaltigkeit (M, ω) lokal aussieht wie das vorige Beispiel, also um jeden Punkt $p \in M$ eine Karte $\phi \colon U \to V \subseteq \mathbb{R}^{2n}$ existiert derart, dass $(\phi^{-1})^* \omega = \sum_{j=1}^{n} dx_j \wedge dy_j$ (Satz von Darboux).

Beispiel 31.9

Für jede glatte Mannigfaltigkeit M ist das Kotangentialbündel $T^* M$ in kanonischer Weise eine symplektische Mannigfaltigkeit: Wir haben die Bündelprojektion $\pi_{T^*M} \colon T^* M \to M$ und deren

Tangentialabbildung

$$T(\pi_{T^*M}) \colon T(T^*M) \to TM.$$

Setzt man für $\lambda \in T^*M$ und $\xi \in T_\lambda(T^*M)$

$$\theta(\xi) := \lambda(T(\pi_{T^*M})(\xi)), \tag{3}$$

so ist $\theta \colon T(T^*M) \to \mathbb{R}$ eine 1-Form auf T^*M und die geschlossene 2-Form $\Omega := -d\theta$ ist eine symplektische Form auf T^*M.

Ist $\lambda \in (T_pM)^*$ mit $p \in M$, so ist $\pi_{T^*M}(\lambda) = p$, also $T(\pi_{T^*M})(\xi) \in T_pM$. Somit ist $\theta(\xi)$ durch (3) sinnvoll definiert. Mit der Bündelprojektion $\pi_{T(T^*M)} \colon T(T^*M) \to T^*M$ ist $\lambda = \pi_{T(T^*M)}(\xi)$, so dass wir (3) auch schreiben können als

$$\theta(\xi) = \pi_{T(T^*M)}(\xi)\big(T\pi_{T^*M}(\xi)\big) \;\text{ für }\; \xi \in T(T^*M). \tag{4}$$

Für festes λ ist die Abbildung $\theta_\lambda \colon T_\lambda(T^*M) \to \mathbb{R}$, $\xi \mapsto \theta(\xi)$ linear, da λ und $T_\lambda(\pi_{T^*M}) \colon T_\lambda(T^*M) \to T_p(M)$ linear sind. Damit $\theta \in \Omega^1(T^*M)$, ist nur noch Glattheit von θ nachzuweisen.

Sei $m := \dim(M)$ und $F := \mathbb{R}^m$. Ist $\phi\colon U \to V \subseteq F$ eine Karte für M, so ist für jedes $p \in U$ die Abbildung

$$d\phi|_{T_pM}\colon T_pM \to F$$

ein Isomorphismus von Vektorräumen, also auch die duale lineare Abbildung $(d\phi|_{T_pM})^*\colon F^* \to (T_pM)^*$. Per Konstruktion von Dualbündeln (vgl. Beispiel 21.19) ist $\psi\colon V \times F^* \to T^*U \subseteq T^*M$,

$$(x,\alpha) \mapsto (d\phi|_{T_{\phi^{-1}(x)}U})^*(\alpha) \;=\; \alpha \,\circ\, d\phi|_{T_{\phi^{-1}(x)}U}$$

ein C^∞-Diffeomorphismus, also auch

$$T\psi\colon V \times F^* \times F \times F^* = T(V \times F^*) \to T(T^*U)$$

mit $T\psi(x,\alpha,z,\beta) = [t \mapsto \psi(x+ty, \alpha + t\beta)]$. Wir behaupten, dass für alle $(x,\alpha,z,\beta) \in V \times F^* \times F \times F^*$

$$(\theta \,\circ\, T\psi)(x,\alpha,z,\beta) = \alpha(z). \tag{5}$$

Ist dies wahr, so ist θ glatt (da die rechte Seite in (5)) glatt von (x,α,z,β) abhängt). Zudem können wir dann sehen, dass Ω_λ für jedes $\lambda \in T^*M$ nicht entartet und folglich Ω eine symplektische

Form ist. Mit dem Standard-Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ auf $\mathbb{R}^m = F$ ist

$$h := F \to F^*, \quad v \mapsto \langle v, \cdot \rangle$$

ein Isomorphismus von Vektorräumen, also
$\Psi := \mathrm{id}_V \times h \colon V \times F \to V \times F^*$ ein C^∞-Diffeomorphismus. Da

$$T\Psi = \mathrm{id}_V \times h \times \mathrm{id}_F \times h \colon V \times F \times F \times F \to V \times F^* \times F \times F^*,$$

ist

$$((\psi \circ \Psi)^* \theta)(x, y, z, w) = (\theta \circ \psi \circ \Psi)(x, y, z, w) = \langle y, z \rangle = \sum_{j=1}^m y_j z_j.$$

Schreiben wir $\mathrm{id}_{V \times F} = (x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_m)$, so ist also

$$(\psi \circ \Psi)^* \theta = \sum_{j=1}^m y_j \, dx_j.$$

Folglich ist

$$\begin{aligned} (\psi \circ \Psi)^*(\Omega) &= (\psi \circ \Psi)^*(-d\theta) = -d((\psi \circ \Psi)^* \theta) \\ &= -\sum_{j=1}^m dy_j \wedge dx_j = \sum_{j=1}^m dx_j \wedge dy_j; \end{aligned}$$

da dies nach Beispiel 31.7 eine symplektische Form auf $V \times F$ ist, ist auch $\Omega|_{(T^*U)^{\oplus 2}}$ symplektisch.

Es bleibt, die (5) zu beweisen. Mit

$$\begin{aligned}\xi &:= (T\psi \circ \Phi)(x,\alpha,z,\beta) = T\psi([t \mapsto (x+tz, \alpha+t\beta)]) \\ &= [t \mapsto \psi(x+tz,\alpha+t\beta)] = [t \mapsto (\alpha+t\beta) \circ d\phi|_{T_{\phi^{-1}(x+tz)}U}]\end{aligned}$$

ist

$$T\pi_{T^*M}(\xi) = [t \mapsto \pi_{T^*M}((\alpha+t\beta)\circ d\phi|_{T_{\phi^{-1}(x+tz)}U})] = [t \mapsto \phi^{-1}(x+tz)].$$

Weiter ist

$$\pi_{T(T^*M)}(\xi) = \psi(x,\alpha) = \alpha \circ d\phi|_{T_{\phi^{-1}(x)}U} = d(\alpha \circ \phi)|_{T_{\phi^{-1}(x)}U},$$

somit (wie benötigt)

$$\begin{aligned}\theta(\xi) &= d(\alpha\circ\phi)([t \mapsto \phi^{-1}(x+tz)]) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \alpha(\phi(\phi^{-1}(x+tz))) \\ &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} (\alpha(x) + t\alpha(z)) = \alpha(z). \ \square\end{aligned}$$

Poisson-Mannigfaltigkeiten

Es sei M eine glatte Mannigfaltigkeit.

Definition 31.10

Eine reell bilineare Abbildung $\{\cdot,\cdot\}\colon C^\infty(M)\times C^\infty(M)\to C^\infty(M)$, $(f,g)\mapsto\{f,g\}$ wird **Poisson-Klammer** genannt, wenn gilt:

P1 $(C^\infty(M),\{\cdot,\cdot\})$ ist eine Liealgebra; und

P2 Für jedes $h\in C^\infty(M)$ ist $\{\cdot,h\}$ eine Derivation der kommutativen, assoziativen $\mathbb{R}$-Algebra $C^\infty(M)$.

Es gilt also $\{fg,h\}=\{f,h\}g+f\{g,h\}$ für alle $f,g,h\in C^\infty(M)$.

Eine **Poisson-Mannigfaltigkeit** ist ein Paar $(M,\{\cdot,\cdot\})$ aus einer glatten Mannigfaltigkeit M und einer Poisson-Klammer auf M.

Für jedes $h\in C^\infty(M)$ ist $\{\cdot,h\}$ eine Derivation; nach Bemerkung 15.10 gibt es daher genau ein Vektorfeld $X_h\in\mathcal{V}(M)$ derart, dass

$$\{f,h\}=X_h.f=\mathcal{L}_{X_h}(f)\quad\text{für alle } f\in C^\infty(M).$$

Man nennt X_h das **Hamiltonsche Vektorfeld** zu h.

Beweis für 1.5. O1: Für jedes $x \in \emptyset$ existiert ein $\varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon(x) \subseteq \emptyset$, denn die Verneinung dieser Aussage lautet: $(\exists x \in \emptyset) \ldots$, was falsch ist. Für jedes $x \in X$ gilt $B_\varepsilon(x) \subseteq X$ z.B. mit $\varepsilon := 1$.

O2: Sei $x \in U \cap V$. Da U offen ist, existiert ein $\varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon(x) \subseteq U$. Da V offen ist, existiert ein $\rho > 0$ mit $B_\rho(x) \subseteq V$. Setzen wir $\theta := \min\{\varepsilon, \rho\}$, so ist $B_\theta(x) \subseteq U \cap V$.

O3: Gegeben $x \in U$ existiert ein $j \in J$ mit $x \in U_j$. Da U_j offen ist, existiert ein $\varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon(x) \subseteq U_j$. Dann ist $B_\varepsilon(x) \subseteq U_j \subseteq U$. Da $x \in U$ beliebig war, ist U offen.

Beweis zu 1.10. Wir zeigen, dass $\mathcal{O}_Y$ eine Topologie auf Y ist. Wegen $X \in \mathcal{O}$ ist $Y = X \cap Y \in \mathcal{O}_Y$. Ebenso folgt aus $\emptyset \in \mathcal{O}$, dass $\emptyset = \emptyset \cap Y \in \mathcal{O}_Y$; also erfüllt $\mathcal{O}_Y$ die Bedingung O1. Sind $U, V \in \mathcal{O}_Y$, so gibt es $P, Q \in \mathcal{O}$ mit $U = P \cap Y$ und $V = Q \cap Y$. Da $P \cap Q \in \mathcal{O}$, folgt $U \cap V = P \cap Q \cap Y \in \mathcal{O}_Y$; also gilt O2. Ist $(V_j)_{j \in J}$ eine Familie von Mengen $V_j \in \mathcal{O}_Y$, so existiert für jedes $j \in J$ ein $U_j \in \mathcal{O}$ mit $V_j = U_j \cap Y$. Dann ist $U := \bigcup_{j \in J} U_j \in \mathcal{O}$

und somit

$$\bigcup_{j\in J} V_j = \bigcup_{j\in J}(U_j \cap Y) = \left(\bigcup_{j\in J} U_j\right) \cap Y = U \cap Y \in \mathcal{O}_Y;$$

$\mathcal{O}_Y$ erfüllt also O3. $\square$

Beweis zu 1.11. (a) Für jede offene Menge $U \subseteq X$ ist $(j_Y)^{-1}(U) = \{x \in Y : x = j_Y(x) \in U\} = U \cap Y \in \mathcal{O}_Y$, also j_Y stetig.

(b) Ist f stetig, so auch $j_Y \circ f$ als Komposition stetiger Funktionen (siehe Satz 1.12). Sei nun $j_Y \circ f$ stetig angenommen. Für jedes $V \in \mathcal{O}_Y$ existiert eine offene Teilmenge U von X mit $V = U \cap Y = (j_Y^{-1})(U)$. Dann ist

$$f^{-1}(V) = f^{-1}((j_Y)^{-1}(U)) = (j_Y \circ f)^{-1}(U)$$

offen, also f stetig.

(c) Zu jedem $V \in \mathcal{O}_Y$ gibt es eine offene Teilmenge $U \subseteq X$ mit $V = U \cap Y$. Ist Y eine offene Teilmenge von X, so ist $V = U \cap Y$ offen in X, also $\mathcal{O}_Y \subseteq \mathcal{O}$ und somit

$$\mathcal{O}_Y \subseteq \{V \in \mathcal{O} \colon V \subseteq Y\}.$$

Ist V ein Element der rechten Menge, so ist $V = V \cap Y \in \mathcal{O}_Y$; also gilt Gleichheit. $\square$

Beweis von Satz 1.17. Ist $\mathcal{B}$ eine Basis für eine Topologie $\mathcal{O}$ auf X, so ist $X \in \mathcal{O}$, also $X = \bigcup_{j\in J} V_j$ für eine Familie $(V_j)_{j\in J}$ von Mengen $V_j \in \mathcal{B}$. Also ist

$$\bigcup_{V\in\mathcal{B}} V \supseteq X;$$

da jedes $V \in \mathcal{B}$ eine Teilmenge von X ist, gilt Gleichheit (also B1). Sind $U, V \in \mathcal{B}$ und ist $x \in U \cap V$, so ist $U \cap V$ eine offene Menge, es existiert also eine Familie $(V_j)_{j\in J}$ von Mengen $V_j \in \mathcal{B}$ mit $U \cap V = \bigcup_{j\in J} V_j$. Es existiert ein $j_0 \in J$ mit $x \in V_{j_0}$; mit $W := V_{j_0}$ ist B2 erfüllt.

Sei nun $\mathcal{B}$ eine Menge von Teilmengen von X, welche die Bedingungen B1 und B2 erfüllt. Wir definieren $\mathcal{O}$ durch

$$\mathcal{O} = \left\{ \bigcup_{V \in M} V \colon M \subseteq \mathcal{B} \right\}. \tag{1}$$

Nach B1 ist $X = \bigcup_{V \in \mathcal{B}} V \in \mathcal{O}$. Weiter ist $\emptyset = \bigcup_{V \in \emptyset} V \in \mathcal{O}$. Sind $U, V \in \mathcal{O}$, so gibt es Teilmengen $M, N \subseteq \mathcal{B}$ mit $U = \bigcup_{P \in M} P$ und $V = \bigcup_{Q \in N} Q$. Für jedes $x \in U \cap V$ gibt es ein $P_x \in M$ und ein $Q_x \in N$ mit $x \in P_x$ und $x \in Q_x$. Dann ist $x \in P_x \cap Q_x$, nach B2 existiert also ein $W_x \in \mathcal{B}$ mit $x \in W_x \subseteq P_x \cap Q_x$. Dann ist $x \in W_x \subseteq U \cap V$ und wir schließen, dass

$$U \cap V = \bigcup_{x \in U \cap V} W_x \in \mathcal{O}.$$

Ist $(V_j)_{j \in J}$ eine Familie von Mengen $V_j \in \mathcal{O}$, so gibt es für jedes $j \in J$ eine Teilmenge $M_j \subseteq \mathcal{B}$ mit $V_j = \bigcup_{W \in M_j} W$. Setzen wir $M := \bigcup_{j \in J} M_j$, so ist $\bigcup_{j \in J} V_j = \bigcup_{W \in M} W \in \mathcal{O}$. Also erfüllt $\mathcal{O}$ die Bedingungen O1, O2, O3, ist also eine Topologie. Per Konstruktion ist $\mathcal{B}$ eine Basis für $\mathcal{O}$. Eine Topologie $\mathcal{O}$ auf X mit $\mathcal{B}$ als Basis ist durch $\mathcal{B}$ eindeutig festgelegt, denn per Definition einer Basis muss $\mathcal{O}$ durch (1) gegeben sein. $\square$

Beweis von Satz 1.20. (a) Für jede offene Teilmenge $U \subseteq X_1$ ist $(\mathrm{pr}_1)^{-1}(U) = U \times X_2 \in \mathcal{O}$, also pr_1 stetig. Analog sehen wir, dass pr_2 stetig ist.

(b) Ist $f\colon Z \to X_1 \times X_2$ stetig, so auch $f_j = \mathrm{pr}_j \circ f$ für $j \in \{1,2\}$ als Komposition stetiger Funktionen. Seien umgekehrt f_1 und f_2 stetig. Ist $U \subseteq X_1 \times X_2$ eine offene Mengen, so gibt es eine Familie $(U_j \times V_j)_{j\in J}$ von offenen Kästchen mit $U = \bigcup_{j\in J}(U_j \times V_j)$. Damit

$$f^{-1}(U) = \bigcup_{j\in J} f^{-1}(U_j \times V_j)$$

offen ist, brauchen wir nur zu zeigen, dass das Urbild jedes offenen Kästchens offen ist. Da

$$\begin{aligned} f^{-1}(U_j \times V_j) &= \{x \in Z\colon (f_1(x), f_2(x)) \in U_j \times V_j\} \\ &= (f_1)^{-1}(U_j) \cap (f_2)^{-1}(V_j) \end{aligned}$$

gilt und f_1, f_2 stetig sind, ist $f^{-1}(U_j \times V_j)$ offen.

(c) Seien $x = (x_1, x_2)$ und $y = (y_1, y_2)$ zwei verschiedene Punkte in $X_1 \times X_2$. Für ein $j \in \{1,2\}$ ist dann $x_j \neq y_j$. Da X_j Hausdorffsch ist, gibt es in X_j disjunkte offene Umgebungen U und V für x_j

bzw. y_j. Dann sind $(\mathrm{pr}_j)^{-1}(U)$ und $(\mathrm{pr}_j)^{-1}(V)$ disjunkte offene Umgebungen für x bzw. y in X.

(d) Wir zeigen, dass die Abbildung

$$f\colon (Y, \mathcal{O}_Y) \to (Y, \mathcal{T}), \quad y \mapsto y$$

ein Homöomorphismus ist (woraus $\mathcal{O} = \mathcal{T}$ folgt). Damit f stetig sind, genügt es, zu zeigen, dass f stetige Komponenten $f_j\colon Y \to Y_j$ hat. Da Y_j die von X_j induzierte Topologie trägt, brauchen wir zu zeigen, dass diese nach X_j stetig sind. Sie sind dann aber die Einschränkung auf Y der stetigen Projektion $X_1 \times X_2 \to X_j$, somit stetig.

Da $\mathcal{O}_Y$ ein induzierte Topologie ist, ist f^{-1} genau dann stetig, wenn f^{-1} als Abbildung nach $X_1 \times X_2$ stetig ist. Dies gilt genau dann, wenn die Komponenten $(f^{-1})_j\colon Y \to X_j$ stetig sind. Da diese ihr Bild in Y_j haben, genügt es, Stetigkeit der Abbildung nach Y_j zu zeigen mit der induzierten Topologie. Dies ist aber die Projektion $Y_1 \times Y_2 \to Y_j$ und somit stetig. $\square$

In Anhang B ist M eine m-dimensionale, σ-kompakte glatte Mannigfaltigkeit und D eine reguläre Vektordistribution auf M, mit typischer Faser der Dimension n.

Definition B.1

D heißt **invariant**, wenn für jedes glatte Vektorfeld $X \in \Gamma(D)$ und jedes $p \in M$ ein offenes Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ mit $0 \in I$ existiert derart, dass $I \times \{0\} \times \{p\}$ im Definitionsbereich des Flusses zu X enthalten ist und

$$T_p \operatorname{Fl}_{t,0}(D_p) \subseteq D_{\operatorname{Fl}_{t,0}(p)} \text{ für alle } t \in I. \tag{1}$$

Da $\operatorname{Fl}_{t,0}$ ein lokaler C^∞-Diffeomorphismus ist, ist $T_p \operatorname{Fl}_{t,0} \colon T_pM \to T_{\operatorname{Fl}_{t,0}(p)}M$ bijektiv; aus Dimensionsgründen gilt somit Gleichheit in (1).

Definition B.2

Wir nennen eine Karte $\phi \colon U_\phi \to V_\phi \subseteq \mathbb{R}^m$ für M eine **geblätterte Karte** zu D, wenn $V_\phi = R \times S$ mit offenen Teilmengen $R \subseteq \mathbb{R}^n$

und $S \subseteq \mathbb{R}^{m-n}$ und für jedes $s \in S$ die abgeschlossene Untermannigfaltigkeit $N_s := \phi^{-1}(R \times \{s\})$ von U_ϕ eine Integralmannigfaltigkeit für D ist.

Für jedes $q \in N_s$ ist dann $T_q\phi(D_q) = T_q\phi(T_q N_s) = T_{\phi(q)}(R \times \{s\}) = \{\phi(q)\} \times (\mathbb{R}^n \times \{0\})$, somit

$$d\phi(D_q) = \mathbb{R}^n \times \{0\}. \tag{2}$$

Satz B.3

Folgende Bedingungen sind äquivalent:

(a) D ist integrabel;

(b) D ist involutiv;

(c) D ist invariant;

(d) Um jeden Punkt $p \in M$ existiert eine geblätterte Karte zu D.

Bemerkung B.4

Ist D involutiv, so auch $D|_U \subseteq TU$ für jede offene Menge $U \subseteq M$.

Sind nämlich $X, Y \in \Gamma(D|_U)$, so gibt es für $p \in U$ ein $\xi \in C_c^\infty(U)$

derart, dass $\xi|_W = 1$ für eine offene p-Umgebung $W \subseteq U$. Setzen wir $\widetilde{X}(q) := \xi(q)X(q)$ für $q \in U$, $\widetilde{X}(q) := 0_q \in T_qM$ für $q \in M \setminus \operatorname{supp}(\xi)$, so ist $\widetilde{X} \in \Gamma(D)$ und $\widetilde{X}|_W = X|_W$. Analog finden wir $\widetilde{Y} \in \Gamma(D)$ mit $\widetilde{Y}|_W = Y|_W$. Dann ist

$$[X, Y](p) = [\widetilde{X}, \widetilde{Y}](p) \in D_p,$$

also $[X, Y] \in \Gamma(D|_U)$. Analog sieht man:

Ist D invariant, so auch $D|_U \subseteq TU$ für jede offene Menge $U \subseteq M$.

Lemma B.5

Ist M eine glatte Mannigfaltigkeit, so gilt für alle $X, Y \in \mathcal{V}(M)$ und $p \in M$

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} T\,\mathrm{Fl}^X_{0,t}(Y(\mathrm{Fl}^X_{t,0}(p))) = [X, Y](p)$$

in T_pM, unter Benutzung des Flusses $\mathrm{Fl}^X : \Omega \to M$ für X.

Beweis. Dies zeigen wir in der Übung (Aufgabe P47). $\square$

Lemma B.6

Ist $f\colon N \to M$ eine glatte Immersion zwischen glatten Mannigfaltigkeiten, so hat jedes $p \in N$ eine offene Umgebung $U \subseteq N$ derart, dass $f|_U$ eine Einbettung glatter Mannigfaltigkeiten ist und somit $f(U)$ eine Untermannigfaltigkeit von M.

Beweis. Für eine offene p-Umgebung $W \subseteq N$ ist $f|_W$ injektiv, denn f sieht lokal aus wie die injektive lineare Abbildung $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n}$, $x \mapsto (x, 0)$ mit $n := \dim(N)$ und $m := \dim(M)$. Es gibt eine kompakte p-Umgebung $K \subseteq V$. Dann ist $f|_K$ eine topologische Einbettung, somit auch $f|_{K^o} = (f|_K)|_{K^o}$. Also ist $f|_{K^o}$ eine Einbettung glatter Mannigfaltigkeiten. □

B.7. Im folgenden Beweis nutzen Vorüberlegungen.

(a) Für eine C^∞-Abbildung $f\colon M_1 \times M_2 \to M$ und $p = (p_1, p_2)$ ist

$$T_p f(v_1, v_2) = T_{p_1} f(\cdot, p_2)(v_1) + T_{p_2} f(p_1, \cdot)(v_2)$$

für alle $(v_1, v_2) \in T_{p_1} M_1 \times T_{p_2} M_2$, wenn wir letzteres Produkt wie üblich mit $T_p(M_1 \times M_2)$ identifizieren (siehe Lemma 10.3). Also ist

$$\operatorname{im} T_p f = \operatorname{im} T_{p_1} f(\cdot, p_2) + \operatorname{im} T_{p_2} f(p_1, \cdot).$$

(b) Ist $\gamma\colon I \to M$ eine C^1-Kurve in einer C^1-Mannigfaltigkeit und $s \in I$, schreiben wir manchmal

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=s} \gamma(t) := \dot{\gamma}(s). \tag{3}$$

Hängt γ von weiteren Variablen ab, die festgehalten werden, schreiben wir $\frac{\partial}{\partial t}$ statt $\frac{d}{dt}$.

Die Notation (3) weicht ab von der Notation $\frac{d}{dt}\Big|_{t=s} \gamma(t) := \gamma'(s)$, wenn M eine offene Teilmenge eines Vektorraums ist (wie zum Beispiel in Lemma B.5). Aus dem Zusammenhang wird immer klar sein, was gemeint ist.

(c) Ist M_1 ein offenes Intervall I in der Situation von (a), so ist $T_s M_1 = \mathbb{R}(s, 1)$ für alle $s \in \mathbb{R}$ und für $p_2 \in M_2$

$$\operatorname{im} T_s f(\cdot, p_2) = \mathbb{R}\, T_s f(\cdot, p_2)(s, 1) = \mathbb{R} \frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=s} f(t, p_2).$$

Beweis für Satz B.3. (a)$\Rightarrow$(b): Sind $X, Y \in \Gamma(D)$, so gibt es für

$p \in M$ eine Integralmannigfaltigkeit N zu D mit $p \in N$. Nach Verkleinern von N ist N eine Untermannigfaltigkeit von M (siehe Lemma B.6). Für alle $q \in N$ ist $X(q) \in D_q = T_q N$; da TN nach Lemma 20.6 eine Untermannigfaltigkeit von TM ist, ist $X|_N \colon N \to TN$ somit glatt und ebenso $Y|_N \colon N \to TN$. Nun sind $X|_N$ und X über die Inklusionsabbildung $j_N \colon N \to M$ verknüpft und ebenso $Y|_N$ und Y; nach dem Lemma über verknüpfte Vektorfelder sind somit auch $[X|_N, Y|_N]$ und $[X, Y]$ über j_N verknüpft. Insbesondere enthält $D_p = T_p N$ den Tangentialvektor

$$[X|_N, Y|_N](p) = T_p j_N([X|_N, Y|_N]) = [X, Y](j_N(p)) = [X, Y](p).$$

Also ist $[X, Y] \in \Gamma(D)$, folglich D involutiv.

(b)$\Rightarrow$(c): Sei $X \in \Gamma(D)$. Ist $p \in M$, so existiert ein lokaler Rahmen $X_1, \ldots, X_n \colon U \to D$ für D auf einer offenen p-Umgebung $U \subseteq M$. Im Folgenden schreiben wir $\Phi_t^X := \mathrm{Fl}_{t,0}^X$ wie in Aufgabe P28. Für ein offenes Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ mit $0 \in I$ ist $I \times \{0\} \times \{p\}$ im Definitionsbereich des Flusses Fl^X von X enthalten, wir können also für $i \in \{1, \ldots, n\}$ die glatte Funktion

$$\gamma_i\colon I \to T_pM, \quad t \mapsto T\Phi^X_{-t}(X_i(\Phi^X_t(p)))$$

betrachten. Da $[X|_U, X_i] \in \Gamma(D|_U)$, ist

$$[X|_U, X_i] = \sum_{j=1}^n h_{ij} X_j$$

mit geeigneten glatten Funktionen $h_{ij} \in C^\infty(U)$, für $j \in \{1, \ldots, n\}$ (siehe Lemma 21.48). Für festes $t \in I$ ist $\Phi^X_{t+s}(p) = \Phi^X_s(\Phi^X_t(p))$ mit $s \in \mathbb{R}$ in einer 0-Umgebung (vgl. Aufgabe P28). Analog ist $\Phi^X_{-t-s}(q) = \Phi^X_{-t}(\Phi^X_{-s}(q))$ für $s \in \mathbb{R}$ in einer 0-Umgebung und $q \in M$ in einer $\Phi^X_t(p)$-Umgebung Q, also $T\Phi^X_{-t-s} = T\Phi^X_{-t} \circ T\Phi^X_{-s}$ auf TQ und somit

$$\begin{aligned}
\gamma_i'(t) &= \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} \gamma_i(t+s) = \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} T\Phi^X_{-t} T\Phi^X_{-s}(X_i(\Phi^X_s(\Phi^X_t(p)))) \\
&= T\Phi^X_{-t} \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} \Phi^X_{-s}(X_i(\Phi^X_s(\Phi^X_t(p)))) = T\Phi^X_{-t}([X|_U, X_i](\Phi^X_t(p))) \\
&= \sum_{i=1}^n h_{ij}(\Phi^X_t(p)) \gamma_j(t).
\end{aligned}$$

Mit $\gamma(t) := (\gamma_1(t), \ldots, \gamma_n(t)) \in (T_pM)^n$ ist also

$$\gamma'(t) = A(t)(\gamma(t)),$$

wobei $A(t) \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(T_p(M)^n)$ via

$$A(t)(v_1, \ldots, v_n) := \Big(\sum_{j=1}^{n} h_{1,j}(\Phi_t^X(p))v_j, \ldots, \sum_{j=1}^{n} h_{n,j}(\Phi_t^X(p))v_j \Big)$$

definiert ist. Aus der vorigen Formel ist klar, dass $\hat{A}\colon I \times (T_pM)^n \to (T_pM)^n$, $(t, v) \mapsto A(t)(v)$ glatt ist und somit

$$f\colon I \times (T_pM)^n \to (T_pM)^n,\ (t, v) \mapsto (v, A(t)(v))$$

ein zeitabhängiges glattes Vektorfeld auf $(T_pM)^n$. Nun ist γ eine Lösung des Anfangswertproblems

$$\dot{y}(t) = f(t, y(t)), \quad y(0) = (X_1(p), \ldots, X_n(p)).$$

Der Untervektorraum $N := (D_p)^n$ ist eine Untermannigfaltigkeit der glatten Mannigfaltigkeit $(T_pM)^n$ und darin abgeschlossen. Weiter ist für alle $(t, v) \in I \times N$

$$f(t, v) = (v, A(t)(v)) \in \{v\} \times N = T_vN.$$

Nach Satz 20.5 ist also $\gamma(t) \in N$ für alle $t \in I$, folglich $\gamma_i(t) \in D_p$ für jedes $t \in I$ und alle $i \in \{1, \ldots, n\}$ und somit

$$\begin{aligned} T\Phi^X_{-t} D_{\Phi^X_t(p)} &= T\Phi^X_{-t}(\mathbb{R}X_1(\Phi^X_t(p)) + \cdots + \mathbb{R}X_n(\Phi^X_t(p))) \\ &= \mathbb{R}\gamma_1(t) + \cdots + \mathbb{R}\gamma_n(t) \subseteq D_p, \end{aligned}$$

wobei aus Dimensionsgründen tatsächlich Gleicheit gilt. Anwenden von $T_p\Phi^X_t = (T_{\Phi^X_t(p)}\Phi^X_{-t})^{-1}$ liefert

$$T_p\Phi^X_t(D_p) = D_{\Phi^X_t(p)}$$

und somit die Invarianz von D.

(c)$\Rightarrow$(d): Gegeben $p \in M$ existiert ein lokaler Rahmen $X_1, \ldots, X_n \colon U \to D$ für eine offene p-Umgebung $U \subseteq M$. Für $j \in \{1, \ldots, n\}$ existiert ein offenes Intervall $I_j \subseteq \mathbb{R}$ mit $0 \in I_j$ und eine offene p-Umgebung $U_j \subseteq U$ derart, dass $I_j \times \{0\} \times U_j$ im Definitionsbereich Ω_j des Flusses Fl^{X_j} zu X_j enthalten ist. Absteigend betrachten wir nacheinander $j = n-1$, $j = n-2$, ..., $j = 1$. Da der Fluss Fl^{X_j} stetig ist und $\mathrm{Fl}^{X_j}_{0,0}(p) = p \in U_{j+1}$, dürfen wir nach Verkleinern von I_j und U_j annehmen, dass

$$\mathrm{Fl}^{X_j}_{t,0}(q) \in U_{j+1}$$

für alle $t \in I_j$ und $q \in U_j$. Es sei $H \subseteq T_pM$ ein zu D_p komplementärer Untervektorraum und $L \subseteq U_1$ eine Untermannigfaltigkeit mit $p \in L$ und $T_pL = H$. Nach Verkleinern von L dürfen wir annehmen, dass $L = \psi(S)$ für eine offene 0-Umgebung $S \subseteq \mathbb{R}^{m-n}$ und einen C^∞-Diffeomorphismus $\psi\colon S \to L$. Setzen wir $I := I_1 \cap \cdots \cap I_n$, so sind

$$\psi_1\colon I \times S \to M, \quad (t_1, s) \mapsto \mathrm{Fl}^{X_1}_{t_1,0}(\psi(s))$$

und

$$\psi_j\colon I^j \times S \to M, \quad (t_1, \ldots, t_j, s) \mapsto \mathrm{Fl}^{X_j}_{t_j,0}(\psi_{j-1}(t_{j-1}, \ldots, t_1, s))$$

für $j \in \{2, \ldots, n\}$ glatte Abbildungen. Wegen $\psi_n(0, \ldots, 0, s) = \psi(s)$ ist

$$\mathrm{im}\, T_0\psi_n(0, \ldots, 0, \cdot) = \mathrm{im}\, T_0\psi = H.$$

Wegen $\psi_n(0, \ldots, t_j, 0, \ldots, 0, 0) = \mathrm{Fl}^{X_j}_{t_j,0}(p)$ ist für $j \in \{1, \ldots, n\}$

$$\operatorname{im} T_0\psi_n(0,\ldots,0,\cdot,0,\ldots,0,0) = \mathbb{R}\frac{d}{dt_j}\Big|_{t_j=0} \mathrm{Fl}^{X_j}_{t_j,0}(p) = \mathbb{R}X_j(p).$$

Folglich ist

$$\operatorname{im} T_0\psi_n = H + \mathbb{R}X_1(p) + \cdots + \mathbb{R}X_n(p) = T_pM$$

und aus Dimensionsgründen $T_0\psi\colon \mathbb{R}^m \to T_pM$ ein Isomorphismus von Vektorräumen. Nach Verkleinern von I und S darf also angenommen werden, dass $U_\phi := \psi_n(I^n \times S)$ offen in M und $\psi_n\colon I^n \times S \to U_\phi$ ein C^∞-Diffeomorphismus ist. Wir setzen $R := I^n$, $V_\phi := R \times S = I^n \times S$; dann ist $\phi := \psi_n^{-1}\colon U_\phi \to V_\phi$ eine Karte für M um p. Diese ist eine geblätterte Karte zu D, also

$$\operatorname{im} T_r\psi_n(\cdot,s) = D_{\psi_n(r,s)} \tag{4}$$

für alle $(r,s) \in R \times S$. Da $T_r\psi_n(\cdot,s)$ injektiv ist, folgt (4), wenn

$$\operatorname{im} T_r\psi_n(\cdot,s) \subseteq D_{\psi_n(r,s)}.$$

Wir zeigen per Induktion nach $j \in \{1,\ldots,n\}$, dass $\operatorname{im} T_t\psi_j(\cdot,s) \subseteq D_{\psi_j(t,s)}$ für alle $t = (t_1,\ldots,t_j) \in I^j$ und $s \in S$. Es ist $\psi_1(t_1,s)=\mathrm{Fl}^{X_1}_{t_1,0}(\psi(s))$, also

$$\frac{\partial}{\partial t_1}\psi_1(t_1,s)=X_1(\mathrm{Fl}_{t_1,0}(\psi(s)))\in D_{\psi_1(t_1,s)};$$

gleiches gilt für die reellen Vielfachen im Bild der Tangentialabbildung. Da

$$\psi_j(t_1,\ldots,t_j,s)=\mathrm{Fl}^{X_j}_{t_j,0}(\psi_{j-1}(t_1,\ldots,t_{j-1},s)),$$

ist induktiv mit $\tau:=(t_1,\ldots,t_{j-1})$

$$\text{im } T_{(t_1,\ldots,t_j)}\psi_j(\cdot,s)=\mathbb{R}\frac{\partial}{\partial t_j}\mathrm{Fl}^{X_j}_{t_j,0}(\psi_{j-1}(\tau,s))+T\,\mathrm{Fl}^{X_j}_{t_j,0}(\text{im } T_\tau\psi_{j-1}(\cdot,s))$$

$$\subseteq \mathbb{R}\underbrace{X_j(\mathrm{Fl}^{X_j}_{t_j,0}(\psi_{j-1}(\tau,s)))}_{=X_j(\psi_j(t,s))\in D_{\psi_j(t,s)}}+\underbrace{T\,\mathrm{Fl}^{X_j}_{t_j,0}\,D_{\psi_{j-1}(\tau,s)}}_{\subseteq D_{\mathrm{Fl}^{X_j}_{t_j,0}(\psi_{j-1}(\tau,s))}=D_{\psi_j(t,s)}}\subseteq D_{\psi_j(t,s)}.$$

(d)$\Rightarrow$(a): Ist $p\in M$ und $\phi\colon U_\phi\to V_\phi=R\times S$ eine geblätterte Karte für M zu D, so sei $(r,s):=\phi(p)$. Dann ist p in $N_s:=\phi^{-1}(R\times\{s\})$, einer Integralmannigfaltigkeit zu D. $\square$

Beweis des Satzes von Frobenius (Satz 22.3):

Nach Satz B.3 ist D genau dann integrabel, wenn D involutiv ist.

Wir nehmen dies nun an; nach Satz B.3 gibt es dann einen Atlas aus geblätterten Karten. Sei $p \in M$. Wir behaupten:

(a) Sind N_1 und N_2 Integralmannigfaltigkeiten für D, so ist $N_1 \cap N_2$ eine offene Teilmenge von N_1 und N_2, und beide induzieren auf $N_1 \cap N_2$ die gleiche glatte Mannigfaltigkeitsstruktur.

Ist die Behauptung richtig, betrachten wir die Menge $\mathcal{N}$ aller p enthaltenden Integralmannigfaltigkeiten N; nach Aufgabe P14 (a) gibt es dann auf

$$B := \bigcup_{N \in \mathcal{N}} N$$

eine eindeutige glatte Mannigfaltigkeitsstruktur, die jedes $N \in \mathcal{N}$ zu einer offenen Untermannigfaltigkeit (und somit B zu einer Integralmannigfaltigkeit) macht.

Zum Beweis der Behauptung sei $q \in N_1 \cap N_2$. Es gibt eine geblätterte Karte $\phi\colon U_\phi \to V_\phi = R \times S$ mit $q \in U_\phi$. Sei $j_\ell\colon N_\ell \to M$ die Inklusionsabbildung für $\ell \in \{1, 2\}$. Es gibt eine

q-Umgebung $U_\ell \subseteq N_\ell$ mit $j_\ell(U_\ell) \subseteq U_\phi$, die zu einer offenen Kugel in $\mathbb{R}^n$ diffeomorph ist; für jedes $x \in U_\ell$ gibt es folglich eine glatte Kurve $\gamma\colon I \to U_\ell$ auf einem offenen Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ mit $[0,1] \subseteq I$ derart, dass $\gamma(0) = q$ und $\gamma(1) = x$. Wir schreiben $\phi \circ j_\ell \circ \gamma = (\rho, \sigma)$ mit $\rho\colon I \to R$ und $\sigma\colon I \to S$. Für alle $t \in I$ ist

$$(\rho'(t), \sigma'(t)) = (\phi \circ j_\ell \circ \gamma)'(t) \in d\phi T j_\ell T_{\gamma(t)} N_\ell = d\phi D_{\gamma(t)} = \mathbb{R}^n \times \{0\}$$

mit (2), also $\sigma'(t) = 0$, ergo σ konstant. Ist s der konstante Wert von σ, so ist also $j_\ell(U_\ell)$ enthalten in der Untermannigfaltigkeit $N_s := \phi^{-1}(R \times \{s\})$ von M. Nun ist $j_\ell|_{U_\ell}\colon U_\ell \to N_s$ glatt und eine injektive Immersion zwischen Mannigfaltigkeiten der gleichen Dimension, also étale und somit ein lokaler Diffeomorphismus. Folglich ist $j_\ell(U_\ell) = U_\ell$ offen in N_s und $j_\ell\colon U_\ell \to j_\ell(U_\ell)$ ein Diffeomorphismus. Dann ist $U := U_1 \cap U_2 = j_1(U_1) \cap j_2(U_2)$ eine offene p-Umgebung in N_s sowie in N_1 und N_2 (da $U = j_\ell^{-1}(j_1(U_1) \cap j_2(U_2))$), woraus die Behauptung folgt.

(b) Ist N eine Integralmannigfaltigkeit für M mit $N \cap B \neq \emptyset$, so ist N eine offene Untermannigfaltigkeit von B.

Nach (a) ist $N \cap B$ eine offene Teilmenge von N und B und beide induzieren darauf die gleiche glatte Mannigfaltigkeitsstruktur. Nach Aufgabe P14 (a) erlaubt $N \cup B$ eine glatte Mannigfaltigkeitsstruktur, die N und B zu offenen Untermannigfaltigkeiten macht. Da N und B wegzusammenhängend sind und $N \cap B \neq \emptyset$, ist auch $N \cup B$ wegzusammenhängend. Es folgt zudem, dass $N \cup B$ eine immersierte Untermannigfaltigkeit von M ist und eine Integralmannigfaltigkeit. Da $p \in N \cup B$, ist $N \cup B$ (also auch N) eine offene Untermannigfaltigkeit von B.

(c) Ist $\phi\colon U_\phi \to R \times S$ eine geblätterte Karte für M zu D und N eine Integralmannigfaltigkeit zu D mit abzählbarer Basis der Topologie, so ist die Menge $\{s \in S\colon N \cap N_s \neq \emptyset\}$ abzählbar, wobei $N_s := \phi^{-1}(R \times \{s\})$.

Die Menge $N \cap U_\phi$ ist eine offene Untermannigfaltigkeit von N, hat also eine abzählbare Basis der Topologie und ist somit σ-kompakt. Jeder Punkt $x \in N \cap U_\phi$ hat eine offene Umgebung $W_x \subseteq N \cap U_\phi$, die zu einer offenen Kugel in $\mathbb{R}^n$ diffeomorph ist.

Es gibt eine abzählbare Teilmenge $A \subseteq N \cap U_\phi$ derart, dass $N \cap U_\phi = \bigcup_{x \in A} W_x$. Wir schreiben $\phi = (\rho, \sigma)$. Für jedes $y \in W_x$ existiert eine glatte Kurve $\gamma \colon I \to W_x$ für ein offenes Intervall I mit $[0,1] \subseteq I$ derart, dass $\gamma(0) = x$ und $\gamma(1) = y$. Wie oben sehen wir, dass $\sigma \circ \gamma$ konstant ist, also $\sigma(y) = \sigma(x)$ und somit $y \in N_{\sigma(x)}$. Es gilt also $W_x \subseteq N_{\sigma(x)}$ und folglich

$$N \cap U_\phi \subseteq \bigcup_{x \in A} N_{\sigma(x)}.$$

Da die Mengen N_s für $s \in S$ paarweise disjunkt sind, folgt $\{s \in S \colon N_s \cap N \neq \emptyset\} = \{\sigma(x) \colon x \in A\}$; diese Menge ist abzählbar.

(d) Ist $\eta \colon [a, b] \to \mathbb{R}^\ell$ stetig und $\eta(a) \neq \eta(b)$, so ist die Menge $\eta([a, b])$ überabzählbar.

Schreiben wir $\eta = (\eta_1, \ldots, \eta_\ell)$, so gibt es ein $k \in \{1, \ldots, \ell\}$ mit $\eta_k(a) \neq \eta_k(b)$. Nach dem Zwischenwertsatz ist $\eta_k([a, b])$ also ein Intervall in $\mathbb{R}$ mit mehr als einem Punkt und somit überabzählbar, folglich auch $\eta([a, b])$.

(e) B hat eine abzählbare Basis der Topologie.

Um dies nachzuweisen, wählen wir eine kompakte Ausschöpfung $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von M, setzen $K_{-1} := K_0 := \emptyset$ und für $n \in \mathbb{N}$

$$R_n := K_n \setminus K^o_{n-1} \text{ sowie } W_n := K^o_{n+1} \setminus K_{n-2}.$$

Sei $n \in \mathbb{N}$. Für jedes $x \in R_n$ gibt es eine geblätterte Karte $\phi_{n,x} \colon U_{n,x} \to V_{n,x} = R_{n,x} \times S_{n,x}$ um x mit $U_{n,x} \subseteq W_n$. Nach Verkleinern dürfen wir annehmen, dass $S_{n,x}$ eine offene Kugel in $\mathbb{R}^{m-n}$ ist und nach Verschieben und Strecken, das $S_{n,x}$ die offene Einheitskugel $S \subseteq \mathbb{R}^{m-n}$ ist. Es gibt eine endliche Teilmenge Φ_n von K_n mit $K_n \subseteq \bigcup_{x\in\Phi_n} U_{n,x}$. Sei $J := \bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{n\} \times \Phi_n$. Dann ist $(U_j)_{j\in J}$ eine lokalendliche offene Überdeckung von M (vgl. Beweis von Satz 12.21) und jedes U_j ist relativ kompakt. Für $j \in J$ und $s \in S$ sei $N_{j,s} := \phi_j^{-1}(R_j \times \{s\})$. Wegen der lokalen Endlichkeit ist $\{j \in J \colon p \in U_j\}$ endlich und somit auch

$$A_1 := \{(j, s) \in J \times S \colon p \in N_{j,s}\}.$$

Rekursiv sei für $n \in \mathbb{N}$

$$A_{n+1} := \{(j,s) \in J \times S \colon (\exists (i,t) \in A_{n-1})\; N_{j,s} \cap N_{i,t} \neq \emptyset\}.$$

Induktiv sehen wir mit (b), dass $N_{j,s} \subseteq B$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $(j,s) \in A_n$. Auch sehen wir induktiv mit (c), dass jede der Mengen A_n abzählbar ist.[14] Also ist $A := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ abzählbar; können wir zeigen, dass

$$B = \bigcup_{(j,s)\in A} N_{j,s},$$

so hat B eine abzählbare Basis der Topologie (wie jede der abzählbar vielen offenen Teilmengen $N_{j,s}$). Gegeben $q \in B$ gibt es einen Weg $\gamma \colon [0,1] \to B$ mit $\gamma(0) = p$, $\gamma(1) = q$. Für $j \in J$ und $s \in S$ ist $\gamma^{-1}(N_{j,s})$ eine offene Teilmenge von $[0,1]$; ist nämlich $\gamma(t) \in N_{j,s}$, so ist $N_{j,s} \cap B \neq \emptyset$, nach (b) also $N_{j,s}$ eine offene Teilmenge von B und somit $\gamma^{-1}(N_{j,s})$ offen. Wir wählen eine Lebesgue-Zahl $\delta > 0$ für die offene Überdeckung

[14] Für $(i,t) \in A_{n-1}$ ist die Menge aller $j \in J$ mit $U_j \cap N_{i,t} \neq \emptyset$ endlich, da $N_{i,t}$ relativ kompakt ist (siehe Lemma 12.25 (b)). Für jedes solche j ist die Menge der $s \in S$ mit $N_{j,s} \cap N_{i,t}$ abzählbar nach (c).

$(\gamma^{-1}(N_{j,s}))_{(j,s)\in J\times S}$ von $[0,1]$; für jedes $t \in [0,1]$ existiert also ein $(j,s) \in J \in S$ derart, dass $[0,1] \cap]t-\delta, t+\delta[\subseteq \gamma^{-1}(N_{j,s})$. Wir wählen ℓ so groß, dass $\frac{1}{\ell} < \delta$ und setzen $t_i := i/\ell$ für $i \in \{0, 1, \ldots, \ell\}$. Für jedes $i \in \{1, \ldots, \ell\}$ gibt es Elemente $j(i) \in J$ und $s(i) \in S$ mit $[t_{i-1}, t_i] \subseteq \gamma^{-1}(N_{j(i),s(i)})$. Wir zeigen, dass $(j(i), s(i)) \in A_i$ für alle $i \in \{1, \ldots, \ell\}$; insbesondere ist dann $(j(\ell), s(\ell)) \in A_\ell$ und somit

$$q = \gamma(1) = \gamma(t_\ell) \in N_{j(\ell),s(\ell)} \in \bigcup_{(j,s)\in A} N_{j,s}.$$

Aus $p = \gamma(0) = \gamma(t_0) \in N_{j(1),s(1)}$ folgt $(j(1), s(1)) \in A_1$. Ist $i \in \{1, \ldots, \ell - 1\}$ und $(j(i), s(i)) \in A_i$, so ist $\gamma(t_i) \in \gamma([t_{i-1}, t_i]) \cap \gamma([t_i, t_{i+1}]) \subseteq N_{j(i),s(i)} \cap N_{j(i+1),s(i+1)}$, also $(j(i+1), s(i+1)) \in A_{i+1}$.

(f) Ist X ein lokal wegzusammenhängender topologischer Raum und $f\colon X \to M$ eine stetige Funktion mit $f(X) \subseteq B$, so ist $f|^B\colon X \to B$ stetig nach B, versehen mit der immersierten Mannigfaltigkeitsstruktur.

Verlangt ist also, dass jede Umgebung eines Punkts in X eine wegzusammenhängende Umgebung des Punkts enthält.

Für jedes $x \in X$ ist $f(x) \in U_j$ für ein $j \in J$ (mit Notation wie im Beweis von (e)) und somit $f(x) \in N_{j,s}$ für ein $s \in S$. Nach (b) ist dann $N_{j,s}$ eine offene Untermannigfaltigkeit von B. Die Umgebung $f^{-1}(U_j)$ von x enthält per Voraussetzung eine wegzusammenhängende x-Umgebung W. Schreiben wir wie oben $\phi_j = (\rho_j, \sigma_j)\colon U_j \to R_j \times S$, so ist $\sigma_j(f(W))$ eine wegzusammenhängende Teilmenge von S. Da $f(W) \subseteq U_j \cap B$, ist

$$\{t \in S\colon f(W) \cap N_{j,t} \neq \emptyset\} \subseteq \{t \in S\colon B \cap N_{j,t} \neq \emptyset\},$$

wobei die rechte Seite nach (e) und (c) abzählbar ist. Also ist $\sigma_j(f(W))$ abzählbar. Nach (d) muss jeder Weg in $\sigma_j(f(W))$ konstant sein und somit ist $\sigma_j(f(W)) = \{\sigma_j(f(x))\} = \{s\}$. Also ist $f(W) \subseteq N_{j,s}$. Da $N_{j,s}$ eine Untermannigfaltigkeit von M ist, ist mit $f|_W\colon W \to M$ auch $f|_W^{N_{j,s}}\colon W \to N_{j,s}$ stetig und somit auch $f|_W^B\colon W \to B$. Die Abbildung $f|^B\colon X \to B$ ist somit stetig.

(g) Ist L eine C^k-Mannigfaltigkeit mit $k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ und $f\colon L \to M$ eine C^k-Abbildung mit $f(L) \subseteq B$, so ist $f|^B\colon L \to B$ eine C^k-Abbildung nach B, versehen mit der immersierten Mannigfaltigkeitsstruktur. Insbesondere ist B eine initiale Untermannigfaltigkeit von M.

Wir wiederholen hierzu den Beweis von (f) mit $X := L$, bis $f(W) \subseteq N_{j,s}$ erreicht ist. Da $N_{j,s}$ eine Untermannigfaltigkeit von M ist, ist dann mit $f|_W\colon W \to M$ auch $f|_W^{N_{j,s}}\colon W \to N_{j,s}$ eine C^k-Abbildung und somit auch $f|_W^B\colon W \to B$, da $N_{j,s}$ eine Untermannigfaltigkeit von B ist. Also ist $f|^B\colon L \to B$ eine C^k-Abbildung. $\square$

Für die Konstruktion tubularer Umgebungen ist von Nutzen:

Satz C.1

Es sei $f\colon Y \to Z$ eine Abbildung zwischen topologischen Räumen und $X \subseteq Y$ eine Teilmenge. Wir nehmen an:

(i) f ist ein lokaler Homöomorphismus;

(ii) $f(X)$ ist abgeschlossen in Z und $f|_X\colon X \to f(X)$ ein Homöomorphismus;

(iii) Z ist parakompakt.

Dann gibt es eine offene Teilmenge $U \subseteq Y$ mit $X \subseteq U$ derart, dass $f(U)$ offen in Z und $f|_U\colon U \to f(U)$ ein Homöomorphismus ist.

Jeder parakompakte topologische Raum X ist **regulär**, d.h. jede Umgebung U eines Punkts $x \in X$ enthält eine in X abgeschlossene x-Umgebung V (siehe Lemma C.4).[15] Dies ist klar im für uns relevanten Fall, dass X lokalkompakt ist (man nehme V kompakt).

[15] X ist sogar normal.

Beim Beweis von Satz C.1 nutzen wir das folgende Lemma.

Lemma C.2

Es sei Y und Z topologische Räume, $A \subseteq Z$ abgeschlossen und $(V_i)_{i \in I}$ eine Familie offener Teilmengen von Z mit $A \subseteq \bigcup_{i \in I} V_i$. Für $i \in I$ sei $g_i \colon V_i \to Y$ eine stetige Funktion. Wir nehmen an:

(a) Für alle $i, j \in I$ und $a \in V_i \cap V_j \cap A$ gibt es eine offene a-Umgebung $O = O(a, i, j) \subseteq V_i \cap V_j$ mit $g_i|_O = g_j|_O$;

(b) Z ist parakompakt.

Dann existiert eine offene Teilmenge $V \subseteq \bigcup_{i \in I} V_i$ mit $A \subseteq V$ und eine stetige Funktion $g \colon V \to Y$ derart, dass für jedes $x \in V$ eine offene x-Umgebung $W \subseteq V$ existiert und ein $i \in I$ mit $W \subseteq V_i$ und $g|_W = g_i|_W$.

Beweis. Für jedes $z \in A$ gibt es ein $\iota(z) \in I$ mit $z \in V_{\iota(z)}$. Da Z parakompakt und somit regulär ist, existiert eine abgeschlossene Umgebung Q_z von z in Z mit $Q_z \subseteq V_{\iota(z)}$. Für $z \in Z \setminus A$ sei $Q_z := Z \setminus A$. Da Z parakompakt ist, existiert eine lokal endliche offene Überdeckung $(W_j)_{j \in J}$ von Z, welche $((Q_z)^o)_{z \in Z}$

untergeordnet ist. Für jedes $j \in J$ gibt es also ein $z(j) \in Z$ mit $W_j \subseteq (Q_{z(j)})^o$. Setzen wir $J_0 := \{j \in J \colon z(j) \in A\}$, so ist $(W_j)_{j \in J_0}$ eine lokal endliche Familie offener Teilmengen von Z mit $A \subseteq \bigcup_{j \in J_0} W_j$. Für jedes $j \in J_0$ ist

$$\overline{W_j} \subseteq Q_{z(j)} \subseteq V_{i(j)}$$

mit $i(j) := \iota(z(j))$. Nach Lemma 12.25 (a) hat jedes $a \in A$ eine offene Umgebung U_a in Z derart, dass

$$\Phi(a) := \{j \in J_0 \colon U_a \cap \overline{W_j} \neq \emptyset\}$$

endlich ist. Ist $\Psi := \{j \in \Phi(a) \colon a \notin \overline{W_j}\} \neq \emptyset$, so können wir U_a durch die offene Teilmenge

$$U_a \setminus \bigcup_{j \in \Psi} \overline{W_j}$$

ersetzen; wir dürfen daher annehmen, dass $a \in \overline{W}_j$ für alle $j \in \Phi(a)$. Für alle $j, k \in \Phi(a)$ ist dann $a \in V_{i(j)} \cap V_{i(k)} \cap A$, also $a \in O(a, i(j), i(k))$; nach Ersetzen von U_a durch

$$U_a \cap \bigcap_{j,k \in \Phi(a)} O(a, i(j), i(k))$$

dürfen wir also annehmen, dass $U_a \subseteq O(a, i(j), i(k))$ für alle $j, k \in \Phi(a)$. Nach weiterem Verkleinern darf angenommen werden, dass $U_a \subseteq W_{j(a)}$ für ein $j(a) \in J_0$; dann ist $j(a) \in \Phi(a)$. Nun ist

$$V := \bigcup_{a \in A} U_a$$

eine offene Teilmenge von Z mit $A \subseteq Z$ und $g \colon V \to Y$, $z \mapsto g_{i(j(a))}(z)$ wenn $z \in U_a$ ist wohldefiniert: Ist nämlich $z \in U_a \cap U_b$, so ist $z \in U_b \subseteq W_{j(b)}$, also $j(b) \in \Phi(a)$, folglich $U_a \subseteq O(a, i(j(a)), i(j(b)) =: O$ und somit

$$g_{i(j(a))}(z) = g_{i(j(a))}|_O(z) = g_{i(j(b))}|_O(z) = g_{i(j(b))}(z).$$

Insbesondere ist $g|_{U_a} = g_{i(j(a)}|_{U_a}$ für jedes $a \in A$, also $g|_{U_a}$ stetig und somit g stetig. $\square$

Beweis von Satz C.1. Gegeben $z \in f(X)$ existiert genau ein $x \in X$ mit $f(x) = z$. Per Voraussetzung hat x eine offene Umgebung U_z in Y derart, dass $V_z := f(U_z)$ in Z offen ist und $f|_{U_z} \colon U_z \to V_z$ ein Homöomorphismus. Wir setzen

$$g_z := (f|_{U_z})^{-1} \colon V_z \to U_z.$$

Da $f(X \cap U_z)$ in $f(X)$ relativ offen ist, gibt es eine offene Teilmenge P von Z mit $f(X \cap U_z) = f(X) \cap P$. Nach Ersetzen von U_z durch $U_z \cap f^{-1}(P)$ dürfen wir annehmen, dass

$$f(X) \cap V_z = f(X \cap U_z);$$

dann ist $g_z|_{f(X)\cap V_z} = (f|_{X \cap U_z})^{-1} = (f|_X)^{-1}|_{f(X)\cap V_z}$. Ist $a \in f(X) \cap V_z \cap V_w$ mit $z, w \in f(X)$, so ist $(f|_X)^{-1}(a) \in X \cap U_z \cap U_w$. Also ist $O = O(a, z, w) := f(U_z \cap U_w)$ $= f|_{U_z}(U_z \cap U_w)$ eine offene a-Umgebung in $V_z \cap V_w$ und $g_z|_O = (f|_{U_z \cap U_w})^{-1} = g_w|_O$. Nach Lemma 14.2 existiert eine offene Teilmenge $V \subseteq \bigcup_{z \in f(X)} V_a$ mit $f(X) \subseteq V$ und eine stetige Funktion $g \colon V \to Y$ derart, dass für jedes $x \in V$ eine offene x-Umgebung $W \subseteq V$ existiert und ein $z \in f(X)$ mit $W \subseteq V_z$ und $g|_W = g_z|_W$. Also ist g ein lokaler Homöomorphismus, folglich $U := g(V)$ offen in Y. Weiter ist $(f \circ g)|_W = (f \circ g_z)|_W = \mathrm{id}_W$, also $f|_U \circ g = \mathrm{id}_V$; somit sind $f|_U \colon U \to V$ und $g \colon V \to U$ zueinander inverse Homöomorphismen. Ist $x_0 \in X$, so ist $x := f(x_0) \in V$ und für W und z wie zuvor ist $g(x) = g_z(x) = (f|_X)^{-1}(x) = x_0$, also $X \subseteq U$. □

Ergänzungen zu Anhang C

Lemma C.3

Es sei X ein topologischer Raum und $(A_j)_{j \in J}$ eine lokalendliche Familie abgeschlossener Teilmengen $A_j \subseteq X$. Dann ist auch $A := \bigcup_{j \in J} A_j$ abgeschlossen.

Beweis. Ist $x \in X \setminus A$, so gibt es eine offene x-Umgebung U derart, dass $J_0 := \{j \in J \colon U \cap A_j \neq \emptyset\}$ endlich ist. Dann ist

$$U \setminus A = U \setminus \bigcup_{j \in J_0} A_j$$

offen in X und eine x-Umgebung. Also ist $x \in (X \setminus A)^o$, folglich $X \setminus A$ offen und A abgeschlossen. $\square$

Lemma C.4

Jeder parakompakte topologische Raum X ist regulär.

Beweis. Sei $x \in X$ und U eine offene x-Umgebung in X. Zu jedem $y \in X \setminus \{x\}$ gibt es disjunkte offene Umgebungen P_y von x und Q_y von y. Da X parakompakt ist, existiert eine den offenen Mengen

$Q_x := U$ und Q_y für $y \in X \setminus \{x\}$ untergeordnete, lokal endliche offene Überdeckung $(V_j)_{j \in J}$ von X. Dann ist also $V_j \subseteq Q_{x(j)}$ für ein $x(j) \in X$. Für jedes j in $J_1 := \{j \in J \colon x(j) \neq x\}$ ist $V_j \subseteq Q_{x(j)}$, also $V_j \subseteq X \setminus P_{x(j)}$ und somit auch $\overline{V_j} \subseteq X \setminus P_{x(j)}$, folglich $x \notin \overline{V_j}$. Nach Lemma 12.25 (a) ist die Familie $(\overline{V_j})_{j \in J_1}$ lokal endlich, somit $A := \bigcup_{j \in J_1} \overline{V_j}$ abgeschlossen (siehe Lemma C.3). Da $x \notin A$, ist $W := X \setminus A$ eine offene x-Umgebung. Aus $X = U \cup \bigcup_{j \in J_1} V_j$ folgt

$$X \setminus U \subseteq \bigcup_{j \in J_1} V_j \subseteq A,$$

also $U \supseteq X \setminus \bigcup_{j \in J_1} V_j \supseteq X \setminus A = W$. Da die zweite der vorigen Mengen abgeschlossen ist, folgt $\overline{W} \subseteq X \setminus \bigcup_{j \in J_1} V_j \subseteq U$. $\square$

Um Satz 23.1 zu beweisen, benutzen wir eine lokale Addition.

Definition D.1

Es sei M eine parakompakte glatte Mannigfaltigkeit. Eine auf einer offenen Teilmenge $Q \subseteq TM$ definierte glatte Abbildung $\Sigma\colon Q \to M$ wird eine **lokale Addition** genannt, wenn

(a) $0_x \in Q$ für alle $x \in M$ und $\Sigma(0_x) = x$ (wobei $0_x \in T_xM$); und

(b) Für alle $x \in M$ ist $T_{0_x}(\Sigma|_{T_xM\cap Q}) = \mathrm{id}_{T_xM}$.

Die Notation in (b) ist hier wie in 13.37. Wir zeigen in Anhang E:

Satz D.2

Auf jeder parakompakten glatten Mannigfaltigkeit existiert eine lokale Addition. $\square$

Beweis von Satz 23.1. Wir wählen eine lokale Addition $\Sigma\colon Q \to M$ für M und eine Riemannsche Metrik g auf M. Das Normalenbündel $(TN)^\perp$ ist eine Untermannigfaltigkeit von TM, also $W := (TN)^\perp \cap Q$ offen in $(TN)^\perp$. Weiter ist

$O_N(N) = (TN)^\perp \cap O_M(M) \subseteq W$. Die Einschränkung $h := \Sigma|_W \colon W \to M$ ist glatt und bildet $O_N(N) = \{0_x \colon x \in N\}$ bijektiv und stetig auf N ab. Die Umkehrabbildung $O_N \colon N \to O_N(N)$ ist stetig. Sei $i \colon N \to M$ die Inklusion. Wegen $h \circ O_N = i$ enthält $\operatorname{im}(T_{0_x} h)$ für $x \in N$ die Menge $\operatorname{im}(T_x(h \circ O_N)) = \operatorname{im} T_x i = T_x N$. Mit der glatten Inklusion $j \colon (T_x N)^\perp \cap W \to W \subseteq TM$ ist $(h \circ j)(y) = \Sigma|_{(T_x N)^\perp \cap Q}(y)$, also enthält $\operatorname{im}(T_x h)$ auch $\operatorname{im}(T_0(h \circ j)) = \operatorname{id}_{T_x M}((T_x N)^\perp) = (T_x N)^\perp$. Da $T_x M = T_x N \oplus (T_x N)^\perp$, ist $T_{0_x} h \colon T_{0_x}(W) = T_{0_x}((TN)^\perp) \to T_x M$ surjektiv und somit bijektiv, da auch der Definitionsbereich Dimension $\dim(M)$ hat. Nach Lemma 3.10 gibt es in W eine offene 0_x-Umgebung W_x derart, dass $h(W_x)$ offen in M und $h|_{W_x} \colon W_x \to h(W_x)$ ein C^∞-Diffeomorphismus ist. Nach Ersetzen von W durch $\bigcup_{x \in M} W_x$ dürfen wir annehmen, dass h ein lokaler C^∞-Diffeomorphismus ist. Da M parakompakt ist, liefert Satz C.1 eine offene Teilmenge $Q \subseteq W$ mit $O_N(N) \subseteq Q$ derart, dass $P := h(Q)$ offen in M und $\psi := h|_Q \colon Q \to P$ ein Homöomorphismus ist. Da ψ auch ein lokaler C^∞-Diffeomorphismus ist, ist ψ ein C^∞-Diffeomorphismus.

Mit ähnlichen Argumenten lässt sich der folgende Satz beweisen. Er dient nur der Allgemeinbildung, sein Beweis wird übersprungen.

Satz D.3

Es sei M eine parakompakte glatte Mannigfaltigkeit und $\Sigma\colon Q \to M$ eine lokale Addition. Dann existiert eine offene Teilmenge $Q_0 \subseteq Q$ mit $\{0_x : x \in M\} \subseteq Q_0$ derart, dass das Bild $\psi(Q_0)$ der Abbildung

$$\psi := (\pi_{TM}|_{Q_0}, \Sigma|_{Q_0})\colon Q_0 \to M \times M$$

in $M \times M$ offen ist und $\psi\colon Q_0 \to \psi(Q_0)$ ein C^∞-Diffeomorphismus.

Beweis. Die Abbildung $h := (\pi_{TM}|_Q, \Sigma)$ bildet die Teilmenge $O_M(M) = \{0_x : x \in M\}$ bijektiv und stetig auf die Diagonale $\Delta_M := \{(x,x) : x \in M\}$ von $M \times M$ ab und die Umkehrabbildung $(x,x) \mapsto 0_x = O_M(x)$ ist stetig, weil $O_M\colon M \to TM$, $x \mapsto 0_x$ stetig ist. Wegen $(h \circ O_M)(x) = (x,x)$ enthält $\operatorname{im}(T_{0_x} h)$ die Menge $\operatorname{im}(T_x(h \circ O)) = \Delta_{T_x M} \subseteq T_x M \times T_x M$, wobei wir $T(M \times M)$ wie üblich mit $TM \times TM$ identifizieren. Mit der glatten Inklusionsabbildung $j\colon T_xM \cap Q \to Q \subseteq TM$ ist $(h \circ j)(y) = (x, \Sigma|_{T_xM\cap Q}(y))$, also enthält $\mathrm{im}(T_x h)$ auch $\mathrm{im}(T_0(h \circ j) = \{0\} \times \mathrm{im}(\mathrm{id}_{T_xM}) = \{0\} \times T_xM$. Da $\Delta_{T_xM} + (\{0\} \times T_xM) = T_xM \times T_xM$, ist $T_{0_x}h\colon T_{0_x}Q = T_{0_x}(TM) \to T_xM \times T_xM$ surjektiv und somit bijektiv, da auch der Definitionsbereich von der Dimension $2\dim(M)$ ist. Nach Lemma 3.10 gibt es in Q eine offene 0_x-Umgebung Q_x derart, dass $h(Q_x)$ offen in $M \times M$ und $h|_{Q_x}\colon Q_x \to h(Q_x)$ ein C^∞-Diffeomorphismus ist. Nach Ersetzen von Q durch $\bigcup_{x\in M} Q_x$ dürfen wir annehmen, dass h ein lokaler C^∞-Diffeomorphismus ist. Schreiben wir M als topologische Summe σ-kompakter offener Untermannigfaltigkeiten M_j mit j in einer Indexmenge J, so ist $M \times M$ die topologische Summe der $M_i \times M_j$ mit $i, j \in J$, also parakompakt (vgl. Satz 12.26). Satz C.1 liefert also eine offene Teilmenge $Q_0 \subseteq Q$ mit $O_M(M) \subseteq Q_0$ derart, dass $h(Q_0)$ offen in $M \times M$ und $\psi := h|_{Q_0}\colon Q_0 \to h(Q_0)$ ein Homöomorphismus ist. Da ψ auch ein lokaler C^∞-Diffeomorphismus ist, ist ψ ein C^∞-Diffeomorphismus. □

Bemerkung D.4. In der Literatur wird die (stets erreichbare) Schlussfolgerung von Satz D.3 meist zur Definition einer lokalen Addition hinzugenommen. Bedingung (b) aus Definition D.1 wird manchmal nicht vorausgesetzt.

Sprays auf einer glatten Mannigfaltigkeit M sind gewisse Vektorfelder auf TM, mit deren Hilfe sich Differentialgleichungen 2. Ordnung auf M formulieren lassen.[16] Wir führen Sprays und ihre Exponentialfunktion ein. Im Rahmen dieser Vorlesung sind Sprays lediglich ein Hilfsmittel zur Konstruktion lokaler Additionen und wir behandeln ausschließlich, was für dieses Ziel erforderlich ist.

E.1. Wir betrachten zuerst eine offene Teilmenge $V \subseteq \mathbb{R}^m$; wie üblich identifizieren wir TV mit $V \times \mathbb{R}^m$, was eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$ ist. Wir identifizieren also $T^2V := T(TV)$ mit der offenen Teilmenge

$$TV \times (\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m) = V \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$$

von $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \cong \mathbb{R}^{4m}$. Ist $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $\gamma\colon I \to V$ eine C^1-Kurve, so ist

$$\dot{\gamma}(t) = (\gamma(t), \gamma'(t)) \in V \times \mathbb{R}^m.$$

[16] Und zwar solche, für welche mit γ auch $t \mapsto \gamma(st)$ eine Lösung ist für alle $s \in \mathbb{R}$.

Ist $\gamma\colon I \to V$ eine C^2-Kurve, so ist

$\ddot{\gamma}(t) = (\dot{\gamma})^{\cdot}(t) = (\gamma(t), \gamma'(t), \gamma'(t), \gamma''(t)) \in TV \times (\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m) = T^2V.$

Soll für ein glattes Vektorfeld

$$X\colon TV = V \times \mathbb{R}^m \to T(TV) = TV \times (\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m)$$

und für alle $(x_0, v_0) \in V \times \mathbb{R}^m$ eine Lösung (γ, η) des AWP

$$\dot{y}(t) = X(y(t)), \quad y(0) = (x_0, v_0) \tag{1}$$

existieren mit $\eta = \gamma'$ (so dass also $\ddot{\gamma}(t) = X(\gamma(t), \gamma'(t))$, $\gamma(0) = x_0$ und $\gamma'(0) = v_0$), so muss

$$X(x, v) = (x, v, v, f(x, v)) \tag{2}$$

sein mit einer glatten Funktion $f\colon V \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$.

E.2. Sei für $(x_0, v_0) \in V \times \mathbb{R}^m$

$$(\gamma, \eta)\colon I \to V \times \mathbb{R}^m$$

eine Lösung von (1). Gilt (2), so ist

$$(\gamma(t), \eta(t), \gamma'(t), \eta'(t)) = (\gamma(t), \eta(t), \eta(t), f(\gamma(t), \eta(t)))$$

für alle $t \in I$, folglich

$$\eta(t) = \gamma'(t)$$

und

$$\gamma''(t) = f(\gamma(t), \gamma'(t)). \tag{3}$$

Ist umgekehrt $(\gamma(0), \gamma'(0)) = (x_0, v_0)$ und gilt (3), so wird (1) durch $\dot{\gamma}$ erfüllt.

E.3. Sei wieder (2) erfüllt und $(\gamma, \gamma')\colon I \to V \times \mathbb{R}^m$ eine Lösung für (1). Für $s \in \mathbb{R}$ ist

$$I_s := \{t \in \mathbb{R}\colon\, ts \in I\}$$

ein offenes Intervall in $\mathbb{R}$ mit $0 \in I_s$. Wir betrachten die glatte Funktion

$$\gamma_s\colon I_s \to V, \quad t \mapsto \gamma(ts).$$

Dann ist $(\gamma_s)'(t) = s\gamma'(st)$ und $(\gamma_s)''(t) = s^2\gamma''(st)$; also erfüllt $(\gamma_s, (\gamma_s)')$ genau dann die DGL $\dot{y}(t) = X(y(t))$, wenn

$$s^2\gamma''(st) = (\gamma_s)''(t) = f(\gamma(st), s\gamma'(st)),$$

also $s^2 f(\gamma(st), \gamma'(st)) = f(\gamma(st), s\gamma'(st))$.

Somit gilt genau dann für alle $(x_0, v_0) \in TV$ und die maximale Lösung $(\gamma, \gamma') = \gamma_{0,x_0,v_0}\colon I \to TV$ von (1), dass für alle $s \in \mathbb{R}$ die Funktion $(\gamma_s, (\gamma_s)')\colon I_s \to TV$ die DGL $\dot{y}(t) = X(y(t))$ (und somit das AWP $\dot{y}(t) = X(y(t))$, $y(0) = (x_0, sv_0)$) löst, wenn

$$f(x, sv) = s^2 f(x, v) \text{ für alle } (x, v) \in V \times \mathbb{R}^m \text{ und } s \in \mathbb{R}. \qquad (4)$$

Definition E.4

Ist V eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^m$, so nennen wir ein glattes Vektorfeld $X\colon TV \to T^2V$ der Form (2) ein **Spray** auf V, wenn zudem (4) erfüllt ist.

Wir benötigen Notation zu zweiten Ableitungen: Ist $V \subseteq \mathbb{R}^m$ offen und $f\colon V \to \mathbb{R}^n$ eine C^2-Funktion, so ist $f'\colon V \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ $:= \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ stetig differenzierbar und

$$f''(x) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)),$$

also

$$d^{(2)}f\colon V \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n, \quad (x, y, z) \mapsto f''(x)(z)(y)$$

für festes $x \in U$ bilinear in $(y,z) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$. Es ist

$$d^{(2)}f(x,y,z) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} df(x+tz,y) = d(df)(x,y,z,0),$$

denn mit der linearen Punktauswertung $\mathrm{ev}_y \colon \mathcal{L}(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^n$, $\alpha \mapsto \alpha(y)$ ist

$$\begin{aligned} d^{(2)}f(x,y,z) &= \varepsilon_y(f''(x)(z)) = (\varepsilon_y \circ f')'(x)(z) = (df(\cdot,y))'(x)(z) \\ &= d(df)((x,y),(z,0)). \end{aligned}$$

Um Sprays auf glatten Mannigfaltigkeiten definieren zu können, brauchen wir noch ein Lemma.

Lemma E.5

Es sei $\tau \colon V \to W$ ein C^∞-Diffeomorphismus zwischen offenen Teilmengen $V \subseteq \mathbb{R}^m$ und $W \subseteq \mathbb{R}^m$. Ist $X \colon TV \to T(TV)$ ein Spray auf V, so ist $Y := T(T\tau) \circ X \circ T\tau^{-1}$ ein Spray auf W.

Beweis. Wir haben

$$T\tau \colon V \times \mathbb{R}^m \to W \times \mathbb{R}^m, \;\; (x,v) \mapsto (\tau(x), d\tau(x,v))$$

und $T(T\tau) \colon (V \times \mathbb{R}^m) \times (\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m) \to (W \times \mathbb{R}^m) \times (\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m)$,

$$\begin{aligned}(x,v,a,b) &\mapsto (T\tau(x,v), dT\tau(x,v,a,b))\\ &= (\tau(x), d\tau(x,v), d\tau(x,a), d^{(2)}\tau(x,v,a)+d\tau(x,b)).\end{aligned}$$

Gegeben $(y,w)\in W\times\mathbb{R}^m$ sei $(x,v):=T\tau^{-1}(y,w)$, so dass also $(y,w)=T\tau(x,v)=(\tau(x),d\tau(x,v))$. Dann ist

$$X(T\tau^{-1}(y,w))=X(x,v)=(x,v,v,f(x,v))$$

mit der glatten Funktion $f\colon V\times\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^m$ wie in (2). Folglich ist

$$\begin{aligned}Y(y,w) &= T^2\tau(X(x,v))=(\tau(x),d\tau(x,v),d\tau(x,v),g(y,w))\\ &= (y,w,w,g(y,w))\end{aligned}$$

mit $g(y,w):=d^{(2)}\tau(x,v,v)+d\tau(x,f(x,v))$, also (2) von Y erfüllt. Ersetzen wir w durch sw mit $s\in\mathbb{R}$, so wird v durch sv ersetzt. Also ist

$$\begin{aligned}g(y,sw) &= d^{(2)}\tau(x,sv,sv)+d\tau(x,f(x,sv))\\ &= s^2(d^{(2)}\tau(x,v,v)+d\tau(x,f(x,v)))=s^2g(y,w);\end{aligned}$$

das Vektorfeld Y erfüllt also auch (4), ist somit ein Spray. $\square$

Lemma E.6

Sind $X_1, \ldots, X_n$ Sprays auf der offenen Menge $V \subseteq \mathbb{R}^m$ und $h_1, \ldots, h_n \colon V \to \mathbb{R}$ glatte Funktionen derart, dass für alle $x \in V$

$$h_j(x) \geq 0 \text{ und } \sum_{j=1}^{n} h_j(x) = 1,$$

so ist auch $\sum_{j=1}^{n} (h_j \circ \pi_{TV}) X_j$ ein Spray auf V.

Beweis. Es ist $X_j(x, v) = (x, v, v, f_j(x, v))$ mit $f_j(x, sv) = s^2 f_j(x, v)$, somit

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{j=1}^{n} (h_j \circ \pi_{TV}) X_j(x, v)\right) &= \left(x, v, \sum_{j=1}^{n} h_j(x)(v, f_j(x, v))\right) \\
&= \left(x, v, \sum_{j=1}^{n} h_j(x) v, \sum_{j=1}^{n} h_j(x) f_j(x, v)\right) \\
&= (x, v, v, f(x, v))
\end{aligned}$$

mit $f(x, v) := \sum_{j=1}^{n} h_j(x) f_j(x, v)$. Da $f_j(x, sv) = s^2 f_j(x, v)$, ist $f(x, sv) = \sum_{j=1}^{n} h_j(x) f_j(x, sv) = s^2 f(x, v)$. □

Bemerkung E.7

Ist $X\colon TV \to T^2V$, $(x,v) \mapsto (x,v,v,f(x,v))$ ein Spray auf einer offenen Teilmenge $V \subseteq \mathbb{R}^m$, so ist für jedes $x \in V$ die maximale Lösung η des Anfangswertproblem

$$\dot{y}(t) = X(y(t)), \quad y(0) = (x,0)$$

auf ganz $\mathbb{R}$ definiert; für alle $t \in \mathbb{R}$ ist $\eta(t) = (x,0)$.

Beweis. Setzen wir $\eta(t) := (x,0)$ für $t \in \mathbb{R}$, so ist $\eta(0) = (x,0)$ und $\dot{\eta}(t) = (x,0,0,0)$. Aus $f(x,0) = f(x,00) = 0^2 f(x,0) = 0$ folgt

$$X(\eta(t)) = X(x,0) = (x,0,0,f(x,0)) = (x,0,0,0) = \dot{\eta}(t). \square$$

Definition E.8

Es sei M eine glatte Mannigfaltigkeit. Ein glattes Vektorfeld $X\colon TM \to T(TM)$ wird ein **Spray** auf M genannt, wenn $T^2\phi \circ X \circ T\phi^{-1}$ ein Spray auf V_ϕ ist für jede Karte $\phi\colon U_\phi \to V_\phi \subseteq \mathbb{R}^m$ von M.

Nach Lemma E.5 stimmt auf einer offenen Menge $V \subseteq \mathbb{R}^m$ der neue Begriff mit dem aus E.4 überein.

Satz E.9

Auf jeder parakompakten glatten Mannigfaltigkeit M existiert ein Spray.

Beweis. Es sei $\mathcal{A}$ der maximale C^∞-Atlas auf M, bestehend aus Karten $\phi\colon U_\phi \to V_\phi \subseteq \mathbb{R}^m$. Wir wählen eine glatte Partition der Eins $(h_j)_{j\in J}$ auf M, welche der offenen Überdeckung der U_ϕ untergeordnet ist. Für jedes $j \in J$ existiert also eine Karte $\phi_j\colon U_j \to V_j$ mit $\operatorname{supp}(h_j) \subseteq U_j$. Dann ist $Y_j\colon TV_j \to T(TV_j)$, $(x, v) \mapsto (x, v, v, 0)$ ein Spray auf V_j, somit $X_j := T^2(\phi_j^{-1}) \circ Y_j \circ T\phi_j$ ein Spray auf U_j. Wir zeigen, dass

$$X\colon TM \to T(TM), \quad v \mapsto \sum_{j\in J} h_j(\pi_{TM}(v))X_j(v) \tag{5}$$

an jeder Stelle v durch eine endliche Summe gegeben ist[17] und X ein Spray ist. Gegeben $v_0 \in TM$ hat $x_0 := \pi_{TM}(v_0)$ eine offene Umgebung W in M derart, dass

[17] Ist $h_j(\pi_{TM}(v)) = 0$, lese man den Summanden als 0.

$$J_0 := \{j \in J \colon W \cap \operatorname{supp}(h_j) \neq \emptyset\}$$

endlich ist. Ist $j \in J_0$ und $x_0 \notin \operatorname{supp}(h_j)$, können wir W durch seinen Schnitt mit $X \setminus \operatorname{supp}(h_j)$ ersetzen; also sei o.B.d.A. $x_0 \in \operatorname{supp}(h_j) \subseteq U_j$ für alle $j \in J_0$ und somit $U := W \cap \bigcap_{j \in J_0} U_j$ eine offene x_0-Umgebung in M. Für alle v in der offenen v_0-Umgebung TU in TM verschwinden in (5) dann alle Summanden mit $j \in J \setminus J_0$; also ist

$$X(v) = \sum_{j \in J_0} h_j(\pi_{TM}(v))X_j(v).$$

Somit ist $X|_{TU}$ glatt und aus Lemma E.5 folgt, dass $X|_{TU}$ ein Spray auf U ist (für $k \in J_0$ ist $T^2(\phi_k|_U) \circ X|_{TU} \circ T(\phi_k|_U)^{-1}$ punktweise eine Konvexkombination der Sprays $T^2(\phi_k|_U) \circ X_j|_{TU} \circ T(\phi_k|_U)^{-1}$ mit $j \in J_0$). $\square$

Lemma E.10

Ist M eine C^∞-Mannigfaltigkeit und $X \colon TM \to T^2M$ ein Spray, so gilt:

(a) Ist $\eta \colon I \to TM$ eine Lösung der Differentialgleichung $\dot{y}(t) = X(y(t))$, so gilt $\eta = \dot{\gamma}$ für $\gamma := \pi_{TM} \circ \eta$.

(b) Für den Fluss $\mathrm{Fl}\colon \Omega \to TM$ der DGL $\dot{y}(t) = X(y(t))$ ist $\Omega_{1,0} = \{v \in TM\colon (1,0,v) \in \Omega\}$ eine offene Teilmenge von TM und $O_M(M) = \{0_x \in T_xM\colon x \in M\} \subseteq \Omega_{1,0}$.

(c) Die Abbildung $\exp_X\colon \Omega_{1,0} \to M,\ v \mapsto \pi_{TM}(\mathrm{Fl}_{1,0}(v))$ ist eine lokale Addition auf M.

Hierbei ist $\Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times TM$ (vgl. Definition 17.5).

Man nennt $\exp_X$ die zum Spray gehörige **Exponentialfunktion**.

Beweis. (a) Wir dürfen annehmen, dass $\eta(I) \subseteq TU_\phi$ für eine Karte $\phi\colon U_\phi \to V_\phi \subseteq \mathbb{R}^m$ von M, da sich I durch solche Teilintervalle überdecken lässt. Es ist $Y := T^2\phi \circ X|_{TU_\phi} \circ T\phi^{-1}$ ein Spray auf V_ϕ und da $X|_{TU_\phi}$ und Y über $T\phi$ verknüpft sind, ist $\zeta := T\phi \circ \eta$ eine Lösung der DGL $\dot{y}(t) = Y(y(t))$, somit $\zeta = \dot{\theta}$ mit $\theta := \pi_{TV_\phi} \circ \zeta = \mathrm{pr}_1 \circ \zeta$ (siehe E.2). Aus

$$\gamma := \pi_{TM} \circ \eta = \pi_{TM} \circ T\phi^{-1} \circ \zeta = \phi^{-1} \circ \pi_{TV_\phi} \circ \zeta = \phi^{-1} \circ \theta$$

folgt $\dot{\gamma} = T\phi^{-1} \circ \dot{\theta} = T\phi^{-1} \circ \zeta = \eta$.

(b) und (c): Für jedes $x \in M$ ist $0_x \in \Omega_{1,0}$ und $\exp_X(x) = x$ (siehe

Bemerkung E.7); also ist $O_M(M) \subseteq \Omega_{1,0}$. Weiter ist $\Omega_{1,0}$ in TM offen und FI glatt (vgl. Satz 17.25), somit auch $\exp_X$ glatt. Für $x \in M$ und $v \in T_xM$ ist $rv \in \Omega_{1,0}$ für genügend kleines $r > 0$. Sei $\eta\colon I \to M$ mit $[0,1] \subseteq I$ eine Lösung des AWP $\dot{y}(t) = X(y(t))$, $y(0) = rv$; weiter sei $\gamma := \mathrm{pr}_{TM} \circ \eta$, so dass $\eta = \dot{\gamma}$, nach (a). Für alle $s \in [0,1]$ ist dann $t \mapsto \eta(st)$ die Lösung des AWP mit srv an Stelle von rv, insbesondere mit $t = 1$

$$\gamma(s) = \pi_{TM}(\eta(st)) = \exp_X(srv).$$

Somit gilt

$$\begin{aligned} T_{0_x}(\exp_X|_{T_xM\cap\Omega_{1,0}})(rv) &= [s \mapsto \exp_X(srv)] = [s \mapsto \gamma(s)] \\ &= \dot{\gamma}(0) = \eta(0) = rv. \end{aligned}$$

Also ist $T_{0_x}(\exp_X|_{T_xM\cap\Omega_{1,0}})(v) = v$ und folglich $T_{0_x}(\exp_X|_{T_xM\cap\Omega_{1,0}}) = \mathrm{id}_{T_xM}$. $\square$

Beweis von Satz 23.1. Nach Satz E.9 existiert auf M ein Spray; nach Lemma E.10 ist die zugehörige Exponentialfunktion eine lokale Addition auf M.

Literatur

Das Skript hat insbesondere von den folgenden Werken profitiert:

- M. P. do Carmo, "Riemannian Geometry," Birkhäuser, Boston, 1992;
- O. Forster, "Analysis 3," Vieweg, 1984;
- S. Lang, "Fundamentals of Differential Geometry," Springer, New York, 1999;
- J.-P. Serre, "Lie Algebras and Lie Groups," Springer, Berlin, 1992; und
- R. W. Sharpe, "Differential Geometry," Springer, New York, 2000.

Serres Buch diente als Quelle für Konstruktionen mit Submersionen und den Satz von Godement (wobei der dortige Rahmen allerdings anders ist und analytische Mannigfaltigkeiten über vollständig bewerteten Körpern diskutiert werden). Langs Buch war hilfreich für die Diskussion von Sprays, tubularen Umgebungen, den Satz von Stokes sowie symplektische Mannigfaltigkeiten, wobei bei Lang allgemeiner Mannigfaltigkeiten behandelt werden, welche auf (nicht notwendig endlich-dimensionalen) Banachräumen modelliert sind. Satz 24.1 und Lemma 24.2 variieren Argumente aus Langs Buch.[18] Sharpes Buch nutze im Hinblick auf verknüpfte Vektorfelder und äußere Ableitungen von Differentialformen. Auch Forsters Buch war nützlich für die Diskussion von Differentialformen, wobei dort nur Untermannigfaltigkeiten von $\mathbb{R}^n$ betrachtet werden. Die Diskussion affiner Zusammenhänge und kovarianter Ableitungen basiert auf do Carmos Buch. Hintergrund zu Flüssen von Differentialgleichungen und Parameterabhängigkeit findet man unter anderem bei

- H. Cartan, "Differentialrechnung," BI-Wissenschaftsverlag, Mannheim, 1974 sowie
- J. Dieudonné, "Foundations of Modern Analysis," Academic Press, New York, 1960;

auch Ideen aus einem Buchmanuskript des Dozenten gingen ein.[19]

[18] Die zurückgehen auf R. Godement, "Théorie des faisceaux," Hermann, Paris, 1964 (Seite 150).

[19] H. Glöckner und K.-H. Neeb, "Infinite-Dimensional Lie Groups."

Eine Einführung zu Liegruppen findet man z.B. in

- J. Hilgert und K.-H. Neeb, "Structure and Geometry of Lie Groups," Springer, New York, 2012 oder
- J. J. Duistermaat und J. A. C. Kolk, "Lie Groups," Springer, Berlin, 2000.

Für Anwendungen der Differentialgeometrie in der Physik, siehe

- I. Agricola und T. Friedrich, "Globale Analysis," Vieweg, Braunschweig, 2001

sowie

- V. I. Arnold, "Mathematical Methods of Classical Mechanics," Springer, New York, 1989.

Anwendungsbezüge werden auch betont in der Monographie

- R. Abraham, J. E. Marsden und T. Ratiu, "Manifolds, Tensor Analysis, and Applications," Springer, New York, 1988.

Zum Einlesen in Riemannsche Geometrie erwähne ich

- Kühnel, W., "Differentialgeometrie," Springer, Wiesbaden, 2013.

Ein zweibändiges Standardwerk zur Differentialgeometrie ist

- S. Kobayashi und K. Nomizu, “Foundations of Differential Geometry” I+II, Interscience Publishers, New York, 1963 & 1969;

für symplektische Geometrie, siehe

- D. McDuff und D. Salamon, “Introduction to Symplectic Topology,” Oxford University Press, Oxford, 2017.

Topologische Grundlagen können bei Bedarf nachgelesen werden in

- B. v. Querenburg, “Mengentheoretische Topologie,” Springer, Berlin, 1979 oder
- H. Schubert, “Topologie,” B. G. Teubner, Stuttgart, 1975.