Reelle Analysis: Maß- und Integrationstheorie

Universität Paderborn, WS 2019/20

Prof. Dr. Helge Glöckner

Vorwort

Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung für Funktionen einer Veränderlichen setzt das (bestimmte) Integral einer Funktion in Beziehung zu ihrer Stammfunktion und stellt die Integration als eine "Umkehrung" des Differenzierens dar. Er gibt uns damit ein Werkzeug in die Hand, konkrete Integrale explizit zu berechnen.

In dieser Vorlesung beschäftigen wir uns mit der Integralrechnung für Funktionen mehrerer Veränderlicher, wo die Verhältnisse leider nicht mehr so einfach sind. Das hat sich bereits bei der Differentialrechnung im $\mathbb{R}^n$ angedeutet, bei der Methoden der linearen Algebra ins Spiel kamen. In der mehrdimensionalen Integralrechnung sehen wir uns dem Problem gegenüber, dass es zum Berechnen von Integralen kein Werkzeug gibt, das ähnlich griffig wäre wie der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung im $\mathbb{R}^1$. Zwar werden wir gegen Ende des Semesters den *Gaußschen Integralsatz* kennenlernen, der sich im Eindimensionalen auf den Hauptsatz reduziert; jedoch spielt er nicht die gleiche Rolle.

Zur mehrdimensionalen Integralrechnung gibt es im wesentlichen zwei Zugänge. Der erste Zugang über das Riemann-Integral ist weniger abstrakt und hat den Vorteil, dass man direkt an Vertrautes anknüpfen kann. Jedoch trägt der Ansatz nicht weit genug: Viele für die Analysis und ihre Anwendungen wichtige Resultate bleiben so unerreichbar. Wir folgen hier daher einem zweiten Zugang, der uns über die Maßtheorie zum Lebesgueschen Integral führen wird. Die Vorteile des Lebesgue-Integrals gegenüber dem Riemann-Integral werden hierbei schnell deutlich werden.

In Teil I sehen wir uns einige Grundbegriffe der Maßtheorie an, die für alles Weitere unentbehrlich sind. Dann beschäftigen wir uns mit allgemeiner Integrationstheorie (Teil II). In Teil III werden die wichtigsten Hilfsmittel zur konkreten Berechnung von Mehrfachintegralen bereitgestellt: Der Satz von Fubini und die Transformationsformel für Integrale (das Analogon der Substitutionsregel aus der Analysis I). In den letzten beiden Teilen des Skripts wenden wir uns der Integration über Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^n$ und den Integralsätzen von Gauß, Green und Stokes zu, die beispielsweise für die Physik von fundamentaler Bedeutung sind.

Das vorliegende Skript profitierte von einem Skript von Prof. K.-H. Neeb (damals TU Darmstadt) vom WS 1999/2000 und einem darauf aufbauenden Skript von Prof. Roch (TU Darmstadt) vom WS 2002/2003.

Literatur

Da das Skript in sich geschlossen ist, ist weitere Lektüre für das Verständnis nicht erforderlich. Dennoch einige Hinweise zur Lehrbuchliteratur:

Exzellente Bücher zur Maß- und Integrationstheorie sind u.a.

- H. Bauer, “Maß- und Integrationstheorie,” de Gruyter, Berlin, 1992;
- W. Rudin, “Real and Complex Analysis,” McGraw-Hill Book Co., Singapore, 1987.

Hierbei ist Bauers Buch mehr auf die Bedürfnisse der Wahrscheinlichkeitstheorie ausgerichtet, während sich Rudins Buch an angehende Analytiker richtet. Beide Bücher gehen allerdings über die Ziele der Vorlesung hinaus.

Ebenfalls für eine vertiefende Beschäftigung mit Maß- und Integrationstheorie geeignet ist

- J. Elstrodt, “Maß- und Integrationstheorie,” Springer-Verlag, Berlin, 2002;

in diesem Buch finden Sie auch eine Fülle an Hintergrundwissen und historischen Randbemerkungen.

Anwendungen und schöne Aufgaben findet man in Forsters Buch

- O. Forster, “Analysis 3,” Vieweg Verlag, Braunschweig, 1984,

in dem allerdings ein unüblicher (mit der Vorlesung nicht verträglicher) Zugang zur Integrationstheorie verfolgt wird, der die (für viele Zwecke wichtige!) Maßtheorie vermeidet.

In der Bibliothek finden Sie auch

- Th. Bröcker, “Analysis II” sowie “Analysis III,” jeweils B. I. Wissenschaftsverlag, Mannheim 1992 (recht knapp!).

Eine weiter in die Tiefe gehende Diskussion der Integralsätze finden Sie bei Forster oder Bröcker, die jedoch gleich Differentialformen auf Untermannigfaltigkeiten behandeln (während wir uns hier auf die klassischen Integralsätze beschränken).

Hinweise zum Skript

Es wurde angestrebt, das Skript in sich geschlossen zu halten und lediglich einige Standardresultate der Analysis 1 und 2 zu benutzen. Insbesondere konnte die Kenntnis von Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^n$ nicht vorausgesetzt werden, die folglich im Skript eingeführt werden mussten. Weitere Merkmale des Skripts:

- Es wurde versucht, die typischen Argumentationsweisen und Grundstrukturen der Maß- und Integrationstheorie herauszuarbeiten. Hierzu gehören einerseits die zwei großen Beweisprinzipien, andererseits die Grundkonstruktionen von Maßen wie z.B. Bildmaße sowie Maße mit Dichten, auf die sich dann viele spätere Beweis- und Konstruktionsschritte zurückführen lassen.

- Im Hauptteil des Skripts wird zwar die Eindeutigkeit des Lebesgue-Borel-Maßes bewiesen, nicht aber seine Existenz, die wir erst einmal als gegeben hinnehmen. Für Interessierte steht der Existenzbeweis in einer auf das Skript abgestimmten Form als Anhang bereit.

- Die Kapitel über Mannigfaltigkeiten, Flächenmaße und Integralsätze gehören nicht zum Lehrstoff der Lehramts-Studierenden, deren Vorlesung “Analysis 3” ja auch nur mit 3 SWS angesetzt ist.

Teil I: Grundbegriffe der Maßtheorie

Der abstrakte Rahmen der Maßtheorie sieht folgendermaßen aus: Gegeben ist eine Menge X (z.B. $X = \mathbb{R}^n$), eine Menge $\mathcal{S}$ von Teilmengen von X sowie eine Funktion

$$\mu \colon \mathcal{S} \to [0, \infty] , \qquad A \mapsto \mu(A) .$$

Wir stellen uns vor, dass die Elemente von $\mathcal{S}$ gerade diejenigen Teilmengen von X sind, die man *messen* kann (denen man ein "Volumen" zuordnen kann), und dass $\mu(A)$ das *Maß* (oder "Volumen") von $A \in \mathcal{S}$ ist. Welche Eigenschaften sollte dieser Messprozess aufweisen? Es sollte sicher

$$\mu(\emptyset) \;=\; 0 \tag{1}$$

gelten, und wenn $A_1, A_2 \in \mathcal{S}$ disjunkt sind, so sollte

$$\mu(A_1 \cup A_2) \;=\; \mu(A_1) + \mu(A_2) \tag{2}$$

sein. Um Approximationsargumente zu ermöglichen (z.B. das Ausschöpfen einer Menge durch eine Folge paarweise disjunkter Teilmengen), brauchen wir eine Version von (2) für abzählbar vielen Mengen: Wir fordern, dass für jede Folge $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ paarweise disjunkter Mengen $A_n \in \mathcal{S}$

$$\mu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \Big) \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \tag{3}$$

gilt. Damit man (1) und (3) für das Mengensystem $\mathcal{S}$ überhaupt formulieren kann, muss $\mathcal{S}$ natürlich die leere Menge enthalten und gegenüber abzählbaren disjunkten Vereinigungen abgeschlossen sein. Es ist bequem, zusätzlich Abgeschlossenheit von $\mathcal{S}$ unter (nicht notwendig disjunkten) abzählbaren Vereinigungen zu verlangen sowie $A^c \in \mathcal{S}$ für jede Menge $A \in \mathcal{S}$, d.h. Komplemente messbarer Mengen sind ebenfalls messbar. In diesem Falle nennt man $\mathcal{S}$ eine *σ-Algebra.* Eine Funktion $\mu \colon \mathcal{S} \to [0, \infty]$ auf einer σ-Algebra $\mathcal{S}$, welche die Bedingungen (1) und (3) erfüllt, nennt man ein *Maß.*

1 Messräume und messbare Funktionen

1.1 Messbare Mengen

Die Überlegungen der Einleitung führen auf folgende Definition:

Definition 1.1 Es sei X eine Menge. Eine Menge $\mathcal{S}$ von Teilmengen von X heißt *σ-Algebra*, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

S1 $\emptyset \in \mathcal{S}$;

S2 Für jede Menge $A \in \mathcal{S}$ ist $A^c := X \setminus A \in \mathcal{S}$, d.h. $\mathcal{S}$ ist abgeschlossen unter Komplementbildung;

S3 Für jede Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Mengen $A_n \in \mathcal{S}$ ist $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{S}$, d.h. $\mathcal{S}$ ist abgeschlossen unter abzählbaren Vereinigungen.

Ist $\mathcal{S}$ eine σ-Algebra von Teilmengen von X, so nennt man das Paar $(X, \mathcal{S})$ einen *Messraum*[1] und die Elemente von $\mathcal{S}$ die *messbaren Mengen*.

Bemerkung 1.2 (a) Jede σ-Algebra $\mathcal{S}$ ist wegen **S2** und **S3** auch abgeschlossen unter abzählbaren Durchschnitten, denn aus den de Morganschen Identitäten folgt

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n^c\Big)^c \in \mathcal{S}$$

für jede Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{S}$.

(b) Wegen **S2** ist auch $X = \emptyset^c \in \mathcal{S}$ und weiter erhalten wir für $A, B \in \mathcal{S}$ auch $A \setminus B = A \cap B^c \in \mathcal{S}$.

1.3 Beispiele. Es sei X eine beliebige Menge.

(a) $\{\emptyset, X\}$ ist die kleinste σ-Algebra auf X.

(b) Die Potenzmenge $\mathcal{P}(X) := \{A : A \subseteq X\}$ (die Menge aller Teilmengen von X) ist die größte σ-Algebra auf X.

(c) Es sei $\mathcal{A}$ die Menge aller Teilmengen $A \subseteq X$ derart, dass A oder $X \setminus A$ abzählbar ist. Dann ist $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra auf X (Details: Übung H13).

[1] Auch das Wort “messbarer Raum” ist gebräuchlich.

(d) Aus σ-Algebren auf X kann man σ-Algebren auf Teilmengen von X gewinnen:

Ist $(X, \mathcal{S})$ ein Messraum und $Y \subseteq X$ eine Teilmenge, so ist

$$\mathcal{S}|_Y \;:=\; \{A \cap Y \colon A \in \mathcal{S}\} \;\subseteq\; \mathcal{P}(Y)$$

eine σ-Algebra auf Y. Falls $Y \in \mathcal{S}$, so ist $\mathcal{S}|_Y = \{A \in \mathcal{S} \colon A \subseteq Y\}$.

Beispielsweise folgt aus $\emptyset \in \mathcal{S}$ sofort $\emptyset = \emptyset \cap Y \in \mathcal{S}|_Y$, d.h. $\mathcal{S}|_Y$ erfüllt **S1**. Die restlichen Details überprüfen wir in Übung P13.

Definition 1.4 Die σ-Algebra $\mathcal{S}|_Y$ aus Beispiel 1.3 (d) wird die *Spur von $\mathcal{S}$ auf Y* genannt.

Lemma 1.5 *Es sei X eine Menge.*

(a) *Ist $\mathcal{M}$ eine nicht-leere Menge von σ-Algebren auf X, so ist deren Durchschnitt*[2]

$$\bigcap \mathcal{M} \;:=\; \bigcap_{\mathcal{S} \in \mathcal{M}} \mathcal{S} \;=\; \{A \subseteq X : A \in \mathcal{S} \text{ für alle } \mathcal{S} \in \mathcal{M}\}$$

ebenfalls eine σ-Algebra auf X.

(b) *Für jede Menge $\mathcal{E}$ von Teilmengen von X (also $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(X)$) gibt es eine kleinste σ-Algebra $\sigma(\mathcal{E})$, die $\mathcal{E}$ enthält.*[3]

Beweis. (a) **S1**: Es gilt $\emptyset \in \mathcal{S}$ für alle $\mathcal{S} \in \mathcal{M}$ und somit $\emptyset \in \bigcap \mathcal{M}$. **S2**: Ist $A \in \bigcap \mathcal{M}$, so gilt $A \in \mathcal{S}$ für alle $\mathcal{S} \in \mathcal{M}$ und somit auch $A^c \in \mathcal{S}$, da $\mathcal{S}$ eine σ-Algebra ist. Somit $A^c \in \bigcap \mathcal{M}$. **S3**: Es sei $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Mengen $A_n \in \bigcap \mathcal{M}$. Für jedes $\mathcal{S} \in \mathcal{M}$ gilt dann $A_n \in \mathcal{S}$ für jedes n und somit $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{S}$, da $\mathcal{S}$ eine σ-Algebra ist. Folglich ist $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \bigcap \mathcal{M}$.

(b) Wir betrachten die Menge $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{P}(X))$ aller σ-Algebren $\mathcal{S}$ auf X derart, dass $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{S}$. Die Menge $\mathcal{M}$ ist nicht leer, denn $\mathcal{P}(X)$ ist eine σ-Algebra, die $\mathcal{E}$ enthält (siehe Beispiel 1.3 (b)). Nach Teil (a) ist

$$\sigma(\mathcal{E}) \;:=\; \bigcap \mathcal{M}$$

[2] Hier ist also $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{P}(X))$.

[3] Damit meinen wir das folgende: 1. $\sigma(\mathcal{E})$ ist eine σ-Algebra, die $\mathcal{E}$ enthält; und 2.: ist $\mathcal{S}$ eine σ-Algebra, die $\mathcal{E}$ enthält, so gilt $\sigma(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{S}$.

eine σ-Algebra. Da $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{S}$ für alle $\mathcal{S} \in \mathcal{M}$, gilt $\mathcal{E} \subseteq \bigcap \mathcal{M} = \sigma(E)$; es ist also $\sigma(\mathcal{E})$ eine σ-Algebra, die $\mathcal{E}$ enthält. Ist nun $\mathcal{S}$ irgendeine σ-Algebra auf X, die $\mathcal{E}$ enthält, so ist $\mathcal{S} \in \mathcal{M}$ und somit $\sigma(\mathcal{E}) = \bigcap \mathcal{M} \subseteq \mathcal{S}$. Also ist in der Tat $\sigma(\mathcal{E})$ die kleinste solche σ-Algebra. $\square$

Definition 1.6 In Lemma 1.5 (b) nennt man $\sigma(\mathcal{E})$ die *von $\mathcal{E}$ erzeugte σ-Algebra*. Ist $\mathcal{S}$ eine σ-Algebra und $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{S}$ eine Teilmenge mit $\mathcal{S} = \sigma(\mathcal{E})$, so nennt man $\mathcal{E}$ ein *Erzeugendensystem* für die σ-Algebra $\mathcal{S}$.

Beispiel. Wir betrachten die Menge $\mathcal{E} := \big\{\{1,2\}, \{2,3\}\big\}$ von Teilmengen von $X := \{1,2,3\}$. Da $\mathcal{E} \subseteq \sigma(\mathcal{E})$, gilt

$$\{1,2\} \in \sigma(\mathcal{E}) \quad \text{und} \quad \{2,3\} \in \sigma(\mathcal{E})\,.$$

Da $\sigma(\mathcal{E})$ als σ-Algebra unter Komplementen und endlichen Durchschnitten abgeschlossen ist, folgt

$$\{3\} = \{1,2\}^c \in \sigma(\mathcal{E})\,, \quad \{1\} = \{2,3\}^c \in \sigma(\mathcal{E}) \quad \text{und} \quad \{2\} = \{1,2\} \cap \{2,3\} \in \sigma(\mathcal{E})\,.$$

Da jede Teilmenge A von $X = \{1,2,3\}$ eine Vereinigung von endlich vielen der vorigen Mengen ist, gilt $A \in \sigma(\mathcal{E})$. Also ist $\sigma(\mathcal{E}) = \mathcal{P}(X)$ die volle Potenzmenge von X.

Bemerkung 1.7 Im Beweis von Lemma 1.5 (b) haben wir die von einem Mengensystem $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(X)$ erzeugte σ-Algebra $\sigma(\mathcal{E})$ "von oben kommend" konstruiert, als den Durchschnitt einer gewissen Menge von σ-Algebren. Es ist im allgemeinen *nicht* möglich, $\sigma(\mathcal{E})$ (wie im vorigen Beispiel) in endlich oder abzählbar vielen Schritten "von unten kommend" aufzubauen, indem man alle Komplemente und abzählbaren Vereinigungen von Mengen aus $\mathcal{E}$ zu $\mathcal{E}$ hinzunimmt und dann diesen Vorgang wieder und wieder wiederholt: Diese naive Vorstellung ist falsch! [4]

[4] Mittels "transfiniter Induktion" (einer raffinerten Beweismethode) lässt sich die Grundidee des von-unten-Aufbauens (in modifizierter Form!) retten, was dann sogar zusätzliche Information über $\sigma(\mathcal{E})$ liefert. Dies nur als Zukunftsmusik – solch fortgeschrittene Techniken haben wir hier nicht zur Verfügung!

1.2 Borelmengen

Dem $\mathbb{R}^n$ (und allgemeiner jedem metrischen oder topologischen Raum) kann man in natürlicher Weise eine σ-Algebra zuordnen, nämlich die von der Menge $\mathcal{O}$ aller offenen Teilmengen erzeugte σ-Algebra $\sigma(\mathcal{O})$. Bevor wir diese diskutieren, sei an die Definition metrischer und topologischer Räume und weitere Grundbegriffe erinnert.[5]

Definition 1.8 Es sei X eine Menge. Eine Menge $\mathcal{O}$ von Teilmengen $U \subseteq X$ wird eine *Topologie* auf X genannt, wenn gilt:

(O1) Es gilt $\emptyset \in \mathcal{O}$ und $X \in \mathcal{O}$.

(O2) Für alle $U, V \in \mathcal{O}$ gilt $U \cap V \in \mathcal{O}$.

(O3) Für jede Familie $(U_j)_{j \in J}$ von Mengen $U_j \in \mathcal{O}$ gilt $\bigcup_{j \in J} U_j \in \mathcal{O}$.

Ein *topologischer Raum* ist ein Paar $(X, \mathcal{O})$, wobei X eine Menge ist und $\mathcal{O}$ eine Topologie auf X. Die Mengen $U \in \mathcal{O}$ nennt man dann die *offenen* Teilmengen von X, ihre Komplemente $X \setminus U$ *abgeschlossen*. Eine Abbildung $f\colon X \to Y$ zwischen topologischen Räumen X und Y heißt *stetig*, wenn $f^{-1}(U)$ in X offen ist für jede offene Teilmenge $U \subseteq Y$. Stetige bijektive Abbildungen mit stetiger Umkehrfunktion werden *Homöomorphismen* genannt.

Definition 1.9 Ein *metrischer Raum* ist ein Paar (X, d) aus einer Menge X und einer *Metrik* d auf X, d.h. einer Funktion $d\colon X \times X \to [0, \infty[$ mit den folgenden Eigenschaften:

M1 $d(x, y) = 0$ genau dann, wenn $x = y$.

M2 Symmetrie: Für alle $x, y \in X$ gilt $d(x, y) = d(y, x)$.

M3 Dreiecksungleichung: Für alle $x, y, z \in X$ gilt $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Ist (X, d) ein metrischer Raum, so nennt man

$$B_\varepsilon(x) := \{y \in X \colon d(x, y) < \varepsilon\}$$

[5] Siehe z.B. Prof. Glöckners Skript zur Analysis 2 an der Universität Paderborn im SoSe 2019, verfügbar in PANDA.

die offene Kugel vom Radius $\varepsilon > 0$ um $x \in X$. Ist (X, d) ein metrischer Raum, so wird eine Teilmenge $U \subseteq X$ *offen* genannt, wenn für jedes $x \in U$ ein $\varepsilon > 0$ existiert mit

$$B_\varepsilon(x) \subseteq U.$$

Die Menge $\mathcal{O}$ aller offenen Teilmengen eines metrischen Raums (X, d) ist eine Topologie auf X; jeder metrische Raum (X, d) hat also einen zugrunde liegenden topologischen Raum $(X, \mathcal{O})$.

1.10 Beispiele. (a) Der euklidische Abstand $d(x, y) := \|x - y\|_2$ macht $\mathbb{R}^n$ zu einem metrischen Raum. Wenn nichts anderes gesagt wird, versehen wir $\mathbb{R}^n$ stets mit dieser Metrik.

(b) Ist (X, d) ein metrischer Raum und Y eine Teilmenge, so ist die Einschränkung $d|_{Y\times Y}$ von d auf $Y \times Y$ eine Metrik auf Y, die sogenannte *induzierte Metrik*. Somit ist $(Y, d|_{Y\times Y})$ ein metrischer Raum.

(c) Durch Kombination von (a) und (b) können wir insbesondere jede Teilmenge $Y \subseteq \mathbb{R}^n$ als metrischen Raum betrachten, versehen mit der vom euklidischen Abstand induzierten Metrik

$$Y \times Y \to [0, \infty[\quad (x, y) \mapsto \|x - y\|_2 .$$

Dies sind die metrischen Räume, die für unsere Zwecke wirklich von Bedeutung sind.

(d) Ist $(X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum und $Y \subseteq X$ eine Teilmenge, so ist $\mathcal{O}_Y := \{U \cap Y : U \in \mathcal{O}\}$ eine Topologie auf Y, die sogenannte *induzierte Topologie*. In der Situation von (b) ist die $(Y, d_{Y\times Y})$ zugrunde liegende Topologie die induzerte Topologie $\mathcal{O}_Y$. Die Mengen $V \in \mathcal{O}_Y$ nennt man *relativ offen* (oder kurz: *offen in* Y). Siehe Aufgabe P6 für Grundtatsachen zu induzierten Metriken und induzierten Topologien.

1.11 Sind $(X_1, \mathcal{O}_1)$ und $(X_2, \mathcal{O}_2)$ topologische Räume, so ist

$$\mathcal{O} := \{U \subseteq X_1 \times X_2 \colon (\forall (x, y) \in U)(\exists V \in \mathcal{O}_1, W \in \mathcal{O}_2)\ (x, y) \in V \times W \subseteq U\}$$

eine Topologie auf $X_1 \times X_2$, die sogenannte Produkttopologie. Sind (X_1, d_1) und (X_2, d_2) metrische Räume, so definiert

$$d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) := \max\{d_1(x_1, x_2), d_2(y_1, y_2)\}$$

eine Metrik auf $X_1 \times X_2$, deren zugrunde liegende Topologie die Produkttopologie ist (siehe Aufgabe H15 für Grundtatsachen zu Produkttopologien und Maximummetriken).

Nun zurück zur Maßtheorie.

Definition 1.12 Ist $(X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum, so heißt die von $\mathcal{O}$ erzeugte σ-Algebra $\mathcal{B}(X) := \sigma(\mathcal{O})$ die *σ-Algebra der Borelmengen* auf X, und die Elemente $A \in \mathcal{B}(X)$ heißen *Borelmengen.*

Bemerkung 1.13 Es ist klar, dass alle offenen und alle abgeschlossenen Mengen Borelmengen sind, ebenso abzählbare Durchschnitte offener Mengen (sogenannte *G_δ-Mengen*) und abzählbare Vereinigungen abgeschlossener Mengen (sogenannte *F_σ-Mengen*).

Versehen wir den Raum $\mathbb{R}^n$ mit der euklidischen Metrik $d(x, y) = \|x - y\|_2$, so erhalten wir die σ-Algebra $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ der Borelmengen von $\mathbb{R}^n$. Dies sind diejenigen Mengen, denen wir später ein Volumen zuordnen und über die wir integrieren werden. Wenn nichts anderes gesagt wird, versehen wir $\mathbb{R}^n$ stets mit der σ-Algebra der Borelmengen. Es ist nützlich, äquivalente Beschreibungen von $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ zur Verfügung zu haben.

Satz 1.14 *Jedes der folgenden Mengensysteme $\mathcal{E}_j$ erzeugt die σ-Algebra $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ der Borelmengen von $\mathbb{R}$ (es ist also $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\mathcal{E}_j)$):*

(a) $\mathcal{E}_1 := \{]a, b[\colon a, b \in \mathbb{Q},\ a < b\}$;

(b) $\mathcal{E}_2 := \{]a, b[\colon a, b \in \mathbb{R},\ a < b\}$;

(c) $\mathcal{E}_3 := \{[a, b[\colon a, b \in \mathbb{R},\ a < b\}$;

(d) $\mathcal{E}_4 := \{[a, b] \colon a, b \in \mathbb{R},\ a < b\}$;

(e) $\mathcal{E}_5 := \{]-\infty, b] \colon b \in \mathbb{R}\}$.

Beweis. Wegen $\mathcal{E}_1 \subseteq \mathcal{E}_2$ ist $\sigma(\mathcal{E}_1) \subseteq \sigma(\mathcal{E}_2)$ (denn es ist $\sigma(\mathcal{E}_2)$ eine σ-Algebra, die $\mathcal{E}_1$ enthält und somit $\sigma(\mathcal{E}_1) \subseteq \sigma(\mathcal{E}_2)$, siehe Fußnote zu Lemma 1.5 (b)). Aus

$$]a, b[= \bigcup_{n=1}^{\infty} [a + \tfrac{1}{n}, b[$$

folgt $\mathcal{E}_2 \subseteq \sigma(\mathcal{E}_3)$ und somit $\sigma(\mathcal{E}_2) \subseteq \sigma(\mathcal{E}_3)$. Analog folgt aus

$$[a, b[= \bigcup_{n=1}^{\infty} [a, b - \tfrac{1}{n}]\,,$$

dass $\mathcal{E}_3 \subseteq \sigma(\mathcal{E}_4)$ und somit $\sigma(\mathcal{E}_3) \subseteq \sigma(\mathcal{E}_4)$; aus

$$[a,b] \ = \,]{-\infty}, b] \setminus \Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \,]{-\infty}, a - \tfrac{1}{n}] \Big)$$

folgt $\mathcal{E}_4 \subseteq \sigma(\mathcal{E}_5)$ und somit $\sigma(\mathcal{E}_4) \subseteq \sigma(\mathcal{E}_5)$. Wir haben also $\sigma(\mathcal{E}_1) \subseteq \sigma(\mathcal{E}_2) \subseteq \sigma(\mathcal{E}_3) \subseteq \sigma(\mathcal{E}_4) \subseteq \sigma(\mathcal{E}_5) \subseteq \mathcal{B}(\mathbb{R})$ erhalten und müssen noch $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subseteq \sigma(\mathcal{E}_1)$ zeigen. Da $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ von den offenen Mengen erzeugt wird, müssen wir zeigen, dass $\sigma(\mathcal{E}_1)$ jede offene Menge enthält. Sei also $U \subseteq \mathbb{R}$ offen. Dann gibt es zu jedem $x \in U$ ein $\varepsilon > 0$ mit $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\, \subseteq U$. Wir wählen $a \in \,]x-\varepsilon, x[\, \cap \mathbb{Q}$ und $b \in \,]x, x+\varepsilon[\, \cap \mathbb{Q}$. Dann ist $x \in \,]a,b[\,$, folglich

$$U \ = \bigcup_{]a,b[\subseteq U, a,b\in\mathbb{Q}}]a,b[\,.$$

Da die rechte Seite eine abzählbare Vereinigung ist, folgt $U \in \sigma(\mathcal{E}_1)$. □

Ein analoges Resultat gilt im $\mathbb{R}^n$. Definieren wir für $a = (a_1, \ldots, a_n)$ und $b = (b_1, \ldots, b_n)$ mit $a_k < b_k$ den *offenen Quader*

$$]a,b[\, := \prod_{k=1}^{n}]a_k, b_k[\, = \ \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : a_k < x_k < b_k \text{ für alle } k\}$$

und den *halboffenen Quader* $[a,b[\, := \prod_{k=1}^{n} [a_k, b_k[\,$, so erhalten wir wie in Satz 1.14:

Lemma 1.15 *Die Menge* $\mathcal{E} := \{\,]a,b[\, : a,b \in \mathbb{Q}^n$ *mit* $a_k < b_k\}$ *aller offenen Quader mit rationalen Ecken erzeugt* $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. *Auch die Menge aller halboffenen Quader erzeugt* $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$.

Beweis. Der Beweis wird in der Übung geführt (Aufgabe H14). □

Bemerkung 1.16 Man kann zeigen, dass $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ eine echte Teilmenge der Potenzmenge $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ ist, es gibt also Teilmengen von $\mathbb{R}^n$, die keine Borelmengen sind. Dies ist leider nicht ganz einfach! Im wesentlichen gibt es zwei Beweismethoden.

(a) Methode 1. In einer späteren Übung werden wir uns (mit Anleitung) selbst überlegen, dass es auf der vollen Potenzmenge $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ kein translationsinvariantes Maß[6] geben kann, das jedem Quader sein natürliches Volumen (das Produkt der Seitenlängen) zuordnet. Auf $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ jedoch gibt es ein solches Maß, wie wir sehen werden (das Lebesgue-Borel-Maß). Somit muss $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ sein.

(b) Die *zweite Beweismethode* können wir hier nur andeuten, da die benötigten Hilfsmittel unsere Möglichkeiten übersteigen. Man zeigt zunächst,[7] dass die Borelsche σ-Algebra $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ die gleiche Mächtigkeit besitzt wie die reellen Zahlen, d.h. es gibt eine bijektive Abbildung $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$. Die volle Potenzmenge $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ hat jedoch aufgrund des Cantorschen Diagonalarguments eine echt größere Mächtigkeit als $\mathbb{R}^n$ (und somit als $\mathbb{R}$), d.h. es gibt eine injektive Abbildung $\mathbb{R}^n \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, aber keine injektive Abbildung in umgekehrter Richtung. Somit hat $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ eine echt größere Mächtigkeit als $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$; die zwei Mengen können daher nicht zusammenfallen.

1.3 Messbare Funktionen

Wir wenden uns nun den Funktionen zu, die wir später integrieren wollen.

Definition 1.17 Es seien $(X_1, \mathcal{S}_1)$ und $(X_2, \mathcal{S}_2)$ Messräume. Eine Funktion $f\colon X_1 \to X_2$ heißt *messbar*, wenn das Urbild[8] jeder messbaren Menge messbar ist, d.h. $f^{-1}(A) \in \mathcal{S}_1$ für jede Menge $A \in \mathcal{S}_2$.

Man beachte die formale Ähnlichkeit dieser Definition zur Definition stetiger Funktionen über die Eigenschaft, dass Urbilder offener Mengen offen sind.

Notation. Wenn wir in der Situation von Definition 1.17 ganz klar machen wollen, dass die σ-Algebren $\mathcal{S}_1$ und $\mathcal{S}_2$ benutzt werden, schreiben wir auch $f : (X_1, \mathcal{S}_1) \to (X_2, \mathcal{S}_2)$ (obwohl natürlich f nach wie vor eine Funktion $X_1 \to X_2$ ist).

[6] D.h. $A \subseteq \mathbb{R}^n$ und $A + x$ haben stets das gleiche Maß.

[7] Man benutzt hierbei, dass nach Lemma 1.15 die σ-Algebra $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ von einer abzählbaren Menge $\mathcal{E}$ erzeugt wird. Die in der Fußnote zu Bemerkung 1.7 erwähnte Technik des "von-unten-Aufbauens" von $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) = \sigma(\mathcal{E})$ (durch transfinite Induktion bis zur ersten überabzählbaren Ordinalzahl) liefert eine obere Schranke für die Mächtigkeit der erzeugten σ-Algebra.

[8] Zur Erinnerung: $f^{-1}(A) := \{x \in X_1 \colon f(x) \in A\}$.

Wir diskutieren nun einige Beispiele messbarer Funktionen.

Beispiel 1.18 (Konstante Funktionen). *Sind* $(X_1, \mathcal{S}_1)$ *und* $(X_2, \mathcal{S}_2)$ *beliebige Messräume, so ist jede konstante Funktion* $f\colon X_1 \to X_2$ *messbar.*

Sei nämlich $f(x) = c$. Für $A \in \mathcal{S}_2$ gilt dann $f^{-1}(A) = X_1 \in \mathcal{S}_1$ (falls $c \in A$) oder $f^{-1}(A) = \emptyset \in \mathcal{S}_1$ (falls $c \notin A$).

Beispiel 1.19 (Funktionen mit zwei Werten). Es sei $(X, \mathcal{S})$ ein Messraum. Wann ist eine Funktion $f\colon X \to \mathbb{R}$ mit zwei Werten (etwa 0 und 1) messbar? Dazu betrachten wir für jede Menge $A \subseteq X$ ihre *charakteristische Funktion*[9]

$$\mathbf{1}_A\colon X \to \mathbb{R}\,, \quad \mathbf{1}_A(x) \;:=\; \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in A \\ 0 & \text{falls } x \notin A. \end{cases}$$

Diese Funktion ist genau dann messbar, wenn $A \in \mathcal{S}$, denn für verschiedene $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ durchläuft $\mathbf{1}_A^{-1}(B)$ die Menge $\{\emptyset,\, A,\, X \setminus A,\, X\}$.

Charakteristische Funktionen messbarer Mengen spielen in der Integrationstheorie eine wichtige Rolle. Wir schreiben gelegentlich auch $\mathbf{1}_A^X := \mathbf{1}_A$, wenn wir betonen wollen, dass $\mathbf{1}_A$ als Funktion auf X zu verstehen ist.

Beispiel 1.20 (Inklusionsabbildung). *Es sei* $(X, \mathcal{S})$ *ein Messraum,* $Y \subseteq X$ *eine Teilmenge und* $j\colon Y \to X$, $j(x) := x$ *die Inklusionsabbildung. Dann ist* $j\colon (Y, \mathcal{S}|_Y) \to (X, \mathcal{S})$ *messbar, wobei* $\mathcal{S}|_Y$ *die Spur von* $\mathcal{S}$ *auf* Y *ist* (*wie in Definition* 1.4).

Für jede Teilmenge $A \in \mathcal{S}$ von X gilt nämlich offensichtlich

$$j^{-1}(A) \;=\; A \cap Y \;\in\; \mathcal{S}|_Y\,. \tag{4}$$

Beispiel 1.21 (Messbare Funktionen in Teilmengen von Messräumen). *Es sei* $(X, \mathcal{S})$ *ein Messraum,* $Y \subseteq X$ *eine Teilmenge und* $j : Y \to X$, $j(x) := x$ *die Inklusionsabbildung. Ist auch* $(Z, \mathcal{T})$ *ein Messraum, so ist eine Abbildung* $f\colon Z \to Y$ *genau dann messbar als Abbildung nach* Y*, wenn sie als Abbildung nach* X *messbar ist. Genauer:* $f : (Z, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{S}|_Y)$ *ist messbar genau dann, wenn* $j \circ f\colon (Z, \mathcal{T}) \to (X, \mathcal{S})$ *messbar ist.*

Für jede messbare Teilmenge $A \in \mathcal{S}$ von X gilt nach (4) nämlich

$$(j \circ f)^{-1}(A) = f^{-1}(j^{-1}(A)) = f^{-1}(A \cap Y)\,.$$

[9] In der Literatur bezeichnet man charakteristische Funktionen auch häufig mit χ_A.

Da hier $B := A \cap Y$ die σ-Algebra $\mathcal{S}|_Y$ durchläuft, ist genau dann $(j \circ f)^{-1}(A) \in \mathcal{T}$ für alle $A \in \mathcal{S}$ (also $j \circ f$ messbar), wenn $f^{-1}(B) \in \mathcal{T}$ für alle $B \in \mathcal{S}|_Y$ (wenn also f messbar ist).

Da die Definition messbarer Funktionen auf der Untersuchung von Urbildern beruht, ist es wichtig, sich die Eigenschaften von Urbildern klar zu machen. Ganz entscheidend ist, dass die Bildung von Urbildern mit den mengentheoretischen Operationen verträglich ist:

Lemma 1.22 (Operationentreue der Urbild-Abbildung) *Es sei $f\colon X \to Y$ eine Funktion. Dann gilt:*

(a) $f^{-1}(Y) = X$ *und* $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$.

(b) $f^{-1}(B \backslash A) = f^{-1}(B) \backslash f^{-1}(A)$ *für alle* $A, B \subseteq Y$, *insbesondere* $f^{-1}(A^c) = f^{-1}(A)^c$.

(c) *Ist* $(A_j)_{j \in J}$ *eine Familie von Teilmengen von* Y, *so gilt*

$$f^{-1}\Big(\bigcup_{j \in J} A_j\Big) = \bigcup_{j \in J} f^{-1}(A_j) \quad \text{und} \tag{5}$$

$$f^{-1}\Big(\bigcap_{j \in J} A_j\Big) = \bigcap_{j \in J} f^{-1}(A_j)\,. \tag{6}$$

Sind die Mengen A_j paarweise disjunkt, so auch die Mengen $f^{-1}(A_j)$.

Beweis. Wir zeigen beispielhaft Gleichung (5). Hierzu sei $(A_j)_{j \in J}$ eine Familie von Teilmengen $A_j \subseteq Y$. Für $x \in X$ sind äquivalent:

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(\textstyle\bigcup_{j \in J} A_j) \;&\Leftrightarrow\; f(x) \in \textstyle\bigcup_{j \in J} A_j \;\Leftrightarrow\; (\exists j \in J)\;\; f(x) \in A_j \\ &\Leftrightarrow\; (\exists j \in J)\;\; x \in f^{-1}(A_j) \;\Leftrightarrow\; x \in \textstyle\bigcup_{j \in J} f^{-1}(A_j)\,. \end{aligned}$$

Also gilt (5). Die übrigen Behauptungen werden in der Übung bewiesen (Aufgabe P12). □

Satz 1.23 *Kompositionen messbarer Funktionen sind messbar. Genauer: Sind $(X_1, \mathcal{S}_1)$, $(X_2, \mathcal{S}_2)$ und $(X_3, \mathcal{S}_3)$ Messräume und $f : X_1 \to X_2$ und $g : X_2 \to X_3$ messbare Funktionen, so ist auch $g \circ f\colon X_1 \to X_3$ messbar.*

Beweis. Für $A \in \mathcal{S}_3$ ist

$$(g \circ f)^{-1}(A) = f^{-1}\big(g^{-1}(A)\big) \in \mathcal{S}_1\,,$$

da $g^{-1}(A) \in \mathcal{S}_2$ wegen der Messbarkeit von g und somit $f^{-1}(g^{-1}(A)) \in \mathcal{S}_1$ wegen der Messbarkeit von f. Also ist $g \circ f$ messbar. □

Beispiel 1.24 *Ist $f\colon (X, \mathcal{S}) \to (Z, \mathcal{T})$ messbar und $Y \subseteq X$ eine Teilmenge, so ist die Einschränkung $f|_Y : (Y, \mathcal{S}|_Y) \to (Z, \mathcal{T})$ messbar.* Begründung: $f|_Y = f \circ j$ ist die Komposition der messbaren Funktion f und der Inklusionsabbildung $j : Y \to X$, $j(x) := x$, die nach Beispiel 1.20 messbar ist. Nach Satz 1.23 ist somit $f|_Y$ messbar.

Der folgende Satz zeigt, dass es für das Überprüfen der Messbarkeit einer Funktion nicht erforderlich ist, die Urbilder *aller* messbaren Mengen zu betrachten.

Satz 1.25 *Es seien $(X_1, \mathcal{S}_1)$ und $(X_2, \mathcal{S}_2)$ Messräume und $f\colon X_1 \to X_2$ eine Funktion. Ist $\mathcal{S}_2 = \sigma(\mathcal{E})$ für eine Menge $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(X_2)$ von Teilmengen von X_2, so ist f genau dann messbar, wenn $f^{-1}(A) \in \mathcal{S}_1$ für alle $A \in \mathcal{E}$.*

Beweis. Die Implikation "$\Rightarrow$" ist trivial. Sei nun $f^{-1}(A) \in \mathcal{S}_1$ für alle $A \in \mathcal{E}$; dann ist

$$\mathcal{E} \;\subseteq\; \{A \subseteq Y\colon f^{-1}(A) \in \mathcal{S}_1\} \;=:\; \mathcal{T}\,.$$

Man überzeugt sich leicht davon, dass $\mathcal{T}$ eine σ-Algebra ist; um z.B. **S3** für $\mathcal{T}$ nachweisen, sei $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Mengen $A_n \in \mathcal{T}$. Dann ist $f^{-1}(A_n) \in \mathcal{S}_1$ per Definition von $\mathcal{T}$ und somit auch

$$f^{-1}\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) \;=\; \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f^{-1}(A_n) \;\in\; \mathcal{S}_1\,,$$

wobei die Operationentreue der Urbild-Abbildung (Lemma 1.22 (c)) benutzt wurde. Also ist $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{T}$. Die Eigenschaften **S1** und **S2** überprüft man analog (Übung P15(b)). Da $\mathcal{T}$ die Menge $\mathcal{E}$ enthält, enthält $\mathcal{T}$ auch die von $\mathcal{E}$ erzeugte σ-Algebra $\sigma(\mathcal{E}) = \mathcal{S}_2$. Also gilt

$$\mathcal{S}_2 \;\subseteq\; \{A \subseteq X_2\colon f^{-1}(A) \in \mathcal{S}_1\}$$

und somit ist f messbar. $\square$

Spezialfall: Ist $(X_2, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum, so ist f als Abbildung von $(X_1, \mathcal{S}_1)$ nach $(X_2, \mathcal{B}(X_2))$ genau dann messbar, wenn das Urbild jeder offenen Menge in $\mathcal{S}_1$ ist.

Folgerung 1.26 *Sind X und Y topologische Räume, so ist jede stetige Funktion $f\colon X \to Y$ messbar (bzgl. der σ-Algebren $\mathcal{B}(X)$ und $\mathcal{B}(Y)$ der Borelmengen).*

Beweis. Wir wir gerade gesehen haben, genügt es zu zeigen, dass $f^{-1}(U)$ für jede offene Menge $U \subseteq Y$ eine Borelmenge ist. Dies aber ist klar: Da f stetig ist, ist $f^{-1}(U)$ offen, also erst recht eine Borelmenge. $\square$

Folgerung 1.27 *Es sei $(X, \mathcal{S})$ ein Messraum und $f\colon X \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(a) $f\colon (X, \mathcal{S}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ *ist messbar.*

(b) *Die Urbilder aller offenen Intervalle sind messbar.*

(c) *Die Urbilder aller halboffenen Intervalle sind messbar.*

(d) *Die Urbilder aller abgeschlossenen Intervalle sind messbar.*

(e) *Für alle $b \in \mathbb{R}$ ist $f^{-1}(]-\infty, b])$ messbar.*

Beweis. Dies folgt direkt aus Satz 1.14 und Lemma 1.25. $\square$

Der nächste Beweis führt uns die Nützlichkeit von Folgerung 1.27 klar vor Augen. Ohne dieses Hilfsmittel hätte man wohl keine Chance!

Folgerung 1.28 *Jede monoton wachsende (oder fallende) Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist messbar.*

Beweis. Da f monoton ist, ist das Urbild $f^{-1}(I)$ jedes offenen Intervalls $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und somit eine Borelmenge. Nach Folgerung 1.27 (b) ist f messbar. $\square$

Lemma 1.15 liefert zu Folgerung 1.27 analoge Aussagen für Funktionen nach $\mathbb{R}^n$. Auch gilt:

Satz 1.29 *Es sei $(X, \mathcal{S})$ ein Messraum und $f = (f_1, \ldots, f_n)\colon X \to \mathbb{R}^n$ eine Funktion. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(a) $f\colon (X, \mathcal{S}) \to (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ *ist messbar.*

(b) *Jede der Koordinatenfunktionen $f_k\colon X \to \mathbb{R}$ ist messbar als Funktion von $(X, \mathcal{S})$ nach $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.*

Beweis. (a)⇒(b): Die Koordinatenprojektionen

$$\mathrm{pr}_k\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad x = (x_1, \ldots, x_n) \mapsto x_k$$

sind stetig und somit messbar nach Folgerung 1.26. Nach Satz 1.23 sind dann auch Funktionen $f_k = \mathrm{pr}_k \circ f$ messbar.

(b)⇒(a): Seien $a, b \in \mathbb{R}^n$. Sind alle Koordinatenfunktionen $f_j\colon X \to \mathbb{R}$ messbar, so ist für jeden offenen Quader $]a, b[= \prod_{k=1}^n]a_k, b_k[$ in $\mathbb{R}^n$ das Urbild

$$f^{-1}(]a, b[) \;=\; \bigcap_{k=1}^n f_k^{-1}(]a_k, b_k[)$$

messbar. Da die Menge aller offenen Quader $]a, b[$ nach Lemma 1.15 die σ-Algebra $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ der Borelmengen erzeugt, ist f nach Satz 1.25 messbar. □

Hier ist eine sehr wichtige Anwendung:

Satz 1.30 *Es sei $(X, \mathcal{S})$ ein Messraum und $f, g\colon (X, \mathcal{S}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ messbare Funktionen. Dann sind auch die Funktionen $f + g$, fg, $|f|$, $\max(f, g)$, $\min(f, g)\colon X \to \mathbb{R}$ messbar.*[10]

Beweis. Die Betragsfunktion $|\cdot|\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist stetig und somit messbar nach Folgerung 1.26. Also ist $|f| = |\cdot| \circ f$ messbar als Komposition messbarer Funktionen (Satz 1.23). Aus Satz 1.29 wissen wir, dass die Funktion

$$F \;:=\; (f, g)\,:\; X \to \mathbb{R}^2$$

mit den Komponenten f und g messbar ist. Weiter ist

$$h\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\,, \quad (x, y) \mapsto x + y$$

[10] Diese Funktionen sind punktweise definiert, es ist also z.B. $\max(f, g)(x) := \max\big(f(x), g(x)\big)$.

stetig und somit messbar und daher $f + g = h \circ F$ messbar als Komposition messbarer Funktionen. Die restlichen Behauptungen folgen analog in Anbetracht der Stetigkeit der Abbildungen $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, die (x, y) auf xy, $\max(x, y)$ bzw. $\min(x, y)$ abbilden. $\square$

Da konstante Funktionen messbar sind, bilden also die messbaren Funktionen $X \to \mathbb{R}$ insbesondere einen reellen Vektorraum.

Es ist nützlich, die Überlegung aus dem Beweis von Satz 1.25 als Lemma festzuhalten (siehe auch Übung P15(b)):

Lemma 1.31 *Ist $f\colon X \to Y$ eine Funktion und $\mathcal{S}$ eine σ-Algebra auf X, so ist*

$$f_*(\mathcal{S}) \;:=\; \{A \subseteq Y\colon f^{-1}(A) \in \mathcal{S}\} \tag{7}$$

eine σ-Algebra auf Y. $\square$

Man nennt $f_*(\mathcal{S})$ das *direkte Bild* von $\mathcal{S}$ unter f. Beachten Sie, dass für $A \in f_*(\mathcal{S})$ per Definition $f^{-1}(A) \in \mathcal{S}$. Also ist $f : (X, \mathcal{S}) \to (Y, f_*(\mathcal{S}))$ messbar.

Wir beenden den Abschnitt mit einer weiteren Anwendung von Satz 1.25.

Definition. Sind $(X_1, \mathcal{S}_1)$ und $(X_2, \mathcal{S}_2)$ Messräume, so nennen wir

$$\mathcal{S}_1 \otimes \mathcal{S}_2 := \sigma(\{A_1 \times A_2\colon A_1 \in \mathcal{S}_1, A_2 \in \mathcal{S}_2\})$$

die *Produkt-σ-Algebra* auf $X_1 \times X_2$.

Satz. *Die Produkt-σ-Algebra hat folgende Eigenschaften.*

(a) *Für $j \in \{1, 2\}$ ist die Projektion $\mathrm{pr}_j\colon X_1 \times X_2 \to X_j$, $(x_1, x_2) \mapsto x_j$ messbar als Funktion $(X_1 \times X_2, \mathcal{S}_1 \otimes \mathcal{S}_2) \to (X_j, \mathcal{S}_j)$.*

(b) *Ist $(Y, \mathcal{S})$ ein Messraum, so ist eine Funktion*

$$f = (f_1, f_2)\colon Y \to X_1 \times X_2$$

genau dann messbar als Funktion $(Y, \mathcal{S}) \to (X_1 \times X_2, \mathcal{S}_1 \otimes \mathcal{S}_2)$, wenn $f_1\colon (Y, \mathcal{S}) \to (X_1, \mathcal{S}_1)$ und $f_2\colon (Y, \mathcal{S}) \to (X_2, \mathcal{S}_2)$ messbar sind.

(c) *Ist $\mathcal{S}$ eine σ-Algebra auf $X_1 \times X_2$ derart, dass*

$$\mathrm{pr}_j\colon (X_1 \times X_2, \mathcal{S}) \to (X_j, \mathcal{S}_j)$$

für beide $j \in \{1, 2\}$ messbar ist, so ist $\mathcal{S}_1 \otimes \mathcal{S}_2 \subseteq \mathcal{S}$.

Also ist $\mathcal{S}_1 \otimes \mathcal{S}_2$ die kleinste σ-Algebra auf $X_1 \times X_2$, welche beide Projektionen messbar macht.

Beweis. (a) Für jedes $A \in \mathcal{S}_1$ ist $\mathrm{pr}_1^{-1}(A) = A \times X_2 \in \mathcal{S}_1 \times \mathcal{S}_2$ (da $A \in \mathcal{S}_1$ und $X_2 \in \mathcal{S}_2$, ist $A \times X_2$ sogar im Erzeugendensystem der Produkt-σ-Algebra). Also ist pr_1 messbar. Analog sieht man, dass pr_2 messbar ist.

(b) Ist f messbar, so auch $f_1 = \mathrm{pr}_1 \circ f$ und $f_2 = \mathrm{pr}_2 \circ f$ nach Satz 1.23, als Komposition messbarer Funktionen (unter Benutzung von (a)). Seien umgekehrt f_1 und f_2 messbar. Können wir zeigen, dass

$$f^{-1}(A_1 \times A_2) \in \mathcal{S}$$

für alle $A_1 \in \mathcal{S}_1$ und $A_2 \in \mathcal{S}_2$, so ist f nach Satz 1.25 messbar. In der Tat ist

$$\begin{aligned} f^{-1}(A_1 \times A_2) &= \{x \in Y\colon f(x) = (f_1(x), f_2(x)) \in A_1 \times A_2\} \\ &= (f_1)^{-1}(A_1) \cap (f_2)^{-1}(A_2) \in \mathcal{S}. \end{aligned}$$

(c) Da pr_1 und pr_2 auf $X := X_1 \times X_2$ mit der σ-Algebra $\mathcal{S}$ messbar vorausgesetzt sind, ist nach (b)

$$\mathrm{id}_X = (\mathrm{pr}_1, \mathrm{pr}_2)$$

messbar als Abbildung $(X, \mathcal{S}) \to (X, \mathcal{S}_1 \otimes \mathcal{S}_2)$. Also ist $A = (\mathrm{id}_X)^{-1}(A) \in \mathcal{S}$ für alle $A \in \mathcal{S}_1 \otimes \mathcal{S}_2$ und somit $\mathcal{S}_1 \otimes \mathcal{S}_2 \subseteq \mathcal{S}$. □

1.4 Hilfsmittel zum Prüfen der Messbarkeit von Funktionen

In diesem Abschnitt entwickeln wir weitere Resultate, die beim Überprüfen der Messbarkeit von Funktionen von Nutzen sein können. Wie etwa würden Sie begründen, dass die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) := \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ \cos(x) & \text{für } x \geq 0 \end{cases} \tag{8}$$

messbar ist? Man könnte dies zwar von Hand schaffen, aber es ist doch sehr bequem, allgemeine Hilfsmittel zur Diskussion solcher stückweise definierten Funktionen zur Verfügung zu haben. Diese Hilfsmittel werden nun bereitgestellt.

Zunächst schauen wir uns an, wie die Borelmengen eines topologischen Raums und die Borelmengen eines Unterraums zueinander in Beziehung stehen.

Satz 1.32 *Es sei $(X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum und $Y \subseteq X$ eine Teilmenge, die wir mit der induzierten Topologie $\mathcal{O}_Y$ versehen. Dann ist die σ-Algebra der Borelmengen von $(Y, \mathcal{O}_Y)$ gleich der Spur von $\mathcal{B}(X)$ auf Y, also*

$$\mathcal{B}(Y) \;=\; \mathcal{B}(X)|_Y \;=\; \{Y \cap A \colon A \in \mathcal{B}(X)\}\,.$$

Gilt $Y \in \mathcal{B}(X)$ (wenn also z.B. $Y \subseteq X$ offen ist oder abgeschlossen), so ist folglich $\mathcal{B}(Y) = \{A \in \mathcal{B}(X) \colon A \subseteq Y\} \subseteq \mathcal{B}(X)$.

Als Hilfsmittel für den Beweis führen wir eine Notation ein.

Definition 1.33 Ist $f \colon X \to Y$ eine Abbildung und $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(Y)$ eine Menge von Teilmengen von Y, so schreiben wir

$$f^{-1}(\mathcal{E}) \;:=\; \{f^{-1}(A) \colon A \in \mathcal{E}\}$$

für die Menge aller Urbilder der Mengen aus $\mathcal{E}$.

Lemma 1.34 *Es sei $f \colon X \to Y$ eine Abbildung. Dann gilt:*

(a) *Ist $\mathcal{S}$ eine σ-Algebra auf Y, so ist $f^{-1}(\mathcal{S})$ eine σ-Algebra auf X, somit $(X, f^{-1}(\mathcal{S}))$ ein Messraum. Die Abbildung $f \colon (X, f^{-1}(\mathcal{S})) \to (Y, \mathcal{S})$ ist messbar.*

(b) *Für die von einer Teilmenge $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(Y)$ erzeugte σ-Algebra $\sigma(\mathcal{E})$ gilt:*

$$f^{-1}(\sigma(\mathcal{E})) = \sigma(f^{-1}(\mathcal{E}))\,.$$

Beweis. (a) Die erste Behauptung wurde in Übung P15(a) gezeigt. Ist $A \in \mathcal{S}$, so ist $f^{-1}(A) \in f^{-1}(\mathcal{S})$, somit $f \colon (X, f^{-1}(\mathcal{S})) \to (Y, \mathcal{S})$ messbar.

(b) Da $\mathcal{E} \subseteq \sigma(\mathcal{E})$, ist auch $f^{-1}(\mathcal{E}) \subseteq f^{-1}(\sigma(\mathcal{E}))$. Weil $f^{-1}(\sigma(\mathcal{E}))$ nach Teil (a) eine σ-Algebra ist, folgt

$$\sigma(f^{-1}(\mathcal{E})) \;\subseteq\; f^{-1}(\sigma(\mathcal{E}))\,. \tag{9}$$

Andererseits ist nach Lemma 1.31

$$\mathcal{T} := f_*(\sigma(f^{-1}(\mathcal{E}))) = \{A \subseteq Y : f^{-1}(A) \in \sigma(f^{-1}(\mathcal{E}))\}$$

eine σ-Algebra auf Y. Diese enthält $\mathcal{E}$, da $f^{-1}(E) \in f^{-1}(\mathcal{E}) \subseteq \sigma(f^{-1}(\mathcal{E}))$ für alle $E \in \mathcal{E}$. Somit ist $\sigma(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{T}$ und daher

$$f^{-1}(\sigma(\mathcal{E})) \subseteq f^{-1}(\mathcal{T}). \tag{10}$$

Für $A \in \mathcal{T}$ gilt aber $f^{-1}(A) \in \sigma(f^{-1}(\mathcal{E}))$ per Definition von $\mathcal{T}$. Also $f^{-1}(\mathcal{T}) \subseteq \sigma(f^{-1}(\mathcal{E}))$ und somit $f^{-1}(\sigma(\mathcal{E})) \subseteq \sigma(f^{-1}(\mathcal{E}))$ wegen (10). Mit (9) liefert dies $f^{-1}(\sigma(\mathcal{E}) = \sigma(f^{-1}(\mathcal{E}))$. □

Beispiel 1.35 Ist $(X, \mathcal{S})$ ein Messraum und $Y \subseteq X$ eine Teilmenge, so ist $\mathcal{S}|_Y = j^{-1}(\mathcal{S})$, wobei $j : Y \to X$, $j(x) := x$ die Inklusion ist (denn es ist $j^{-1}(A) = A \cap Y$ für $A \subseteq X$).

Somit erhalten wir als Spezialfall von Lemma 1.34 (b):

Ist X eine Menge und $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(X)$ eine Menge von Teilmengen von X, so gilt für die Spur von $\sigma(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{P}(X)$ auf einer Teilmenge $Y \subseteq X$:

$$\sigma(\mathcal{E})|_Y \;=\; \sigma\big(\{E \cap Y : E \in \mathcal{E}\}\big).$$

Beweis: Es sei $j : Y \to X$ die Inklusion. Nach Beispiel 1.35 und Lemma 1.34 (b) ist dann

$$\begin{aligned}\sigma(\mathcal{E})|_Y &= j^{-1}(\sigma(\mathcal{E})) \;=\; \sigma(j^{-1}(\mathcal{E})) \;=\; \sigma(\{j^{-1}(E) : E \in \mathcal{E}\})\\ &= \sigma(\{E \cap Y : E \in \mathcal{E}\}).\end{aligned}$$

Beweis von Satz 1.32. Es sei $\mathcal{O}$ die Menge aller offenen Teilmengen von X und $\mathcal{O}_Y := \{U \cap Y : U \in \mathcal{O}\}$. Nach dem gerade diskutierten Spezialfall von Lemma 1.34 (b) ist folglich

$$\mathcal{B}(X)|_Y \;=\; \sigma(\mathcal{O})|_Y \;=\; \sigma\big(\{U \cap Y : U \in \mathcal{O}\}\big) \;=\; \sigma(\mathcal{O}_Y) \;=\; \mathcal{B}(Y). \qquad \square$$

Der folgende Satz ermöglicht es in vielen Fällen, für *stückweise definierte* Funktionen deren Messbarkeit nachzuweisen.

Satz 1.36 (Stückweise messbare Funktionen sind messbar). *Es sei $(X, \mathcal{S})$ ein Messraum und $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge messbarer Mengen $X_n \in \mathcal{S}$, welche X überdecken, d.h. $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n = X$. Dann gilt:*

(a) *Eine Menge $A \subseteq X$ ist genau dann messbar, wenn $A \cap X_n$ für jedes n messbar ist.*

(b) *Ist $f : X \to Y$ eine Funktion in einen Messraum $(Y, \mathcal{T})$, so ist f messbar genau dann, wenn für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Einschränkung $f|_{X_n} : (X_n, \mathcal{S}|_{X_n}) \to (Y, \mathcal{T})$ messbar ist.*

Beweis. (a) Ist $A \in \mathcal{S}$, so ist $A \cap X_n \in \mathcal{S}$ (und weiter auch $A \cap X_n \in \mathcal{S}|_{X_n} = \{B \in \mathcal{S} \colon B \subseteq X_n\}$). Ist umgekehrt $A \cap X_n \in \mathcal{S}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ (oder äquivalent $A \cap X_n \in \mathcal{S}|_{X_n}$), so ist

$$A = A \cap X = A \cap \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n \right) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (A \cap X_n) \in \mathcal{S}.$$

(b) Ist f messbar, so ist auch die Einschränkung

$$f|_{X_n} \colon (X_n, \mathcal{S}|_{X_n}) \to (Y, \mathcal{T})$$

messbar, nach Beispiel 1.24. Sei nun umgekehrt $f|_{X_n}$ messbar für jedes n. Für jede messbare Teilmenge $A \in \mathcal{T}$ von Y ist

$$\begin{aligned} f^{-1}(A) &= X \cap f^{-1}(A) = (\bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n) \cap f^{-1}(A) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \big(X_n \cap f^{-1}(A)\big) \\ &= \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (f|_{X_n})^{-1}(A) \end{aligned}$$

messbar als abzählbare Vereinigung der messbaren Mengen $(f|_{X_n})^{-1}(A) \in \mathcal{S}|_{X_n} = \{B \in \mathcal{S} \colon B \subseteq X_n\} \subseteq \mathcal{S}$ (unter Benutzung von $X_n \in \mathcal{S}$). Also ist f messbar. $\square$

Zur Illustration diskutieren wir nun die in (8) zu Beginn des Abschnitts beschriebene, stückweise definierte Funktion.

Beispiel 1.37 Die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) := \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ \cos(x) & \text{für } x \geq 0 \end{cases}$$

ist messbar als Abbildung $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, denn die Borelmengen $X_1 :=]{-\infty}, 0[$ und $X_2 := [0, \infty[$ ($=: X_n$ für $n \geq 3$) bilden eine Überdeckung von $\mathbb{R}$ derart, dass $f|_{X_n}$ stetig und somit messbar ist.

Im Detail gehen hier die vorigen Resultate wie folgt ein: Als stetige Funktion ist $f|_{X_n}$ messbar als Abbildung $(X_n, \mathcal{B}(X_n)) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ (siehe Folgerung 1.26). Nach Satz 1.32 ist hier $\mathcal{B}(X_n) = \mathcal{B}(\mathbb{R})|_{X_n}$. Also ist nach Satz 1.36 (b) die Abbildung f messbar.

Wir stellen noch ein Hilfsmittel für die Untersuchung der Messbarkeit von Funktionen in Produkte (bzw. auf Produkten) topologischer Räume bereit.

Definition. Eine Menge $\mathcal{U}$ von offenen Teilmengen eines topologischen Raumes $(X, \mathcal{O})$ wird eine *Basis der Topologie* genannt, wenn jede offene Menge $U \subseteq X$ eine Vereinigung von Mengen aus $\mathcal{U}$ ist.[11]

Beispiele. (a) Die Menge $\mathcal{U} := \{]a, b[\colon a, b \in \mathbb{R}; \text{mit } a < b\}$ ist eine Basis der Topologie auf $\mathbb{R}$, den jede offene Teilmenge von $\mathbb{R}$ ist eine Vereinigung von Intervallen der Form $]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\in \mathcal{U}$.

(b) Die Menge $\mathcal{U} := \{B_r^X(x) \colon x \in X,\ r > 0\}$ aller offenen Kugeln ist eine Basis der Topologie auf einem metrischen Raum (X, d), denn jede offene Menge ist eine Vereinigung solcher Kugeln.

(c) Die Menge $\mathcal{U} := \{]a, b[\colon a, b \in \mathbb{Q} \text{ mit } a < b\}$ aller offenen Intervalle ist abzählbar und eine Basis der Topologie auf $\mathbb{R}$, denn jede offene Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}$ ist eine Vereinigung solcher Intervalle (siehe Beweis von Satz 1.14).

(d) Die Menge $\mathcal{U}$ aller offenen Quader $]a, b[$ mit $a = (a_1, \ldots, a_n)$ und $b = (b_1, \ldots, b_n)$ in $\mathbb{Q}^n$ und $a_k < b_k$ für $k \in \{1, \ldots, n\}$ ist abzählbar und eine Basis der Topologie auf $\mathbb{R}^n$, denn jede offene Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ ist eine Vereingung solcher Intervalle (siehe Aufgabe H14).

(e) Ist $(X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum, der eine abzählbare Basis $\mathcal{U}$ besitzt, so hat auch die induzierte Topologie $\mathcal{O}_Y$ eine abzählbare Basis für jede Teilmenge $Y \subseteq X$. Es ist nämlich

$$\mathcal{V} := \{U \cap Y \colon U \in \mathcal{U}\}$$

eine abzählbare Menge offener Teilmengen von Y. Ist $V \subseteq Y$ offen, so existiert eine offene Teilmenge $P \subseteq X$ mit $V = Y \cap P$. Es gibt eine Teilmenge $M \subseteq \mathcal{U}$ derart, dass

$$P = \bigcup_{W \in M} W.$$

[11] Es existiert also eine Teilmenge $M \subseteq \mathcal{U}$ derart, dass $U = \bigcup_{V \in M} V$.

Dann ist
$$V = Y \cap P = Y \cap \bigcup_{W \in M} W = \bigcup_{W \in M} (Y \cap W),$$
wobei $Y \cap W \in \mathcal{V}$.

Satz. *Es seien* $(X_1, \mathcal{O}_1)$ *und* $(X_2, \mathcal{O}_2)$ *topologische Räume; wir versehen* $X_1 \times X_2$ *mit der Produkttopologie* $\mathcal{O}$. *Dann gilt*
$$\mathcal{B}(X_1) \otimes \mathcal{B}(X_2) \subseteq \mathcal{B}(X_1 \times X_2).$$
Hat X_1 *eine abzählbare Basis der Topologie, ist* $\mathcal{B}(X_1) \otimes \mathcal{B}(X_2) = \mathcal{B}(X_1 \times X_2)$.

Beweis. Die Projektionen $\mathrm{pr}_j \colon X_1 \times X_2 \to X_j$, $(x_1, x_2) \mapsto x_j$ sind stetig und somit messbar als Abbildungen $(X_1 \times X_2, \mathcal{B}(X_1 \times X_2)) \to (X_j, \mathcal{B}(X_j))$, nach Folgerung 1.26. Also ist $\mathcal{B}(X_1) \otimes \mathcal{B}(X_2) \subseteq \mathcal{B}(X_1 \times X_2)$, wie im letzten Satz von §1.3 gezeigt (Teil (c)).

Habe nun X_1 eine abzählbare Basis $\{V_n \colon n \in \mathbb{N}\}$ der Topologie. Wir zeigen, dass dann jede offene Teilmenge $U \subseteq X_1 \times X_2$ ein Element von $\mathcal{B}(X_1) \otimes \mathcal{B}(X_2)$ ist, also $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{B}(X_1) \otimes \mathcal{B}(X_2)$ und somit
$$\mathcal{B}(X_1 \times X_2) = \sigma(\mathcal{O}) \subseteq \mathcal{B}(X_1) \otimes \mathcal{B}(X_2).$$
Da die umgekehrte Inklusion schon gezeigt wurde, folgt
$$\mathcal{B}(X_1 \times X_2) = \mathcal{B}(X_1) \otimes \mathcal{B}(X_2).$$
Sei also $U \in \mathcal{O}$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei Ω_n die Menge aller offenen Teilmengen $W \subseteq X_2$ derart, dass
$$V_n \times W \subseteq U.$$
Dann ist
$$W_n := \bigcup_{W \in \Omega_n} W$$
eine offene Teilmenge von X_2 und
$$V_n \times W_n = V_n \times \left(\bigcup_{W \in \Omega_n} W \right) = \bigcup_{W \in \Omega_n} (V_n \times W) \subseteq U.$$
Folglich ist
$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} (V_n \times W_n) \subseteq U.$$

Wir zeigen nun, dass
$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(V_n \times W_n) = U.$$
Da $V_n \times W_n \in \mathcal{B}(X_1) \otimes \mathcal{B}(X_2)$ für alle $n \in \mathbb{N}$, ist dann $U \in \mathcal{B}(X_1) \otimes \mathcal{B}(X_2)$ als abzählbare Vereinigung messbarer Mengen (was den Beweis beendet). Da die umgekehrte Inkluson schon gezeigt ist, braucht nur noch
$$U \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}}(V_n \times W_n)$$
gezeigt zu werden. Sei hierzu $(x_1, x_2) \in U$. Per Definition der Produkttopologie existiert eine offene Teilmenge $V \subseteq X_1$ und eine offene Teilmenge $W \subseteq X_2$ derart, dass
$$(x_1, x_2) \in V \times W \subseteq U.$$
Da V eine Vereinigung von Basismengen ist und $x_1 \in V$, existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $x_1 \in V_n \subseteq V$. Dann ist
$$(x_1, x_2) \in V_n \times W \subseteq V \times W \subseteq U,$$
also $W \subseteq W_n$ und $(x_1, x_2) \in V_n \times W_n$. □

Für die Allgemeinbildung erwähnen wir noch, dass ein metrischer Raum (X, d) genau dann eine abzählbare Basis der Topologie besitzt, wenn X separabel ist, also eine abzählbare dichte Teilmenge besitzt.

Definition. Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{O})$ heißt *separabel*, wenn er eine abzählbare dichte Teilmenge besitzt.[12]

Den folgenden Satz überspringen wir in der Vorlesung.

Satz.* *Ein metrischer Raum (X, d) hat genau dann eine abzählbare Basis der Topologie, wenn er separabel ist.*

Insbesondere ist jede Teilmenge eines separablen metrischen Raums ebenfalls separabel in der induzierten Metrik (da sich die Existenz einer abzählbaren Basis auf Teilmengen vererbt).

Beweis. Ist $X = \emptyset$, so ist X separabel und hat eine abzählbare Basis. Sei

[12] Eine Teilmenge $M \subseteq X$ heißt *dicht*, wenn ihr Abschluss ganz X ist, also $\overline{M} = X$. Äquivalent ist die Bedingung: Für jede offene, nicht leere Teilmenge $U \subseteq X$ ist $U \cap M \neq \emptyset$.

nun $X \neq \emptyset$. Ist $\{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ eine abzählbare Basis der Topologie, so dürfen wir $U_n \neq \emptyset$ annehmen für jedes $n \in \mathbb{N}$ (ist $U_n = \emptyset$, so ersetze U_n durch X). Wir wählen für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein Element $x_n \in U_n$. Dann ist die Menge $D := \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ abzählbar. Weiter ist D dicht in X, denn ist U eine nicht leere, offene Teilmenge von X, so ist U eine Vereinigung von Basismengen, somit $U_n \subseteq U$ für ein $n \in \mathbb{N}$ und folglich $x_n \in U$, also $D \cap U \neq \emptyset$.

Hat umgekehrt X eine abzählbare dichte Teilmenge D, so ist

$$\mathcal{U} := \{B^X_{1/n}(x) : n \in \mathbb{N}, x \in D\}$$

eine abzählbare Menge offener Kugeln und eine Basis der Topologie von X. Ist nämlich U eine offene Teilmenge von X, so existiert für jedes $y \in U$ ein $n \in \mathbb{N}$ mit $B^X_{2/n}(y) \subseteq U$. Da D dicht ist, gibt es ein $x \in D \cap B^X_{1/n}(y)$. Dann ist $y \in B^X_{1/n}(x)$. Weiter ist $B^X_{1/n}(x) \subseteq U$, da wegen der Dreiecksungleichung

$$d(y, z) \leq d(y, x) + d(x, z) < 1/n + 1/n = 2/n$$

für alle $z \in B^X_{1/n}(x)$ und somit $z \in B^X_{2/n}(y) \subseteq U$. Also ist

$$U = \bigcup_{V \in \mathcal{U} :\, V \subseteq U} V$$

und folglich $\mathcal{U}$ eine Basis der Topologie. □

In §1.6 werden wir weitere Hilfsmittel zum Prüfen der Messbarkeit von Funktionen kennenlernen, insbesondere einen Satz über die Messbarkeit punktweiser Grenzwerte.

1.5 Messbare Funktionen in die erweiterte Zahlengerade

Es ist oft praktisch, statt mit reellwertigen Funktionen mit Funktionen zu arbeiten, deren Werte in der **erweiterten Zahlengeraden**

$$\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$$

liegen.[13] Wir versehen nun $\overline{\mathbb{R}}$ mit einer Metrik, so dass wir insbesondere von der Borel-σ-Algebra auf $\overline{\mathbb{R}}$ sprechen können und somit auch von messbaren

[13] Hierbei sind ∞ und $-\infty$ zwei beliebige, fest gewählte Elemente, die nicht bereits in $\mathbb{R}$ liegen.

$\overline{\mathbb{R}}$-wertigen Funktionen. Zudem versehen wir $\overline{\mathbb{R}}$ mit einer totalen Ordnung und definieren eine Multiplikation auf $\overline{\mathbb{R}}$ und (partiell) eine Addition.

Metrik, Topologie und Ordnung auf $\overline{\mathbb{R}}$

Die Notationen ∞ und $-\infty$ legen nahe, wie wir $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$ anordnen wollen.

1.38 Wir setzen die übliche totale Ordnung auf $\mathbb{R}$ zu einer Relation auf $\overline{\mathbb{R}}$ fort, indem wir erklären:[14]

$$-\infty \leq x \quad \text{und} \quad x \leq \infty \qquad \text{für alle } x \in \overline{\mathbb{R}}.$$

Die so erhaltene Relation ist eine totale Ordnung auf $\overline{\mathbb{R}}$ (siehe Übung H17(a)). Wir definieren Intervalle $[a,b]$, $]a,b]$, $[a,b[$, $]a,b[\subseteq \overline{\mathbb{R}}$ für $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ mit $a < b$ auf die offensichtliche Art, z.B.

$$[a,b[:= \{x \in \overline{\mathbb{R}} \colon a \leq x < b\}.$$

1.39 Die Funktion

$$]-1,1[\to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto \frac{x}{1-x^2} \tag{11}$$

ist stetig differenzierbar mit Ableitung

$$\frac{1+x^2}{1-x^2} > 0,$$

also streng monoton wachsend und ein C^1-Diffeomorphismus (da die Funktion nach oben und unten unbeschränkt und ihr Bild daher ganz $\mathbb{R}$ ist). Setzen wir

$$h(x) := \frac{x}{1-x^2}$$

für $x \in \mathbb{R}$ sowie $h(-1) := -\infty$ und $h(1) = \infty$, so ist also auch

$$h \colon [-1,1] \to \overline{\mathbb{R}} \tag{12}$$

eine Bijektion und ein *Ordnungsisomorphismus*, d.h. für $x, y \in [-1,1]$ gilt $x \leq y$ in $[-1,1] \subseteq \mathbb{R}$ genau dann, wenn $h(x) \leq h(y)$ in $\overline{\mathbb{R}}$.

[14] Für $x, y \in \mathbb{R}$ schreiben wir also $x \leq y$ genau dann, wenn dies bisher gemacht wurde.

1.40 Wir versehen nun $\overline{\mathbb{R}}$ mit der Metrik

$$d\colon \overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}} \to [0, \infty[, \quad d(x, y) := |h^{-1}(x) - h^{-1}(y)|$$

(und der zugehörigen Topologie). Diese Metrik ist so gebaut, dass die Bijektion h zu einer Isometrie wird, es ist also

$$d(h(x), h(y)) = |y - x|$$

gleich dem Abstand in $[-1, 1]$ für alle $x, y \in [-1, 1]$. Insbesondere ist h ein Homöomorphismus (also eine stetige bijektive Abbildung mit stetiger Umkehrfunktion). Dies hat nützliche Konsequenzen:

- Da $]-1, 1[$ offen in $[-1, 1]$ ist, ist $\mathbb{R} = h(]-1, 1[)$ offen in $\overline{\mathbb{R}}$ (insbesondere also eine Borelmenge in $\overline{\mathbb{R}}$). Weiter induziert $\overline{\mathbb{R}}$ auf $\mathbb{R}$ die auf $\mathbb{R}$ übliche Topologie.[15]

- Ist $\mathcal{U}$ eine Basis für die Topologie auf $[-1, 1]$, so ist $\{h(U) \colon U \in \mathcal{U}\}$ eine Basis für die Topologie auf $\overline{\mathbb{R}}$. Wenden wir dies an mit der Menge $\mathcal{U}$ aller Mengen der Form

  $$[-1, b[, \quad]a, b[\quad \text{und} \quad]a, 1]$$

  mit $-1 \leq a < b \leq 1$, so sehen wir, dass die Intervalle

  $$[-\infty, b[, \quad]a, b[\quad \text{und} \quad]a, \infty]$$

  mit $-\infty \leq a < b \leq \infty$ eine Basis der Topologie auf $\overline{\mathbb{R}}$ bilden. Letzteres bleibt richtig, wenn wir nur $a, b \in \mathbb{Q}$ mit $a < b$ betrachten; insb. hat $\overline{\mathbb{R}}$ also eine abzählbare Basis der Topologie.

Beachten Sie, dass die Metrik auf $\overline{\mathbb{R}}$ *nicht* die Metrik auf $\mathbb{R}$ fortsetzt. Zum Beispiel ist $h(\pm 1/2) = \pm(1/2)/(1 - 1/4) = \pm 2/3$, also

$$d(2/3, -2/3) = |1/2 - (-1/2)| = 1$$

in $\overline{\mathbb{R}}$ (im Vergleich zum Abstand $|2/3 - (-2/3)| = 4/3$ in $\mathbb{R}$). Per Konstruktion ist weiter $d(x, y) \leq 2$ für alle $x, y \in \overline{\mathbb{R}}$; insbesondere ist

$$d(\infty, -\infty) = |1 - (-1)| = 2 \quad \text{und} \quad d(\infty, 0) = |1 - 0| = 1.$$

Wir wollen uns noch klar machen, wann eine Folge in $\overline{\mathbb{R}}$ konvergiert.

[15] Denn h schränkt sich ein zu einem Homöomorphismus $]-1, 1[\to \mathbb{R}$, wenn wir die induzierten Topologien benutzen; gleiches gilt für die übliche Topologie auf $\mathbb{R}$, wie wir bei der Diskussion der Abbildung (11) gesehen haben.

Satz 1.41 *Es sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\overline{\mathbb{R}}$.*

(a) *Für eine reelle Zahl x gilt genau dann $x_n \to x$, wenn ein $N \in \mathbb{N}$ existiert derart, dass $x_n \in \mathbb{R}$ für alle $n \geq N$ und die Folge $(x_n)_{n\geq N}$ in $\mathbb{R}$ gegen x konvergiert.*

(b) *Es gilt genau dann $x_n \to \infty$ in $\overline{\mathbb{R}}$, wenn*

$$(\forall r \in \mathbb{R})(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \geq N) \;\; x_n \geq r.$$

(c) *Es gilt genau dann $x_n \to -\infty$ in $\overline{\mathbb{R}}$, wenn*

$$(\forall r \in \mathbb{R})(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \geq N) \;\; x_n \leq r.$$

Beweis. (a) Gelte $x_n \in \mathbb{R}$ für $n \geq N$ und $x_n \to x$ in $\mathbb{R}$ für $N \leq n \to \infty$. Da die Inklusion $j\colon \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ stetig ist, gilt dann auch

$$x_n = j(x_n) \to j(x) = x$$

in $\overline{\mathbb{R}}$. Gelte umgekehrt $x_n \to x$ in $\overline{\mathbb{R}}$ für ein $x \in \mathbb{R}$. Da $\mathbb{R}$ in $\overline{\mathbb{R}}$ offen ist, ist $\mathbb{R}$ eine Umgebung von x in $\overline{\mathbb{R}}$. Da $x_n \to x$, existiert also ein $N \in \mathbb{N}$ derart, dass $x_n \in \mathbb{R}$ für alle $n \geq N$. Gegeben $\varepsilon > 0$ ist $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[$ eine Umgebung von x in $\overline{\mathbb{R}}$ (vgl. 1.40). Also existiert ein $n_\varepsilon \geq N$ derart, dass $x_n \in]x-\varepsilon, x+\varepsilon[$ für alle $n \geq n_\varepsilon$. Somit konvergiert $(x_n)_{n\geq N}$ auch in $\mathbb{R}$ gegen x.

(b) Jede Umgebung U von ∞ in $\overline{\mathbb{R}}$ enthält eine Umgebung der Form $[r, \infty]$, und jede solche Menge ist eine Umgebung (vgl. 1.40). Somit gilt

$$x_n \to \infty \quad \Leftrightarrow \quad (\forall r \in \mathbb{R})(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \geq N) \;\; \underbrace{x_n \in [r, \infty]}_{\Leftrightarrow x_n \geq r}$$

(c) zeigt man analog zu (b). □

Bemerkung 1.42 (a) Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *reeller* Zahlen konvergiert nach Satz 1.41(a) genau dann in $\overline{\mathbb{R}}$ gegen eine reelle Zahl x, wenn sie in $\mathbb{R}$ gegen x konvergiert.

(b) Nach Satz 1.41 (b) bzw. (c) konvergiert eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ genau dann in $\overline{\mathbb{R}}$ gegen ∞ (bzw. $-\infty$), wenn sie im Sinne der Analysis 1 bestimmt gegen ∞ divergiert (bzw. bestimmt gegen $-\infty$ divergiert).

Zur Borel-σ-Algebra auf $\overline{\mathbb{R}}$

Als metrischer Raum hat $\overline{\mathbb{R}}$ eine zu Grunde liegende Topologie, und wir können die hiervon erzeugte σ-Algebra $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$ der Borelmengen bilden. Diese soll nun untersucht werden, sowie messbare Funktionen nach $(\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$.

Satz 1.43 $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$ *hat die folgenden Eigenschaften:*

(a) *Es gilt*
$$\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}) = j_*(\mathcal{B}(\mathbb{R})) = \{A \subseteq \overline{\mathbb{R}} \colon A \cap \mathbb{R} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\},$$
wobei $j \colon \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$, $j(x) := x$ *die Inklusion ist.*

(b) *Es ist* $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})|_{\mathbb{R}} = \{A \in \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}) \colon A \subseteq \mathbb{R}\}$ *gleich der Spur von* $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$ *auf* $\mathbb{R}$, *wobei* $\mathbb{R} \in \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$.

(c) *Eine Teilmenge* $A \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ *gehört genau dann zu* $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$, *wenn Mengen* $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ *und* $C \subseteq \{-\infty, \infty\}$ *existieren mit* $A = B \cup C$.

(d) *Eine Abbildung* $f \colon (X, \mathcal{S}) \to (\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$ *mit Bild in* $\mathbb{R}$ *ist genau dann messbar, wenn sie als Abbildung nach* $\mathbb{R}$ *messbar ist, wenn also die Ko-Einschränkung* $f|^{\mathbb{R}} \colon (X, \mathcal{S}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ *messbar ist.*

Beweis. (b) Da $\mathbb{R}$ in $\overline{\mathbb{R}}$ offen ist, ist $\mathbb{R} \in \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$. Nach Satz 1.32 ist also
$$\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})|_{\mathbb{R}} = \{A \in \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}) \colon A \subseteq \mathbb{R}\}.$$

(d) ist wegen (b) ein Spezialfall von Beispiel 1.21.

(c) Ist $A \in \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$, so ist $B := A \cap \mathbb{R} \in \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})|_{\mathbb{R}} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$, nach (b). Dann ist $C := A \setminus B \subseteq \{\infty, -\infty\}$ und $A = B \cup C$.

Wie in jedem metrischen Raum ist in $\overline{\mathbb{R}}$ jede einpunktige Teilmenge $\{x\}$ (mit $x \in \overline{\mathbb{R}}$) abgeschlossen, somit auch jede endliche Teilmenge (siehe Aufgabe P16(a)). Also ist $C \in \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$ für jede Teilmenge $C \subseteq \{\infty, -\infty\}$. Da $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$ nach (b), folgt $B \cup C \in \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$ für alle $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

(a) Sei $A \subseteq \overline{\mathbb{R}}$. Ist $A \in \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$, so ist $A \cap \mathbb{R} \in \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})|_{\mathbb{R}} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Ist umgekehrt $A \cap \mathbb{R} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, so ist $A = (A \cap \mathbb{R}) \cup (A \cap \{\infty, -\infty\}) \in \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$, nach (c). Also ist
$$\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}) = \{A \subseteq \overline{\mathbb{R}} \colon \underbrace{A \cap \mathbb{R}}_{= j^{-1}(A)} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\} = j_*(\mathcal{B}(\mathbb{R})),$$
wie behauptet. □

Jedes der in 1.38 beschriebenen Intervalle in $\overline{\mathbb{R}}$ ist Element von $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$, denn sein Schnitt mit $\mathbb{R}$ ist ein Intervall in $\mathbb{R}$ und somit in $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Lemma 1.44 *Es sei $(X, \mathcal{S})$ ein Messraum und $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ eine Funktion. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(a) *Die Funktion $f : (X, \mathcal{S}) \to (\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$ ist messbar.*

(b) *$-f : (X, \mathcal{S}) \to (\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$ ist messbar.*

(c) *Für jedes $b \in \overline{\mathbb{R}}$ ist die Menge $\{x \in X : f(x) \leq b\}$ messbar.*

(d) *Für jedes $a \in \overline{\mathbb{R}}$ ist $\{x \in X : f(x) > a\}$ messbar.*

(e) *Für jedes $a \in \overline{\mathbb{R}}$ ist $\{x \in X : f(x) \geq a\}$ messbar.*

(f) *Für jedes $b \in \overline{\mathbb{R}}$ ist $\{x \in X : f(x) < b\}$ messbar.*

Beweis. (a)$\Leftrightarrow$(c): Die Menge $\mathcal{E}$ aller Intervalle $[-\infty, b]$ mit $b \in \mathbb{R}$ erzeugt eine σ-Algebra $\sigma(\mathcal{E})$ auf $\overline{\mathbb{R}}$. Wir zeigen nun, dass $\sigma(\mathcal{E}) = \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$; mit Satz 1.25 folgt hieraus, dass f genau dann messbar ist, wenn

$$f^{-1}([-\infty, b]) = \{x \in X : f(x) \leq b\} \in \mathcal{S}$$

für alle $b \in \mathbb{R}$. Also sind (a) und (c) äquivalent.[16] Da $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$, ist $\sigma(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$. Offensichtlich enthält $\sigma(\mathcal{E})$ jede der Mengen $\{-\infty\}$, $\{\infty\}$ sowie $\mathbb{R}$. Sei $j : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ die Inklusion. Für die Spur von $\sigma(\mathcal{E})$ auf $\mathbb{R}$ gilt dann

$$\begin{aligned} \sigma(\mathcal{E})|_{\mathbb{R}} &= \sigma(\{\mathbb{R} \cap A : A \in \mathcal{E}\}) = \sigma(\{[-\infty, b] \cap \mathbb{R} : b \in \mathbb{R}\}) \\ &= \sigma(\{\,]-\infty, b] : b \in \mathbb{R}\}) = \mathcal{B}(\mathbb{R}), \end{aligned}$$

wobei das erste Gleichheitszeichen auf dem in Beispiel 1.35 diskutierten Spezialfall von Lemma 1.34 (b) beruht, das letzte auf Satz 1.14 (e). Wegen $\mathbb{R} \in \sigma(\mathcal{E})$ ist also $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\mathcal{E})|_{\mathbb{R}} \subseteq \sigma(\mathcal{E})$ (siehe Ende von Beispiel 1.3 (d)). Da jede Menge $A \in \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$ Vereinigung einer Menge $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \subseteq \sigma(\mathcal{E})$ und einer Menge $C \in \big\{\emptyset, \{-\infty\}, \{\infty\}, \{-\infty, \infty\}\big\} \subseteq \sigma(\mathcal{E})$ ist, erhalten wir $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}) \subseteq \sigma(\mathcal{E})$. Somit $\sigma(\mathcal{E}) = \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$, wie behauptet.

Die Äquivalenzen (a)$\Leftrightarrow$(d), (a)$\Leftrightarrow$(e) und (a)$\Leftrightarrow$(f) zeigt man analog.

(a)$\Leftrightarrow$(b): Da $(-f)^{-1}([-\infty, b]) = f^{-1}([-b, \infty])$, ist (c) für $-f$ äquivalent zu (e) für f. Da (b) nach dem bereits Gezeigten zu (c) mit $-f$ statt f äquivalent ist und (a) zu (e), sind auch (a) und (b) äquivalent. $\square$

[16] Für $b = \infty$ ist $f^{-1}([-\infty, b]) = f^{-1}(\overline{\mathbb{R}}) = X$ immer messbar, ebenso für $b = -\infty$.

Addition und Multiplikation auf $\overline{\mathbb{R}}$

Reelle Zahlen addieren wir wie üblich. Zusätzlich definieren wir

$$\infty + x := x + \infty := \infty \quad \text{für alle } x \in \,]-\infty, \infty]$$

und

$$(-\infty) + x := x + (-\infty) := -\infty \quad \text{für alle } x \in [-\infty, \infty[.$$

Die Ausdrücke "$\infty + (-\infty)$" und "$(-\infty) + \infty$" bleiben undefiniert. Wir haben somit eine Addition

$$\alpha\colon (\overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}}) \setminus \{(\infty, -\infty), (-\infty, \infty)\} \to \overline{\mathbb{R}}, \quad (x, y) \mapsto x + y.$$

Satz 1.45 *Die Addition α von $\overline{\mathbb{R}}$ ist eine stetige Abbildung. Weiter gilt:*

(a) (Kommutativgesetz) *Gegeben $x, y \in \overline{\mathbb{R}}$ ist $x + y$ genau dann definiert, wenn $y + x$ definiert ist; in diesem Fall gilt $x + y = y + x$.*

(b) (Assoziativgesetz) *Gegeben $x, y, z \in \overline{\mathbb{R}}$ ist $x + (y + z)$ genau dann definiert, wenn $(x+y)+z$ definiert ist; in diesem Fall gilt $x+(y+z) = (x + y) + z$.*

Beweis. (a) $x + y$ und $y + x$ sind beide genau dann definiert, wenn

$$\{x, y\} \neq \{\infty, -\infty\},$$

was wir nun annehmen. Es ist $x + y = y + x = \infty$ wenn $\infty \in \{x, y\}$; es ist

$$x + y = y + x = -\infty,$$

wenn $-\infty \in \{x, y\}$. Im verbleibenden Fall $x, y \in \mathbb{R}$ gilt $x + y = y + x$, da $(\mathbb{R}, +)$ eine abelsche Gruppe ist.

(b) Sowohl $x + (y + z)$ als auch $(x + y) + z$ sind genau dann definiert, wenn

$$\begin{aligned}(x, y, z) \;\in\; & [-\infty, \infty[\,\times[-\infty, \infty[\,\times[-\infty, \infty[\\ & \cup\;]-\infty, \infty]\times\,]-\infty, \infty]\times\,]-\infty, \infty],\end{aligned}$$

was wir nun annehmen.[17] Ist $\infty \in \{x, y, z\}$, so ist

$$x + (y + z) = (x + y) + z = \infty.$$

[17] Alternativer Beweis: Sei M die Menge aller $(x, y, z) \in \overline{\mathbb{R}}\times\overline{\mathbb{R}}\times\overline{\mathbb{R}}$, für welche $f(x, y, z) := x+(y+z)$ und $g(x, y, z) := (x+y)+z$ definiert sind. Dann sind f und g stetige Funktionen in den Hausdorffschen topologischen Raum $\overline{\mathbb{R}}$ und es gilt $f|_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}} = g|_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}}$ wegen des Assoziativgesetzes in $(\mathbb{R}, +)$. Da $\mathbb{R}$ in $\overline{\mathbb{R}}$ dicht ist, ist $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ in $\overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}}$ und somit auch in M dicht (siehe Aufgabe P18 (d) und (e)). Mit Aufgabe P18(c) folgt nun $f = g$.

Ist $-\infty \in \{x, y, z\}$, so ist $x + (y + z) = (x + y) + z = -\infty$. Im verbleibenden Fall sind $x, y, z \in \mathbb{R}$ und es gilt $x + (y + z) = (x + y) + z$, da $(\mathbb{R}, +)$ nach Analysis 1 eine abelsche Gruppe ist.

Stetigkeit von α: Es sei

$$(x, y) \in (\overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}}) \setminus \{(\infty, -\infty), (-\infty, \infty)\} =: D$$

und $(x_n, y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in D, die in $D \subseteq \overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}}$ gegen (x, y) konvergiert.

1. Fall: Ist $x = \infty$ und $y = \infty$, so setzen wir $s := 0$; nach Satz 1.41(b) gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ derart, dass $x_n \geq s$ für alle $n \geq N$.

2. Fall: Ist $x \in \mathbb{R}$ und $y = \infty$, so setzen wir $s := x - 1$; nach Satz 1.41(a) gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ derart, dass $x_n \geq s$ für alle $n \geq N$.

In Fall 1 und 2 gibt es zu $r \in \mathbb{R}$ nach Satz 1.41(b) ein $n_0 \geq N$ mit

$$y_n \geq r - s \quad \text{für alle } n \geq n_0.$$

Dann gilt

$$x_n + y_n \geq s + (r - s) = r \quad \text{für alle } n \geq n_0,$$

somit $x_n + y_n \to \infty = x + y$ für $n \to \infty$.

Mit vertauschten Rollen von x und y beweist man den Fall $x = \infty$, $y \in \mathbb{R}$ entsprechend. Ist $-\infty \in \{x, y\}$, so sieht man analog, dass $x_n + y_n \to -\infty = x + y$.

Im verbleibenden Fall, $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, existiert ein $N \in \mathbb{N}$ derart, dass $x_n \in \mathbb{R}$ und $y_n \in \mathbb{R}$ für alle $n \to \infty$ (vgl. Satz 1.41(a)). Da die Addition

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

stetig ist, gilt

$$x_n + y_n \to x + y$$

in $\mathbb{R}$ und somit auch in $\overline{\mathbb{R}}$ (siehe Satz 1.41(a)). □

Reelle Zahlen multiplizieren wir wie üblich. Zusätzlich definieren wir

$$0 \cdot \infty := \infty \cdot 0 := 0 \cdot (-\infty) := (-\infty) \cdot 0 := 0$$

sowie

$$x \cdot \infty := \infty \cdot x := \infty \quad \text{und} \quad x \cdot (-\infty) := (-\infty) \cdot x := -\infty$$

für $x \in]0, \infty]$ und

$$x \cdot \infty := \infty \cdot x := -\infty \quad \text{sowie} \quad x \cdot (-\infty) := (-\infty) \cdot x := \infty$$

für $x \in [-\infty, 0[$. Wir erhalten somit eine überall definierte Multiplikation

$$m \colon \overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}} \to \overline{\mathbb{R}}, \quad (x,y) \mapsto x \cdot y$$

und schreiben kurz auch xy statt $x \cdot y$.

Satz 1.46 *Die Multiplikation $\alpha \colon \overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}} \to \overline{\mathbb{R}}$ ist unstetig, jedoch eine messbare Abbildung*

$$(\overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}})) \to (\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})),$$

wobei $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}}) = \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}) \otimes \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$. Weiter gilt:

(a) (Kommutativgesetz) *Für alle $x, y \in \overline{\mathbb{R}}$ ist $xy = yx$.*

(b) (Assoziativgesetz) *Für alle $x, y, z \in \overline{\mathbb{R}}$ ist $x(yz) = (xy)z$.*

Beweis. Da $(n, 1/n) \to (\infty, 0)$ und

$$m(n, 1/n) = 1 \to 1 \neq 0 = \infty \cdot 0 = m(\infty, 0),$$

ist m nicht stetig. Nun ist $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ eine offene Teilmenge von $\overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}}$ (also in $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}})$) und

$$m|_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} = j \circ m_{\mathbb{R}}$$

ist stetig als Komposition der stetigen Multiplikation $m_{\mathbb{R}} \colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und der stetigen Inklusion $j \colon \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$. Nach Folgerung 1.26 ist $m|_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}}$ somit messbar als Abbildung

$$(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R} \times \mathbb{R})) \to (\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})),$$

wobei $\mathcal{B}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}) = \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}})|_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}}$ nach Satz 1.32. Die Menge

$$\{0\} \times \overline{\mathbb{R}}$$

ist abgeschlossen in $\overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}}$ (als Urbild der abgeschlossenen Menge $\{0\} \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ unter der stetigen Projektion $\mathrm{pr}_1 \colon \overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}} \to \overline{\mathbb{R}}$) und somit ein Element von $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}})$. Weiter ist

$$m|_{\{0\} \times \overline{\mathbb{R}}}$$

die konstante Nullfunktion und somit messbar als Abbildung

$$(\{0\} \times \overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}})|_{\{0\}\times\overline{\mathbb{R}}}) \to (\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$$

(siehe Beispiel 1.18). Analog ist $m|_{\overline{\mathbb{R}}\times\{0\}}$ messbar und ebenso die Einschränkung

$$m|_{\{\infty\}\times\,]0,\infty]}$$

mit dem konstanten Wert ∞ auf der Menge

$$\{\infty\}\times]0,\infty] = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (\{\infty\} \times [1/n, \infty]) \in \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}}),$$

die eine abzählbare Vereinigung abgeschlossener Mengen ist. Entsprechend sieht man, dass m auf den messbaren Mengen $]0,\infty] \times \{\infty\}$, $\{-\infty\}\times\,]0,\infty]$ sowie $]0,\infty] \times \{-\infty\}$ konstant und somit messbar ist. Nach dem Satz über stückweise messbare Funktionen (Satz 1.36) ist

$$m\colon (\overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}})) \to (\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$$

also eine messbare Abbildung. Da die Topologie auf $\overline{\mathbb{R}}$ nach 1.40 eine abzählbare Basis hat, ist $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}}) = \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}) \otimes \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$ (siehe Satz nach Beispiel 1.37).

(a) Ist $0 \in \{x, y\}$, so ist $xy = yx = 0$. Sei nun $0 \notin \{x, y\}$. Ist $\infty \in \{x, y\}$ oder $-\infty \in \{x, y\}$, so ist

$$xy = (\operatorname{sgn}(x)\operatorname{sgn}(y))\infty = yx,$$

wobei $\operatorname{sgn}(x) := 1$ wenn $x \in]0,\infty]$, $\operatorname{sgn}(x) := -1$ wenn $x \in [-\infty, 0[$. Ist $x, y \in \mathbb{R}$, so gilt $xy = yx$ wegen des Kommutativgesetzes für $(\mathbb{R}, \cdot)$.

(b) Ist $0 \in \{x, y, z\}$, so ist

$$x(yz) = 0 = (xy)z.$$

Sei nun $0 \notin \{x, y, z\}$. Ist $\infty \in \{x, y, z\}$ oder $-\infty \in \{x, y, z\}$, so ist

$$x(yz) = (\operatorname{sgn}(x)\operatorname{sgn}(y)\operatorname{sgn}(z))\infty = (xy)z.$$

Andernfalls sind $x, y, z \in \mathbb{R}$ und $x(yz) = (xy)z$ gilt wegen des Assoziativgesetzes in $(\mathbb{R}, \cdot)$. □

Funktionen

$$f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$$

werden auch *numerische Funktionen* genannt. Der folgende Satz zeigt, dass Produkte und überall definierte Summen messbarer numerischer Funktionen wieder messbare numerische Funktionen sind.

Satz 1.47 *Es seien* $(X, \mathcal{S})$ *ein Messraum und* $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ *sowie* $g\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ *messbare Funktionen. Dann ist auch die Funktion*

$$fg\colon X \to \overline{\mathbb{R}}, \quad x \mapsto f(x)g(x)$$

messbar. Insbesondere ist die Funktion

$$cg\colon X \to \overline{\mathbb{R}}, \quad x \mapsto cg(x)$$

messbar für alle $c \in \overline{\mathbb{R}}$. *Ist*

$$\{f(x), g(x)\} \neq \{\infty, -\infty\} \quad \textit{für alle } x \in X, \tag{13}$$

so ist weiter

$$f + g\colon X \to \overline{\mathbb{R}}, \quad x \mapsto f(x) + g(x)$$

eine messbare Funktion.

Beweis. Die Funktion $(f, g)\colon X \to \overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}}$ hat messbare Komponenten f und g; sie ist folglich messbar als Abbildung in den Messraum

$$(\overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}) \otimes \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})).$$

Da die Multiplikation $m\colon \overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}} \to \overline{\mathbb{R}}$ auf letzterem nach Satz 1.46 messbar ist, ist auch

$$fg = m \circ (f, g)$$

messbar als Komposition messbarer Funktionen. Nehmen wir für f die konstante Funktion mit Wert c, so erhalten wir als Spezialfall, dass $cg = fg$ messbar ist.

Seien nun f und g messbare numerische Funktionen derart, dass (13) erfüllt ist, also $f(x)+g(x)$ definiert ist für alle $x \in X$. Dann ist $(f, g)\colon (X, \mathcal{S}) \to (\overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}) \otimes \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$ eine messbare Abbildung mit Bild im Definitionsbereich

$$D := ([-\infty, \infty[\, \times [-\infty, \infty[) \cup (]-\infty, \infty] \times\,]-\infty, \infty])$$

der Addition $\alpha\colon D \to \overline{\mathbb{R}}$. Nach Beispiel 1.21 ist auch

$$(f, g)|^D\colon (X, \mathcal{S}) \to (D, (\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}) \otimes \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})|_D)$$

messbar. Da $\overline{\mathbb{R}}$ eine abzählbare Basis der Topologie besitzt, ist

$$\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}}) = \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}) \otimes \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$$

und somit
$$(\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}) \otimes \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))|_D = \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}})|_D = \mathcal{B}(D)$$
unter Benutzung von Satz 1.32. Da $\alpha\colon D \to \overline{\mathbb{R}}$ stetig ist, ist $\alpha\colon (D, \mathcal{B}(D)) \to (\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$ nach Folgerung 1.26 messbar. Als Komposition messbarer Abbildungen ist $f + g = \alpha \circ (f, g)|^D$ messbar. $\square$

Bemerkung 1.48 (a) Oft arbeiten wir nicht in ganz $\overline{\mathbb{R}}$, sondern nur in $[0, \infty]$. Dies ist eine abgeschlossene Teilmenge von $\overline{\mathbb{R}}$, also eine Borelmenge in $\overline{\mathbb{R}}$. Weiter ist $[0, \infty[$ unter der Multiplikation abgeschlossen. Zudem ist die Addition auf ganz $[0, \infty[$ definiert, also $([0, \infty[, +)$ ein kommutatives Monoid. Es gilt ein Distributivgesetz:

$$x(y + z) = xy + xz \quad \text{für alle } x, y, z \in [0, \infty]:$$

Dies ist klar im Falle $x = 0$ und auch im Fall $y = z = 0$. Ist $x(y + z) = \infty$, so ist $x = \infty$ und mindestens eine der Zahlen y, z größer 0, oder es ist $x > 0$ und mindestens eine der Zahlen y, z gleich ∞; jeweils ist also auch $xy + xz = \infty$. Ist $x > 0$ und $y + z > 0$ und $x(y + z) < \infty$, so ist $x < \infty$ und $y + z < \infty$, also auch $y < \infty$ und $z < \infty$. Also sind $x, y, z \in [0, \infty[$ und es gilt $x(y + z) = xy + xz$ wegen des Distributivgesetzes in $\mathbb{R}$.

(b) Die Multiplikation $[0, \infty[\times [0, \infty[\to [0, \infty[$ ist unstetig. Jedoch ist

$$m_c\colon [0, \infty[\to [0, \infty[, \quad y \mapsto cy$$

im Falle $c \in [0, \infty[$ stetig. Für $c = \infty$ ist m_∞ unstetig, es gilt aber wenigstens

$$\lim_{n\to\infty} m_\infty(y_n) = m_\infty\Big(\lim_{n\to\infty} y_n\Big)$$

für jede *monoton wachsende* Folge in $[0, \infty[$ (siehe Aufgabe H21(e)).

1.6 Messbarkeit punktweiser Limites, Suprema und Infima

Die folgenden Resultate zeigen, dass Messbarkeit bemerkenswert stabil unter Grenzprozessen ist. Insbesondere werden wir sehen, dass punktweise Limites $\overline{\mathbb{R}}$-wertiger messbarer Funktionen immer messbar sind, was später sehr nützlich sein wird.

1.49 Wir erinnern zunächst an Grundbegrife geordneter Mengen: Ist $(X, \leq)$ eine (partiell) geordnete Menge und $A \subseteq X$, so nennt man ein Element $s \in X$ eine *obere Schranke* für A, wenn $a \leq s$ für alle $a \in A$. Ist s_0 eine obere Schranke für A und $s_0 \leq s$ für jede obere Schranke s von A, so nennt man s_0 die *kleinste obere Schranke* oder das *Supremum* von A und schreibt $\sup(A) := s_0$. Das Supremum ist eindeutig, falls es existiert. Analog definiert man untere Schranken und das Infimum als größte untere Schranke.

Folgendes Lemma verifizieren wir in der Übung:

Lemma 1.50 *Jede Teilmenge $A \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ besitzt ein Infimum und ein Supremum in $\overline{\mathbb{R}}$.* □

Lemma 1.51 *Jede monoton wachsende Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\overline{\mathbb{R}}$ ist konvergent gegen*

$$\sup\{a_n \colon n \in \mathbb{N}\} \in \overline{\mathbb{R}}.$$

Jede monoton fallende Folge in $\overline{\mathbb{R}}$ ist konvergent gegen $\inf\{a_n \colon n \in \mathbb{N}\} \in \overline{\mathbb{R}}$.

Beweis. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend und $a := \sup\{a_n \colon n \in \mathbb{N}\} \in \overline{\mathbb{R}}$. Jede Umgebung U von a in $\overline{\mathbb{R}}$ enthält $]r, a]$ für ein $r \in \mathbb{R}$. Es gibt ein $N \in \mathbb{N}$ derart, dass

$$a_N > r$$

(siehe Aufgabe H17(b)). Wegen der Monotonie der Folge ist dann

$$a_n \geq a_N > r$$

für alle $n \geq N$. Weiter ist $a_n \leq \sup\{a_m \colon m \in \mathbb{N}\} = a$, also

$$a_n \in \,]r, a] \subseteq U$$

und $a_n \to a$ gezeigt. Monoton fallende Folgen diskutiert man analog. □

Definition 1.52 Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\overline{\mathbb{R}}$, so ist die Folge

$$\big(\sup\{a_k \colon k \geq n\}\big)_{n\in\mathbb{N}}$$

offensichtlich monoton fallend; nach Lemma 1.51 existiert also der Grenzwert

$$\limsup_{n\to\infty} a_n \;:=\; \lim_{n\to\infty} \Big(\sup\{a_k \colon k \geq n\}\Big)$$

in $\overline{\mathbb{R}}$ und stimmt mit

$$\inf_{n\in\mathbb{N}} (\sup \{a_k : k \geq n\})$$

überein. Analog definieren wir

$$\liminf_{n\to\infty} a_n \ := \ \lim_{n\to\infty} \Big(\inf \{a_k : k \geq n\} \Big) = \sup_{n\in\mathbb{N}} (\inf\{a_k : k \geq n\}) \in \overline{\mathbb{R}}.$$

Jeder Limes in $\overline{\mathbb{R}}$ lässt sich auch als Limes superior oder Limes inferior deuten.

Lemma 1.53 *Für jede konvergente Folge* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *in* $\overline{\mathbb{R}}$ *gilt*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n = \liminf_{n\to\infty} a_n.$$

Beweis. Sei $a := \lim_{n\to\infty} a_n$. Ist $r \in \mathbb{R}$ mit $r < a$, so ist $[r, \infty]$ eine Umgebung von a in $\overline{\mathbb{R}}$; es existiert daher ein $N \in \mathbb{N}$ derart, dass

$$a_n \in [r, \infty] \quad \text{für alle } n \geq N,$$

somit $a_n \geq r$ für alle $n \geq N$. Es folgt

$$\sup\{a_m : m \geq n\} \geq r \quad \text{und} \quad \inf\{a_m : m \geq n\} \geq r$$

für alle $n \geq N$ (vgl. Aufgabe H21(a)). Daraus folgt

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \inf_{n\in\mathbb{N}} \sup\{a_m : m \geq n\} \geq r$$

und

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} \inf\{a_m : m \geq n\} \geq r$$

(vgl. Aufgabe H21(a)). Da $r < a$ beliebig war, folgt

$$\limsup_{n\to\infty} a_n \geq a \text{ und } \liminf_{n\to\infty} a_n \geq a.$$

Analog sehen wir, dass

$$\limsup_{n\to\infty} a_n \leq a \text{ sowie } \liminf_{n\to\infty} a_n \leq a$$

und daher Gleichheit. □

Die folgende Tatsache brauchen wir zunächst nicht; der Beweis wird daher erst später einmal in der Übung geführt (Aufgabe H21(d)).

Lemma 1.54 *Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\overline{\mathbb{R}}$ konvergiert genau dann, wenn*

$$\liminf_{n\to\infty} a_n \;=\; \limsup_{n\to\infty} a_n \quad \textit{in } \overline{\mathbb{R}}. \qquad \square$$

Nun kommen wir zu den für die Maß- und Integrationstheorie wichtigen Resultaten.

Satz 1.55 *Es sei $(X,\mathcal{S})$ ein Messraum und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge messbarer Funktionen $f_n\colon (X,\mathcal{S}) \to (\overline{\mathbb{R}},\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$. Dann sind auch die Funktionen*

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} f_n\,, \quad \inf_{n\in\mathbb{N}} f_n\,, \quad \limsup_{n\to\infty} f_n \quad \textit{und} \quad \liminf_{n\to\infty} f_n$$

messbar.

Beweis. Es sei $g := \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n$, d.h., für alle $x \in X$ ist

$$g(x) := \sup\{f_n(x)\colon n \in \mathbb{N}\}.$$

Nach Aufgabe H17(b) ist für $a \in \overline{\mathbb{R}}$ genau dann $g(x) > a$, wenn ein $n \in \mathbb{N}$ exististiert mit $f_n(x) > a$. Also ist

$$\{x \in X\colon g(x) > a\} \;=\; \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{x \in X\colon f_n(x) > a\}\,.$$

Nach Voraussetzung und Lemma 1.44 (d) ist die rechte Seite messbar. Also ist für jedes $a \in \overline{\mathbb{R}}$ die linke Seite messbar, und somit ist g messbar nach Lemma 1.44 (d). Die Messbarkeit von $\inf f_n$ zeigt man analog. Aus

$$\limsup_{n\to\infty} f_n \;=\; \inf_{n\in\mathbb{N}} \Big(\sup_{k\geq n} f_k \Big)$$

folgt nun die Messbarkeit von $\limsup f_n$, und die von $\liminf f_n$ zeigt man entsprechend. $\square$

Punktweise Grenzwerte von Folgen messbarer numerischer Funktionen sind messbar.

Satz 1.56 *Ist $(X,\mathcal{S})$ ein Messraum $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge messbarer Funktionen $f_n : (X,\mathcal{S}) \to (\overline{\mathbb{R}},\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$ derart, dass der Grenzwert $f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ für alle $x \in X$ existiert, so ist die Funktion $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ messbar.*

Beweis. Da $f = \limsup f_n$ nach Lemma 1.53, folgt die Behauptung aus Satz 1.55. $\square$

Die folgenden zwei Sätze dienen der Allgemeinbildung und sind nicht prüfungsrelevant; in der Vorlesung werden sie übersprungen.

Definition 1.57 Ein topologischer Raum heißt *separabel*, wenn er eine abzählbare dichte Teilmenge besitzt.

Bespielsweise ist $\mathbb{R}$ separabel, denn die abzählbare Teilmenge $\mathbb{Q}$ aller rationalen Zahlen ist dicht in $\mathbb{R}$.

Satz 1.58 *Ein metrischer Raum (X, d) ist genau dann separabel, wenn seine Topologie eine abzählbare Basis besitzt. Ist $D \subseteq X$ eine abzählbare dichte Teilmenge, so ist die Menge*

$$\{B^X_{1/n}(x) \colon n \in \mathbb{N}, x \in D\}$$

von Kugeln eine abzählbare Basis der Topologie auf X.

Beweis. Ist $\mathcal{U}$ eine abzählbare Basis der Topologie auf X, so wählen wir für jedes $U \in \mathcal{U}$ mit $U \neq \emptyset$ ein Element $x_U \in U$. Dann ist

$$A := \{x_U \colon \emptyset \neq U \in \mathcal{U}\}$$

eine abzählbare Teilmenge von X und dicht, denn ist $V \subseteq X$ eine offene nicht leere Teilmenge, so ist

$$V = \bigcup_{V \supseteq U \in \mathcal{U}} U$$

und somit $U \subseteq V$ für ein $U \in \mathcal{U}$ mit $U \neq \emptyset$, woraus $x_U \in V$ folgt und somit $V \cap A \neq \emptyset$.

Hat umgekehrt X eine abzählbare dichte Teilmenge A, so ist

$$\mathcal{U} := \{B_{1/n}(a) \colon a \in A,\, n \in \mathbb{N}\}$$

eine abzählbare Menge offener Kugeln in X. Ist $V \subseteq X$ offen, so gibt es für jedes $x \in V$ ein $n(x) \in \mathbb{N}$ derart, dass

$$B_{2/n(x)}(x) \subseteq V.$$

Da A dicht ist in X, existiert ein

$$a_x \in A \cap B_{1/n(x)}(x).$$

Dann ist $x \in B_{1/n(x)}(a_x)$ und

$$B_{1/n(x)}(a_x) \subseteq B_{2/n(x)}(x) \subseteq V,$$

denn es ist $d(y,x) \leq d(y,a_x) + d(a_x,x) < 1/n(x) + 1/n(x) \leq 2/n(x)$ für alle $y \in B_{1/n(x)}(a_x)$. Also ist

$$V = \bigcup_{x \in V} B_{1/n(x)}(a_x)$$

eine Vereinigung von Mengen aus $\mathcal{U}$ und somit die abzählbare Menge $\mathcal{U}$ eine Basis der Topologie auf X. $\square$

Satz 1.59 *Sei $(X,\mathcal{S})$ ein Messraum, (Y,d) ein separabler metrischer Raum und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge messbarer Funktionen $f_n\colon (X,\mathcal{S}) \to (Y,\mathcal{B}(Y))$, welche punktweise gegen ein Funktion $f\colon X \to Y$ konvergiert, also*

$$(\forall x \in X) \qquad \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x).$$

Dann ist $f\colon (X,\mathcal{S}) \to (Y,\mathcal{B}(Y))$ messbar.

Beweis. Ist $D \subseteq Y$ eine abzählbare dichte Teilmenge, so ist

$$\mathcal{U} := \{B^Y_{1/m}(y)\colon y \in D, m \in \mathbb{N}\}$$

nach Satz 1.58 eine abzählbare Basis der Topologie auf Y. Da $\mathcal{B}(Y) = \sigma(\mathcal{U})$ nach Aufgabe H18(a), brauchen wir zum Nachweis der Messbarkeit von f nur zu zeigen, dass

$$f^{-1}(B^Y_{1/m}(y)) \in \mathcal{S}$$

für alle $y \in D$. Nun ist

$$\begin{aligned} f^{-1}(B^Y_{1/m}(y)) &= \{x \in X\colon f(x) \in B^Y_{1/m}(y)\} = \{x \in X\colon d(y,f(x)) < 1/m\} \\ &= h^{-1}([0,1/m[) \end{aligned}$$

mit $h\colon X \to \mathbb{R}$, $h(x) := d(f(x), y)$. Da $d(\cdot, y)\colon Y \to \mathbb{R}$ stetig und somit messbar ist, ist

$$h_n := d(\cdot, y) \circ f_n\colon X \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto d(f_n(x), y)$$

messbar als Komposition messbarer Funktionen. Sei $x \in X$ fest. Da $d(\cdot, y)$ stetig ist und $f_n(x) \to f(x)$ für $n \to \infty$, folgt

$$h_n(x) = d(f_n(x), y) \to d(f(x), y) = h(x).$$

Es ist also $h\colon X \to \mathbb{R}$ der punktweise Grenzwert der Folge $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ messbarer Funktionen. Nach Satz 1.56 ist h messbar und somit

$$h^{-1}([0, 1/m[) \in \mathcal{S},$$

was den Beweis beendet. □

Sei (Y, d) ein metrischer Raum und Y_n eine separable Teilmenge von Y für $n \in \mathbb{N}$, mit abzählbarer dichter Teilmenge $A_n \subseteq Y_n$. Dann ist auch der Abschluss Z von $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} Y_n$ in Y separabel, denn $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ ist abzählbar und dicht in Z. In der folgenden Situation ist $Z := \overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} f_n(X)}$ also separabel, so dass nach Ersetzen von Y durch Z Satz 1.59 anwendbar ist:

Folgerung 1.60 *Es sei $(X, \mathcal{S})$ ein Messraum, (Y, d) ein metrischer Raum und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge messbarer Funktionen $f_n\colon (X, \mathcal{S}) \to (Y, \mathcal{B}(Y))$, welche punktweise gegen ein Funktion $f\colon X \to Y$ konvergiert. Ist $f_n(X)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ separabel, so ist $f\colon (X, \mathcal{S}) \to (Y, \mathcal{B}(Y))$ messbar.* □

2 Maße

Wir wenden uns nun dem Messen der messbaren Mengen eines Messraums zu und beginnen mit einer Axiomatisierung des Maßbegriffs.

2.1 Definition und elementare Eigenschaften von Maßen

Definition 2.1 Es sei $(X, \mathcal{S})$ ein Messraum. Ein *Maß* auf $(X, \mathcal{S})$ ist eine Abbildung $\mu\colon \mathcal{S} \to [0, \infty]$ mit folgenden Eigenschaften:

(a) $\mu(\emptyset) = 0$.

(b) μ ist *σ-additiv*, d.h. für jede Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ paarweise disjunkter Mengen $A_n \in \mathcal{S}$ gilt

$$\mu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)\,. \tag{14}$$

Ist μ ein Maß auf $(X, \mathcal{S})$, so nennen wir das Tripel $(X, \mathcal{S}, \mu)$ einen *Maßraum*.

Die Reihe auf der rechten Seite von (14) meint den Limes

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k)$$

der monoton wachsenden Folge $(\sum_{k=1}^{n} \mu(A_k))_{n\in\mathbb{N}}$ der Partialsummen in $\overline{\mathbb{R}}$, der nach Lemma 1.51 existiert.

Bemerkung 2.2 Ist $\mu : \mathcal{S} \to [0, \infty]$ eine σ-additive Funktion auf einer σ-Algebra $\mathcal{S}$ mit $\mu(\emptyset) \neq 0$, so gilt $\mu(A) = \infty$ für alle $A \in \mathcal{S}$ (siehe Aufgabe P21(b)). Bedingung (a) in der Maßdefinition schließt diese Pathologie aus.

Wir geben nun einige Beispiele von Maßen an. In den Beispielen ist jeweils X eine beliebige Menge.

2.3 Beispiele für Maße.

(a) Ist $X \neq \emptyset$ und $\mathcal{S} := \{\emptyset, X\}$, so kann $\mu(X) \in [0, \infty]$ beliebig gewählt werden, und man erhält mit $\mu(\emptyset) := 0$ ein Maß.

[Es gilt $\mu(\emptyset) = 0$ per Definition. Ist $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ene Folge paarweise disjunkter Mengen in $\mathcal{S}$, so gilt entweder $A_n = \emptyset$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und somit

$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \mu(\emptyset) = 0 = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n);$$

oder es ist $A_m = X$ für genau ein $m \in \mathbb{N}$ und $A_n = 0$ für alle $n \in \mathbb{N} \setminus \{m\}$; in diesem Fall ist

$$\mu\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \mu(A_m) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n),$$

da $\sum_{k=1}^{n} \mu(A_k) = \mu(A_m)$ für alle $n \geq m$.]

(b) Es sei X eine Menge. Für jedes $x \in X$ wird durch

$$\delta_x(A) \;:=\; \begin{cases} 1 & \text{wenn } x \in A \\ 0 & \text{wenn } x \notin A \end{cases}$$

ein Maß δ_x auf $(X, \mathcal{P}(X))$ definiert, das sogenannte *Punkt-* oder *Diracmaß in x* (siehe Aufgabe P21(a)).

(c) Gegeben $A \subseteq X$ sei $\zeta(A) := |A|$ die Anzahl der Elemente von A, falls A eine endliche Menge ist, andernfalls $\zeta(A) := \infty$. Auf diese Weise erhalten wir ein Maß ζ auf $(X, \mathcal{P}(X))$, das sogenannte *Zählmaß*.

[Da $\emptyset$ eine endliche Menge ist mit 0 Elementen, ist $\zeta(\emptyset) = 0$. Ist $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge paarweise disjunkter Teilmengen von X, so ist entweder $A := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ eine unendliche Menge. Ist A_m eine unendliche Menge für ein $m \in \mathbb{N}$, so ist

$$\sum_{k=1}^{n} \zeta(A_k) \geq \zeta(A_m) = \infty$$

für alle $n \geq m$ und somit $\sum_{n=1}^{\infty} \zeta(A_n) = \infty = \zeta(A)$. Ist A_k endlich für jedes $k \in \mathbb{N}$, so gibt es natürliche Zahlen $n_1 < n_2 < \cdots$ derart, dass $A_{n_j} \neq \emptyset$ (und somit $\zeta(A_{n_j}) \geq 1$) für alle $j \in \mathbb{N}$. Dann ist

$$\sum_{n=1}^{\infty} \zeta(A_n) \geq \sum_{k=1}^{n_j} \zeta(A_k) \geq \zeta(A_{n_1}) + \cdots + \zeta(A_{n_j}) \geq j$$

für alle $j \in \mathbb{N}$ und somit $\sum_{n=1}^{\infty} \zeta(A_n) = \infty = \zeta(A)$. Oder aber A ist endlich. Dann ist A_n endlich für alle $n \in \mathbb{N}$ und es gibt ein $m \in \mathbb{N}$ derart, dass $A_n = \emptyset$ für alle $n > m$. Somit ist

$$\zeta(A) = \zeta(A_1) + \cdots + \zeta(A_m) = \sum_{n=1}^{\infty} \zeta(A_n).]$$

(d) Ist $(X, \mathcal{S}, \mu)$ ein Maßraum und $Y \in \mathcal{S}$, so ist auch $(Y, \mathcal{S}|_Y, \mu|_Y)$ ein Maßraum, wobei $\mu|_Y := \mu|_{\mathcal{S}|_Y}$ die Einschränkung der Funktion μ auf die Spur $\mathcal{S}|_Y$ von $\mathcal{S}$ auf Y ist.

[Da $Y \in \mathcal{S}$, ist $\mathcal{S}|_Y = \{A \in \mathcal{S} \colon A \subseteq Y\} \subseteq \mathcal{S}$. Nun ist $\mu|_Y(\emptyset) = \mu(\emptyset) = 0$. Ist $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge paarweise disjunkter Mengen in $\mathcal{S}|_Y$, so auch in $\mathcal{S}$; wegen der σ-Additivität von μ gilt also

$$\mu|_Y \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \right) = \mu \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu|_Y(A_n).]$$

(e) Ist μ ein Maß auf $(X, \mathcal{S})$ und $c \in [0, \infty]$, so ist auch $c\mu \colon \mathcal{S} \to [0, \infty]$, $A \mapsto c\mu(A)$ ein Maß auf $(X, \mathcal{S})$.

[Es ist $(c\mu)(\emptyset) = c\mu(\emptyset) = c0 = 0$. Ist $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge paarweise disjunkter Mengen $A_n \in \mathcal{S}$, so ist die Folge $(\sum_{k=1}^{n} \mu(A_k))_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend und somit

$$\begin{aligned} c\mu \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \right) &= c \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) = c \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k) \\ &= \lim_{n\to\infty} c \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} c\mu(A_k) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} c\mu(A_n), \end{aligned}$$

wobei Bemerkung 1.48(b) für die dritte Gleichheit benutzt wurde, dann Bemerkung 1.48(a).

(f) Ist $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Maßen auf $(X, \mathcal{S})$, so ist auch

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n \colon \mathcal{S} \to [0, \infty], \quad A \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n(A)$$

ein Maß auf $(X, \mathcal{S})$.

[Es ist $\sum_{n=1}^\infty \mu_n(\emptyset) = \sum_{n=1}^\infty 0 = 0$. Ist $(A_m)_{m\in\mathbb{N}}$ eine Folge paarweise disjunkter Mengen in $\mathcal{S}$, so gilt

$$\sum_{n=1}^\infty \mu_n\left(\bigcup_{m\in\mathbb{N}} A_m\right) = \sum_{n=1}^\infty\sum_{m=1}^\infty \mu_n(A_m) = \sum_{m=1}^\infty\sum_{n=1}^\infty \mu_n(A_m),$$

wobei der sogenannte Doppelreihensatz und ermöglicht hat, die Summationsreihenfolge zu vertauschen. Wir formulieren diesen Satz sogleich und geben einen ersten Beweis für diejenigen, die aus Prof. Glöckners Analysis 1 den Doppelreihensatz für *reelle* Zahlenfolgen schon kennen (siehe Kurzskript zur Analysis 1 in Panda.) In §3 finden Sie einen in sich geschlossenen, alternativen Beweis des Doppelreihensatzes.

(g) (Bildmaße). Ist $(X, \mathcal{S}, \mu)$ ein Maßraum und $f\colon X \to Y$ eine Abbildung in eine Menge Y, so wissen wir bereits, dass das direkte Bild

$$f_*(\mathcal{S}) := \{A \subseteq Y\colon f^{-1}(A) \in \mathcal{S}\}$$

eine σ-Algebra auf Y ist. Wir definieren nun eine Funktion

$$f_*(\mu)\colon f_*(\mathcal{S}) \to [0,\infty], \quad A \mapsto \mu(f^{-1}(A)).$$

Dann ist $f_*(\mu)$ ein Maß auf $(Y, f_*(\mathcal{S}))$, das sogenannte *Bild von μ unter f*.

[Es ist $f_*(\mu)(\emptyset) = \mu(f^{-1}(\emptyset)) = \mu(\emptyset) = 0$. Ist $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge paarweise disjunkter Mengen $A_n \in f_*(\mathcal{S})$, so sind die Urbilder $f^{-1}(A_n)$ wegen der Operationentreue der Urbildabbildung paarweise disjunkt und es gilt $f^{-1}(A_n) \in \mathcal{S}$ per Definition von $f_*(\mathcal{S})$. Es folgt

$$\begin{aligned} f_*(\mu)\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) &= \mu\left(f^{-1}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)\right) = \mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} f^{-1}(A_n)\right) \\ &= \sum_{n=1}^\infty \mu(f^{-1}(A_n)) = \sum_{n=1}^\infty f_*(\mu)(A_n).\,] \end{aligned}$$

Lemma 2.4 (Doppelreihensatz) *Sei $a_{n,m} \in [0,\infty]$ für $n, m \in \mathbb{N}$. Dann gilt*

$$\sum_{n=1}^\infty\sum_{m=1}^\infty a_{n,m} = \sum_{m=1}^\infty\sum_{n=1}^\infty a_{n,m} \tag{15}$$

in $[0,\infty] \subseteq \overline{\mathbb{R}}$.

Beweis. Existieren $n_0, m_0 \in \mathbb{N}$ mit $a_{n_0,m_0} = \infty$, so ist

$$\sum_{m=1}^{\infty} a_{n_0,m} = \infty$$

und somit auch $\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} a_{n,m} = \infty$ (Übung). Analog ist $\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{n,m} = \infty$; also gilt (15). Wir dürfen daher jetzt annehmen, dass $a_{n,m} \in [0, \infty[$ für alle $n, m \in \mathbb{N}$. Nach dem Doppelreihensatz für reelle Zahlenfolgen aus Prof. Glöckners Analysis 1 ist die linke Seite von (15) genau dann endlich, wenn die rechte es ist, und in diesem Fall gilt Gleichheit für die Reihen als Grenzwerte in $\mathbb{R}$; diese stimmen mit den in (15) gemeinten Grenzwerten in $\overline{\mathbb{R}}$ überein. □

Lemma 2.5 *Es sei $(X, \mathcal{S}, \mu)$ ein Maßraum. Dann gilt:*

(a) *μ ist* **additiv**, *d.h. $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$ für alle $A, B \in \mathcal{S}$ mit $A \cap B = \emptyset$.*

(b) *μ ist* **monoton**, *d.h. $\mu(A) \leq \mu(B)$ für alle $A, B \in \mathcal{S}$ mit $A \subseteq B$.*

(c) *Ist $A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq \cdots$ eine aufsteigende Folge von Mengen $A_n \in \mathcal{S}$, so gilt*

$$\mu\Big(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \Big) \;=\; \lim_{n \to \infty} \mu(A_n)\,.$$

(d) *Ist $A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq \cdots$ eine absteigende Folge von Mengen $A_n \in \mathcal{S}$ mit $\mu(A_1) < \infty$, so ist*

$$\mu\Big(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \Big) \;=\; \lim_{n \to \infty} \mu(A_n)\,.$$

(e) *Für beliebige Folgen $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nicht notwendig disjunkter Mengen $A_n \in \mathcal{S}$ ist*

$$\mu\Big(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \Big) \;\leq\; \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)\,.$$

Beweis. (a) Man wendet die σ-Additivität auf die Folge $A, B, \emptyset, \emptyset, \ldots$ an.

(b) Aus (a) folgt $\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A) \geq \mu(A)$.

(c) Es sei $B := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Wir setzen $B_1 := A_1$ und $B_n := A_n \setminus A_{n-1}$ für $2 \leq n \in \mathbb{N}$. Dann ist $B = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$, wobei die Mengen B_n paarweise disjunkt sind. Aus der σ-Additivität von μ folgt

$$\mu(B) \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n)\,. \tag{16}$$

Nun ist $A_n = \bigcup_{k=1}^{n} B_k$ und somit $\mu(A_n) = \sum_{k=1}^{n} \mu(B_k)$ wegen (a). Mit (16) folgt nun $\mu(A_n) = \sum_{k=1}^{n} \mu(B_k) \to \mu(B)$.

(d) Es sei $A := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ und $C_n := A_1 \setminus A_n$ für $n \in \mathbb{N}$. Nach Teil (a) ist $\mu(A_1) = \mu(A_n) + \mu(C_n)$; da $\mu(A_1) < \infty$ und somit auch $\mu(A_n) < \infty$ und $\mu(C_n) < \infty$, können wir $\mu(C_n)$ subtrahieren und erhalten

$$\mu(A_n) \;=\; \mu(A_1) - \mu(C_n)\,. \tag{17}$$

Die Folge $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist aufsteigend, mit $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (A_1 \setminus A_n) = A_1 \setminus \Big(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) = A_1 \setminus A$. Nach (c) gilt also $\lim_{n\to\infty} \mu(C_n) = \mu(A_1 \setminus A) < \infty$. Formel (17) zeigt nun, dass $\mu(A_n) \to \mu(A_1) - \mu(A_1 \setminus A) = \mu(A)$.

(e) Wir setzen $B_n := A_n \setminus (A_1 \cup \cdots \cup A_{n-1})$. Dann ist $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge paarweise disjunkter messbarer Mengen mit $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ und $\mu(B_n) \leq \mu(A_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ (wegen (b)). Folglich ist $\mu\big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\big) = \mu\big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n\big) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$. $\square$

Es ist ganz wesentlich, dass in Lemma 2.5 (d) $\mu(A_1) < \infty$ verlangt wird. In Aufgabe H20 werden wir Beispiele messbarer Mengen $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \cdots$ kennenlernen mit $\mu(A_n) = \infty$ für alle n aber $\mu\big(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\big) = 0$.

2.2 Das Lebesgue-Borel-Maß

Der folgende Satz behauptet, dass es genau ein Maß auf $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ gibt, das allen achsenparallelen Quadern ihr (gewöhnliches) Volumen zuordnet. Dieses Maß, das Lebesgue-Borel-Maß λ_n, ist das wichtigste Maß für die Zwecke der Analysis, und wir werden es ständig benutzen. Wir benutzen den Satz zunächst unbewiesen als Black Box. Ein Beweis für die Eindeutigkeit des Lebesgue-Borel-Maßes wird in Kürze nachgetragen. Da der Beweis der Existenz des Lebesgue-Borel-Maßes recht technisch ist, überspringen wir ihn in der Vorlesung (Sie können diesen jedoch im Anhang A des Skripts nachlesen).[18] Sollte am Semesterende noch Spiel sein, tragen wir den Beweis nach.

Satz 2.6 (Existenz und Eindeutigkeit des Lebesgue-Borel-Maßes). *Es gibt genau ein Maß λ_n auf der σ-Algebra $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ der Borelmengen des $\mathbb{R}^n$, welches jedem halboffenen Quader sein natürliches Volumen zuordnet, also*

$$\lambda_n\big([a,b[\big) \;=\; (b_1-a_1)\cdot\ldots\cdot(b_n-a_n)$$

für alle $a=(a_1,\ldots,a_n)$, $b=(b_1,\ldots,b_n)\in\mathbb{R}^n$ mit $a_k\le b_k$ für alle k.

Bemerkung 2.7 Der Existenzbeweis im Anhang wirft insbesondere folgende Formel ab, mit der das Lebesgue-Borel-Maß einer Borelmenge $A\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ auf das Volumen von Quadern zurückgeführt werden kann:

$$\lambda_n(A) \;=\; \inf\Big\{\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_n(B_k)\colon B_k \text{ halboffene Quader in } \mathbb{R}^n \text{ mit } A\subseteq \textstyle\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k\Big\}\,.$$

Bemerkung 2.8 Allgemeiner lässt sich zeigen: Ist $U\subseteq\mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge und μ ein Maß auf $\mathcal{B}(U)$, das auf allen kompakten Mengen $K\subseteq U$ endliche Werte annimmt, so ist für jede Borelmenge $A\in\mathcal{B}(U)$

$$\mu(A) \;=\; \inf\Big\{\sum_{k=1}^{\infty}\mu(B_k)\colon B_k \text{ halboffene Quader in } U \text{ mit } A\subseteq \textstyle\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k\Big\}\,.$$

Insbesondere ist das Maß μ also durch seine Werte auf den halboffenen Quadern eindeutig bestimmt.

Definition 2.9 Das Maß $\lambda_n:\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)\to[0,\infty]$ aus Satz 2.6 heißt das *n-dimensionale Lebesgue-Borel Maß.* Ist n aus dem Zusammenhang klar, so schreibt man einfach λ statt λ_n.

[18] Der im Anhang gegebene Beweis orientiert sich an Bauers “Maß- und Integrationstheorie.” Eine andere Konstruktionsmethode für Maße (‘Rieszscher Darstellungssatz”) findet man in Rudins “Real and Complex Analysis;” sie verlangt tiefere Kenntnisse der Topologie.

Wir denken uns $\lambda_n(B)$ als n-dimensionales Volumen der Borelmenge B. Dieses Volumen ist dadurch normiert, dass wir jedem (achsenparallelen) Quader sein "natürliches" Volumen zuordnen.

Wir schließen das Kapitel mit drei Folgerungen aus Satz 2.6 ab.

Folgerung 2.10 *Für jeden kompakten Quader* $[a,b] := \prod_{k=1}^n [a_k, b_k] \subseteq \mathbb{R}^n$ *mit* $a_k \leq b_k$ *gilt*

$$\lambda_n([a,b]) \;=\; (b_1 - a_1) \cdot \ldots \cdot (b_n - a_n)\,.$$

Beweis. Für $k = 1, \ldots, n$ und $m \in \mathbb{N}$ sei $b_k^{(m)} := b_k + \frac{1}{m}$ und $b^{(m)} := (b_1^{(m)}, \ldots, b_n^{(m)})$. Dann gilt $[a,b] = \bigcap_{m \in \mathbb{N}} [a, b^{(m)}[$, wobei

$$[a, b^{(m)}[\;\supseteq\; [a, b^{(m+1)}[\qquad \text{für alle } m \in \mathbb{N}.$$

Wir schließen, dass

$$\lambda_n([a,b]) = \lim_{m \to \infty} \lambda_n([a, b^{(m)}[) = \lim_{m \to \infty} \prod_{k=1}^n \big(b_k + \frac{1}{m} - a_k\big) = \prod_{k=1}^n \big(b_k - a_k\big),$$

unter Benutzung von Lemma 2.5 (d) □

Interessanterweise hat die Eindeutigkeit des Lebesgue-Borel-Maßes praktische Konsequenzen.

Folgerung 2.11 (Translationsinvarianz der Lebesgue-Borel-Maßes). *Ist* $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ *und* $x \in \mathbb{R}^n$, *so ist auch* $A + x \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, *und es gilt.*

$$\lambda_n(A + x) \;=\; \lambda_n(A)\,.$$

Hierbei ist $A + x := \{a + x \colon a \in A\}$.

Beweis. Gegeben $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ haben wir für eine Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}^n$ nach Aufgabe H16(c)

$$A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \;\;\Leftrightarrow\;\; A + x \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n).$$

Wir betrachten nun die bijektive Abbildung

$$\alpha_{-x} \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \quad y \mapsto y - x$$

mit $(\alpha_{-x})^{-1} = \alpha_x\colon y \mapsto y + x$. Für eine Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ist dann $(\alpha_{-x})^{-1}(A) = \alpha_x(A) = A + x$. Also gilt

$$\begin{aligned}(\alpha_{-x})_*(\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)) &= \{A \subseteq \mathbb{R}^n\colon (\alpha_{-x})^{-1}(A) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)\}\\ &= \{A \subseteq \mathbb{R}^n\colon \underbrace{A + x \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)}_{\Leftrightarrow A\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)}\} = \mathcal{B}(\mathbb{R}^n).\end{aligned}$$

Das Bildmaß $\alpha_{-x}(\lambda_n)$ ist also die Abbildung

$$(\alpha_{-x})_*(\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \to [0,\infty], \quad A \mapsto \lambda_n((\alpha_{-x})^{-1}(A)) = \lambda_n(A + x).$$

Mit Notation wie oben ordnet diese einem achensparallelen Quader $[a,b[\subseteq \mathbb{R}^n$ das Maß

$$(\alpha_{-x})_*(\lambda_n)([a,b[) = \lambda_n([a,b[+x[) = \prod_{k=1}^{n}((b_k + x_k) - (a_k + x_k)) = \prod_{k=1}^{n}(b_k - a_k),$$

also sein natürliches Volumen zu.[19] Die Eindeutigkeit in Satz 2.6 liefert nun $\lambda_n = (\alpha_{-x})_*(\lambda_n)$. Es ist also

$$\lambda_n(A + x) = (\alpha_{-x})_*(\lambda_n)(A) = \lambda_n(A)$$

für alle $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. □

Folgerung 2.12 (Verhalten unter Homothetien). *Ist $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ und $t \in]0,\infty[$, so ist auch $tA \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, und es gilt*

$$\lambda_n(tA) \; = \; t^n \lambda_n(A)\,.$$

Hierbei ist $tA := \{ta\colon a \in A\}$.

Beweis. Die Abbildung

$$m_{t^{-1}}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \quad x \mapsto tx$$

ist bijektiv mit $(m_{t^{-1}})^{-1} = m_t\colon x \mapsto tx$. Nach Aufgabe H16(d) ist für eine Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}^n$ genau dann $tA \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, wenn $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. Also ist

$$(m_{t^{-1}})_*(\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)) = \{A \subseteq \mathbb{R}^n\colon \underbrace{(m_{t^{-1}})^{-1}(A)}_{=tA} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)\} = \mathcal{B}(\mathbb{R}^n).$$

[19] Beachten Sie, dass $[a,b[+x = [a,x,b+x[$.

Nach Beispiel 2.3 (e) und (g) ist also

$$\mu := \frac{1}{t^n}(m_{t^{-1}})_*(\lambda_n) \colon (m_{t^{-1}})_*(\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \to [0,\infty]\,, \qquad A \mapsto \frac{1}{t^n}\lambda_n(tA)$$

ein Maß. Da

$$\mu([a,b[) \;=\; \frac{1}{t^n}\lambda_n(t[a,b[) \;=\; \frac{1}{t^n}\lambda_n([ta,tb[) \;=\; \frac{1}{t^n}\prod_{k=1}^{n}(tb_k - ta_k) \;=\; \prod_{k=1}^{n}(b_k - a_k)$$

für jeden halboffenen Quader $[a,b[\; \subseteq \mathbb{R}^n$, gilt $\mu = \lambda_n$ wegen der Eindeutigkeitsaussage in Satz 2.6. $\square$

Teil II: Allgemeine Integrationstheorie

In diesem Kapitel ist $(X, \mathcal{S}, \mu)$ ein Maßraum; $\overline{\mathbb{R}}$ ist stets versehen mit der σ-Algebra $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$ und Teilmengen von $\overline{\mathbb{R}}$ (z.B. $[0, \infty]$) mit der Spur von $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$. Unser Ziel ist es, messbare Funktionen $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ zu integrieren. Das Maß μ wird uns vorgeben, was das Integral der charakteristischen Funktion einer messbaren Menge sein soll. Davon ausgehend definieren wir das Integral von messbaren Funktionen mit nur endlich vielen Werten (Stufenfunktionen) und dann das Integral nicht-negativer messbarer Funktionen, die wir von unten durch Stufenfunktionen annähern. Schließlich spalten wir allgemeine messbare Funktionen in ihren Positiv- und Negativteil auf, für die wir die Integrale bereits definiert haben. Wir werden sehen, dass das so definierte Lebesgue-Integral wesentlich allgemeiner und flexibler als das Riemann-Integral ist.

3 Konstruktion und Eigenschaften des Integrals

Wir betrachten zunächst einen Messraum $(X, \mathcal{S})$.

3.1 Stufenfunktionen

Eine messbare Funktion $s : X \to \mathbb{R}$ heißt *Stufenfunktion*, wenn ihr Bild $s(X)$ endlich ist. Wenn wir zwei Stufenfunktionen addieren oder eine Stufenfunktion mit einem Skalar multiplizieren, so erhalten wir wieder eine messbare Funktion mit endlichem Bild, also wieder eine Stufenfunktion. Die Stufenfunktionen bilden daher einen Vektorraum und sogar eine Algebra, da auch Produkte zweier Stufenfunktionen wieder Stufenfunktionen sind.

3.1 Beispiele.

(a) Jede konstante Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ ist nach Beispiel 1.18 messbar und somit eine Stufenfunktion.

(b) Nach Beispiel 1.19 ist die charakteristische Funktion $\mathbf{1}_A : X \to \mathbb{R}$ einer Teilmenge $A \subseteq X$ genau dann messbar (und somit eine Stufenfunktion), wenn A messbar ist, also $A \in \mathcal{S}$.

(c) Im Falle $(X, \mathcal{S}) = ([a,b], \mathcal{B}([a,b]))$ ist jede Treppenfunktion (wie in der Analysis I zur Definition des Riemannintegrals benutzt) insbesondere eine Stufenfunktion, aber eine Stufenfunktion braucht keine Treppenfunktion zu sein. Beispielsweise ist $\mathbf{1}_{\mathbb{Q}\cap[a,b]}$ eine Stufenfunktion auf $[a,b]$, aber keine Treppenfunktion.

Lemma 3.2 *Eine Funktion $s\colon X \to \mathbb{R}$ ist genau dann eine Stufenfunktion, wenn es Zahlen $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}$ und paarweise disjunkte Mengen $A_j \in \mathcal{S}$ gibt derart, dass $s = \sum_{j=1}^k \alpha_j \mathbf{1}_{A_j}$.*

Beweis. Sind $\alpha_j \in \mathbb{R}$ und $A_j \in \mathcal{S}$ für $j = 1, \ldots, k$ paarweise disjunkt, so ist $s := \sum_{j=1}^k \alpha_j \mathbf{1}_{A_j}$ messbar nach Satz 1.30 und somit eine Stufenfunktion, da s offensichtlich nur endlich viele Werte annehmen kann (nur 0 oder $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$). Sei nun umgekehrt s eine Stufenfunktion und $f(X) = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_k\}$ mit paarweise verschiedenen Zahlen α_j. Dann sind die Mengen $A_j := f^{-1}(\{\alpha_j\})$ messbar, und es ist $s = \sum_{j=1}^k \alpha_j \mathbf{1}_{A_j}$. □

Die folgende Beobachtung ist nützlich:

Lemma 3.3 *Sind $s, t\colon X \to \mathbb{R}$ Stufenfunktionen, so gibt es paarweise disjunkte Mengen $A_1, \ldots, A_k \in \mathcal{S}$ sowie reelle Zahlen α_j, β_j für $j \in \{1, \ldots, k\}$ derart, dass $s = \sum_{j=1}^k \alpha_j \mathbf{1}_{A_j}$ und $t = \sum_{j=1}^k \beta_j \mathbf{1}_{A_j}$.*

Beweis. Es ist $s = \sum_{i=1}^k a_i \mathbf{1}_{A_i}$ und $t = \sum_{j=1}^m b_j \mathbf{1}_{B_j}$ mit paarweise disjunkten messbaren Mengen A_i bzw. B_j und Zahlen $a_i, b_j \in \mathbb{R}$. Indem wir notfalls $a_{k+1} := 0$ und $A_{k+1} := X \setminus \bigcup_{i=1}^k A_i$ hinzunehmen (und analog für die zweite Zerlegung), dürfen wir $\bigcup_{i=1}^k A_i = \bigcup_{j=1}^m B_j = X$ annehmen. Die Mengen $A_i \cap B_j$ sind paarweise disjunkt, und ihre Vereingung ist X. Wir schreiben

$$\big\{A_i \cap B_j\colon i = 1, \ldots, k,\ j = 1, \ldots, m\big\} \;=:\; \{C_\ell\colon \ell = 1, \ldots, n\}$$

mit paarweise verschiedenen Mengen C_ℓ. Ist $C_\ell = \emptyset$, so wählen wir $\alpha_\ell, \beta_\ell \in \mathbb{R}$ beliebig. Ist $C_\ell \neq \emptyset$, so gibt es eindeutig bestimmte i, j mit $C_\ell = A_i \cap B_j$; wir setzen $\alpha_\ell := a_i$ und $\beta_\ell := b_j$ und behaupten, dass nun

$$s \;=\; \sum_{\ell=1}^n \alpha_\ell \mathbf{1}_{C_\ell} \quad \text{und} \tag{18}$$

$$t \;=\; \sum_{\ell=1}^n \beta_\ell \mathbf{1}_{C_\ell}\,. \tag{19}$$

In der Tat: Für jedes $x \in X$ gibt es genau ein i und genau ein j mit $x \in A_i \cap B_j$. Dann ist $A_i \cap B_j = C_\ell$ für genau ein ℓ. Somit $s(x) = a_i = \alpha_\ell$, was auch der Wert der rechten Seite von (18) an der Stelle x ist. Weiter ist $t(x) = b_j = \beta_\ell$ der Wert der rechten Seite von (19) an der Stelle x. $\square$

3.2 Konstruktion des Integrals

Es sei $(X, \mathcal{S}, \mu)$ ein Maßraum und $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ eine messbare Funktion. Wir definieren das Integral von f bzgl. des Maßes μ in mehreren Schritten.

Schritt 1. Ist $f = \mathbf{1}_A$ mit $A \in \mathcal{S}$, so setzen wir $I(f) := \mu(A)$.

Schritt 2. Ist $f\colon X \to [0, \infty[$ eine nicht-negative Stufenfunktion, so schreiben wir f als $\sum_{i=1}^k \alpha_i \mathbf{1}_{A_i}$ mit $\alpha_i \in [0, \infty[$ und paarweise disjunkten Mengen $A_i \in \mathcal{S}$ (vgl. Lemma 3.2) und definieren

$$I(f) \;:=\; \sum_{i=1}^k \alpha_i \cdot \mu(A_i) \in [0, \infty].$$

Dieser Ausdruck ist wohldefiniert. Sei nämlich auch $f = \sum_{j=1}^m \beta_j \mathbf{1}_{B_j}$. Wie im Beweis von Lemma 3.3 dürfen wir $\bigcup_{i=1}^k A_i = \bigcup_{j=1}^m B_j = X$ annehmen. Gegeben i, j ist entweder $\mu(A_i \cap B_j) = 0$ oder $A_i \cap B_j \neq \emptyset$, so dass ein $x \in A_i \cap B_j$ existiert und $\alpha_i = f(x) = \beta_j$ folgt. Da A_i die Vereinigung der paarweise disjunkten Mengen $A_i \cap B_j$ für $j \in \{1, \ldots, m\}$ ist und B_j die Vereinigung der paarweise disjunkten Mengen $A_i \cap B_j$ für $i \in \{1, \ldots, k\}$, folgt mit der Additivität des Maßes μ:

$$\sum_{i=1}^k \alpha_i \, \mu(A_i) \;=\; \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^m \alpha_i \, \mu(A_i \cap B_j) \;=\; \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^k \beta_j \, \mu(A_i \cap B_j) \;=\; \sum_{j=1}^m \beta_j \, \mu(B_j)\,.$$

Bemerkung. *Für nicht-negative Stufenfunktionen f und g auf X gilt:*

(i) *Ist $f \leq g$, so ist $I(f) \leq I(g)$.*

(ii) *Es ist $I(f + g) = I(f) + I(g)$.*

(iii) *Für alle $c \in [0, \infty[$ ist $I(cf) = cI(f)$.*

[In der Tat: Nach Lemma 3.3 gibt es paarweise disjunkte messbare Mengen $A_1, \ldots, A_k \in \mathcal{S}$ und $\alpha_i, \beta_i \in [0, \infty[$ derart, dass $f = \sum_{i=1}^k \alpha_i \mathbf{1}_{A_i}$ und $g = \sum_{i=1}^k \beta_i \mathbf{1}_{A_i}$.

(i) Ist $\mu(A_i) \neq 0$, so ist $A_i \neq \emptyset$; wir wählen $x \in A_i$ und schließen $\alpha_i = f(x) \leq g(x) = \beta_i$. Somit

$$I(f) \;=\; \sum_{i=1}^{k} \alpha_i\, \mu(A_i) \;\leq\; \sum_{i=1}^{k} \beta_i\, \mu(A_i) \;=\; I(g)\,.$$

(ii) Da $f + g = \sum_{i=1}^k (\alpha_i + \beta_i) \mathbf{1}_{A_i}$, ist

$$I(f+g) = \sum_{i=1}^{k} (\alpha_i + \beta_i)\mu(A_i) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \mu(A_i) + \sum_{i=1}^{k} \beta_i \mu(A_i) = I(f) + I(g).$$

(iii) Wegen $cf = \sum_{i=1}^k (c\alpha_i) \mathbf{1}_{A_i}$ ist $I(cf) = \sum_{i=1}^l (c\alpha_i)\mu(A_i) = c \sum_{i=1}^k \alpha_i \mu(A_i) = cI(f)$.]

Schritt 3. Ist $f : X \to [0, \infty]$ eine nicht-negative, messbare Funktion, so definieren wir

$$\int_X f\, d\mu \;:=\; \sup\{I(s) \colon s \text{ Stufenfunktion mit } 0 \leq s \leq f\} \;\in\; [0, \infty] \qquad (20)$$

als das Supremum über die Zahlen $I(s)$, wenn $s \colon X \to [0, \infty[$ die Menge aller unterhalb von f gelegenen nicht-negativen Stufenfunktionen durchläuft.

Bemerkungen.

(a) Das Supremum wird hier über eine nicht-leere Menge gebildet, denn 0 ist eine Stufenfunktion mit $0 \leq f$.

(b) Man beachte, dass $\int_X f\, d\mu$ den Wert ∞ annehmen kann.

(c) Ist f selbst eine nicht-negative Stufenfunktion, so ist $\int_X f\, d\mu = I(f)$. Für jede Stufenfunktion $0 \leq s \leq f$ ist nämlich $I(s) \leq I(f)$; das Supremum in (20) ist in dieser Stuation also ein Maximum, das für $s := f$ angenommen wird.

(d) Formel (20) ist analog zur Definition eines Riemannschen Unterintegrals in der Analysis 1 als Supremum der Integrale aller Treppenfunktionen s mit $s \leq f$.

Schritt 4. Nun sei $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ messbar. Dann sind der Positivteil $f_+ := \max(f, 0)$ und Negativteil $f_- := \max(-f, 0)$ von f nicht-negative messbare Funktionen (vgl. Satz 1.55). Die Integrale

$$\int_X f_+ \, d\mu \quad \text{und} \quad \int_X f_- \, d\mu \tag{21}$$

sind daher wie in Schritt 3 erklärt. Da $f = f_+ - f_-$, ist die folgende Definition sehr natürlich:

Definition 3.4 Ist eines der Integrale in (21) endlich, so definieren wir

$$\int_X f \, d\mu \;:=\; \int_X f_+ \, d\mu \;-\; \int_X f_- \, d\mu \;\in\; \overline{\mathbb{R}}\,. \tag{22}$$

Sind beide Integrale in (21) endlich, so heißt f (bzgl. μ über X) *Lebesgue-integrierbar* (oder kurz: *integrierbar*). Man schreibt auch

$$\int_X f(x) \, d\mu(x) \;:=\; \int_X f \, d\mu\,.$$

Beachten Sie, dass wir das Integral von f auch dann definiert haben, wenn f nicht integrierbar ist, aber wenigstens eine der beiden Funktionen $f_\pm$ diese Eigenschaft hat. Das ist in vielen Situationen bequem. Beachten Sie auch, dass per Definition jede integrierbare Funktion insbesondere messbar ist.

Definition 3.5 Wir schreiben $\mathcal{L}^1(X, \mu)$ für die Menge aller bzgl. μ über X Lebesgue-integrierbaren *reellwertigen* Funktionen $f : X \to \mathbb{R}$.

Hier ist ein erstes, sehr einfaches Beispiel eines Integrals (Details prüfen wir in Aufgabe P23).

Beispiel 3.6 (Integrale bzgl. Dirac-Maßen). Es sei X eine Menge, $x \in X$ und $\delta_x : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ das Dirac-Maß in x (siehe Beispiel 2.3 (b)). Dann existiert das Integral $\int_X f \, d\delta_x$ und ist gegeben durch

$$\int_X f \, d\delta_x \;=\; f(x), \tag{23}$$

für jede Funktion $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$. Eine Funktion $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ ist genau bzgl. δ_x integrierbar, wenn $f(x) \in \mathbb{R}$.

Satz 3.7 (Erste Eigenschaften von Integralen). *Es sei* $(X, \mathcal{S}, \mu)$ *ein Maßraum.*

(a) *Sind* $f, g\colon X \to [0, \infty]$ *messbare Funktionen mit* $f \leq g$*, so ist* $\int_X f\, d\mu \leq \int_X g\, d\mu$*.*

(b) *Sind* $f, g\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ *integrierbar und* $f \leq g$*, so ist*

$$\int_X f\, d\mu \;\leq\; \int_X g\, d\mu\,.$$

(c) *Ist* $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ *eine messbare Funktion derart, dass* $\int_X f\, d\mu$ *im Sinne von* (22) *existiert, so existiert auch* $\int_X cf\, d\mu$ *für jedes* $c \in \mathbb{R}$*, und es gilt*

$$\int_X cf\, d\mu \;=\; c\int_X f\, d\mu\,.$$

(d) *Ist* $\mu(X) < \infty$ *und* f *messbar und beschränkt, so ist* $f \in \mathcal{L}^1(X, \mu)$*, und es gilt*

$$a \cdot \mu(X) \;\leq\; \int_X f\, d\mu \;\leq\; b \cdot \mu(X) \tag{24}$$

für alle $a, b \in \mathbb{R}$ *mit* $a \leq f \leq b$*.*

(e) *Ist* $\mu(X) = 0$*, so ist* $\displaystyle\int_X f\, d\mu = 0$ *für jede messbare Funktion* $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$*.*

(f) *Ist* $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ *integrierbar, so ist* $\mu(\{x \in X\colon f(x) \in \{-\infty, \infty\}) = 0$*.*

(g) *Ist* $f\colon X \to [0, \infty]$ *messbar und* $\int_X f\, d\mu = 0$*, so gilt*

$$\mu\big(\{x \in X\colon f(x) \neq 0\}\big) = 0.$$

Beweis. (a) Für jede Stufenfunktion s mit $0 \leq s \leq f$ gilt auch $0 \leq s \leq g$. Somit $\int_X f\, d\mu = \sup\{I(s)\colon 0 \leq s \leq f\} \leq \sup\{I(s)\colon 0 \leq s \leq g\} = \int_X g\, d\mu$.

(b) Aus $f \leq g$ folgt $f_+ \leq g_+$ und $g_- \leq f_-$. Nach (a) ist also

$$\int_X f_+\, d\mu \;\leq\; \int_X g_+\, d\mu \quad \text{und} \quad \int_X g_-\, d\mu \;\leq\; \int_X f_-\, d\mu$$

und daher $\int_X f\, d\mu = \int_X f_+\, d\mu - \int_X f_-\, d\mu \leq \int_X g_+\, d\mu - \int_X g_-\, d\mu = \int_X g\, d\mu$.

(c) Aus der Definition des Integrals und $(-f)_+ = f_-$ sowie $(-f)_- = f_+$ folgt sofort

$$\int_X (-f)\, d\mu \;=\; -\int_X f\, d\mu\,.$$

Wir dürfen daher $c \geq 0$ annehmen und sogar $c > 0$, denn der Fall $c = 0$ ist trivial. Da $(cf)_+ = cf_+$ und $(cf_-) = cf_-$, braucht die Behauptung nur für $f_\pm$ gezeigt zu werden. Wir dürfen daher $f \geq 0$ annehmen. Dann ist

$$\begin{aligned}
\int_X cf\, d\mu &= \sup\{I(s)\colon 0 \leq s \leq cf\} \;=\; \sup\{I(s)\colon 0 \leq \tfrac{1}{c}s \leq f\}\\
&= \sup\{c\, I(\tfrac{1}{c}s)\colon 0 \leq \tfrac{1}{c}s \leq f\} \;=\; c\,\sup\{I(t)\colon 0 \leq t \leq f\}\\
&= c\int_X f\, d\mu\,,
\end{aligned}$$

denn für jede nicht-negative Stufenfunktion s gilt $I(cs) = cI(s)$ (siehe Bemerkung (iii) in Schritt 2).

(d) Sei $|f| \leq M$ mit $M \in [0,\infty[$. Dann ist auch $f_\pm \leq M = M\,\mathbf{1}_X$ und daher $\int_X f_\pm d\mu \leq \int_X M\mathbf{1}_X\, d\mu = M\mu(X) < \infty$ nach (a). Somit $f \in \mathcal{L}^1(X,\mu)$. Ist $a \leq f \leq b$, so ist also $a\,\mathbf{1}_X \leq f \leq b\,\mathbf{1}_X$ und somit $a\mu(X) = \int_X a\mathbf{1}_X\, d\mu \leq \int_X f\, d\mu \leq \int_X b\mathbf{1}_X\, d\mu = b\mu(X)$, nach (b).

(e) Für alle Stufenfunktionen s gilt $I(s) = 0$. Hieraus folgt $\int_X f_\pm\, d\mu = 0$ und daraus die Behauptung.

(f) Da $f^{-1}(\{-\infty,\infty\}) = (f_+)^{-1}(\{\infty\}) \cup (f_-)^{-1}(\{\infty\})$, genügt es, $f \geq 0$ anzunehmen und $\mu(f^{-1}(\{\infty\})) = 0$ zu zeigen. Wir setzen $N := f^{-1}(\{\infty\})$. Für jedes $r \in [0,\infty[$ ist dann $0 \leq r\,\mathbf{1}_N \leq f$ und somit $r\,\mu(N) = I(r\,\mathbf{1}_N) \leq \int_X f\, d\mu$. Da $\int_X f\, d\mu < \infty$, folgt $\mu(N) = 0$ (sonst könnten wir die linke Seite beliebig groß machen).

(g) Wir setzen $X_n := \{x \in X\colon f(x) \geq \frac{1}{n}\}$ für $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$X_1 \subseteq X_2 \subseteq \cdots$$

und $\{x \in X\colon f(x) \neq 0\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n$, somit

$$\mu(\{x \in X\colon f(x) \neq 0\}) = \lim_{n\to\infty} \mu(X_n)$$

nach Lemma 2.5 (c). Wir brauchen daher nur $\mu(X_n) = 0$ zu zeigen. Da $\frac{1}{n}\mathbf{1}_{X_n} \leq f$, gilt $\frac{1}{n}\mu(X_n) = \int_X \frac{1}{n}\mathbf{1}_{X_n}\, d\mu \leq \int_X f\, d\mu = 0$. Daraus folgt wie gewünscht $\mu(X_n) = 0$. $\square$

3.3 Integration über Teilmengen

Gegeben einen Maßraum $(X, \mathcal{S}, \mu)$ (z.B. $\mathbb{R}^n$ mit dem Lebesgue-Borel-Maß) möchte man häufig eine Funktion nicht über ganz X integrieren, sondern nur über eine messbare Teilmenge $A \in \mathcal{S}$ von X. Da die Einschränkung $\mu|_A$ von μ auf die Spur $\mathcal{S}|_A$ der σ-Algebra $\mathcal{S}$ auf A ein Maß auf A ist (siehe Beispiel 2.3 (d)), können wir diesen Fall auf die bisherige Integral-Definition zurückführen:

Definition 3.8 Ist $(X, \mathcal{S}, \mu)$ ein Maßraum, $f \colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ eine messbare Funktion und $A \in \mathcal{S}$, so setzen wir

$$\int_A f \, d\mu \; := \; \int_A f|_A \, d\mu|_A \tag{25}$$

wann immer das Integral auf der rechten Seite definiert ist. Ist $f|_A$ bezüglich $\mu|_A$ integrierbar, so nennen wir f bezüglich μ *über* A integrierbar.

Bemerkung 3.9 (a) Sind $f \colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ und $g \colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ messbare Funktionen, die auf A übereinstimmen, so ist $\int_A f \, d\mu$ genau dann definiert, wenn das Integral $\int_A g \, d\mu$ definiert ist, und die zwei Integrale stimmen in diesem Fall überein (denn in (25) geht nur $f|_A = g|_A$ ein).

(b) Eine messbare Funktion $f \colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ ist genau dann bzgl. μ über A integrierbar, wenn $\int_A f_+ \, d\mu < \infty$ und $\int_A f_- \, d\mu < \infty$; in diesem Fall gilt weiter

$$\int_A f \, d\mu = \int_A f_+ \, d\mu - \int_A f_- \, d\mu.$$

Es ist nämlich $\int_A (f|_A)_+ \, d\mu|_A = \int_A (f_+)|_A \, d\mu|_A = \int_A f_+ \, d\mu$ und analog dazu $\int_A (f|_A)_- \, d\mu|_A = \int_A f_- \, d\mu$.

Wir halten erste Eigenschaften fest:

Satz 3.10 *Es seien $(X, \mathcal{S}, \mu)$ ein Maßraum und $A \in \mathcal{S}$. Dann gilt:*

(a) *Ist $f \colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ eine messbare Funktion, so ist $\int_A f \, d\mu$ genau dann definiert, wenn $\int_X f \cdot \mathbf{1}_A \, d\mu$ definiert ist, und die zwei Integrale stimmen in diesem Fall überein.*

(b) *Ist eine messbare Funktion $f \colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ bzgl. μ über X integrierbar, so auch über A. Insbesondere $f \in \mathcal{L}^1(X, \mu) \Rightarrow f|_A \in \mathcal{L}^1(A, \mu|_A)$.*

(c) *Ist $B \in \mathcal{S}$ mit $A \cap B = \emptyset$, so gilt*

$$\int_{A\cup B} f\, d\mu = \int_A f\, d\mu + \int_B f d\mu \tag{26}$$

für jede messbare Funktion $f\colon X \to [0,\infty]$. Für jede bezüglich μ über X integrierbare Funktion $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ gilt (26) *ebenfalls.*

(d) *Ist $B \in \mathcal{S}$ mit $A \subseteq B$ und $\mu(B \setminus A) = 0$ und $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ eine nicht-negative messbare Funktion oder bzgl. μ integrierbar, so gilt*

$$\int_A f\ d\mu = \int_B f\ d\mu\,.$$

Wir stellen dem Beweis eine Vorüberlegung zu Stufenfunktionen voran.

Lemma 3.11 *Es sei $(X, \mathcal{S}, \mu)$ ein Maßraum und $A \in \mathcal{S}$. Für jede nicht-negative Stufenfunktion $s\colon X \to [0,\infty[$ der Form $s = \sum_{i=1}^k \alpha_i\, \mathbf{1}_{A_i}$ mit $\alpha_i \in \mathbb{R}$ und paarweise disjunkten Mengen $A_i \in \mathcal{S}$ ist dann $s|_A$ eine Stufenfunktion auf $(A, \mathcal{S}|_A)$ und*

$$\int_A s\ d\mu \ = \ \sum_{i=1}^k \alpha_i\, \mu(A_i \cap A) \ = \ \int_X s \cdot \mathbf{1}_A\, d\mu.$$

Beweis. Gegeben $B \subseteq A$ schreiben wir $\mathbf{1}_B\colon X \to [0,\infty[$ für die charakteristische Funktion von B als Teilmenge von X und $\mathbf{1}_B^A := \mathbf{1}_B|_A\colon A \to [0,\infty[$ für die charakteristische Funktion von B als Teilmenge von A. Es ist $s|_A = \sum_{i=1}^k \alpha_i\, \mathbf{1}_{A_i}|_A = \sum_{i=1}^k \alpha_i\, \mathbf{1}_{A_i\cap A}^A$ eine Stufenfunktion auf A und

$$\int_A s\, d\mu = \int_A s|_A\, d\mu|_A = \sum_{i=1}^k \alpha_i\, \mu|_A(A_i \cap A) = \sum_{i=1}^k \alpha_i\, \mu(A_i \cap A) = \int_X s \cdot \mathbf{1}_A\, d\mu,$$

da $s \cdot \mathbf{1}_A = \sum_{i=1}^k \alpha_i \mathbf{1}_{A_i}\mathbf{1}_A = \sum_{i=1}^k \alpha_i \mathbf{1}_{A_i\cap A}$. □

Beweis von Satz 3.10. (a) lässt sich wie folgt begründen (wir überspringen den Beweis in der Vorlesung): Da $(f\mathbf{1}_A)_\pm = f_\pm \mathbf{1}_A$ und $(f|_A)_\pm = (f_\pm)|_A$, genügt es, die Gleichheit der fraglichen Integrale für nicht-negative messbare Funktionen f zu zeigen. Für jede Stufenfunktion $s\colon A \to [0,\infty[$ mit $s \leq f|_A$ ist die durch

$$\tilde{s}(x) := \begin{cases} s(x) & \text{für } x \in A, \\ 0 & \text{für } x \in X \setminus A \end{cases}$$

definierte Funktion $\tilde{s}\colon X \to [0,\infty[$ eine Stufenfunktion mit

$$\int_X \tilde{s}\, d\mu = \int_X \tilde{s}\mathbf{1}_A\, d\mu = \int_A \tilde{s}\, d\mu = \int_A \underbrace{\tilde{s}|_A}_{=s}\, d\mu|_A = \int_A s\, d\mu|_A$$

(siehe Lemma 3.11) und $\tilde{s} \leq f\mathbf{1}_A$. Jede nicht-negative Stufenfunktion $t \leq f\mathbf{1}_A$ auf X erfüllt $t(x) = 0$ für alle $x \in X \setminus A$ und ist somit von der Form $t = \tilde{s}$ mit $s := t|_A \leq f|_A$. Es folgt

$$\begin{aligned}
\int_A f\, d\mu &= \int_A f|_A\, d\mu|_A \\
&= \sup\Big\{ \int_A s\, d\mu|_A \ : s \text{ St.fkt. auf } A \text{ mit } 0 \leq s \leq f|_A \Big\} \\
&= \sup\Big\{ \int_X \tilde{s}\, d\mu \ : s \text{ St.fkt. auf } A \text{ mit } 0 \leq s \leq f|_A \Big\} \\
&= \sup\Big\{ \int_X t\, d\mu \ : t \text{ St.fkt. auf } X \text{ mit } 0 \leq t \leq f\mathbf{1}_A f \Big\} \ = \ \int_X f\mathbf{1}_A\, d\mu\,.
\end{aligned}$$

(b) Wegen (a) und der Monotonie des Integrals ist

$$\int_A (f|_A)_\pm\, d\mu|_A = \int_A (f_\pm)|_A\, d\mu|_A = \int_X f_\pm \mathbf{1}_A\, d\mu \leq \int_X f_\pm\, d\mu < \infty.$$

Also existiert das Integral $\int_A f|_A\, d\mu|_A = \int_A f\, d\mu$.

(c) Sei zunächst $f \geq 0$. Ist $s\colon A \cup B \to [0,\infty[$ eine Stufenfunktion mit $s \leq f$, etwa $s = \sum_{j=1}^k \alpha_j \mathbf{1}_{A_j}$, so können wir wegen $\alpha_j \mathbf{1}_{A_j} = \alpha_j \mathbf{1}_{A_j \cap A} + \alpha_j \mathbf{1}_{A_j \cap B}$ ohne Einschränkung annehmen, dass $A_j \subseteq A$ oder $A_j \subseteq B$ für jedes j. Nach Umnummerieren gilt ohne Einschränkung zudem

$$A_1, \ldots, A_\ell \subseteq A \quad \text{und} \quad A_{\ell+1}, \ldots, A_k \subseteq B$$

für ein ℓ und folglich

$$\begin{aligned}
\int_{A\cup B} s\, d\mu|_{A\cup B} &= \sum_{j=1}^{\ell} \alpha_j \mu(A_j) + \sum_{j=\ell+1}^{k} \alpha_j \mu(A_j) = \int_A s|_A\, d\mu|_A + \int_B s|_B\, d\mu|_B \qquad (27) \\
&\leq \int_A f|_A\, d\mu|_A + \int_B f|_B\, d\mu|_B = \int_A f\, d\mu + \int_B f\, d\mu.
\end{aligned}$$

Bildung des Supremums über alle s liefert

$$\int_{A\cup B} f\,d\mu = \int_{A\cap B} f|_{A\cup B}\,d\mu|_{A\cup B} \leq \int_A f\,d\mu + \int_B f\,d\mu. \tag{28}$$

Sind $s_1\colon A \to [0,\infty[$ und $s_2\colon B \to [0,\infty[$ Stufenfunktionen mit $s_1 \leq f|_A$ und $s_2 \leq f|_B$, so ist

$$s\colon A \cup B \to [0,\infty[, \quad x \mapsto \begin{cases} s_1(x) & \text{wenn } x \in A, \\ s_2(x) & \text{wenn } x \in B \end{cases}$$

eine Stufenfunktion auf $A \cup B$ mit $s \leq f|_{A\cup B}$. Nach (27) gilt also

$$\begin{aligned}\int_{A\cup B} f\,d\mu &= \int_{A\cup B} f|_{A\cup B}\,d\mu|_{A\cup B} \geq \int_{A\cup B} s\,d\mu|_{A\cup B} \\ &= \int_A s|_A\,d\mu|_A + \int_B s|_B\,d\mu|_B = \int_A s_1\,d\mu|_A + \int_B s_2\,d\mu.\end{aligned}$$

Bildung des Supremums über s_2 liefert

$$\begin{aligned}\int_{A\cup B} f\,d\mu &\geq \sup_{s_2}\left(\int_A s_1\,d\mu|_A + \int_B s_2\,d\mu|_B\right) = \int_A s_1\,d\mu|_A + \sup_{s_2}\int_B s_2\,d\mu|_B \\ &= \int_A s_1\,d\mu|_A + \int_B f|_B\,d\mu|_B = \int_A s_1\,d\mu|_A + \int_B f\,d\mu,\end{aligned}$$

unter Benutzung von Aufgabe P24(b). Bilden wir nun das Supremum über s_1, erhalten wir

$$\begin{aligned}\int_{A\cup B} f\,d\mu &\geq \sup_{s_1}\left(\int_A s_1\,d\mu|_A + \int_B f\,d\mu\right) = \left(\sup_{s_1}\int_A s_1\,d\mu|_A\right) + \int_B f\,d\mu \\ &= \int_A f|_A\,d\mu|_A + \int_B f\,d\mu = \int_A f\,d\mu + \int_B f\,d\mu. \qquad (29)\end{aligned}$$

Wegen (28) und (29) gilt (26).

Ist nun $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ integrierbar, so auch $f|_A$ und $f|_B$ sowie $f|_{A\cup B}$ (nach (b)). Mit dem gerade behandelten Fall nicht-negativer Funktionen und Bemerkung 3.9(b) folgt

$$\begin{aligned}\int_{A\cup B} f\,d\mu &= \int_{A\cup B} f_+\,d\mu - \int_{A\cup B} f_-\,d\mu \\ &= \int_A f_+\,d\mu + \int_B f_+\,d\mu - \int_A f_-\,d\mu - \int_B f_-\,d\mu \\ &= \int_A f\,d\mu + \int_B f\,d\mu.\end{aligned}$$

(d) Nach (c) ist

$$\int_B f\,d\mu = \int_A f\,d\mu + \int_{B\setminus A} f\,d\mu = \int_A f\,d\mu;$$

die zweite Gleichheit gilt, da $\int_{B\setminus A} f\,d\mu = \int_{B\setminus A} f|_{B\setminus A}\,d\mu|_{B\setminus A} = 0$ nach Satz 3.7(e). $\square$

Bemerkung 3.12 Satz 3.10(d) zeigt, dass man Mengen vom Maß 0 beim Integrieren vernachlässigen darf.

Definition 3.13 Es sei $(X, \mathcal{S}, \mu)$ ein Maßraum. Gilt eine Eigenschaft P für alle Punkte von X außerhalb einer Menge vom Maß 0, so sagt man P gelte *fast überall* (oder auch: *für fast alle* x).

Bemerkung 3.14 (a) Verlangt ist also, dass

$$\{x \in X : \neg P(x)\} \subseteq A$$

für eine messbare Menge A mit $\mu(A) = 0$.

(b) Im Spezialfall $\{x \in X : \neg P(x)\} \in \mathcal{S}$ (was nicht mmer der Fall zu sein braucht!), ist (a) äquivalent zu

$$\mu(\{x \in X : \neg P(x)\}) = 0.$$

Beispiel: Für die charakteristische Funktion $\mathbf{1}_{\mathbb{Q}}$ von $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ gilt $\mathbf{1}_{\mathbb{Q}}(x) = 0$ für fast alle $x \in \mathbb{R}$ bzgl. des Lebesgue-Borel-Maßes λ auf $\mathbb{R}$.

[Es ist nämlich

$$\{x \in \mathbb{R} : \mathbf{1}_{\mathbb{Q}}(x) \neq 0\} = \mathbb{Q} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

und $\lambda(\mathbb{Q}) = 0$.]

Satz 3.15 *Es seien $(X, \mathcal{S}, \mu)$ ein Maßraum und $f, g \colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ messbar. Dann gilt:*

(a) *Die Mengen $E := \{x \in X : f(x) = g(x)\}$ und $\{x \in X : f(x) \leq g(x)\}$ sind messbar.*

(b) *Sind $f, g \geq 0$ und ist $f(x) = g(x)$ fast überall (also $\mu(X \setminus E) = 0$), so ist $\int_X f\,d\mu = \int_X g\,d\mu$.*

(c) *Gilt $f(x) = g(x)$ fast überall, so ist f bzgl. μ genau dann integrierbar, wenn g es ist. In diesem Fall ist $\int_X f\,d\mu = \int_X g\,d\mu$.*

Beweis. (a) Nach Aufgaben P18(a) und P24(a) sind

$$\Delta := \{(x,x)\colon x \in \overline{\mathbb{R}}\} \quad \text{und} \quad S := \{(x,y) \in \overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}}\colon x \le y\}$$

abgeschlossene Teilmengen von $\overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}}$, also $\Delta, S \in \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}}) = \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}) \otimes \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$. Nun ist die Funktion

$$(f,g)\colon X \to \overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}}, \quad x \mapsto (f,g)$$

messbar nach $(\overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}) \otimes \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$, da ihre Komponenten f und g messbar sind. Also sind

$$E = \{x \in X\colon f(x) = g(x)\} = \{x \in X\colon (f(x), g(x)) \in \Delta\} = (f,g)^{-1}(\Delta)$$

und $\{x \in X\colon f(x) \le g(x)\} = (f,g)^{-1}(S)$ messbare Teilmengen von X.

(b) Es ist $\int_X f\,d\mu = \int_E f\,d\mu = \int_E g\,d\mu = \int_X g\,d\mu$, wobei die erste und letzte Gleichheit auf Satz 3.10(d) beruht, die zweite auf Bemerkung 3.9.

(c) Ist $f(x) = g(x)$ fast überall, so gilt auch $f_+(x) = g_+(x)$ fast überall. Nach (b) ist daher $\int_X f_+\,d\mu = \int_X g_+\,d\mu$. Insbesondere ist genau dann $\int_X f_+\,d\mu < \infty$, wenn $\int_X g_+\,d\mu < \infty$. Analog ist genau dann $\int_X f_-\,d\mu < \infty$, wenn $\int_X g_-\,d\mu < \infty$. □

Nach Satz 3.15 (b) und (c) kann man also messbare Funktionen auf Mengen vom Maß 0 abändern, ohne ihr Integral zu verändern (solange die abgeänderte Funktion nach wie vor messbar ist).

Satz 3.16 *Es sei $(X, \mathcal{S}, \mu)$ ein Maßraum. Ist $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ integrierbar, so auch $|f|$, mit*

$$\left|\int_X f\,d\mu\right| \le \int_X |f|\,d\mu\,.$$

Beweis. Sei $A := \{x \in X\colon f(x) \ge 0\}$ und $B := X \setminus A = \{x \in X\colon f(x) < 0\}$. Nach Satz 3.10(c) ist

$$\int_X |f|\,d\mu = \int_A |f|\,d\mu + \int_B |f|\,d\mu = \int_A f_+\,d\mu + \int_B f_-\,d\mu < \infty\,.$$

Also ist $|f|$ integrierbar. Wegen $f \leq |f|$ und $-f \leq |f|$ ist nun

$$\int_X f\, d\mu \leq \int_X |f|\, d\mu \quad \text{und} \quad -\int_X f\, d\mu \;=\; \int_X (-f)\, d\mu \;\leq\; \int_X |f|\, d\mu$$

nach Satz 3.7 (b) und (c). Folglich ist $|\int_X f\, d\mu| \leq \int_X |f|\, d\mu$. □

Das folgende Kriterium macht es in vielen Fällen sehr leicht, die Integrierbarkeit einer gegebenen messbaren Funktionen zu zeigen:

Satz 3.17 (Majorantenkriterium). *Ist $f: X \to \overline{\mathbb{R}}$ eine messbare Funktion, $g: X \to [0, \infty]$ bzgl. μ integrierbar und $|f| \leq g$, so ist auch f bzgl. μ integrierbar.*

Beweis. Da $f_+ \leq g$ und $f_- \leq g$, ist $\int_X f_+\, d\mu \leq \int_X g\, d\mu < \infty$ und $\int_X f_-\, d\mu \leq \int_X g\, d\mu < \infty$. □

Bemerkung 3.18 Definition 3.8 lässt sich weiter verallgemeinern: Ist $(X, \mathcal{S}, \mu)$ ein Maßraum, $A \in \mathcal{S}$ und

$$f: (B, \mathcal{S}|_B) \to (\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$$

eine messbare Funktion auf einer Teilmenge $B \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ mit $A \subseteq B$, so sei

$$\int_A f\, d\mu := \int_A f|_A\, d\mu|_A,$$

wenn das rechte Integral existiert. Ist $f|_A$ bzgl. $\mu|_A$ integrierbar, so nennen wir f bzgl. μ über A integrierbar.

Beispiel 3.19 Ist $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, so ist $c := \|f\|_\infty := \sup\{|f(x)|: x \in [a, b]\} < \infty$. Die konstante Funktion

$$g: [a, b] \to [0, \infty[, \quad x \mapsto c$$

ist eine nicht-negative Stufenfunktion mit

$$\int_{[a,b]} g\, d\lambda_1|_{[a,b]} = c\lambda_1([a, b]) = c(b - a) < \infty$$

und somit integrierbar. Da $|f(x)| \leq \|f\|_\infty = g(x)$ für alle $x \in [a, b]$, ist f nach dem Majorantenkriterium bzgl. $\lambda_1|_{[a,b]}$ integrierbar. Also ist f bzgl. des Lebesgue-Borel-Maßes λ_1 über $[a, b]$ integrierbar.

Bemerkung 3.20 Wir werden bald sehen, dass für jede stetige Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$

$$\int_{[a,b]} f\, d\lambda_1 = \int_a^b f(x)\, dx,$$

das maßtheoretische (Lebesgue)-Integral also mit dem Riemann-Integral übereinstimmt.

3.4 Konvergenzsätze

Wir wenden uns nun den Konvergenzsätzen für das Lebesgue-Integral zu, die unter sehr schwachen Voraussetzungen das Vertauschen von Grenzprozessen und Integration erlauben:

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n(x)\; d\mu(x) \;\;=\;\; \int_X \lim_{n\to\infty} f_n(x)\;\; d\mu(x)\,.$$

Die Konvergenzsätze sind mächtige, häufig benutzte Werkzeuge der Analysis.

In diesem Abschnitt ist $(X, \mathcal{S}, \mu)$ ein Maßraum. Wir beweisen zunächst einen auch als "Satz von Beppo Levi" bekannten, wichtigen Konvergenzsatz.

Satz 3.21 (Satz über monotone Konvergenz). *Ist $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge nicht-negativer messbarer Funktionen $f\colon X \to [0,\infty]$ mit*

$$f_1(x) \le f_2(x) \le \cdots \qquad \textit{für alle } x \in X,$$

so existiert $f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ in $\overline{\mathbb{R}}$ für alle $x \in X$, die Grenzfunktion $f\colon X \to [0,\infty]$ ist messbar, und $\int_X f_n\, d\mu \to \int_X f\, d\mu$.

Beweis. Nach Lemma 1.51 existiert der Limes $f(x)$ für jedes x, und nach Satz 1.56 ist f messbar als punktweiser Limes messbarer Funktionen. Setze $\alpha_n := \int_X f_n\, d\mu$ für $n \in \mathbb{N}$. Da die Folge $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wächst, ist sie nach Lemma 1.51 und Lemma 1.53 (a) in $\overline{\mathbb{R}}$ konvergent, mit Limes

$$\alpha \;:=\lim_{n\to\infty} \alpha_n \;=\; \sup\{\alpha_n \colon n \in \mathbb{N}\} \;\in\; [0,\infty]\,.$$

Da $f_n \le f$, gilt $\alpha_n = \int_X f_n\, d\mu \le \int_X f\, d\mu$ nach Satz 3.7 (a) und somit auch $\alpha \le \int_X f\, d\mu$.

Um die umgekehrte Ungleichung $\alpha \ge \int_X f\, d\mu$ zu zeigen, dürfen wir $\alpha < \infty$

annehmen (sonst ist die Aussage trivial). Sei nun s eine Stufenfunktion mit $0 \leq s \leq f$, $c \in]0,1[$ und $X_n := \{x \in X : f_n(x) \geq cs(x)\}$; nach Satz 3.15 (a) ist X_n messbar. Dann ist $X_n \subseteq X_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ (da die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wächst). Weiter ist $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n$, denn ist $x \in X$, so ist entweder $s(x) = 0$ und somit $x \in X_1$, oder es ist $s(x) > 0$, so dass wegen $s(x) \leq f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ ein n mit $f_n(x) > cs(x)$ existiert.

Mit Satz 3.30 (a) sowie Satz 3.7 (a) und (c) erhalten wir außerdem

$$\int_X f_n \, d\mu \;\geq\; \int_{X_n} f_n \, d\mu \;\geq\; \int_{X_n} cs \, d\mu \;=\; c \int_{X_n} s \, d\mu \, . \tag{30}$$

Für $n \to \infty$ konvergiert die linke Seite von (30) gegen α, die rechte als Konsequenz von Aufgabe H21(e) und Lemma 2.5 (c) (siehe auch Aufgabe P26(b)) gegen $c \int_X s \, d\mu$. Da Ungleichungen der Form "$\geq$" bei Grenzwerten in $\overline{\mathbb{R}}$ erhalten bleiben (vgl. Aufgabe P24(a)), folgt

$$\alpha \;\geq\; \lim_{n\to\infty} c \int_{X_n} s \, d\mu \;=\; c \int_X s \, d\mu \, .$$

Da $c \in]0,1[$ beliebig war, folgt $\alpha \geq \int_X s \, d\mu$ für alle Stufenfunktionen s mit $0 \leq s \leq f$ und somit $\alpha \geq \int_X f \, d\mu$, was den Beweis beendet. $\square$

Beispiel 3.22 Wie verhalten sich die Integrale

$$\int_{[0,\pi/2]} 1 - (\cos(x))^n \, d\lambda_1(x)$$

für $n \to \infty$?

Lösung: Wir erinnern daran, dass für alle $y \in [0,1]$ die geometrische Folge $(y^n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fallend ist; ist $y \in [0,1[$, so gilt

$$y^n \to 0;$$

ist $y = 1$, so gilt $y^n = 1 \to 1$ für $n \to \infty$. Nun ist $\cos(0) = 1$, $\cos(x) \in [0,1[$ für alle $x \in]0,\pi/2]$. Die Folge $(\cos(x)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist also monoton fallend und konvergiert gegen $\mathbf{1}_{\{0\}}(x)$. Somit ist für jedes $x \in [0,\pi/2]$

$$0 \leq 1 - \cos(x)^n$$

monoton wachsend und konvergiert gegen $1-\mathbf{1}_{\{0\}}(x) = \mathbf{1}_{]0,\pi/2]}(x)$. Nach dem Satz über monotone Konvergenz gilt also

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\int_{[0,\pi/2]} 1-\cos(x)^n\,d\lambda_1(x) &= \int_{[0,\pi/2]} \lim_{n\to\infty}(1-\cos(x)^n)\,d\lambda_1(x)\\ &= \int_{[0,\pi/2]} \mathbf{1}_{]0,\pi/2]}\,d\lambda_1 = \lambda_1(]0,\pi/2]) = \pi/2.\end{aligned}$$

Nützliche monoton wachsende Folgen von Funktionen, auf welche der Satz über monotone Konvergenz anwendbar ist, liefert z.B. der folgende Satz.

Satz 3.23 (Approximationssatz für messbare Funktionen). *Es sei $f\colon X\to[0,\infty]$ eine messbare Funktion. Dann existiert eine monoton wachsende*[20] *Folge von Stufenfunktionen $s_n\colon X\to[0,\infty[$ derart, dass*

$$\lim_{n\to\infty} s_n(x) = f(x) \quad \text{für alle } x\in X.$$

Man kann sogar erreichen, dass die Konvergenz auf jeder der Mengen

$$\{x\in X\colon f(x)\le c\}$$

mit $c\in[0,\infty[$ gleichmäßig ist.

Beweis. Für $n\in\mathbb{N}$ definieren wir $s_n\colon X\to\mathbb{R}$ via

$$s_n(x) := \begin{cases} \frac{k}{2^n} & \text{falls } f(x)\in[\frac{k}{2^n},\frac{k+1}{2^n}[\text{ mit } k\in\{0,1,\ldots,n\cdot 2^n-1\},\\ n & \text{falls } f(x)\in[n,\infty].\end{cases}$$

Dann ist $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton wachsende Folge von Stufenfunktionen. Ist $c\in[0,\infty[$, so gilt für alle $n\in\mathbb{N}$ mit $n\ge c$:

$$|f(x)-s_n(x)| < \frac{1}{2^n} \quad \text{für alle } x\in X \text{ mit } f(x)\le c;$$

es ist nämlich $x\in[k/2^n,(k+1)/2^n[$ für ein $k\in\{0,\ldots,n2^n-1\}$ und $s(x)=k/2^n$, also

$$x\in[s(x),s(x)+1/2^n[\,.$$

Hieraus folgt die gleichmäßige Konvergenz auf $\{x\in X\colon f(x)\le c\}$ sowie die punktweise Konvergenz auf $\{x\in X\colon f(x)<\infty\}$. Die punktweise Konvergenz auf $\{x\in X\colon f(x)=\infty\}$ ist offensichtlich. □

[20] Dies ist punktweise gemeint: Für jedes $x\in X$ ist $(s_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton wachsende Folge von Elementen von $[0,\infty]$.

Bemerkung 3.24 Ist $f\colon X \to [0,\infty]$ messbar, so gibt es nach Satz 3.23 eine monoton wachsende Folge $s_1 \leq s_2 \leq \cdots$ nicht-negativer Stufenfunktionen $s_n : X \to [0,\infty[$, die punktweise gegen f konvergiert. Als Spezialfall des Satzes über monotone Konvergenz ist

$$\int_X f\,d\mu \;=\; \lim_{n\to\infty} \int_X s_n\,d\mu \;=\; \sup\left\{ \int_X s_n\,d\mu \colon n \in \mathbb{N} \right\}. \tag{31}$$

Beachten Sie, dass wir (31) *nicht* zur Definition des Integrals $\int_X f\;d\mu$ der nicht-negativen messbaren Funktion f benutzt haben, sondern das Supremum der Menge aller Integrale unter f liegender Stufenfunktionen bilden mussten – siehe Gleichung (20) auf Seite 54. [21]

Satz 3.7 (c) und der folgende Satz zeigen, dass $\mathcal{L}^1(X,\mu)$ ein reeller Vektorraum ist.

Satz 3.25 *Es seien $f,g\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ messbare Funktionen. Dann gilt:*

(a) *Sind $f,g \geq 0$, so ist*

$$\int_X (f+g)\;d\mu \;=\; \int_X f\;d\mu \;+\; \int_X g\;d\mu\,. \tag{32}$$

(b) *Sind $f,g \in \mathcal{L}^1(X,\mu)$, so ist auch $f+g \in \mathcal{L}^1(X,\mu)$ und* (32) *gilt.*

Beweis. (a) Dass (32) für nicht-negative Stufenfunktionen $f,g\colon X \to [0,\infty[$ gilt, wissen wir bereits aus der Bemerkung (ii) in Schritt 2 der Integraldefinition auf Seite 53. Nun seien $f,g\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ beliebige nicht-negative messbare Funktionen. Dann gibt es nach Satz 3.23 monoton wachsende Folgen $(s_j)_{j\in\mathbb{N}}$ und $(t_j)_{j\in\mathbb{N}}$ nicht-negativer Stufenfunktionen derart, dass

$$s_j \to f \quad \text{und} \quad t_j \to g$$

punktweise. Dann ist $(s_j+t_j)_{j\in\mathbb{N}}$ eine monoton wachsende Folge nicht-negativer Stufenfunktionen mit $s_j + t_j \to f+g$ (siehe Satz 1.45). Somit

$$\begin{aligned}\int_X (f+g)\;d\mu \;&=\; \lim_{j\to\infty}\int_X (s_j+t_j)\;d\mu \;=\; \lim_{j\to\infty}\left(\int_X s_j\;d\mu + \int_X t_j\;d\mu\right)\\ &=\; \lim_{j\to\infty}\int_X s_j\;d\mu \;+\; \lim_{j\to\infty}\int_X t_j\;d\mu \;=\; \int_X f\;d\mu \;+\; \int_X g\;d\mu\,,\end{aligned}$$

[21] (20) und (31) werden in mündlichen Prüfungen häufig miteinander verwechselt.

wobei das erste und letzte Gleichheitszeichen auf dem Satz über monotone Konvergenz (Satz 3.21) beruhen, das zweite auf dem bereits für Stufenfunktionen Gezeigten, das dritte auf Satz 1.45.

(b) Offensichtlich gilt $(f+g)_+ \leq |f|+|g|$ und $(f+g)_- \leq |f|+|g|$. Da $|f|$ und $|g|$ nach Satz 3.16 integrierbar sind, ist $|f|+|g|$ nach Teil (a) integrierbar und somit auch $f+g$. Wegen $f+g = (f+g)_+ - (f+g)_- = f_+ - f_- + g_+ - g_-$ ist $(f+g)_+ + f_- + g_- = (f+g)_- + f_+ + g_+$ und somit nach Teil (a)

$$\begin{aligned}
&\int_X (f+g)_+ \, d\mu \; + \; \int_X f_- \, d\mu \; + \; \int_X g_- \, d\mu \\
&= \int_X \big((f+g)_+ + f_- + g_-\big) \, d\mu \; = \; \int_X \big((f+g)_- + f_+ + g_+\big) \, d\mu \\
&= \int_X (f+g)_- \, d\mu \; + \; \int_X f_+ \, d\mu \; + \; \int_X g_+ \, d\mu \,.
\end{aligned}$$

Subtrahiert man die entsprechenden Integrale mit Integranden $(f+g)_-$, f_- bzw. g_- auf beiden Seiten, so erhält man (32). □

Bemerkung 3.26 Es war erstaunlich aufwendig, die Additivität des Integrals zu beweisen! Sind f_1 und f_2 nicht-negative messbare Funktionen auf X, so ist zwar

$$\int_X f_1 \, d\mu + \int_X f_2 \, d\mu \; \leq \; \int_X (f_1 + f_2) \, d\mu$$

leicht einzusehen—denn für nicht-negative Stufenfunktionen $s_k \leq f_k$ ist $s_1 + s_2$ eine nichtnegative Stufenfunktion mit $s_1 + s_2 \leq f_1 + f_2$. Die umgekehrte Ungleichung aber ist nicht offensichtlich! Die Schwierigkeit rührt daher, dass man eine nicht-negative Stufenfunktion s mit $s \leq f_1 + f_2$ im Allgemeinen nicht als eine Summe $s = s_1 + s_2$ mit s_1, s_2 wie zuvor schreiben kann (ein Beispiel findet man in Aufgabe H23).

Der Satz über monotone Konvergenz lässt sich insbesondere auf Reihen nicht-negativer Funktionen anwenden. Man erhält:

Folgerung 3.27 *Ist $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge messbarer Funktionen $f_n : X \to [0,\infty]$, so existiert der Grenzwert $f(x) := \sum_{n=1}^\infty f_n(x)$ in $\overline{\mathbb{R}}$ für alle $x \in X$, die so definierte Funktion $f\colon X \to [0,\infty]$ ist messbar, und es gilt*

$$\int_X f \, d\mu \; = \; \sum_{n=1}^{\infty} \int_X f_n \, d\mu \,.$$

Beweis. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist $g_n := \sum_{j=1}^n f_j$ eine nicht-negative Funktion, die nach Satz 1.47 messbar ist. Die Folge $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist monoton wachsend und konvergiert punktweise gegen f. Mit dem Satz über monotone Konvergenz (Satz 3.21) und der endlichen Additivität des Integrals (Satz 3.25 (a)) erhalten wir

$$\begin{aligned}\int_X f\,d\mu \;&\overset{3.21}{=}\; \lim_{n\to\infty}\int_X g_n\,d\mu \;=\; \lim_{n\to\infty}\int_X \sum_{j=1}^n f_j\,d\mu \\ &\overset{3.25}{=}\; \lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^n \int_X f_j\,d\mu \;=\; \sum_{j=1}^\infty \int_X f_j\,d\mu\,.\end{aligned}$$

□

Hier sind zwei nützliche kleine Anwendungen.

Folgerung 3.28 (Integration bzgl. des Zählmaßes auf $\mathbb{N}$). *Es sei ζ das Zählmaß auf $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ (siehe Beispiel 2.3 (c)). Dann gilt*

$$\int_{\mathbb{N}} a\,d\zeta \;=\; \sum_{n=1}^\infty a_n \tag{33}$$

für jede Funktion $a : \mathbb{N} \to [0,\infty]$, $n \mapsto a_n$. Eine Funktion $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $n \mapsto a_n$ ist genau dann bzgl. ζ integrierbar, wenn die Reihe $\sum_{n=1}^\infty a_n$ absolut konvergiert; wieder gilt (33).

Beweis. Sei zunächst $a \geq 0$. Dann ist $a = \sum_{n=1}^\infty a_n \mathbf{1}_{\{n\}}$ und somit nach Folgerung 3.27

$$\int_{\mathbb{N}} a\,d\zeta \;=\; \sum_{n=1}^\infty \int_{\mathbb{N}} a_n \mathbf{1}_{\{n\}}\,d\zeta \;=\; \sum_{n=1}^\infty a_n\,,$$

wobei benutzt wurde, dass $\int_{\mathbb{N}} a_n \mathbf{1}_{\{n\}}\,d\zeta \;=\; a_n \int_{\mathbb{N}} \mathbf{1}_{\{n\}}\,d\zeta \;=\; a_n\,\zeta(\{n\}) \;=\; a_n$.

Die zweite Aussage für Reihen reeller Zahlen folgt aus dem bereits Gezeigten durch Aufspaltung von a in Positiv- und Negativteil. □

Insbesondere kann man also absolut konvergente Reihen als Integrale interpretieren. Der Nutzen: Folgerung 3.28 ermöglicht es, die Konvergenzsätze für Integrale (z.B. monotone Konvergenz) *auch auf Reihen* anzuwenden. Dies liefert zum Beispiel einen neuen Beweis für den (schon als Satz 2.4 erwähnten) Doppelreihensatz:

Folgerung 3.29 (Doppelreihensatz). *Gegeben* $a_{n,m} \in [0, \infty]$ *für* $n, m \in \mathbb{N}$ *gilt*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} a_{n,m} \;=\; \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{n,m} \,.$$

Beweis. Es sei ζ das Zählmaß auf $\mathbb{N}$. Dann ist

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} a_{n,m} \;=\; \int_{\mathbb{N}} \left(\sum_{m=1}^{\infty} a_{n,m} \right) d\zeta(n) \;=\; \sum_{m=1}^{\infty} \int_{\mathbb{N}} a_{n,m} \, d\zeta(n) \;=\; \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{n,m} \,;$$

hierbei wurde für das erste und letzte Gleichheitszeichen mit Folgerung 3.28 eine Reihe als Integral bzgl. des Zählmaßes umgeschrieben. Das zweite Gleichheitszeichen gilt nach Folgerung 3.27. □

Unser nächstes Ziel ist der Satz über majorisierte Konvergenz, das vermutlich wichtigste Werkzeug, um die Vertauschbarkeit von Grenzübergang und Integration zu zeigen. Als Hilfsmittel für den Beweis diskutieren wir kurz Maße mit Dichten (die später auch anderweitig häufig gebraucht werden).

Satz 3.30 (Maße mit Dichten). *Es sei* $(X, \mathcal{S}, \mu)$ *ein Maßraum und* $\rho \colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ *eine messbare Funktion. Dann gilt:*

(a) *Ist* ρ *nicht-negativ, so ist* $\rho \odot \mu \colon \mathcal{S} \to [0, \infty]$,

$$A \mapsto \int_A \rho \, d\mu \qquad \text{für } A \in \mathcal{S} \tag{34}$$

ein Maß auf $(X, \mathcal{S})$.

(b) *Ist* ρ *bzgl.* μ *über* X *integrierbar, so definiert* (34) *eine* σ*-additive Funktion*[22] $\rho \odot \mu \colon \mathcal{S} \to \mathbb{R}$.

Beweis. (a) Es ist $(\rho \odot \mu)(\emptyset) = \int_{\emptyset} \rho \, d\mu = \int_X \rho \mathbf{1}_{\emptyset} \, d\mu = 0$. Ist $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge paarweise disjunkter Mengen in $\mathcal{S}$ und $A := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$, so ist

$$\mathbf{1}_A(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{1}_{A_n}(x)$$

[22] Solche Funktionen nennt man auch “signierte Maße.”

für alle $x \in X$ und somit

$$\begin{aligned}(\rho \odot \mu)(A) &= \int_A \rho\, d\mu = \int_X \rho(x) \mathbf{1}_A(x)\, d\mu(x) = \int_X \rho(x) \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{1}_{A_n}(x)\, d\mu(x) \\ &= \int_X \sum_{n=1}^{\infty} \rho(x) \mathbf{1}_{A_n}(x)\, d\mu(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X \rho \mathbf{1}_{A_n}\, d\mu \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} \rho\, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} (\rho \odot \mu)(A_n).\end{aligned}$$

(b) Für $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und A wie zuvor ist

$$\begin{aligned}(\rho \odot \mu)(A) &= \int_A \rho\, d\mu = \int_A \rho_+\, d\mu - \int_A \rho_-\, d\mu \\ &= (\rho_+ \odot \mu)(A) - (\rho_- \odot \mu)(A) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (\rho_+ \odot \mu)(A_n) - \sum_{n=1}^{\infty} (\rho_- \odot \mu)(A_n) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} ((\rho_+ \odot \mu)(A_n) - (\rho_- \odot \mu)(A_n)) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (\rho \odot \mu)(A_n)\end{aligned}$$

unter Benutzung von (a). □

In der Literatur schreibt man auch μ_ρ statt $\rho \odot \mu$, oder auch $\rho\, d\mu$.

Satz 3.31 (Satz über majorisierte Konvergenz). *Es sei $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine punktweise konvergente Folge messbarer Funktionen $f_n \colon X \to \overline{\mathbb{R}}$, mit Limes*

$$f(x) \;:=\; \lim_{n \to \infty} f_n(x) \;\in \overline{\mathbb{R}}$$

für $x \in X$. Existiert eine bzgl. μ über X integrierbare Funktion $g : X \to [0, \infty]$ derart, dass $|f_n| \leq g$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so ist f integrierbar und es gilt

$$\lim_{n \to \infty} \int_X f_n\, d\mu \;=\; \int_X f\, d\mu\,. \tag{35}$$

Beweis. Da $|f| \le g$, ist f nach dem Majorantenkriterium (Satz 3.17) integrierbar. Nach Satz 3.7 (f) ist $N := g^{-1}(\{-\infty,\infty\})$ eine Menge vom Maß 0. Setzen wir $E := X \setminus N$, ist wegen $|f_n| \le g$ und $|f| \le g$ jede der Funktionen $f|_E$, $f_n|_E$ und $g|_E$ reellwertig. Da

$$\int_X f\, d\mu \;=\; \int_E f|_E\, d\mu|_E \quad \text{und} \quad \int_X f_n\, d\mu \;=\; \int_E f_n|_E\, d\mu|_E$$

nach Satz 3.10(d), genügt es, (35) anstelle für f_n und f für die durch $g|_E$ majorisierten Funktionen $f_n|_E$ und $f|_E$ auf dem Maßraum $(E, \mathcal{S}|_E, \mu|_E)$ zu zeigen. Wir dürfen daher nun o.B.d.A. annehmen, dass die Funktionen g, f_n und f alle reellwertig sind, was uns ermöglicht, die Differenz $f - f_n$ zu betrachten. Sei nun

$$Y := \{x \in X \colon g(x) > 0\}.$$

Für alle $x \in X \setminus Y$ is $0 \le |f_n(x)| \le g(x) = 0$ und somit $f_n(x) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, also auch $f(x) = 0$. Folglich ist

$$\int_X f\, d\mu = \int_Y f\, d\mu + \int_{X\setminus Y} f\, d\mu = \int_Y f|_Y\, d\mu|_Y + \underbrace{\int_{X\setminus Y} f|_{X\setminus Y}\, d\mu|_{X\setminus Y}}_{=0} = \int_Y f|_Y\, d\mu|_Y$$

und analog

$$\int_X f_n\, d\mu = \int_Y f_n|_Y\, d\mu|_Y.$$

Es genügt also, (35) anstelle für f_n und f für die durch $g|_Y$ majorisierten Funktionen $f_n|_Y$ und $f|_Y$ auf dem Maßraum $(Y, \mathcal{S}|_Y, \mu|_Y)$ zu zeigen. Wir dürfen daher nun o.B.d.A. annehmen, dass $g(x) > 0$ für alle $x \in X$. Setzen wir

$$X_n := \Big\{x \in X \colon g(x) \ge \frac{1}{n}\Big\} \in \mathcal{S}$$

für $n \in \mathbb{N}$, so ist also $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n = X$ und

$$X_1 \subseteq X_2 \subseteq \cdots .$$

Nach Lemma 2.5(d) gilt $(g \odot \mu)(X_n) \to (g \odot \mu)(X)$ für $n \to \infty$. Gegeben $\varepsilon > 0$ existiert daher ein $n \in \mathbb{N}$ derart, dass

$$\frac{\varepsilon}{5} > (g \odot \mu)(X) - (g \odot \mu)(X_n) = (g \odot \mu)(X \setminus X_n) = \int_{X\setminus X_n} g\, d\mu.$$

Da $g \geq \frac{1}{n}\mathbf{1}_{X_n}$, ist dann

$$\infty > \int_X g \, d\mu \geq \int_X \frac{1}{n}\mathbf{1}_{X_n} \, d\mu = \frac{1}{n}\mu(X_n)$$

und somit $\mu(X_n) < \infty$. Wir definieren für $k \in \mathbb{N}$ nun

$$A_k := \{x \in X_n \colon \forall \ell \geq k \colon |f(x) - f_\ell(x)| < \varepsilon/(5\mu(X_n) + 1)\} \in \mathcal{S}.$$

Dann gilt

$$A_1 \subseteq A_2 \subseteq \cdots$$

und $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k = X_n$, weil $\lim_{k\to\infty} f_k(x) = f(x)$ für alle $x \in X_n$. Nun konvergiert $(g \odot \mu(A_k)) \to (g \odot \mu)(X_n)$ für $k \to \infty$; also gibt es ein $k \in \mathbb{N}$ mit

$$\frac{\varepsilon}{5} > (g \odot \mu)(X_n) - (g \odot \mu)(A_k) = \int_{X_n \setminus A_k} g \, d\mu.$$

Für alle $\ell \geq k$ ist wegen $|f(x) - f_\ell(x)| \leq |f(x)| + |f_\ell(x)| \leq 2g(x)$ dann

$$\begin{aligned}
\left| \int_X f \, d\mu - \int_X f_\ell \, d\mu \right| &\leq \int_X |f - f_\ell| \, d\mu \\
&= \int_{X\setminus X_n} \underbrace{|f(x) - f_\ell(x)|}_{\leq 2g(x)} \, d\mu(x) + \int_{X_n\setminus A_k} \underbrace{|f(x) - f_\ell(x)|}_{\leq 2g(x)} \, d\mu(x) \\
&\quad + \int_{A_k} \underbrace{|f(x) - f_\ell(x)|}_{\leq \varepsilon/(5\mu(X_n)+1)} \, d\mu(x) \\
&\leq 2\int_{X\setminus X_n} g \, d\mu + 2\int_{X_n\setminus A_k} g \, d\mu + \varepsilon \underbrace{\frac{\mu(A_k)}{5\mu(X_n) + 1}}_{\leq 1/5} < \varepsilon.
\end{aligned}$$

Also gilt (35). □

Beispiel 3.32 Es gilt

$$\lim_{n\to\infty} (\ln(x))^n = \mathbf{1}_{\{e\}}(x)$$

für alle $x \in [1, e]$ und $|(\ln(x))^n| \leq \ln(e)^n = 1$, wobei

$$\int_{[1,e]} 1 \, d\lambda_1 = \lambda_1([1, e]) = e - 1 < \infty.$$

Nach dem Satz über majorisierte Konvergenz ist somit

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\int_{[1,e]}(\ln(x))^n\,d\lambda_1(x) &= \int_{[1,e]}\lim_{n\to\infty}(\ln(x))^n\,d\lambda_1(x)\\ &= \int_{[1,e]}\mathbf{1}_{\{e\}}(x)\,d\lambda_1(x)=\lambda_1(\{e\})=0.\end{aligned}$$

Beispiel 3.33 Wir betrachten eine Funktionenfolge, auf die sich der Satz über majorisierte Konvergenz *nicht* anwenden lässt (der "gleitende Buckel"). Wir betrachten den Maßraum $(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),\lambda_1)$ und $f_n:=\mathbf{1}_{[n,n+1]}$ für $n\in\mathbb{N}$. Die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert punktweise gegen $f=0$, aber

$$0 \;=\; \int_{\mathbb{R}} f\,d\lambda_1 \;=\; \int_{\mathbb{R}}\lim_{n\to\infty} f_n\,d\lambda_1 \;\neq\; \lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}} f_n\,d\lambda_1 \;=\; 1\,.$$

Wir erwähnen für die Allgemeinbildung einen weiteren Beweis des Satzes über majorisierte Konvergenz mit Hilfe des Fatouschen Lemmas (der meistens in der Literatur gegeben wird); der alternative Beweis wird in der Vorlesung übersprungen und ist nicht prüfungsrelevant.

Lemma 3.34 (von Fatou). *Für jede Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht-negativer messbarer Funktionen $f_n\colon X\to[0,\infty]$ gilt*

$$\int_X \liminf_{n\to\infty} f_n\,d\mu \;\le\; \liminf_{n\to\infty}\int_X f_n\,d\mu\,.$$

Beweis. Für $k\in\mathbb{N}$ sei $g_k:=\inf_{j\ge k} f_j$. Dann ist $g_k\le f_k$ und somit $\int_X g_k\,d\mu\le\int_X f_k\,d\mu$. Weiter ist die Folge $(g_k)_{k\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend, und sie konvergiert punktweise gegen $\liminf\limits_{n\to\infty} f_n$. Der Satz über monotone Konvergenz liefert

$$\int_X g_k\,d\mu \;\to\; \int_X \liminf_{n\to\infty} f_n\,d\mu$$

für $k\to\infty$. Somit gilt

$$\liminf_{k\to\infty}\int_X f_k\,d\mu \ge \liminf_{k\to\infty}\int_X g_k\,d\mu = \lim_{k\to\infty}\int_X g_k\,d\mu = \int_X \liminf_{n\to\infty} f_n\,d\mu,$$

wie behauptet. □

Alternativer Beweis des Satzes über majorisierte Konvergenz (mit Hilfe des Lemmas von Fatou). Da $|f|\le g$, ist f nach dem Majorantenkriterium (Satz 3.17) integrierbar. Nach Satz 3.7 (f) ist $N:=g^{-1}(\{-\infty,\infty\})$

eine Menge vom Maß 0. Setzen wir $E := X \setminus N$, ist wegen $|f_n| \leq g$ und $|f| \leq g$ jede der Funktionen $f|_E$, $f_n|_E$ und $g|_E$ reellwertig. Da

$$\int_X f\, d\mu = \int_E f|_E\, d\mu|_E \quad \text{und} \quad \int_X f_n\, d\mu = \int_E f_n|_E\, d\mu|_E$$

nach Satz 3.10(d), genügt es, (35) anstelle für f_n und f für die durch $g|_E$ majorisierten Funktionen $f_n|_E$ und $f|_E$ auf dem Maßraum $(E, \mathcal{S}|_E, \mu|_E)$ zu zeigen. Wir dürfen daher nun o.B.d.A. annehmen, dass die Funktionen g, f_n und f alle reellwertig sind, was uns ermöglicht, diese Funktionen punktweise zu subtrahieren. Es ist $|f_n - f| \leq 2g$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wir wenden nun das Lemma von Fatou auf die Funktionenfolge $(2g - |f_n - f|)_{n\in\mathbb{N}}$ an und erhalten

$$\begin{aligned}
\int_X 2g\, d\mu &= \int_X \liminf_{n\to\infty} (2g - |f_n - f|)\, d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_X (2g - |f_n - f|)\, d\mu \\
&= \int_X 2g\, d\mu + \liminf_{n\to\infty} \int_X (-|f_n - f|)\, d\mu \\
&= \int_X 2g\, d\mu - \limsup_{n\to\infty} \int_X |f_n - f|\, d\mu \leq \int_X 2g\, d\mu\,.
\end{aligned}$$

Da $\int_X 2g\, d\mu = 2\int_X g\, d\mu < \infty$, können wir "$\leq$" hier durch "$=$" ersetzen und erhalten $\limsup_{n\to\infty} \int_X |f_n - f|\, d\mu = 0$, weswegen auch

$$\lim_{n\to\infty} \int_X |f_n - f|\, d\mu = 0$$

gilt (vgl. Lemma 1.54). Mit Satz 3.16 folgt nun

$$\left| \int_X f_n\, d\mu - \int_X f\, d\mu \right| \leq \int_X |f_n - f|\, d\mu \to 0\,. \quad \square$$

3.5 Anwendung: Parameterabhängige Integrale

Der Satz über parameterabhängige Integrale besagt, dass Integrale unter geeigneten Voraussetzungen "stetig von Parametern abhängen" und man "unter dem Integral differenzieren" darf. Beide Aussagen können wir nun unter schwächeren Voraussetzungen und allgemeiner gewährleisten als früher (im Rahmen der Riemannschen Integrationstheorie).

Satz 3.35 (Parameterabhängige Integrale). *Sei $(X, \mathcal{S}, \mu)$ ein Maßraum und $P \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Teilmenge. Weiter sei $f\colon P \times X \to \mathbb{R}$ eine Funktion derart, dass für jedes $p \in P$ die Funktion*

$$f_p \ := \ f(p, \cdot)\colon X \to \mathbb{R}\,, \quad x \mapsto f(p, x)$$

bzgl. μ über X integrierbar ist. Dann hat

$$g\colon P \to \mathbb{R}\,, \quad g(p) \ := \ \int_X f_p \, d\mu \ = \ \int_X f(p, x) \, d\mu(x)$$

die folgenden Eigenschaften:

(a) *Ist $\bar{p} \in P$ derart, dass für jedes $x \in X$ die Funktion $f^x := f(\cdot, x)$: $P \to \mathbb{R}$, $p \mapsto f(p, x)$ an der Stelle $\bar{p}$ stetig ist und existiert eine bzgl. μ über X integrierbare Funktion $h\colon X \to [0, \infty]$ derart, dass*

$$|f(p, x)| \ \leq \ h(x) \quad \textit{für alle } (p, x) \in P \times X,$$

so ist g an der Stelle $\bar{p}$ stetig.

(b) *Nun sei $P \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $j \in \{1, \ldots, n\}$. Hat $f^x : P \to \mathbb{R}$ für jedes $x \in X$ eine stetige partielle Ableitung $D_j f^x = \frac{\partial f^x}{\partial p_j}$ und gibt es eine bzgl. μ über X integrierbare Funktion $h\colon X \to [0, \infty]$ derart, dass*

$$|D_j f^x(p)| \ \leq \ h(x) \quad \textit{für alle } (p, x) \in P \times X,$$

so existiert auch $D_j g$, diese Funktion ist stetig, und für alle $p \in P$ ist

$$(D_j g)(p) \ = \ \int_X D_j f(p, x) \, d\mu(x)\,. \tag{36}$$

Beweis. (a) Wir haben zu zeigen, dass $g(p_n) \to g(\bar{p})$ für jede gegen $\bar{p}$ konvergente Folge $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in P. Für festes $x \in X$ gilt

$$f_{p_n}(x) = f(p_n, x) = f^x(p_n) \to f^x(\bar{p}) = f(\bar{p}, x) = f_{\bar{p}}(x) \quad \text{für } n \to \infty$$

aufgrund der Stetigkeitsannahme. Also konvergieren die Funktionen f_{p_n} auf X punktweise gegen $f_{\bar{p}}$. Da h nach Voraussetzung eine integrierbare Majorante für die Funktionen f_{p_n} ist, erhalten wir mit dem Satz über majorisierte Konvergenz

$$g(p_n) \ = \ \int_X f_{p_n} \, d\mu \ \to \ \int_X f_{p_n} \, d\mu \ = \ g(\bar{p})\,.$$

(b) Wir zeigen die Existenz der partiellen Ableitung $D_jg(p)$ an einer gegebenen Stelle $p \in P$. Da P in $\mathbb{R}^n$ offen ist, gibt es ein $r > 0$ mit $B_r(p) := \{q \in \mathbb{R}^n : \|q - p\|_2 < r\} \subseteq P$. Dann gilt $p + te_j \in P$ für alle $t \in [0, r[$. Gegeben $x \in X$ und $t \in]0, r[$ können wir den Mittelwertsatz der Analysis I anwenden auf die stetig differenzierbare Funktion

$$[0,t] \to \mathbb{R}\,, \quad s \mapsto f(p + se_j, x) = f^x x(p + se_j)\,.$$

Es existiert daher ein $\theta_{x,t} \in [0, t]$ derart, dass

$$\frac{1}{t}\,(f(p + te_j, x) - f(p, x)) \;=\; (D_jf)(p + \theta_{x,t}\, e_j, x)\,.$$

Da hier $|(D_jf)(p + \theta_{x,t}e_j, x)| \leq h(x)$, erhalten wir mit dem Satz über majorisierte Konvergenz für jede Folge $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $]0, 1]$ mit $t_n \to 0$

$$\begin{aligned}
\frac{g(p + t_ne_j) - g(p)}{t_n} &= \int_X \frac{f(p + t_ne_j, x) - f(p, x)}{t_n}\, d\mu(x)\\
&= \int_X (D_jf)(p + \theta_{x,t_n}e_j, x)\, d\mu(x) \;\to\; \int_X D_jf(p, x)\, d\mu(x)
\end{aligned}$$

für $n \to \infty$. Also existiert die partielle Ableitung $D_jg(p)$ an der Stelle p und ist durch (36) gegeben. Wenden wir Teil (a) auf (36) an, so sehen wir, dass D_jg stetig ist. $\square$

Teil (a) des Satzes (und sein Beweis) bleibt gültig, wenn P ein beliebiger metrischer Raum ist.

3.6 Anwendung: Vollständigkeit von L^p-Räumen

Sei $(X, \mathcal{S}, \mu)$ ein Maßraum. Wir diskutieren nun Konvergenz im Raum $\mathcal{L}^1(X, \mu)$ der integrierbaren reellwertigen Funktionen und erläutern, wie sich mit Hilfe von $\mathcal{L}^1(X, \mu)$ ein Banachraum $L^1(X, \mu)$ gewinnen lässt. Anschließend diskutieren wir kurz auch $L^\infty(X, \mu)$ und $L^2(X, \mu)$.

Setzen wir

$$\|f\|_{\mathcal{L}^1} := \int_X |f(x)|\, d\mu(x) \in [0, \infty[$$

für $f \in \mathcal{L}^1(X, \mu)$, so gilt

$$\begin{aligned}
\|f + g\|_{\mathcal{L}^1} &= \int_X \underbrace{|f(x) + g(x)|}_{\leq |f(x)|+|g(x)|}\, d\mu(x) \leq \int_X |f(x)|\, d\mu(x) + \int_X |g(x)|\, d\mu(x)\\
&= \|f\|_{\mathcal{L}^1} + \|g\|_{\mathcal{L}^1}
\end{aligned}$$

für $f, g \in \mathcal{L}^1(X, \mu)$. Für alle $f \in \mathcal{L}^1(X, \mu)$ und $t \in \mathbb{R}$ ist weiter

$$\|tf\|_{\mathcal{L}^1} = \int_X \underbrace{|tf(x)|}_{|t| \cdot |f(x)|} \, d\mu(x) = |t| \int_X |f(x)| \, d\mu(x) = |t| \cdot \|f\|_{\mathcal{L}^1}.$$

Allerdings ist $\| \cdot \|_{\mathcal{L}^1}$ nicht immer eine Norm auf $\mathcal{L}^1(X, \mu)$, denn es ist zum Beispiel im Falle $X = \mathbb{R}$, $\mu = \lambda_1$

$$\|\mathbf{1}_F\|_{\mathcal{L}^1} = \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_F \, d\lambda_1 = \lambda_1(F) = 0$$

für jede nicht leere endliche Teilmenge $F \subseteq \mathbb{R}$, obwohl $\mathbf{1}_F \neq 0$.

Nach dem Vorigen ist $\| \cdot \|_{\mathcal{L}^1}$ eine *Halbnorm* auf $\mathcal{L}^1(X, \mu)$ im folgenden Sinn.

Definition 3.36 Eine *Halbnorm* auf einem reellen Vektorraum E ist eine Abbildung $q \colon E \to [0, \infty[$, welche positiv homogen und subadditiv ist, also

(a) $q(tx) = |t| q(x)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ und $x \in E$; und

(b) $q(x + y) \leq q(x) + q(y)$ für alle $x, y \in E$.

Jede Norm auf E ist auch eine Halbnorm, aber nicht jede Halbnorm braucht eine Norm zu sein, denn (wie gerade gesehen) kann es Vektoren $0 \neq x \in E$ geben mit $q(x) = 0$. Die Vektoren $x \in E$ mit $q(x) = 0$ bilden jedoch immer einen Untervektorraum N und auf dem zugehörigen Quotientenvektorraum E/N kann mit Hilfe von q eine Norm $\| \cdot \|_q$ definiert werden,

$$\|x + N\|_q := q(x).$$

Lemma 3.37 *Ist E ein reeller Vektorraum und $q \colon E \to [0, \infty[$ eine Halbnorm auf E, so ist*

$$N = \{x \in E \colon q(x) = 0\}$$

ein Untervektorraum von E. Die Abbildung

$$\| \cdot \|_q \colon E/N \to [0, \infty[, \quad x + N \mapsto q(x)$$

ist eine Norm auf $E_q := E/N$.

Beweis. Ist $x \in N$ und $t \in \mathbb{R}$, so ist wegen $q(x) = 0$ auch

$$q(tx) = |t|q(x) = 0,$$

also $tx \in N$. Da $q(\theta) = q(0\theta) = |0|q(\theta) = 0q(\theta) = 0$ ist der Nullvektor $\theta \in E$ in N enthalten, also $N \neq \emptyset$. Gegeben $x, y \in N$ ist

$$0 \leq q(x + y) \leq q(x) + q(y) = 0,$$

also $q(x + y) = 0$ und somit $x + y \in N$. Also ist N ein Untervektorraum. Gegeben $x \in E$ und $y \in N$ gilt

$$q(x + y) \leq q(x) + q(y) = q(x).$$

Ebenso ist wegen $-y \in N$

$$q(x) = q((x + y) + (-y)) \leq q(x + y) + q(-y) = q(x + y)$$

und somit $q(x) = q(x + y)$, folglich

$$\|x + N\|_q := q(x)$$

wohldefiniert. Gegeben $x, y \in E$ und $t \in \mathbb{R}$ ist

$$\|(x+N)+(y+N)\|_q = \|(x+y)+N\|_q = q(x+y) \leq q(x)+q(y) = \|x+N\|_q+\|y+N\|_q$$

und

$$\|t(x + N)\|_q = \|tx + N\|_q = q(tx) = |t|q(x) = |t| \cdot \|x + N\|_q.$$

Ist schließlich

$$0 = \|x + N\|_q = q(x),$$

so ist $x \in N$ und somit $x + N = N$ der Nullvektor in E/N. Also ist $\|\cdot\|_q$ eine Norm auf E/N. □

Definition 3.38 Ist $(X, \mathcal{S}, \mu)$ ein Maßraum, so sei

$$L^1(X, \mu) := \mathcal{L}^1(X, \mu)/N$$

der Quotientenvektorraum bezüglich

$$N := \{f \in \mathcal{L}^1(X, \mu) \colon \|f\|_{\mathcal{L}^1} = 0\}.$$

Wir versehen $L^1(X, \mu)$ mit der Norm $\|f + N\|_{L^1} := \|f\|_{\mathcal{L}^1}$. Schreiben wir $[f] := f + N$ für $f \in \mathcal{L}^1(X, \mu)$, so ist also

$$\|[f]\|_{L^1} = \|f\|_{\mathcal{L}^1}.$$

Bemerkung 3.39 (a) Eine messbare Funktion $f\colon X \to \mathbb{R}$ ist genau dann in N, wenn

$$\int_X |f(x)|\, d\mu(x) < \infty;$$

nach Satz 3.7(g) (bzw. Satz 3.15(b)) ist dies genau dann der Fall, wenn

$$\{x \in X\colon |f(x)| > 0\} = \{x \in X\colon f(x)\}$$

eine Menge vom Maß 0 ist, wenn also $f(x) = 0$ fast überall.

(b) Gegeben $f, g \in \mathcal{L}^1(X, \mu)$ ist $[f] = [g]$, also $f + N = g + N$ genau dann, wenn $g - f \in N$, also

$$\{x \in X\colon g(x) - f(x) \neq 0\} = \{x \in X\colon f(x) \neq g(x)\}$$

eine Menge vom Maß 0 ist, also $f(x) = g(x)$ fast überall.

(c) In der Literatur wird oft nicht zwischen $\mathcal{L}^1(X, \mu)$ und $L^1(X, \mu)$ bzw. f und $[f]$ unterschieden; meist ist aus dem Zusammenhang klar, was gemeint ist.

Mit Hilfe des folgenden Lemmas werden wir sehen, dass $(L^1(X, \mu), \|\cdot\|_{L^1})$ vollständig, also ein Banachraum ist.

Lemma 3.40 *Ist (X, d) ein metrischer Raum, so gilt:*

(a) *Hat eine Cauchyfolge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X eine konvergente Teilfolge $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, so ist auch $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent.*

(b) *Jede Cauchyfolge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X hat eine Teilfolge $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ derart, dass*

$$(\forall k \in \mathbb{N})(\forall i, j \geq k) \;\; d(x_{n_i}, x_{n_j}) < 2^{-k}.$$

Beweis. (a) Sei $x := \lim_{k\to\infty} x_{n_k}$. Gegeben $\varepsilon > 0$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$ derart, dass $d(x_n, x_m) \leq \varepsilon$ für alle $n, m \geq N$. Es gibt ein $k_0 \in \mathbb{N}$ derart, dass $n_k \geq N$ für alle $k \geq k_0$. Dann gilt also

$$d(x_n, x_{n_k}) \leq \varepsilon \quad \text{für alle } n \geq N \text{ und } k \geq k_0.$$

Halten wir n fest und lassen $k \to \infty$ streben so folgt

$$d(x_n, x) \leq \varepsilon \quad \text{für alle } n \geq N.$$

Also gilt $x_n \to x$ für $n \to \infty$.

(b) Da $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge ist, gibt es für jedes $k \in \mathbb{N}$ ein $N_k \in \mathbb{N}$ derart, dass

$$d(x_n, x_m) < \frac{1}{2^k} \quad \text{für alle } n, m \geq N_k.$$

Setzen wir

$$n_k := \max\{n_1, \ldots, N_k\} + k,$$

so ist die Folge $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ streng monoton wachsend. Für alle $k \in \mathbb{N}$ und $i, j \geq k$ sind $n_i, n_j \geq n_k$ wegen der Monotonie. Da $n_k \geq N_k$, sind $i, j \geq N_k$ und somit

$$d(x_{n_i}, x_{n_j}) < \frac{1}{k},$$

was den Beweis beendet. □

Satz 3.41 *Für jeden Maßraum $(X, \mathcal{S}, \mu)$ ist $(L^1(X,\mu), \|\cdot\|_{L^1})$ ein Banachraum. Ist $([f_n])_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge in $L^1(X,\mu)$ mit Limes $[f] \in L^1(X,\mu)$ (wobei $f_n, f \in \mathcal{L}^1(X,\mu)$), so gibt es eine Teilfolge $([f_{n_k}])_{k\in\mathbb{N}}$ derart, dass $f_{n_k}(x)$ für $k \to \infty$ für fast alle $x \in X$ gegen $f(x)$ konvergiert.*

Beweis. Wir wissen schon, dass $(L^1(X,\mu), \|\cdot\|_{L^1})$ ein normierter Raum ist. Seien $f_n \in \mathcal{L}^1(X,\mu)$ derart, dass $([f_n])_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $L^1(X,\mu)$ ist. Nach Lemma 3.40(b) gibt es eine Teilfolge $([f_{n_k}])_{k\in\mathbb{N}}$ derart, dass

$$\|[f_{n_{k+1}}] - [f_{n_k}]\|_{L^1} < 2^{-k} \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}.$$

Dann ist

$$g\colon X \to [0,\infty], \quad x \mapsto \sum_{k=1}^{\infty} |f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)|$$

eine messbare Funktion. Wegen Folgerung 3.27 ist

$$\begin{aligned}
\int_X \sum_{k=1}^{\infty} |f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)|\, d\mu(x) &= \sum_{k=1}^{\infty} \int_X |f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)|\, d\mu(x) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_{\mathcal{L}^1} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \|[f_{n_{k+1}}] - [f_{n_k}]\|_{L^1} \leq \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} < \infty,
\end{aligned}$$

also g integrierbar. Nach Satz 3.7(f) hat die Menge

$$A := \left\{ x \in X \colon \sum_{k=1}^{\infty} |f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)| = \infty \right\}$$

somit das Maß $\mu(A) = 0$. Nach dem Majorantenkriterium der Analysis 1 für Reihen existiert für alle $x \in X \setminus A$ der Grenzwert

$$\sum_{k=1}^{\infty} (f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x))$$

in $\mathbb{R}$; er definiert eine messbare Funktion von $x \in X \setminus A$ (siehe Satz 1.30 und Satz 1.56). Nach dem Satz über stückweise messbare Funktionen ist also

$$f \colon X \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} f_{n_1}(x) + \sum_{k=1}^{\infty} (f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)) & \text{wenn } x \in X \setminus A, \\ 0 & \text{wenn } x \in A \end{cases}$$

eine messbare Funktion. Für $x \in X \setminus A$ ist nun

$$\begin{aligned} f(x) &= f_{n_1}(x) + \lim_{k \to \infty} \sum_{j=1}^{k} (f_{n_{j+1}}(x) - f_{n_j}(x)) \\ &= \lim_{k \to \infty} \left(\underbrace{f_{n_1}(x) + \sum_{j=1}^{k} (f_{n_{j+1}}(x) - f_{n_j}(x))}_{= f_{n_{k+1}}(x)} \right), \end{aligned}$$

es gilt also

$$f_{n_k}(x) \to f(x) \quad \text{für } k \to \infty.$$

Für $x \in X \setminus A$ und alle $k, \ell \in \mathbb{N}$ mit $k \leq \ell$ ist weiter

$$\begin{aligned} |f_{n_\ell}(x) - f_{n_k}(x)| &= \left| \sum_{j=k}^{\ell-1} (f_{n_{j+1}}(x) - f_{n_j}(x)) \right| \leq \sum_{j=k}^{\ell-1} |f_{n_{j+1}}(x) - f_{n_j}(x)| \\ &\leq \sum_{j=1}^{\infty} |f_{n_{j+1}}(x) - f_{n_j}(x)| = g(x) \end{aligned}$$

und mit $\ell \to \infty$ auch

$$|f(x) - f_{n_k}(x)| \leq g(x). \tag{37}$$

Folglich ist

$$|f(x)| \leq |f(x) - f_{n_1}(x)| + |f_{n_1}(x)| \leq g(x) + |f_{n_1}(x)| \tag{38}$$

für alle $x \in X \setminus A$. Für $x \in A$ gilt (38) ebenfalls, denn dann ist $g(x) = \infty$. Die integrierbare Funktion $g + |f_{n_1}|$ ist also eine Majorante für f, folglich f integrierbar (nach dem Majorantenkriterium) und somit $f \in \mathcal{L}^1(X, \mu)$. Schließlich gilt

$$\begin{aligned}\|[f] - [f_{n_k}]\|_{L^1} &= \|f - f_{n_k}\|_{\mathcal{L}^1} = \int_X |f - f_{n_k}|\, d\mu = \int_{X \setminus A} |f(x) - f_{n_k}(x)|\, d\mu \\ &\to \int_{X \setminus A} \lim_{k \to \infty} |f(x) - f_{n_k}(x)|\, d\mu(x) = \int_{X \setminus A} 0\, d\mu = 0\end{aligned}$$

für $k \to \infty$: Beim Integrieren konnte wegen Satz 3.10(d) nämlich die Menge A vom Maß 0 weggelassen werden. Da für alle $x \in X \setminus A$

$$|f(x) - f_{n_k}(x)| \to 0$$

und diese Funktionen von x nach (37) $g|_{X \setminus A}$ als integrierbare Majorante besitzen, konnte mit dem Satz über majorsierte Konvergenz der Grenzwert ins Integral gezogen werden. Die Cauchyfolge $([f_n])_{n \in \mathbb{N}}$ hat also $([f_{n_k}])_{k \in \mathbb{N}}$ als konvergente Teilfolge. Somit ist $([f_n])_{n \in \mathbb{N}}$ konvergent und hat ebenfalls den Limes $[f]$.

Ist $h \in \mathcal{L}^1(X, \mu)$ mit $[f_n] \to [h]$ in $L^1(X, \mu)$, so gilt $[h] = [f]$, also $h(x) = f(x)$ außerhalb einer Menge $B \in \mathcal{S}$ vom Maß $\mu(B) = 0$. Dann ist $\mu(A \cup B) = 0$ und für alle $x \in X \setminus (A \cup B)$ gilt $f_{n_k}(x) \to f(x) = h(x)$ für $k \to \infty$. □

Definition 3.42 Sei $(X, \mathcal{S}, \mu)$ ein Maßraum. Wir definieren $\mathcal{L}^\infty(X, \mu)$ als die Menge aller messbaren Funktionen $f \colon X \to \mathbb{R}$, die *wesentlich beschränkt* sind in dem Sinne, dass eine Menge $A \in \mathcal{S}$ vom Maß $\mu(A) = 0$ existiert derart, dass

$$f|_{X \setminus A}$$

eine beschränkte Funktion ist. Wir definieren

$$\|f\|_{\mathcal{L}^\infty} := \inf_A \|f|_{X \setminus A}\|_\infty$$

als das Infimum der Supremumsnormen

$$\|f|_{X\setminus A}\|_\infty := \sup\{|f(x)|\colon x \in X \setminus A\}$$

für alle A wie zuvor. Das Infimum ist ein Minimum: Es gibt nämlich eine Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{S}$ von Mengen vom Maß 0 mit

$$\|f\|_{\mathcal{L}^\infty} = \lim_{n\to\infty} \|f|_{X\setminus A_n}\|_\infty.$$

Setzen wir $A := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$, so gilt $\|f|_{X\setminus A}\|_\infty \leq \|f|_{X\setminus A_n}\|_\infty$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und somit

$$\|f\|_{\mathcal{L}^\infty} \leq \|f|_{X\setminus A}\|_\infty \leq \lim_{n\to\infty} \|f|_{X\setminus A_n}\|_\infty = \|f\|_{\mathcal{L}^\infty},$$

also

$$\|f\|_{\mathcal{L}^\infty} = \|f|_{X\setminus A}\|_\infty.$$

Dann ist auch

$$\|f\|_{\mathcal{L}^\infty} = \|f|_{X\setminus B}\|_\infty \quad \text{für alle } B \in \mathcal{S} \text{ mit } A \subseteq B \text{ und } \mu(B) = 0, \tag{39}$$

denn

$$\|f\|_{\mathcal{L}^\infty} \leq \|f|_{X\setminus B}\|_\infty \leq \|f|_{X\setminus A}\|_\infty = \|f\|_{\mathcal{L}^\infty}.$$

In Aufgabe H29(a) zeigen wir, dass $\mathcal{L}^\infty(X,\mu)$ ein Untervektorraum des Vektorraums $\mathbb{R}^X$ aller reellwertigen Funktionen auf X ist und

$$\|\cdot\|_{\mathcal{L}^\infty}\colon \mathcal{L}^\infty(X,\mu) \to [0,\infty[$$

eine Halbnorm. Nach Lemma 3.37 ist also

$$N := \{f \in \mathcal{L}^\infty(X,\mu)\colon \|f\|_{\mathcal{L}^\infty} = 0\}$$

ein Untervektorraum von $\mathcal{L}^\infty(X,\mu)$, somit

$$L^\infty(X,\mu) := \mathcal{L}^\infty(X,\mu)/N$$

ein Vektorraum und schreiben wir

$$[f] := f + N \in L^\infty(X,\mu)$$

für $f \in \mathcal{L}^\infty(X,\mu)$, so definiert

$$\|[f]\|_{L^\infty} := \|f\|_{\mathcal{L}^\infty}$$

eine Norm auf $L^\infty(X,\mu)$.

Beachten Sie, dass $f \in N$ genau dann, wenn

$$\|f\|_{\mathcal{L}^\infty} = \|f|_{X \setminus A}\|_\infty = 0 \quad \text{(und somit } f|_{X\setminus A} = 0)$$

für eine Menge $A \in \mathcal{S}$ mit $\mu(A) = 0$; dies gilt also genau dann, wenn $f(x) = 0$ für fast alle $x \in X$. Folglich gilt für $f, g \in \mathcal{L}^\infty(X, \mu)$ genau dann $[g] = [f]$, also $g + N = f + N$ bzw. $g - f \in N$, wenn $g(x) - f(x) = 0$ fast überall, also

$$g(x) = f(x) \text{ für fast alle } x \in X.$$

Satz 3.43 *Für jeden Maßraum $(X, \mathcal{S}, \mu)$ ist $(L^\infty(X, \mu), \|\cdot\|_{L^\infty})$ ein Banachraum. Ist $([f_n])_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $L^\infty(X, \mu)$, die gegen ein $[f] \in L^\infty(X, \mu)$ konvergiert (wobei $f_n, f \in \mathcal{L}^\infty(X, \mu)$), so existiert eine Menge $A \in \mathcal{S}$ vom Maß $\mu(A) = 0$ derart, dass die Funktionen $f_n|_{X\setminus A} \colon X \setminus A \to \mathbb{R}$ für $n \to \infty$ gleichmäßig gegen $f|_{X\setminus A}$ konvergieren.*

Beweis. Ist $([f_n])_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $L^\infty(X, \mu)$, so gibt es für alle $n, m \in \mathbb{N}$ Mengen $A_{n,m} \in \mathcal{S}$ vom Maß $\mu(A_{n,m}) = 0$ derart, dass

$$\|[f_n] - [f_n]\|_{L^\infty} = \|f_n - f_m\|_{\mathcal{L}^\infty} = \|(f_n - f_m)|_{X\setminus A_{n,m}}\|_\infty. \tag{40}$$

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist dann auch $A_n := \bigcup_{m\in\mathbb{N}} A_{n,m} \in \mathcal{S}$ und $\mu(A_n) = 0$; weiter ist

$$A := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n,m\in\mathbb{N}} A_{n,m} \in \mathcal{S}$$

und $\mu(A) = 0$. Wegen (40) und (39) gilt dann

$$\|[f_n] - [f_m]\|_{L^\infty} = \|(f_n - f_m)|_{X\setminus A}\|_\infty$$

für alle $n, m \in \mathbb{N}$. Gegeben $\varepsilon > 0$ existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ derart, dass

$$\varepsilon > \|[f_m] - [f_n]\|_{L^\infty} = \|f_m|_{X\setminus A} - f_n|_{X\setminus A}\|_\infty;$$

also ist $(f_n|_{X\setminus A})_{n \mathrm{im} \mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $(\ell^\infty(X \setminus A, \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ und somit gleichmäßig konvergent gegen ein $g \in \ell^\infty(X \setminus A, \mathbb{R})$. Insbesondere konvergiert f_n punktweise gegen g, so dass g (wie jedes $f_n|_{X\setminus A}$) messbar ist (nach Satz 1.56). Setzen wir $f(x) := g(x)$ wenn $x \in X \setminus A$, $f(x) := 0$ für $x \in A$, so ist die so erhaltene Funktion

$$f \colon X \to \mathbb{R}$$

messbar nach dem Satz über stückweise messbare Funktionen. Da $f(X) \subseteq g(X) \cup \{0\}$, ist f eine beschränkte Funktion und somit $f \in \mathcal{L}^\infty(X, \mathbb{R})$. Da

$$\|[f] - [f_n]\|_{L^\infty} = \|f - f_n\|_{\mathcal{L}^\infty} \leq \|(f - f_n)|_{X \setminus A}\|_\infty = \|g - f_n|_{X \setminus A}\|_\infty \to 0$$

für $n \to \infty$, folgt $[f_n] \to [f]$. Gilt auch $[f_n] \to [h]$ mit $h \in \mathcal{L}^\infty(X, \mu)$, so ist $[h] = [f]$, also $h \in f + N$, somit $h(x) = f(x)$ fast überall. Also existiert eine Menge $M \in \mathcal{S}$ vom Maß $\mu(B) = 0$ derart, dass $f|_{X \setminus B} = h|X \setminus B$. dann konvergiert

$$f_n|_{X \setminus (A \cup B)}$$

für $n \to \infty$ gleichmäßg gegen $g|_{X \setminus (A \cup B)} = f|_{X \setminus (A \cup B)} = h|_{X \setminus (A \cup B)}$, was den Beweis beendet. $\square$

Die folgende Definition und das anschließende Lemma kennen Sie so (oder etwas weniger allgemein) aus der Linearen Algebra; die Beweise werden daher in der Vorlesung übersprungen.

Definition 3.44 Es sei E ein reeller Vektorraum. Eine bilineare Abbildung $\beta\colon E \times E \to \mathbb{R}$ heißt positiv semidefinit, wenn sie symmetrisch ist (also $\beta(y, x) = \beta(x, y)$ für alle $x, y \in E$) und

$$\beta(x, x) \geq 0$$

für alle $x \in E$. Gilt zusätzlich $\beta(x, x) > 0$ für alle $x \in E \setminus \{0\}$, so wird β *positiv definit* genannt oder auch ein *inneres Produkt* auf E.

Lemma 3.45 *Ist E ein reeller Vektorraum und $\beta\colon E \times E \to \mathbb{R}$ positiv semidefinit, so ist*

$$\|\cdot\|\colon E \to [0, \infty[, \quad x \mapsto \|x\| := \sqrt{\beta(x, x)}$$

eine Halbnorm auf E. Weiter gilt die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung

$$|\beta(x, y)| \leq \|x\| \, \|y\|$$

für alle $x, y \in E$.

Beweis. Wir zeigen zunächst die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung. Gegeben $x, y \in E$ gilt für alle $t \in \mathbb{R}$

$$0 \leq \beta(x + ty, x + ty) = \|x\|^2 + 2t\beta(x, y) + t^2\|y\|^2.$$

Ist $\|y\| = 0$, so muss also $\beta(x, y) = 0$ sein und insbesondere ist $|\beta(x, y)| = 0 \leq \|x\| \, \|y\|$.

Ist $\|y\| \neq 0$, so können wir die vorige Ungleichung mit quadratischer Ergänzung umschreiben zu

$$0 \leq (t\|y\| + \beta(x, y)/\|y\|)^2 + \|x\|^2 - \beta(x, y)^2/\|y\|^2.$$

Wir wählen t nun so, dass das erste Quadrat 0 wird und erhalten

$$0 \leq \|x\|^2 - \beta(x, y)^2/\|y\|^2,$$

also $\beta(x, y)^2 \leq \|x\|^2\|y\|^2$. Bildung der Quadratwurzel liefert $\beta(x, y) \leq \|x\| \, \|y\|$.

Offenbar gilt $\|tx\| = \sqrt{\beta(tx, ty)} = \sqrt{t^2\beta(x, x)} = |t|\sqrt{\beta(x, x)} = |t| \, \|x\|$ für alle $t \in \mathbb{R}$ und $x \in E$. Weiter ist

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= \beta(x + y, x + y) = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\beta(x, y) \\ &\leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2|\beta(x, y)| \\ &\leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\| \, \|y\| = (\|x\| + \|y\|)^2 \end{aligned}$$

unter Benutzung der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung. Bilden der Quadratwurzel führt auf $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$. Also ist $\| \cdot \|$ eine Halbnorm. $\square$

Definition 3.46 Ist E ein reeller Vektorraum und β ein inneres Produkt auf E derart, dass E bezüglich der durch $\|x\| := \sqrt{\beta(x, x)}$ gegebenen Norm vollständig und somit ein Banachraum ist, so nennt man (E, β) einen (reellen) *Hilbertraum.*

Hilberträume heißen oft H (statt E); statt $\beta(x, y)$ schreibt man $\langle x, y \rangle$.

Definition 3.47 Es sei $(X, \mathcal{S}, \mu)$ ein Maßraum. Wir schreiben $\mathcal{L}^2(X, \mu)$ für die Menge aller messbaren Funktionen $f\colon X \to \mathbb{R}$, welche *quadratintegrabel* sind in dem Sinne, dass

$$\int_X f(x)^2 \, d\mu(x) < \infty.$$

Für $f \in \mathcal{L}^2(X, \mu)$ definieren wir

$$\|f\|_{\mathcal{L}^2} := \sqrt{\int_X f(x)^2 \, d\mu(x)} \in [0, \infty[.$$

Satz 3.48 *Für jeden Maßraum $(X, \mathcal{S}, \mu)$ ist $\mathcal{L}^2(X, \mu)$ ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^X$ und $\|\cdot\|_{\mathcal{L}^2}$ ein Halbnorm auf $\mathcal{L}^2(X, \mu)$, somit*

$$N := \{f \in \mathcal{L}^2(X, \mu) \colon \|f\|_{\mathcal{L}^2} = 0\}$$

ein Untervektorraum von $\mathcal{L}^2(X, \mu)$. Der Quotientenvektorraum

$$L^2(X, \mu) := \mathcal{L}^2(X, \mu)/N$$

ist mit der durch

$$\|[f]\|_{L^2} := \|f\|_{\mathcal{L}^2} \quad \text{für } [f] := f + N \in L^2(X, \mu)$$

gegebenen Norm ein Banachraum. Zudem ist $L^2(X, \mu)$ ein Hilbertraum mit dem inneren Produkt

$$\langle [f], [g] \rangle := \int_X f(x) g(x)\, d\mu(x)$$

für $f, g \in \mathcal{L}^2(X, \mu)$, wobei $\|[f]\|_{L^2} = \sqrt{\langle [f], [f] \rangle}$. Konvergiert eine Folge $([f_n])_{n \in \mathbb{N}}$ gegen $[f]$ in $L^2(X, \mu)$ (wobei $f_n, f \in \mathcal{L}^2(X, \mu)$), so gibt es eine Teilfolge $([f_{n_k}])_{k \in \mathbb{N}}$ derart, dass für fast alle $x \in X$ die Zahlenfolge $f_{n_k}(x)$ für $k \to \infty$ gegen $f(x)$ konvergiert.

Beweis. Offenbar ist $\mathcal{L}^2(X, \mu)$ unter Multiplikation mit Skalaren abgeschlossen: Ist $f \in \mathcal{L}^2(X, \mu)$ und $c \in \mathbb{R}$, so ist

$$\int_X (cf(x))^2\, d\mu(x) = c^2 \int_X f(x)^2\, d\mu(x) < \infty$$

(und somit auch $\|cf\|_{\mathcal{L}^2} = |c|\, \|f\|_{\mathcal{L}^2}$). Sind $f, g \in \mathcal{L}^2(X, \mu)$, so gilt für jedes $x \in X$

$$\begin{aligned} (f(x) + g(x))^2 &= |f(x) + g(x)|^2 \le (|f(x)| + |g(x)|)^2 \\ &\le (2 \max\{|f(x)|, |g(x)|\})^2 \\ &= 4 \max\{|f(x)|^2, |g(x)|^2\} \le 4(f(x)^2 + g(x)^2). \end{aligned}$$

Somit ist

$$\begin{aligned} \int_X (f(x) + g(x))^2\, d\mu(x) &\le 4 \left(\int_X f(x)^2\, d\mu(x) + \int_X g(x)^2\, d\mu(x) \right) \\ &= 4((\|f\|_{\mathcal{L}^2})^2 + (\|g\|_{\mathcal{L}^2})^2) < \infty, \end{aligned}$$

also $f+g \in \mathcal{L}^2(X,\mu)$. Somit ist $\mathcal{L}^2(X,\mu)$ ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^X$. Weiter folgt aus

$$|f(x)g(x)| = |f(x)| \cdot |g(x)| \leq \max\{f(x)^2, g(x)^2\} \leq f(x)^2 + g(x)^2,$$

dass

$$\begin{aligned}\int_X |f(x)g(x)| \, d\mu(x) &\leq \int_X f(x)^2 \, d\mu(x) + \int_X g(x)^2 \, d\mu(x) \\ &= (\|f\|_{\mathcal{L}^2})^2 + (\|g\|_{\mathcal{L}^2})^2 < \infty.\end{aligned}$$

Nach dem Majorantenkriterium ist also die messbare Funktion fg integrierbar und offenbar definiert

$$\beta(f,g) := \int_X f(x)g(x) \, d\mu(x)$$

eine positiv definite bilineare Abbildung $\beta\colon \mathcal{L}^2(X,\mu) \times \mathcal{L}^2(X,\mu) \to \mathbb{R}$. Die zugehörige Halbnorm ist gegeben durch

$$\sqrt{\beta(f,f)} = \sqrt{\int_X f(x)^2 \, d\mu(x)} = \|f\|_{\mathcal{L}^2};$$

also ist $\|\cdot\|_{\mathcal{L}^2}$ eine Halbnorm auf $\mathcal{L}^2(X,\mu)$ und somit N ein Untervekorraum und $\|\cdot\|_{L^2}$ eine Norm auf $L^2(X,\mu)$ (siehe Lemma 3.37). Eine Funktion $f \in \mathcal{L}^2(X,\mu)$ ist genau dann in N, wenn $\int_X f(x)^2 \, d\mu(x) = 0$, also $\|f^2\|_{\mathcal{L}^1} = 0$, was genau dann der Fall ist, wenn die messbare Menge

$$\{x \in X\colon f(x)^2 \neq 0\} = \{x \in X\colon f(x) \neq 0\}$$

Maß 0 hat (also f fast überall verschwindet). ist also $[f] = [f_1]$ und $[g] = [g_1]$ mit $f, f_1, g, g_1 \in \mathcal{L}^2(X,\mu)$, so gibt es $N, M \in \mathcal{S}$ mit $\mu(N) = \mu(M) = 0$ derart, dass $f|_{X\setminus N} = f_1|_{X\setminus N}$ und $g|_{X\setminus M} = g_1|_{X\setminus M}$. Dann ist auch $\mu(N \cup N) = 0$ und somit

$$\begin{aligned}\beta(f_1,g_1) &= \int_X f_1(x)g_1(x) \, d\mu(x) = \int_{X\setminus(N\cup M)} \underbrace{f_1(x)g_1(x)}_{=f(x)g(x)} \, d\mu(x) \\ &= \int_X f(x)g(x) \, d\mu(x) = \beta(f,g).\end{aligned}$$

Folglich ist
$$\langle [f],[g]\rangle := \beta(f,g)$$
wohldefiniert und definiert offenbar eine positiv semidefinite bilineare Abbildung
$$L^2(X,\mu)\times L^2(X,\mu)\to\mathbb{R},\quad ([f],[g])\mapsto\langle [f],[g]\rangle.$$
Die zugehörige Halbnorm ist durch
$$\sqrt{\langle [f],[f]\rangle}=\sqrt{\beta(f,f)}=\|f\|_{\mathcal{L}^2}=\|[f]\|_{L^2}$$
gegeben, ist also eine Norm. Folglich ist $\langle\cdot,\cdot\rangle$ positiv definit und folglich $L^2(X,\mu)$ ein Hilbertraum, wenn wir noch zeigen können, dass $L^2(X,\mu)$ vollständig ist. Sei hierzu $([f_n])_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $L^2(X,\mu)$, mit $f_n\in\mathcal{L}^2(X,\mu)$. Nach Lemma 3.40(b) gibt es eine Teilfolge $([f_{n_k}])_{k\in\mathbb{N}}$ derart, dass
$$\|[f_{n_{k+1}}]-[f_{n_k}]\|_{L^2}<2^{-k}\quad\text{für alle } k\in\mathbb{N}.$$
Nach Übergehen zur Teilfolge dürfen wir ohne Einschränkung annehmen, dass
$$\|[f_{n+1}]-[f_n]\|_{L^2}<2^{-n}\text{für alle } n\in\mathbb{N}.$$
Dann ist
$$g\colon X\to[0,\infty],\quad x\mapsto\left(\sum_{n=1}^{\infty}|f_{n+1}(x)-f_n(x)|\right)^2$$
eine messbare Funktion. Für jedes $n\in\mathbb{N}$ ist
$$\begin{aligned}
&\int_X\left(\sum_{k=1}^{n}|f_{k+1}(x)-f_k(x)|\right)^2 d\mu(x)\\
&\qquad=\int_X\sum_{k,\ell=1}^{n}|f_{k+1}(x)-f_k(x)|\,|f_{\ell+1}(x)-f_\ell(x)|\,d\mu(x)\\
&\qquad=\sum_{k,\ell=1}^{n}\beta(|f_{k+1}-f_k|,|f_{\ell+1}-f_\ell|)\\
&\qquad\le\sum_{k,\ell=1}^{n}\|f_{k+1}-f_k\|_{\mathcal{L}^2}\|f_{\ell+1}-f_\ell\|_{\mathcal{L}^2}\\
&\qquad=\left(\sum_{k=1}^{n}\|f_{k+1}-f_k\|_{\mathcal{L}^2}\right)^2\le\left(\sum_{k=1}^{\infty}2^{-k}\right)^2=1
\end{aligned}$$

unter Benutzung der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung. Da

$$g(x) = \left(\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} |f_{k+1}(x) - f_k(x)| \right)^2 = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} |f_{k+1}(x) - f_k(x)| \right)^2,$$

folgt mit dem Satz über monotone Konvergenz

$$\int_X g(x)\, d\mu(x) = \lim_{n\to\infty} \int_X \left(\sum_{k=1}^{n} |f_{k+1}(x) - f_k(x)| \right)^2 d\mu(x) \le 1.$$

Also ist g integrierbar, somit $A := \{x \in X \colon g(x) = \infty\}$ eine messbare Menge mit $\mu(A) = 0$. Für $x \in X \setminus A$ ist $g(x) < \infty$, folglich

$$\sum_{n=1}^{\infty} |f_{n+1}(x) - f_n(x)| < \infty.$$

Also konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}(f_{n+1}(x) - f_n(x))$; weil die Partialsummen $\sum_{k=1}^{n}(f_{k+1}(x) - f_k(x)) = f_{n+1}(x) - f_1(x)$ sind, existiert

$$f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

für $x \in X \setminus A$. Für $x \in A$ setzen wir $f(x) := 0$. Nun gilt für $x \in X \setminus A$

$$|f(x) - f_1(x)|^2 = \left(\lim_{n\to\infty} \underbrace{|f_{n+1}(x) - f_1(x)|}_{\le \sum_{k=1}^{n} |f_{k+1}(x) - f_k(x)|} \right)^2 \le g(x)$$

und für $x \in A$ ist $|f(x) - f_1(x)|^2 \le \infty = g(x)$. Also ist g eine Majorante für $|f - f_1|^2$, somit $|f - f_1|^2$ integrierbar und folglich $f - f_1 \in \mathcal{L}^2(X, \mu)$, also auch $f = (f - f_1) + f_1 \in \mathcal{L}^2(X, \mu)$. Schließlich ist für alle $x \in X \setminus A$ und $m \ge n$ in $\mathbb{N}$

$$|f_m(x) - f_n(x)|^2 \le \left(\sum_{k=1}^{m-1} |f_{k+1}(x) - f_k(x)| \right)^2 \le g(x),$$

folglich mit $n \to \infty$ auch

$$|f(x) - f_n(x)|^2 \le g(x). \tag{41}$$

Der Satz über majorisierte Konvergenz liefert somit

$$\begin{aligned}
(\|[f]-[f_n]\|_{L^2})^2 &= (\|f-f_n\|_{\mathcal{L}^2})^2 = \int_X |f-f_n|^2\, d\mu \\
&= \int_{X\setminus A} |f(x)-f_n(x)|\, d\mu \\
&\to \int_{X\setminus A} \lim_{n\to\infty} |f(x)-f_n(x)|\, d\mu(x) = \int_{X\setminus A} 0\, d\mu = 0
\end{aligned}$$

für $n \to \infty$, so dass auch $\|[f]-[f_n]\|_{L^2} \to 0$ und somit $[f_n] \to [f]$; Beim Integrieren konnte wegen Satz 3.10(d) nämlich die Menge A vom Maß 0 weggelassen werden. Da für alle $x \in X \setminus A$

$$|f(x)-f_n(x)|^2 \to 0$$

und diese Funktionen von x nach (41) $g|_{X\setminus A}$ als integrierbare Majorante besitzen, konnte mit dem Satz über majorsierte Konvergenz der Grenzwert ins Integral gezogen werden. Somit gilt $[f_n] \to [f]$ in $L^2(X,\mu)$ (und für die ursprüngliche Cauchyfolge gilt dies ebenfalls). $\square$

Bemerkung 3.49 Gegeben $p \in [1,\infty[$ sei

$$\mathcal{L}^p(X,\mu)$$

die Menge aller messbaren Funktionen $f\colon X \to \mathbb{R}$ derart, dass

$$\int_X |f(x)|^p\, d\mu(x) < \infty.$$

Man kann zeigen, dass $\mathcal{L}^p(X,\mu)$ ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^X$ ist und

$$\|\cdot\|_{\mathcal{L}^p}\colon \mathcal{L}^p(X,\mu) \to [0,\infty[, \quad f \mapsto \sqrt[p]{\int_X |f(x)|^p\, d\mu(x)}$$

eine Halbnorm auf $\mathcal{L}^p(X,\mu)$ derart, dass der zugehörige normierte Raum

$$L^p(X,\mu) := \mathcal{L}^p(X,\mu)/\{f \in \mathcal{L}^p(X,\mu)\colon \|f\|_{\mathcal{L}^p} = 0\}$$

ein Banachraum ist. Wir haben uns auf die Fälle $p = 1$ und $p = 2$ beschränkt; eine Diskussion für allgemeine $p \in [1,\infty[$ finden Sie zum Beispiel im Buch "Real and Complex Analysis" von W. Rudin.

4 Lebesgue-Maß und Lebesgue-Integral

Als Spezialfall der in Kapitel 3 entwickelten allgemeinen Integrationstheorie können wir insbesondere Funktionen bzgl. des Lebesgue-Borel-Maßes λ_n integrieren, des natürlichen Maßes auf $\mathbb{R}^n$. In diesem Kapitel erweitern wir zunächst die Klasse der integrierbaren Funktionen noch ein wenig, indem wir die Borelsche σ-Algebra $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ durch eine größere σ-Algebra $\tilde{\mathcal{B}}(\mathbb{R}^n)$ ersetzen und λ zu einem Maß $\tilde{\lambda}_n$ auf $\tilde{\mathcal{B}}(\mathbb{R}^n)$ fortsetzen, dem sogenannten *Lebesgue-Maß*. Im Fall $n = 1$ zeigen wir, dass jede Riemann-integrierbare Funktion $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ einer Veränderlichen auf einem kompakten Intervall auch bzgl. $\tilde{\lambda}_1$ integrierbar ist, und dass das Riemann- und Lebesgue-Integral von f (bzgl. des Lebesgue-Maßes) in diesem Falle übereinstimmen. Das Lebesgue-Integral stellt somit eine Verallgemeinerung das üblichen Riemann-Integrals dar.

4.1 Vervollständigung von Maßräumen

Wie wir in Folgerung 3.15 gesehen haben, spielen die Werte einer messbaren Funktion auf einer Menge N vom Maß 0 beim Integrieren keine Rolle: Für jede andere messbare Funktion, die mit f ausserhalb von N übereinstimmt, erhalten wir das selbe Integral. Das heißt allerdings nicht, dass man f auf N völlig beliebig abändern dürfte, denn auch die abgeänderte Funktion muss ja wieder messbar sein. Nimmt man an, dass gilt:

($*$) Jede Teilmenge einer messbaren Menge vom Maß 0 ist messbar,

so braucht man sich über die Messbarkeit der abgeänderten Funktion keine Gedanken zu machen: Diese besteht automatisch. Es ist daher für manche Zwecke bequem, einen Maßraum mit der Eigenschaft ($*$) (einen "vollständigen Maßraum") vorliegen zu haben. Wir werden sehen, dass sich jeder Maßraum zu einem vollständigen erweitern lässt.

Definition 4.1 Es sei $(X, \mathcal{S}, \mu)$ ein Maßraum.

(a) Eine Teilmenge $N \subseteq X$ heißt *μ-Nullmenge* (oder einfach *Nullmenge*), wenn $N \subseteq A$ für eine messbare Menge $A \in \mathcal{S}$ vom Maß $\mu(A) = 0$.

(b) Der Maßraum $(X, \mathcal{S}, \mu)$ heißt *vollständig*, wenn jede μ-Nullmenge messbar ist.

Bemerkung 4.2 (a) Offensichtlich ist jede Teilmenge einer Nullmenge ebenfalls eine Nullmenge. Weiter ist jede abzählbare Vereinigung $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} N_k$ von

Nullmengen N_k eine Nullmenge, denn ist $N_k \subseteq A_k$ mit$A_k \in \mathcal{S}$ und $\mu(A_k) = 0$, so ist $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} N_k \subseteq \bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k \in \mathcal{S}$ und nach Lemma 2.5(e) gilt

$$\mu\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k) = 0.$$

(b) Beachten Sie auch: Ist $P(x)$ eine Aussage für $x \in X$, so gilt $P(x)$ für μ-fast alle $x \in X$ genau dann, wenn die (nicht notwendig messbare) Menge

$$\{x \in X : \neg P(x)\}$$

eine μ-Nullmenge ist. Insbesondere gilt für zwei Funktionen f und g auf X genau dann $f(x) = g(x)$ für fast alle $x \in X$, wenn $\{x \in X : f(x) \neq g(x)\}$ eine μ-Nullmenge ist.

Beispiel 4.3 Wr bemerken für die Allgemeinbildung, dass man die Nullmengen von $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), \lambda_n)$ wegen Bemerkung 2.7 wie folgt charakterisieren kann: $N \subseteq \mathbb{R}^n$ ist genau dann eine λ_n-Nullmenge, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Folge $(Q_k)_{k\in\mathbb{N}}$ halboffener Quader Q_k gibt derart, dass

$$N \subseteq \bigcup_{k\in\mathbb{N}} Q_k \quad \text{und} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_n(Q_k) < \varepsilon\,.$$

Für $n = 1$ sind dies genau diejenigen Mengen, die in der Analysis II unter dem Namen "Lebesgue-Nullmengen" eingeführt und diskutiert wurden. Wir benutzen diese Charakterisierung nicht.

Beispiel 4.4 Jede abzählbare Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ist eine Borelmenge vom Maß $\lambda_n(A) = 0$, also insbesondere eine λ_n-Nullmenge. Hier benutzt man, dass einpunktige Teilmengen $\{x\} \subseteq \mathbb{R}$ Borelmengen vom Maß 0 sind; A ist eine abzählbare Vereinigung solcher Mengen.

Beispiel 4.5 Die *Cantormenge* C ist ein besonders lehrreiches Beispiel einer Lebesgue-Nullmenge von $\mathbb{R}$. Zur Erinnerung: Es ist $C = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} C_n$, wobei $C_0 := [0, 1]$ und

$$C_{n+1} := \tfrac{1}{3}C_n \cup \left(\tfrac{2}{3} + \tfrac{1}{3}C_n\right)$$

für $n \in \mathbb{N}_0$. Da jedes C_n kompakt ist, ist auch C kompakt und somit eine Borelmenge. Die Menge C_n ist eine Vereinigung von 2^n disjunkten Intervallen der Länge 3^{-n}, somit $\lambda_1(C_n) = \frac{2^n}{3^n}$. Nun gilt

$$C_0 \supseteq C_1 \supseteq C_2 \supseteq \cdots\,,$$

also $C_{n+1} \subseteq C_n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Dies zeigt man per vollständiger Induktion: $C_1 \subseteq C_0$ ist klar und gilt bereits $C_{n+1} \subseteq C_n$, so ist

$$C_{n+2} = \frac{1}{3}C_{n+1} \cup \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}C_{n+1}\right) \subseteq \frac{1}{3}C_n \cup \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}C_n\right) = C_{n+1}.$$

Es gilt also

$$\lambda_1(C) \;=\; \lambda_1\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} C_n\right) \;=\; \lim_{n\to\infty} \lambda_1(C_n) \;=\; \lim_{n\to\infty} (2/3)^n \;=\; 0,$$

nach Lemma 2.5 (d). Man kann zeigen, dass die Abbildung

$$\{0,1\}^{\mathbb{N}} \to C\,, \qquad (a_j)_{j\in\mathbb{N}} \mapsto \sum_{j=1}^{\infty} \frac{2a_j}{3^j}$$

eine Bijektion ist; hierbei ist $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ die Menge aller Folgen $(a_j)_{j\in\mathbb{N}}$ mit $a_j \in \{0,1\}$. Daher ist C eine überabzählbare Menge (genauer: C hat die gleiche Mächtigkeit $|C|$ wie $\mathbb{R}$).[23] Mehr Details zur Cantormenge geben wir in Aufgabe H30.

Beim Ändern messbarer Funktionen auf Nullmengen eines vollständigen Maßraums geht tatsächlich die Messbarkeit nicht verloren:

Lemma 4.6 *Es sei $(X, \mathcal{S}, \mu)$ ein vollständiger Maßraum, $(Y, \mathcal{T})$ ein beliebiger Messraum, $f\colon X \to Y$ messbar, $N \subseteq X$ eine Nullmenge und $g\colon N \to Y$ eine beliebige Funktion. Dann ist auch die auf N zu g abgeänderte Funktion*

$$\bar{f}\colon X \to Y\,, \qquad \bar{f}(x) \;:=\; \begin{cases} f(x) & \text{falls } x \in X \setminus N \\ g(x) & \text{falls } x \in N \end{cases}$$

messbar.

Beweis. Die Funktion $\bar{f}|_{X\setminus N} = f|_{X\setminus N}$ ist nach Beispiel 1.24 auf $(X \setminus N, \mathcal{S}|_{X\setminus N})$ messbar. Da $\mathcal{S}$ vollständig ist, gehört jede Teilmenge von N zu $\mathcal{S}$; also ist $\mathcal{S}|_N = \mathcal{P}(N)$ die Potenzmenge von N und somit $\bar{f}|_N$ automatisch auf $(N, \mathcal{S}|_N)$ messbar. Als stückweise messbare Funktion ist $\bar{f}$ nach Satz 1.36 (b) messbar. $\square$

[23] Da $[0,1] \subseteq \mathbb{R}$, ist $|[0,1]| \le |\mathbb{R}|$. Weiter ist $|\mathbb{R}| \le |[0,1]|$, da es eine injektive Abbildung $\mathbb{R} \to [0,1]$ gibt; also ist $|\mathbb{R}| = |[0,1]|$. Da die Abbildung $\{0,1\}^{\mathbb{N}} \to [0,1]$, $(a_j)_{j\in\mathbb{N}} \mapsto \sum_{j=1}^{\infty} \frac{a_j}{2^j}$ surjektiv ist, ist $|\mathbb{R}| = |[0,1]| \le |\{0,1\}^{\mathbb{N}}| = |C|$. Da $C \subseteq \mathbb{R}$, ist umgekehrt $|C| \le |\mathbb{R}|$ und somit $|C| = |\mathbb{R}|$.

4.7 Einem beliebigen Maßraum $(X, \mathcal{S}, \mu)$ wollen wir nun einen vollständigen Maßraum $(X, \tilde{\mathcal{S}}, \tilde{\mu})$ zuordnen. Dazu definieren wir $\tilde{\mathcal{S}}$ als die Menge aller Teilmengen A von X der Gestalt

$$A \;=\; B \cup N\,, \quad \text{wobei } B \in \mathcal{S} \text{ und } N \text{ eine } \mu\text{-Nullmenge ist.}$$

Für $A = B \cup N$ wie zuvor definieren wir

$$\tilde{\mu}(A) \;:=\; \mu(B)\,. \tag{42}$$

Diese Definition ist unabhängig von der Wahl von B und N. Ist nämlich auch $C \in \mathcal{S}$ und M eine μ-Nullmenge mit $A = C \cup M$, so gibt es messbare Mengen $N', M' \in \mathcal{S}$ vom Maß 0 mit $N \subseteq N'$, $M \subseteq M'$. Wir haben $B \subseteq A = C \cup M \subseteq C \cup M'$ und somit

$$\mu(B) \;\leq\; \mu(C \cup M') \;\leq\; \mu(C) + \mu(M') \;=\; \mu(C)\,.$$

Analog sieht man $\mu(C) \leq \mu(B)$, so dass $\mu(B) = \mu(C)$. Durch (42) ist also eine Funktion $\tilde{\mu}\colon \tilde{\mathcal{S}} \to [0, \infty]$ wohldefiniert. In Aufgabe P29 zeigen wir, dass $\tilde{\mathcal{S}}$ eine σ-Algebra auf X ist mit $\mathcal{S} \subseteq \tilde{\mathcal{S}}$.

Satz 4.8 $(X, \tilde{\mathcal{S}}, \tilde{\mu})$ *ist ein vollständiger Maßraum. Es gilt* $\mathcal{S} \subseteq \tilde{\mathcal{S}}$ *und* $\tilde{\mu}|_{\mathcal{S}} = \mu$. *Eine Menge* $N \subseteq X$ *ist genau dann eine* $\tilde{\mu}$*-Nullmenge, wenn sie eine* μ*-Nullmenge ist.*

Beweis. Ist $B \in \mathcal{S}$, so ist $B = B \cup \emptyset$ mit $B \in \mathcal{S}$ und der μ-Nullmenge $\emptyset$, also

$$\tilde{\mu}(B) = \mu(B).$$

Insbesondere gilt $\tilde{\mu}(\emptyset) = \mu(\emptyset) = 0$. Ist $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge paarweiser disjunkter Mengen $B_n \in \tilde{\mathcal{S}}$, so schreiben wir $B_n = A_n \cup N_n$ mit $A_n \in \mathcal{S}$ und einer μ-Nullmenge $N_n \subseteq X$. Dann ist auch $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} N_n$ eine μ-Nullmenge und wegen $A_n \subseteq B_n$ sind die Mengen A_n paarweise disjunkt. Wegen der σ-Additivität von μ folgt

$$\begin{aligned}
\tilde{\mu}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n\right) \;&=\; \tilde{\mu}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \cup \bigcup_{n\in\mathbb{N}} N_n\right) = \mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \\
&=\; \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{\mu}(B_n).
\end{aligned}$$

Also ist $\tilde{\mu}$ ein Maß.

Wir zeigen nun, dass eine Teilmenge $N \subseteq X$ genau dann eine μ-Nullmenge ist, wenn N eine $\tilde{\mu}$-Nullmenge ist. Ist ersteres der Fall, so ist $N \subseteq A$ mit einer Menge $A \in \mathcal{S}$ vom Maß $\mu(A) = 0$. Dann ist $A \in \tilde{\mathcal{S}}$ und $\tilde{\mu}(A) = \mu(A) = 0$, also N auch eine $\tilde{\mu}$-Nullmenge. Ist umgekehrt $N \subseteq X$ eine $\tilde{\mu}$-Nullmenge, so ist $N \subseteq B$ für ein $B \in \tilde{\mathcal{S}}$ mit $\tilde{\mu}(B) = 0$. Schreiben wir $B = A \cup M$ mit $A \in \mathcal{S}$ und einer μ-Nullmenge $M \subseteq X$, so ist also

$$0 = \tilde{\mu}(B) = \mu(A).$$

Somit ist A eine μ-Nullmenge und somit auch $B = A \cup M$ als Vereinigung zweier μ-Nullmengen.

Jede $\tilde{\mu}$-Nullmenge $N \subseteq X$ ist nach dem Vorigen auch eine μ-Nullmenge, somit $N = \emptyset \cup N \in \tilde{cS}$ (da $\emptyset \in \mathcal{S}$). Der Maßraum $(X, \tilde{\mathcal{S}}, \tilde{\mu})$ ist also vollständig. □

Bemerkung 4.9 Man kann zeigen, dass der Maßraum $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), \lambda)$ mit dem Lebesgue-Borel-Maß λ_n *nicht* vollständig ist. Im Falle $n = 1$ sieht man dies wie folgt:

Man zeigt, dass $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ die gleiche Mächtigkeit hat wie $\mathbb{R}$ (siehe Sternchenaufgabe auf Übungsblatt 12). Nach Beispiel 4.5 ist die Cantormenge C eine Borelmenge in $\mathbb{R}$, deren Mächtigkeit mit der von $\mathbb{R}$ übereinstimmt. Dann ist

$$|\mathcal{P}(C)| > |C| = |\mathbb{R}| = |\mathcal{B}(\mathbb{R})|,$$

somit $\mathcal{P}(C)$ keine Teilmenge von $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. Es existiert also ein $A \in \mathcal{P}(C)$ mit $A \notin \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Da C eine Borelmenge vom Maß $\lambda_1(C) = 0$ ist, ist $A \subseteq C$ eine λ_1-Nullmenge.

Für manche Zwecke ist es nützlich, für $n \in \mathbb{N}$ den unvollständigen Maßraum $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), \lambda_n)$ mittels der Konstruktion aus 4.7 zu einem vollständigem Maßraum $(\mathbb{R}^n, \tilde{\mathcal{B}}(\mathbb{R}^n), \tilde{\lambda}_n)$ zu vervollständigen.

Definition 4.10 $\tilde{\lambda}_n$ heißt das (n-dimensionale) *Lebesgue-Maß*. Bzgl. $\tilde{\lambda}_n|_A$ integrierbare Funktionen $f : A \to \overline{\mathbb{R}}$ auf $A \in \tilde{\mathcal{B}}(\mathbb{R}^n)$ werden *Lebesgue-integrierbar* genannt.

Das Integral einer messbaren Funktion bleibt unverändert, wenn der Maßraum durch seine Vervollständigung ersetzt wird. Genauer: Für jeden Maßraum $(X, \mathcal{S}, \mu)$ und jede messbare Funktion $f \colon X \to [0, \infty]$ auf $(X, \mathcal{S})$ ist

$$\int_X f \, d\mu = \int_X f \, d\tilde{\mu}; \tag{43}$$

weiter ist eine messbare Funktion $f \colon (X, \mathcal{S}) \to (\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$ genau dann bzgl. μ integrierbar, wenn sie bzgl. $\tilde{\mu}$ integrierbar ist, und in diesem Fall gilt (43). Dies ist der Spezialfall $\mathcal{T} := \tilde{\mathcal{S}}$, $\nu := \tilde{\mu}$ des folgenden Satzes.

Satz 4.11 *Es seien $(X, \mathcal{S}, \mu)$ und $(X, \mathcal{T}, \nu)$ Maßräume mit $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{T}$ und $\mu = \nu|_{\mathcal{S}}$. Dann gilt:*

(a) *Jede bzgl. $\mathcal{S}$ messbare Funktion $f \colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ ist auch bzgl. $\mathcal{T}$ messbar.*

(b) *Für jede bzgl. $\mathcal{S}$ messbare Funktion $f \colon X \to [0, \infty]$ ist*

$$\int_X f \; d\mu \;=\; \int_X f \; d\nu \, . \tag{44}$$

(c) *Eine bzgl. $\mathcal{S}$ messbare Funktion $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ ist genau dann bzgl. μ integrierbar, wenn sie bzgl. $\tilde{\mu}$ integrierbar ist. In diesem Falle gilt* (44).

Beweis. (a) Ist $f \colon (X, \mathcal{S}) \to (\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$ messbar, so ist $f^{-1}(A) \in \mathcal{S} \subseteq \mathcal{T}$ für jedes $A \in \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$, also f auch messbar als Funktion $(X, \mathcal{T}) \to (\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$.

(b) Ist $f \colon X \to [0, \infty]$ bzgl. $\mathcal{S}$ messbar, so auch bzgl. $\mathcal{T}$, als Konsequenz von (a). Sei zunächst $s = \sum_{j=1}^k \alpha_j \, \mathbf{1}_{A_j}$ eine nicht-negative Stufenfunktion auf $(X, \mathcal{S})$, mit $\alpha_j \in [0, \infty[$ und paarweise disjunkten $A_j \in \mathcal{S}$. Dann ist

$$\int_X s \; d\mu \;=\; \sum_{j=1}^k \alpha_j \, \mu(A_j) \;=\; \sum_{j=1}^k \alpha_j \, \nu(A_j) \;=\; \int_X s \; d\nu \, . \tag{45}$$

Ist nun $f \colon (X, \mathcal{S}) \to [0, \infty]$ eine beliebige nicht-negative messbare Funktion, so liefert Satz 3.23 eine monoton wachsende Folge $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Stufenfunktionen $s_n \colon X \to [0, \infty[$ auf $(X, \mathcal{S})$, die punktweise gegen f konvergiert. Da jede dieser Stufenfunktionen auch auf $(X, \tilde{\mathcal{S}})$ messbar ist und ihre Integrale bzgl. μ und ν nach (45) übereinstimmen, erhalten wir mit zweimaliger Anwendung des Satzes über monotone Konvergenz (Satz 3.21):

$$\int_X f \; d\mu \;=\; \lim_{n \to \infty} \int_X s_n \; d\mu \;=\; \lim_{n \to \infty} \int_X s_n \; d\nu \;=\; \int_X f \; d\nu \, .$$

(c) Folgt direkt aus (b), indem wir f in Positiv- und Negativteil zerlegen. □

Satz 4.12 *Es sei $(X, \mathcal{S}, \mu)$ ein Maßraum, $(X, \tilde{\mathcal{S}}, \tilde{\mu})$ seine Vervollständigung und $f : (X, \tilde{\mathcal{S}}) \to \overline{\mathbb{R}}$ eine messbare Funktion. Dann existiert eine messbare Funktion $g\colon (X, \mathcal{S}) \to \overline{\mathbb{R}}$ mit $f(x) = g(x)$ fast überall.*

Beweis. Schritt 1. Ist f eine nicht-negative Stufenfunktion auf $X, \tilde{\mathcal{S}})$, so schreiben wir

$$f = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \mathbf{1}_{B_j}$$

mit $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in [0, \infty[$ und disjunkten Mengen $B_1, \ldots, B_n \in \tilde{\mathcal{S}}$, wobei wir $B_1 \cup \cdots \cup B_n = X$ annehmen dürfen. Es ist

$$M_j = A_j \cup N_j$$

mit einem $A_j \in \mathcal{S}$ und einer μ-Nullmenge N_j. Dann ist $A := A_1 \cup \cdots \cup A_n \in \mathcal{S}$ und

$$B_j \cap A = B_j \cap A_j = A_j$$

(da die Mengen B_j paarweise disjunkt sind und $A_j \subseteq B_j$). Somit ist

$$t := s\mathbf{1}_A = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \underbrace{\mathbf{1}_{B_j} \mathbf{1}_A}_{= \mathbf{1}_{B_j \cap A}} = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \mathbf{1}_{A_j}$$

eine nicht-negative Stufenfunktion auf $(X, \mathcal{S})$ und

$$X \setminus A \subseteq N_1 \cup \cdots \cup N_n$$

eine μ-Nullmenge; da $X \setminus A \in \mathcal{S}$, folgt $\mu(X \setminus A) = 0$.

Schritt 2: Ist $f\colon X \to [0, \infty]$ messbar auf $(X, \tilde{\mathcal{S}})$, so existiert nach Satz 3.23 eine Folge $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Stufenfunktionen $s_n : X \to \mathbb{R}$ auf $(X, \tilde{\mathcal{S}})$, die punktweise monoton wachsend ist und gegen f konvergiert. Nach Schritt 1 gibt es für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein $A_n \in \mathcal{S}$ derart, dass $s_n \mathbf{1}_{A_n}$ eine Stufenfunktion auf $(X, \mathcal{S})$ ist und $\mu(X \setminus A_n) = 0$. Setzen wir

$$A := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n,$$

so ist $\mathbf{1}_A = \mathbf{1}_{A_n \cap A} = \mathbf{1}_{A_n}\mathbf{1}_A$, folglich $s_n\mathbf{1}_A = (s_n\mathbf{1}_{A_n})\mathbf{1}_A$ eine Stufenfunktion auf $(X, \mathcal{S})$ und somit messbar, für jedes $n \in \mathbb{N}$. Weiter konvergiert

$$s_n\mathbf{1}_A \to f\mathbf{1}_A$$

punktweise, so dass $f\mathbf{1}_A$ messbar auf $(X, \mathcal{S})$ ist (nach Satz 1.56). Diese Funktion stimmt außerhalb

$$X \setminus A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (X \setminus A_n) =: N$$

mit f überein, wobei $\mu(N) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(X \setminus A_n) = 0$.

Schritt 3: ist $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ messbar auf $(X, \tilde{\mathcal{S}})$, so gibt es nach Schritt 2 Mengen $A, B \in \mathcal{S}$ mit

$$\mu(X \setminus A) = \mu(X \setminus B) = 0$$

derart, dass $f_+\mathbf{1}_A$ und $f_-\mathbf{1}_B$ messbar auf $(X, \mathcal{S})$ sind. Dann ist $C := A \cap B \in \mathcal{S}$ eine Menge mit $\mu(X \setminus C) = 0$ derart, dass

$$f_+\mathbf{1}_C = (f_+\mathbf{1}_A)\mathbf{1}_C \quad \text{und} \quad f_-\mathbf{1}_C = (f_-\mathbf{1}_B)\mathbf{1}_C$$

messbar auf $(X, \mathcal{S})$ sind. Nach Satz 1.47 und Lemma 1.44 ist also auch $f\mathbf{1}_C = f_+\mathbf{1}_C - f_-\mathbf{1}_C$ messbar auf $(X, \mathcal{S})$. Schließlich ist

$$\{x \in X\colon f(x) \neq f(x)\mathbf{1}_C(x)\} \subseteq X \setminus C,$$

somit $f(x) = f(x)\mathbf{1}_C(x)$ fast überall. □

Bemerkung 4.13 Obwohl es manchmal bequem ist, einen vollständigen Maßraum vorliegen zu haben, zeigen Satz 4.12, Satz 4.11 und Folgerung 3.15 doch, dass man beim Übergang zum vervollständigten Maßraum keine wirklich spannenden messbaren oder integrierbaren Funktionen hinzugewinnt: Jede bzgl. $\tilde{\mathcal{S}}$ messbare Funktion f lässt sich nach Abändern auf einer Nullmenge zu einer bzgl. der ursprünglichen σ-Algebra $\mathcal{S}$ messbaren Funktion g machen, und die Integrale bleiben unverändert, wenn f durch g ersetzt wird. Insbesondere gewinnt man also nur wenig an Allgemeinheit hinzu, wenn man mit dem Lebesgue-Maß arbeitet anstelle seiner Einschränkung auf die Borelmengen, dem Lebesgue-Borel-Maß. Wir verzichten daher darauf und werden ab Kapitel 5 nur noch mit dem nicht vervollständigten Lebesgue-Borel-Maß arbeiten.

4.2 Vergleich von Riemann- und Lebesgue-Integral

In diesem Abschnitt vergleichen wir das Riemann-Integral über kompakten Intervallen $[a, b]$ in $\mathbb{R}$ mit dem Lebesgue-Integral. Auch auf uneigentliche Riemann-Integrale gehen wir kurz ein.

Satz 4.14 *Jede Riemann-integrierbare Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ auf einem kompakten Intervall $[a, b]$ ist auch über $[a, b]$ Lebesgue-integrierbar und es gilt*

$$\int_{[a,b]} f \, d\tilde{\lambda}_1 \;=\; \int_a^b f(x)\, dx\,.$$

Im Beweis nutzt ein simples Hilfsresultat:

Lemma 4.15 (Einschließungskriterium) *Es seien $(X, \mathcal{S}, \mu)$ ein Maßraum und $\phi, f, \psi : X \to \overline{\mathbb{R}}$ messbare Funktionen mit $\phi \le f \le \psi$. Sind ϕ und ψ bzgl. μ über X integrierbar, so auch f.*

Beweis. Wegen $|f_+| = f_+ \le \psi_+$ und $|f_-| = f_- \le \phi_-$ sind f_+ und f_- nach dem Majorantenkriterium integrierbar, somit auch f. □

Bemerkung 4.16 Beachten Sie, dass $\tilde{\lambda}_1|_{[a,b]}$ ein vollständiges Maß ist: Ist $N \subseteq [a, b]$ eine Nullmenge bzgl. dieses Maßes, so ist $N \subseteq A$ für ein $A \in \tilde{\mathcal{B}}(\mathbb{R})|_{[a,b]}$ mit $\tilde{\lambda}_1(A) = 0$. Also ist A eine λ_1-Nullmenge und somit auch die Teilmenge $N \subseteq A$. Also ist $N \in \tilde{B}(\mathbb{R})$ und folglich $N \in \tilde{B}(\mathbb{R})|_{[a,b]}$.

Beweis von Satz 4.14. Sei $\tilde{\lambda} := \tilde{\lambda}_1$. Ist f auf $[a, b]$ Riemann-integrierbar, so gibt es Treppenfunktionen $\varphi_n \le f \le \psi_n$ für $n \in \mathbb{N}$ mit

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b \varphi_n(x)\, dx \;=\; \int_a^b f(x)\, dx \quad \text{und} \quad \lim_{n\to\infty} \int_a^b \psi_n(x)\, dx \;=\; \int_a^b f(x)\, dx\,.$$

O.B.d.A. können wir die Folgen $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bzw. $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ als monoton wachsend bzw. fallend voraussetzen (denn andernfalls ersetzen wir φ_n durch

$$\max(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$$

und ψ_n durch $\min(\psi_1, \ldots, \psi_n)$). Nach den Integraldefinitionen stimmen Riemann- und Lebesgue-Integral für Treppenfunktionen überein. Es gilt daher auch

$$\lim_{n\to\infty} \int_{[a,b]} \varphi_n \, d\tilde{\lambda} = \int_a^b f(x)\, dx \quad \text{und} \quad \lim_{n\to\infty} \int_{[a,b]} \psi_n \, d\tilde{\lambda} = \int_a^b f(x)\, dx. \tag{46}$$

Die monotonen Funktionenfolgen $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bzw. $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergieren punktweise auf $[a,b]$ gegen messbare Funktionen φ bzw. ψ mit $\varphi \leq f \leq \psi$. Aus $\varphi_1 \leq \phi \leq \psi \leq \psi_1$ folgt mit dem Einschließungskriterium, dass φ und ψ bzgl. $\tilde{\lambda}$ über $[a,b]$ integrierbar sind. Da $\varphi_n \leq \varphi \leq \psi \leq \psi_n$, gilt

$$\int_{[a,b]} \varphi_n \, d\tilde{\lambda} \;\leq\; \int_{[a,b]} \varphi \, d\tilde{\lambda} \;\leq \int_{[a,b]} \psi \, d\tilde{\lambda} \;\leq\; \int_{[a,b]} \psi_n \, d\tilde{\lambda}\,.$$

Für $n \to \infty$ folgt nun wegen (46):

$$\int_a^b f(x)\,dx \;\leq\; \int_{[a,b]} \varphi \, d\tilde{\lambda} \;\leq \int_{[a,b]} \psi \, d\tilde{\lambda} \;\leq\; \int_a^b f(x)\,dx\,.$$

Es besteht also Gleichheit: $\int_{[a,b]} \varphi \, d\tilde{\lambda} = \int_{[a,b]} \psi \, d\tilde{\lambda} = \int_a^b f(x)\,dx$. Also ist $\int_{[a,b]}(\psi - \varphi)\,d\tilde{\lambda} = 0$. Nach Lemma 3.7 (g) ist dann $\varphi(x) = \psi(x)$ fast überall. Wegen $\varphi \leq f \leq \psi$ ist auch $\varphi(x) = f(x)$ fast überall. Nach Bemerkung 4.16, Lemma 4.6 und Satz 3.15 ist also auch f über $[a,b]$ Lebesgue-integrierbar, und

$$\int_{[a,b]} f \, d\tilde{\lambda} = \int_{[a,b]} \varphi \, d\tilde{\lambda} = \int_a^b f \, dx\,. \qquad \square$$

Die Menge der Lebesgue-integrierbaren Funktionen ist eine echte Obermenge der Menge der Riemann-integrierbaren Funktionen. Ein einfaches Beispiel ist die charakteristische Funktion

$$\mathbf{1}_{[0,1]\cap\mathbb{Q}} \colon [0,1] \to \mathbb{R}$$

der Menge der rationalen Zahlen in $[0,1]$: Diese Funktion ist Lebesgue-integrierbar, aber nicht Riemann-integrierbar.

Wir wenden uns nun uneigentlichen Integralen zu. Wir beschränken uns auf Integrationsintervalle der Form $[a,b[$; Integrale über $]a,b]$ oder offene Intervalle behandelt man analog.

Folgerung 4.17 *Es sei $a \in \mathbb{R}$, $b \in]a,\infty]$ und $f\colon [a,b[\to \mathbb{R}$ eine Funktion, die für jedes $r \in]a,b[$ über $[a,r]$ Riemann-integrierbar ist. Dann gilt:*

(a) *Ist $f \geq 0$, so ist*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{[a,b[} f \, d\tilde{\lambda} \in [0,\infty].$$

(b) *f ist genau dann Lebesgue-integrierbar, wenn das uneigentliche Riemann-Integral $\int_a^b |f(x)|\, dx$ konvergiert. In diesem Fall ist $\int_{[a,b[} f\, d\tilde{\lambda} = \int_a^b f(x)\, dx$.*

Beweis. Es sei $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton wachsende Folge in $]a,b[$ mit $r_n \to b$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist $f|_{[a,r_n]}$ Riemann-integrierbar, also Lebesgue-integrierbar nach Satz 4.14, mit gleichem Integral. Also stückweise messbare Funktion ist f dann messbar bzgl. $\tilde{B}(\mathbb{R})|_{[a,b[}$.

(a) Es ist

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\, dx &= \lim_{n\to\infty} \int_a^{r_n} f(x)\, dx = \lim_{n\to\infty} \int_{[a,r_n]} f\, d\tilde{\lambda} \\ &= \lim_{n\to\infty} (f \odot \tilde{\lambda})([a,r_n]) = (f \odot \tilde{\lambda})([a,b[) = \int_{[a,b[} f\, d\mu\end{aligned}$$

unter Benutzung von $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} [a,r_n] = [a,b[$ und Satz 4.14.

(b) Nach (a) gilt

$$\int_{[a,b[} |f|\, d\mu = \int_a^b |f(x)|\, dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^{r_n} |f(x)|\, dx$$

in $[0,\infty]$. Ist $\int_a^b |f(x)|\, dx < \infty$, so ist f nach dem Majorantenkriterium (Satz 3.17) Lebesgue-integrierbar und nach dem Majorantenkriterium für uneigentliche Integrale existiert das uneigentliche Integral $\int_a^b f(x)\, dx$. Da die Funktionen $f\mathbf{1}_{[a,r_n]}$ punktweise gegen f konvergieren und die Funktion $|f|$ als Majorante besitzen, erhalten wir mit dem Satz über majorisierte Konvergenz

$$\begin{aligned}\int_{[a,b[} f\, d\tilde{\lambda} &= \lim_{n\to\infty} \int_{[a,b[} f\mathbf{1}_{[a,r_n]}\, d\tilde{\lambda} = \lim_{n\to\infty} \int_{[a,r_n]} f\, d\tilde{\lambda} \\ &= \lim_{n\to\infty} \int_a^{r_n} f(x)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx.\end{aligned}$$

Ist $\int_a^b |f(x)|\, dx = \infty$, so ist $\int_{[a,b[} |f|\, d\tilde{\lambda} = \infty$, somit f nach Satz 3.16 nicht Lebesgue-integrierbar. □

Beispiel 4.18 Wir betrachten die Funktion $f : [\pi,\infty[\to \mathbb{R}$, $f(x) := \frac{\sin x}{x}$. Wie wir aus der Analysis I oder II wissen, konvergiert das uneigentliche Riemann-Integral

$$\int_\pi^\infty \frac{\sin x}{x}\, dx\,. \tag{47}$$

Jedoch konvergiert das Integral (47) nicht absolut, denn für $x \in [k\pi, (k+1)\pi]$ ist $|f(x)| \geq \frac{|\sin x|}{(k+1)\pi}$ und folglich

$$\begin{aligned}
\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |f(x)|\,dx &\geq \frac{1}{(k+1)\pi} \int_{k\pi}^{k\pi+\pi} |\sin x|\,dx \\
&= \frac{1}{(k+1)\pi} \int_{0}^{\pi} \sin x\,dx = \frac{2}{(k+1)\pi}
\end{aligned}$$

woraus $\int_\pi^\infty |f(x)|\,dx = \infty$ folgt, unter Benutzung der Divergenz der harmonischen Reihe. Nach Folgerung 4.17 ist f also *nicht* Lebesgue-integrierbar auf $[\pi, \infty[$.

4.3 Vorteile des Lebesgue-Integrals

Was sind Vorteile des Lebesgue-Integrals gegenüber dem Riemann-Integral?

- Mit dem Lebesgue-Integral können wir allgemeinere Funktionen integrieren als zuvor.
- Für das Lebesgue-Integral können wir stärkere Sätze beweisen (Konvergenzsätze, Satz über parameterabhängige Integrale).
- Neben dem Lebesgue-Integral bzgl. des Lebesgue-Maßes auf $\mathbb{R}^n$ erhalten wir ganz nebenbei eine allgemeine Integrationstheorie, die uns das Integrieren bzgl. beliebiger Maße ermöglicht. Solche allgemeineren Maße und Integrale werden gebraucht—sowohl in der Reinen Mathematik als auch in den Anwendungen, z.B. in der Wahrscheinlichkeitstheorie.

5 Zwei Beweisprinzipien

In diesem Kapitel sind Ergänzungen zum bereits behandelten Stoff zusammengestellt. Unter anderem beschreiben wir Integrale bzgl. Maßen mit Dichten, Bildmaßen, sowie Reihen von Maßen. Die Beweise dieser Resultate beruhen auf dem sogenannten “Beweisprinzip der Integrationstheorie,” in dem sich die vier Schritte der Integraldefinition aus Kapitel 3 widerspiegeln.

Anschließend wird ein zweites zentrales Beweisprinzip vorgestellt, welches in vielen schwierigen Situationen zu zeigen ermöglicht, dass ein gegebenes Mengensystem eine σ-Algebra ist (das “Prinzip der schönen Mengen”). Als neues technisches Hilfsmittel lernen wir hier sogenannte “Dynkin-Systeme” kennen. Mit einem Beweis der Eindeutigkeit des Lebesgue-Borel-Maßes illustrieren wir die Nützlichkeit und typische Anwendungsweise des “Prinzips der schönen Mengen.” Auch später wird es als Hilfsmittel benötigt.

5.1 Maßkonstruktionen und zugehörige Integrale

Maße mit Dichten wurden in Satz 3.30 eingeführt. Um Integrale bzgl. solcher Maße $\rho \odot \mu$ genauer zu verstehen, benutzen wir das “Beweisprinzip der Integrationstheorie”:

Beweisprinzip der Integrationstheorie. Um eine Aussage über Integrale zu beweisen, kann man häufig wie folgt vorgehen:

Schritt 1. Man beweist die Aussage für den Spezialfall, dass der Integrand $f = \mathbf{1}_A$ die charakteristische Funktion einer messbaren Menge A ist.

Schritt 2. Man zeigt die Aussage für nicht-negative Stufenfunktion f.

Schritt 3. Man zeigt die Aussage für nicht-negative messbare Funktionen $f\colon X \to [0, \infty]$.

Hierzu wählt man meist eine monoton wachsende Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht-negativer Stufenfunktionen mit $s_n \to f$ punktweise und versucht dann, mit dem Satz über monotone Konvergenz die Aussage auf Schritt 2 zurückzuführen.

Schritt 4. Schließlich beweist man die Aussage für beliebige integrierbare Funktionen $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ durch Aufspalten in Positiv- und Negativteil, $f = f_+ - f_-$.

In der Tat haben wir diese Methode schon mehrmals verwandt – z.B. im Beweis von Satz 3.30 sowie zum Beweis der Additivität des Integrals (Satz 3.25).

Satz 5.1 (Integration bzgl. Maßen mit Dichten). *Es sei* $(X, \mathcal{S}, \mu)$ *ein Maßraum,* $\rho\colon X \to [0, \infty]$ *eine messbare Funktion und* $\rho \odot \mu \cdot \mathcal{S} \to [0, \infty]$ *das durch*

$$(\rho \odot \mu)(A) := \int_A \rho \, d\mu \quad \textit{für } A \in \mathcal{S}$$

definierte Maß mit Dichte ρ *bzgl.* μ *(siehe Satz* 3.30 (a)*). Dann gilt:*

(a) *Für jede messbare Funktion* $f\colon X \to [0, \infty]$ *ist*

$$\int_X f \, d(\rho \odot \mu) \;=\; \int_X f \cdot \rho \, d\mu \,. \tag{48}$$

(b) *Eine messbare Funktion* $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ *ist genau dann bzgl.* $\rho \odot \mu$ *über* X *integrierbar, wenn* $f \cdot \rho$ *bzgl.* μ *über* X *integrierbar ist. In diesem Falle gilt wieder* (48)*.*

Beweis. Der Beweis erfolgt mit dem Beweisprinzip der Integrationstheorie.

(a) Schritt 1. Es sei $A \in \mathcal{S}$ und $f = \mathbf{1}_A\colon X \to [0, \infty]$ die charakteristische Funktion von A. Nach Schritt 1 der Integraldefinition und Satz 3.10 (a) ist

$$\int_X \mathbf{1}_A \, d\rho \odot \mu \;=\; (\rho \odot \mu)(A) \;\overset{def}{=}\; \int_A \rho \, d\mu \;\overset{3.10(\mathrm{a})}{=}\; \int_X \mathbf{1}_A \cdot \rho \, d\mu\,;$$

also gilt (48).

Schritt 2. Ist $f = \sum_{j=1}^k \alpha_j \mathbf{1}_{A_j}$ eine nicht-negative Stufenfunktion mit paarweise disjunkten Mengen $A_1, \ldots, A_k \in \mathcal{S}$ und $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in [0, \infty[$, so schließen wir mit Schritt 1 sowie Lemma 3.7 (c) und Satz 3.25 (a):

$$\begin{aligned} \int_X f \; d\rho \odot \mu \;&=\; \sum_{j=1}^k \alpha_j \int_X \mathbf{1}_{A_j} \; d\rho \odot \mu \;=\; \sum_{j=1}^k \alpha_j \int_X \mathbf{1}_{A_j} \cdot \rho \; d\mu \\ &=\; \int_X \sum_{j=1}^k \alpha_j \mathbf{1}_{A_j} \cdot \rho \; d\mu \;=\; \int_X f \cdot \rho \; d\mu \,. \end{aligned}$$

Schritt 3. Ist nun $f : X \to [0, \infty]$ eine beliebige messbare Funktion, so gibt es nach Satz 3.23 eine monoton wachsende Folge $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nicht-negativer

Stufenfunktionen, die punktweise gegen f konvergiert. Dann ist $(s_n \cdot \rho)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton wachsende Folge nicht-negativer messbarer Funktionen, die punktweise gegen $f \cdot \rho$ konvergiert. Wir schließen

$$\int_X f \, d\rho \odot \mu \;=\; \lim_{n\to\infty} \int_X s_n \, d\rho \odot \mu \;=\; \lim_{n\to\infty} \int_X s_n \cdot \rho \, d\mu \;=\; \int_X f \cdot \rho \, d\mu \,,$$

wobei der Satz über monotone Konvergenz benutzt wurde, um die erste und dritte Gleichheit zu erhalten, während Schritt 2 die zweite Gleichheit liefert.

(b) Schritt 4. Nach Satz 3.16 und 3.17 ist eine messbare Funktion $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ genau dann bzgl. μ_ρ über X integrierbar, wenn

$$\infty \;>\; \int_X |f| \, d\rho \odot \mu \overset{\text{Schritt 3}}{=} \int_X |f| \cdot \rho \, d\mu \;=\; \int_X |f\rho| \, d\mu \,.$$

Für das rechte Integral gelesen, ist dies genau die Bedingung für Integrierbarkeit der Funktion $f \cdot \rho$ bzgl. μ über X.

Ist f bzgl. $\rho \odot \mu$ über X integrierbar, so erhalten wir wegen $(f \cdot \rho)_\pm = f_\pm \cdot \rho$:

$$\begin{aligned}\int_X f \, d\rho \odot \mu \;&\overset{def}{=}\; \int_X f_+ \, d\rho \odot \mu - \int_X f_- \, d\rho \odot \mu \overset{\text{Schritt 3}}{=} \int_X f_+ \cdot \rho \, d\mu - \int_X f_- \cdot \rho \, d\mu \\ &=\; \int_X f \cdot \rho \, d\mu \,,\end{aligned}$$

was den Beweis vollendet. □

Bemerkung 5.2 Traditionell schreibt man auch $\rho \, d\mu$ statt $d(\rho \odot \mu)$ und $\rho(x) \, d\mu(x)$ statt $d(\rho \odot \mu)(x)$; aus Gleichung (48) wird dann einfach

$$\int_X f \; (\rho \, d\mu) \;=\; \int_X f \cdot \rho \, d\mu \,.$$

Satz 5.3(Integration bzgl. Bildmaßen/Allgemeine Transformationsformel). *Es sei $\phi : (X, \mathcal{S}) \to (Y, \mathcal{T})$ eine messbare Abbildung zwischen Messräumen, μ ein Maß auf $(X, \mathcal{S})$ und $\phi_*(\mu)$ das zugehörige Bildmaß auf $(Y, \mathcal{T})$. Dann gilt:*

(a) *Für jede messbare Funktion $f\colon Y \to [0, \infty]$ auf $(Y, \mathcal{T})$ ist*

$$\int_Y f \, d\phi_*(\mu) \;=\; \int_X f \circ \phi \, d\mu \,. \tag{49}$$

(b) *Eine messbare Funktion* $f : Y \to \overline{\mathbb{R}}$ *ist genau dann bzgl.* $\phi_*(\mu)$ *über* Y *integrierbar, wenn* $f \circ \phi : X \to \overline{\mathbb{R}}$ *bzgl.* μ *über* X *integrierbar ist. In diesem Fall gilt* (49).

Beweis. Die Behauptungen wurden in der Übung mit dem Beweisprinzip der Integrationstheorie nachgewiesen. □

Beispiel 5.4 Es sei $(X, \mathcal{S}, \mu)$ ein Maßraum und $f : X \to \mathbb{R}$ eine messbare Funktion. Dann ist $f_*(\mu)$ ein Maß auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Da $f = \mathrm{id}_{\mathbb{R}} \circ f$ mit $\mathrm{id}_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\mathrm{id}_{\mathbb{R}}(x) := x$, ist nach der Allgemeinen Transformationsformel $\mathrm{id}_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ genau dann bzgl. $f_*(\mu)$ über $\mathbb{R}$ integrierbar, wenn $f = \mathrm{id} \circ f$ bzgl. μ über X integrierbar ist, und in diesem Fall gilt

$$\int_X f \, d\mu \;=\; \int_{\mathbb{R}} \mathrm{id}_{\mathbb{R}} \, df_*(\mu) \;=\; \int_{\mathbb{R}} x \, df_*(\mu)(x) \,. \tag{50}$$

Jedes Integral einer reellwertigen Funktion lässt sich also auf ein Integral über $\mathbb{R}$ zurückführen!

Bemerkung 5.5 Voriger Sachverhalt ist in der Wahrscheinlichkeitstheorie von Nutzen. Dort betrachtet man *Wahrscheinlichkeitsräume*, also Maßräume $(\Omega, \mathcal{S}, P)$, derart, dass P ein sogenanntes *Wahrscheinlichkeitsmaß* ist, also $P(\Omega) = 1$ gilt. Für $\omega \in \Omega$ interpretiert man

$$P(\omega) \in [0, 1]$$

als die Wahrscheinlichkeit des “Ereignisses” ω. Messbare Funktionen $X : \Omega \to \mathbb{R}$ nennt man in desem Kontext *reelle Zufallsvariablen.* Ist eine reelle Zufallsvariable X integrierbar bzgl. P, so nennt man das Integral

$$E(X) := \int_\Omega X \, dP$$

den *Erwartungswert* von X. Man schreibt $P_X := X_*(P)$ für das Bildmaß $X_*(P)$ auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ und nennt dieses die *Verteilung* der reellen Zufallsvariablen X. Mit wahrscheinlichkeitstheoretischer Notation wird aus (50):

$$E(X) \;=\; \int_\Omega X \, dP \;=\; \int_{\mathbb{R}} x \, dP_X(x) \,.$$

Schließlich halten wir zur späteren Benutzung im Kapitel über Maße auf Mannigfaltigkeiten noch fest, wie Integrale bzgl. Reihen von Maßen zu den Integralen bzgl. der Summanden in Beziehung stehen:

Satz 5.6 (Integrale bzgl. Reihen von Maßen). *Es sei $(X, \mathcal{S})$ ein Messraum und $(\mu_j)_{j\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Maßen μ_j auf $(X, \mathcal{S})$. Dann ist*

$$\mu\colon \mathcal{S} \to [0,\infty], \quad \mu(A) := \sum_{j=1}^{\infty} \mu_j(A)$$

ein Maß auf $(X, \mathcal{S})$, und es gilt:

(a) *Für jede nicht-negative messbare Funktion $f\colon X \to [0,\infty]$ ist*

$$\int_X f\,d\mu = \sum_{j=1}^{\infty} \left(\int_X f\,d\mu_j \right) . \tag{51}$$

(b) *Ist $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ bzgl. μ über X integrierbar, so ist f für jedes $j \in \mathbb{N}$ bzgl. μ_j über X integrierbar und es gilt* (51).

Beweis. Die Behauptungen wurden in der Übung mithilfe des Beweisprinzips der Integrationstheorie nachgeprüft. □

5.2 Dynkin-Systeme und 'Prinzip der schönen Mengen'

Es kommt häufig vor, dass eine σ-Algebra $\mathcal{S}$ sowie eine Teilmenge $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{S}$ gegeben ist und man zeigen möchte, dass $\mathcal{D} = \mathcal{S}$. Typischerweise sind hier die Mengen $A \in \mathcal{D}$ Mengen mit eine Eigenschaft hat, die gerade von Interesse ist ("schöne Mengen"), und man möchte zeigen, dass jede Menge $A \in \mathcal{S}$ diese Eigenschaft hat ("jede Menge ist schön.") Dies gelingt oft mit dem "Prinzip der schönen Mengen," das nun vorgestellt wird.[24] Die Mengensysteme $\mathcal{D}$, auf die das Beweisprinzip anwendbar ist, sind sogenannte *Dynkin-Systeme*.

Definition 5.7 Es sei X eine Menge. Eine Menge $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{P}(X)$ von Teilmengen von X heißt *Dynkin-System* (auf X), wenn gilt:

[24] Außerhalb der Vorlesung sollte man das Beweisprinzip eher "Satz über Dynkin-Systeme mit $\cap$-stabilen Erzeugern" nennen.

D1 $\emptyset \in \mathcal{D}$;

D2 $\mathcal{D}$ ist abgeschlossen unter Komplementen, also $A \in \mathcal{D} \Rightarrow X \setminus A \in \mathcal{D}$;

D3 $\mathcal{D}$ ist abgeschlossen unter abzählbaren *disjunkten* Vereinigungen, d.h. für jede Folge $A_1, A_2, \ldots$ paarweise disjunkter Mengen $A_n \in \mathcal{D}$ gilt $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{D}$.

Verglichen mit der Definition einer σ-Algebra ist der einzige Unterschied, dass wir in **D3** nur disjunkte Vereinigungen zulassen. Somit ist jede σ-Algebra insbesondere auch ein Dynkin-System. Jedoch braucht ein Dynkin-System keine σ-Algebra zu sein, wie das folgende Beispiel lehrt:

Beispiel 5.8 Es sei

$$X := \{1, 2, 3, \ldots, 2n\}$$

mit einer natürlichen Zahl $n \geq 2$. Dann ist die Menge $\mathcal{D}$ aller Mengen $A \subseteq X$ mit einer geraden Anzahl von Elementen ein Dynkin-System, aber keine σ-Algebra, denn es gilt $\{1,2\} \in \mathcal{D}$ und $\{1,3\} \in \mathcal{D}$ aber

$$\{1,2\} \cup \{1,3\} = \{1,2,3\} \notin \mathcal{D}.$$

In der Praxis treten Dynkin-Systeme z.B. wie folgt auf:

Lemma 5.9 *Sei $(X, \mathcal{S})$ ein Messraum und μ, ν Maße auf $(X, \mathcal{S})$ mit $\mu(X) = \nu(X) < \infty$. Dann ist*

$$\mathcal{D} \; := \; \{A \in \mathcal{S} \colon \mu(A) = \nu(A)\}$$

ein Dynkin-System auf X.

Beweis. D1: Wegen $\mu(\emptyset) = 0 = \nu(\emptyset)$ ist $\emptyset \in \mathcal{D}$.

D2: Ist $A \in \mathcal{D}$, so gilt $\mu(A) = \nu(A)$ und somit

$$\mu(X \setminus A) \; = \; \mu(X) - \mu(A) \; = \; \nu(X) - \nu(A) \; = \; \nu(X \setminus A)\,,$$

da $\mu(X) = \nu(X) < \infty$. Also ist $X \setminus A \in \mathcal{D}$.

D3: Sind $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{D}$ paarweise disjunkt, so gilt $\mu(A_n) = \nu(A_n)$ für alle n und somit unter Benutzung der σ-Additivität von Maßen

$$\mu\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) \; = \; \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \; = \; \sum_{n=1}^{\infty} \nu(A_n) \; = \; \nu\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big)\,.$$

Folglich ist $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{D}$. □

Definition 5.10 Wie im Falle von σ-Algebren (Lemma 1.5) sieht man, dass zu jeder Menge $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(X)$ von Teilmengen einer Menge X ein kleinstes Dynkin-System $\delta(\mathcal{E})$ existiert, welches $\mathcal{E}$ enthält,[25] nämlich

$$\delta(\mathcal{E}) := \bigcap \{\mathcal{D} \subseteq \mathcal{P}(X) \colon \mathcal{D} \text{ ist Dynkin-System auf } X \text{ und } \mathcal{E} \subseteq \mathcal{D}\}.$$

Man nennt $\delta(\mathcal{E})$ das *von $\mathcal{E}$ erzeugte Dynkin-System.*

Definition 5.11 Es sei X eine Menge. Eine Menge $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}(X)$ von Teilmengen von X wird *Durchschnitts-stabil* genannt (kurz: "$\cap$-stabil"), wenn $A \cap B \in \mathcal{M}$ für alle $A, B \in \mathcal{M}$.

Lemma 5.12 *Jedes $\cap$-stabile Dynkin-System ist eine σ-Algebra.*

Beweis. Es sei $\mathcal{D}$ ein $\cap$-stabiles Dynkin-System auf X. Wir brauchen nur **S3** nachzuweisen. Dazu sei $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Mengen $A_n \in \mathcal{D}$; wir haben zu zeigen, dass $A := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{D}$. Wir definieren rekursiv paarweise disjunkte Mengen $B_n \in \mathcal{D}$ mit $\bigcup_{k=1}^n A_k = \bigcup_{k=1}^n B_k$ wie folgt: $B_1 := A_1 \in \mathcal{D}$, $B_2 := A_2 \setminus A_1 = A_2 \cap A_1^c \in \mathcal{D}$ (unter Benutzung der $\cap$-Stabilität!) und allgemein

$$B_{n+1} \;:=\; A_{n+1} \setminus \bigcup_{k=1}^{n} A_k \;=\; A_{n+1} \setminus \bigcup_{k=1}^{n} B_k \;=\; A_{n+1} \cap \left(\bigcup_{k=1}^{n} B_k \right)^c \in \mathcal{D}\,.$$

Da die Mengen B_n in $\mathcal{D}$ sind und paarweise disjunkt, ist $A = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} B_n \in \mathcal{D}$. $\square$

Das "Prinzip der schönen Mengen" besagt, dass jedes von einer $\cap$-stabilen Menge erzeugte Dynkin-System eine σ-Algebra ist.

Satz 5.13 ("Prinzip der schönen Mengen"). *Es sei X eine Menge und $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(X)$ eine $\cap$-stabile Menge von Teilmengen von X. Dann gilt $\delta(\mathcal{E}) = \sigma(\mathcal{E})$, d.h. das von $\mathcal{E}$ erzeugte Dynkin-System stimmt mit der von $\mathcal{E}$ erzeugten σ-Algebra überein.*

[25] $\delta(\mathcal{E})$ ist also ein Dynkin-System mit $\mathcal{E} \subseteq \delta(\mathcal{E})$, und ist $\mathcal{D}$ irgendein Dynkin-System mit $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{D}$, so folgt $\delta(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{D}$.

Beweis. Offensichtlich gilt $\delta(\mathcal{E}) \subseteq \sigma(\mathcal{E})$, denn $\sigma(\mathcal{E})$ ist ein Dynkin-System mit $\mathcal{E} \subseteq \sigma(\mathcal{E})$. Wir wollen zeigen, dass $\delta(\mathcal{E})$ $\cap$-stabil ist; dann ist $\delta(\mathcal{E})$ nach Lemma 5.12 eine σ-Algebra und somit $\delta(\mathcal{E}) = \sigma(\mathcal{E})$. Der Beweis wird in zwei Schritten geführt.

Schritt 1. Wir halten zunächst $A \in \mathcal{E}$ fest und betrachten die Menge

$$\mathcal{D}_A \;:=\; \{B \in \delta(\mathcal{E})\colon A \cap B \in \delta(\mathcal{E})\}\,.$$

Da $\mathcal{E}$ als $\cap$-stabil angenommen ist, gilt dann $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{D}_A$. Können wir zeigen, dass $\mathcal{D}_A$ ein Dynkin-System ist, so ist also $\mathcal{D}_A = \delta(\mathcal{E})$.

D1: Wegen $A \cap \emptyset = \emptyset \in \delta(\mathcal{E})$ ist $\emptyset \in \mathcal{D}_A$.

D2: Ist $B \in \mathcal{D}_A$, so ist $A \cap B \in \delta(\mathcal{E})$, somit auch $A \cap B^c = A \cap (A^c \cup B^c) = [A^c \cup (A \cap B)]^c \in \delta(\mathcal{E})$ und somit $B^c \in \mathcal{D}_A$.

D3: Sind $B_1, B_2, \ldots \in \mathcal{D}_A$ paarweise disjunkt, so auch die Mengen $A \cap B_n \in \delta(\mathcal{E})$, somit $A \cap (\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (A \cap B_n) \in \delta(\mathcal{E})$ und somit $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n \in \mathcal{D}_A$.

Also ist $\mathcal{D}_A$ tatsächlich ein Dynkin-System und somit $\mathcal{D}_A = \delta(\mathcal{E})$. Folglich gilt

$$A \cap B \in \delta(\mathcal{E}) \qquad \text{für alle } A \in \mathcal{E} \text{ und alle } B \in \delta(\mathcal{E}). \tag{52}$$

Schritt 2. Nun betrachten wir $\mathcal{D}_A$ (definiert wie oben) für festes $A \in \delta(\mathcal{E})$. Nach (52) gilt $B \in \mathcal{D}_A$ für alle $B \in \mathcal{E}$ und somit $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{D}_A$. Wie in Schritt 1 sehen wir, dass $\mathcal{D}_A$ ein Dynkin-System ist. Also gilt $\mathcal{D}_A = \delta(\mathcal{E})$ und somit $A \cap B \in \delta(\mathcal{E})$ für alle $B \in \delta(\mathcal{E})$. Da $A \in \delta(\mathcal{E})$ beliebig war, ist somit $\delta(\mathcal{E})$ als $\cap$-stabil erkannt und somit $\delta(\mathcal{E}) = \sigma(\mathcal{E})$. □

5.3 Beweis der Eindeutigkeit des Lebesgue-Borel-Maßes

Mithilfe des "Prinzips der schönen Mengen" sind wir nun unter anderem in der Lage, die Eindeutigkeit des Lebesgue-Borel-Maßes zu beweisen (die in Satz 2.6 behauptet, aber bisher noch nicht bewiesen wurde).

Satz 5.14 (Eindeutigkeitssatz für endliche Maße). *Es sei $(X, \mathcal{S})$ ein Messraum und μ, ν Maße auf X derart, dass $\mu(X) = \nu(X) < \infty$. Gilt $\mathcal{S} = \sigma(\mathcal{E})$ für ein $\cap$-stabiles Erzeugendensystem $\mathcal{E}$ derart, dass*

$$\mu(A) \;=\; \nu(A) \qquad \textit{für alle } A \in \mathcal{E},$$

so ist $\mu = \nu$.

Beweis. Nach Lemma 5.9 ist

$$\mathcal{D} := \{A \in \sigma(\mathcal{E})\colon \mu(A) = \nu(A)\}$$

ein Dynkin-System. Da $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{D}$ per Voraussetzung, gilt $\delta(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{D}$. Da $\mathcal{E}$ per Voraussetzung $\cap$-stabil ist, ist $\delta(\mathcal{E}) = \sigma(\mathcal{E})$. Also $\mathcal{D} = \sigma(\mathcal{E})$. □

Obwohl der Eindeutigkeitssatz zunächst nur für endliche Maße formuliert ist, kann man daraus auch Aussagen über nicht notwendig endliche Maße folgern, sogenannte σ-endliche Maße.

Definition 5.15 Es sei $(X, \mathcal{S})$ ein Messraum. Ein Maß $\mu\colon \mathcal{S} \to [0, \infty]$ wird *σ-endlich* genannt, wenn es eine Folge $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von messbaren Teilmengen $X_n \in \mathcal{S}$ von X gibt derart, dass

$$X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n$$

und $\mu(X_n) < \infty$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Beispielsweise ist das Lebesgue-Borel-Maß λ_n auf $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ ein σ-endliches Maß, denn es ist $\mathbb{R}^n = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} [-k, k[^n$ mit

$$\lambda_n([-k, k[^n) = (k - (-k))^n = (2k)^n < \infty.$$

Folgerung 5.16 (Eindeutigkeitssatz für $\boldsymbol{\sigma}$-endliche Maße). *Es seien μ, ν Maße auf einem Messraum $(X, \mathcal{S})$ derart, dass $\mathcal{S} = \sigma(\mathcal{E})$ für ein $\cap$-stabiles Erzeugendensystem $\mathcal{E}$ mit den folgenden Eigenschaften:*

(a) *$\mu(A) = \nu(A)$ für alle $A \in \mathcal{E}$;*

(b) *Es existiert eine Folge $A_1, A_2, \ldots$ von Mengen $A_n \in \mathcal{E}$ mit $\mu(A_n) = \nu(A_n) < \infty$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$.*

Dann ist $\mu = \nu$.

Beweis. Wir halten zunächst $n \in \mathbb{N}$ fest. Der in Beispiel 1.35 diskutierte Spezialfall von Lemma 1.34 (b) zeigt, dass $\mathcal{S}|_{A_n}$ durch $\mathcal{E}_n := \{A \cap A_n \colon A \in \mathcal{E}\}$ erzeugt wird; hierbei ist $\mathcal{E}_n \subseteq \mathcal{E}$ und $\mathcal{E}_n$ $\cap$-stabil wegen der $\cap$-Stabilität von $\mathcal{E}$. In Anbetracht der Voraussetzungen zeigt also der Eindeutigkeitssatz 5.14, dass $\mu|_{A_n} = \nu|_{A_n}$.

Ist nun $A \in \mathcal{S}$ beliebig, so gilt $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$ mit geeigneten paarweise disjunkten Mengen $B_n \in \mathcal{S}|_{A_n}$, definiert via $B_1 := A \cap A_1$ und

$$B_{n+1} := (A \cap A_{n+1}) \setminus \left(\bigcup_{k=1}^{n} B_k \right).$$

Also ist

$$\mu(A) \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n) \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} \nu(B_n) \;=\; \nu(A)\,. \qquad \square$$

Folgerung 5.17 *Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und μ, ν Maße auf $(U, \mathcal{B}(U))$. Gilt*

$$\mu([a,b[) = \nu([a,b[) < \infty$$

für jeden halboffenen Quader $[a,b[\subseteq U$ mit $[a,b] \subseteq U$, so folgt $\mu = \nu$. Insbesondere ist also das Lebesgue-Borel-Maß λ_n durch die Bedingung

$$\lambda_n \left(\prod_{k=1}^{n} [a_k, b_k[\right) = \prod_{k=1}^{n} (b_k - a_k)$$

eindeutig festgelegt.

Beweis. Es sei $\mathcal{E}$ die Menge aller halboffenen Quader $[a,b[$ in $\mathbb{R}^n$ mit $[a,b] \subseteq U$. Wie im Beweis von Lemma 1.15 (siehe Fußnote der Musterlösung zu Aufgabe H14) sieht man, dass $\mathcal{B}(U) = \sigma(\mathcal{E})$. Weiter zeigt der zitierte Beweis, dass $U = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k$ als abzählbare Vereinigung halboffener Quader A_k geschrieben werden kann, deren kompakter Abschluss $\overline{A_k}$ (der entsprechende kompakte Quader) in U enthalten ist. Die Behauptungen sind daher ein Spezialfall von Folgerung 5.16. $\square$

Teil III: Hilfsmittel zur Integralberechnung

Nachdem wir uns in den ersten beiden Teilen des Skripts mit recht abstrakten Konstruktionen beschäftigt haben, wenden wir uns nun der Berechnung konkreter Integrale zu. In Kapitel 6 lernen wir den *Satz von Fubini* kennen, der es erlaubt, Integrale über $\mathbb{R}^n$ auf Integrale über $\mathbb{R}$ zurückzuführen. Im Hinblick auf Anwendungen in der Wahrscheinlichkeitstheorie formulieren wir den Satz nicht nur für das Lebesgue-Borel-Maß, sondern im Kontext von Produktmaßen. Ein weiteres Hilfsmittel bei der Berechnung von Integralen ist die *Transformationsformel* (das mehrdimensionale Gegenstück der Substitutionsregel), mit der wir uns anschließend beschäftigen. In der Praxis ist die Transformationsformel häufig nicht direkt benutzbar, da die Transformationen Singularitäten aufweisen können (z.B. bei Polarkoordinaten). Jedoch liegen diese Singularitäten oft in Nullmengen und beeinflussen daher das Ergebnis einer Integration nicht. Wir diskutieren deswegen auch Methoden zum Nachweis, dass eine Menge eine Nullmenge ist. Anschließend gehen wir auf einige relevante Beispiele ein.

6 Produktmaße und der Satz von Fubini

Wir führen nun Produktmaß $\mu \otimes \nu$ zweier σ-endlicher Maße ein und beweisen den Satz von Fubini, der Integrale bezüglich $\mu \times \nu$ als iterierte Integrale bzgl. μ und ν berechnen lässt. Da $\lambda_n = \lambda_{n-1} \otimes \lambda_1$, können wir somit Integrale bzgl. λ_n rekursiv auf Integrale bzgl. λ_1 für Funktionen einer reellen Variablen zurückführen (und häufig sogar auf Riemann-Integrale, die wir mit dem Hauptsatz konkret ausrechen können).

Satz 6.1 *Sind $(X, \mathcal{S}, \mu)$ und $(Y, \mathcal{T}, \nu)$ Maßräume, so gilt:*

(a) *Ist ν ein σ-endliches Maß, so ist*

$$\mu \otimes \nu \colon \mathcal{S} \otimes \mathcal{T} \to [0, \infty[, \quad A \mapsto \int_X \left(\int_Y \mathbf{1}_A(x, y)\, d\nu(y) \right) d\mu(x) \tag{53}$$

ein Maß auf $(X \times Y, \mathcal{S} \otimes \mathcal{T})$ derart, dass

$$(\mu \otimes \nu)(A \times B) = \mu(A)\nu(B) \quad \textit{für alle } A \in \mathcal{S} \textit{ und } B \in \mathcal{T}. \tag{54}$$

(b) *Sind μ und ν beide σ-endliche Maße, so gibt es genau ein Maß $\mu \otimes \nu$ auf $(X \times Y, \mathcal{S} \otimes \mathcal{T})$, welches die Bedingung* (54) *erfüllt.*

Definition 6.2 Das eindeutig festgelegte Maß $\mu \otimes \nu$ in Satz 6.1(b) wird das *Produktmaß* von μ und ν genannt.

Bemerkung 6.3 Sind μ und ν beide σ-endlich in der Situation von Satz 6.1, so gilt natürlich auch

$$(\mu \otimes \nu)(A) = \int_Y \left(\int_X \mathbf{1}_A(x,y)\, d\mu(x) \right) d\nu(y)$$

für jedes $A \in \mathcal{S} \otimes \mathcal{T}$, denn die rechte Seite definiert ein Maß τ auf $\mathcal{S} \otimes \mathcal{T}$ mit $\tau(A \times B) = \mu(A)\nu(B)$ für alle $A \in \mathcal{S}$, $B \in \mathcal{T}$ (dies zeigt der Beweis von Satz 6.1 mit vertauschten Rollen von X und Y); wegen der Eindeutigkeit in Teil (b) des Satzes ist $\tau = \mu \otimes \nu$ wie in Teil (a).

Wir schieben den Beweis von Satz 6.1 ans Ende des Kapitels und lernen lieber zuerst einige Anwendungen kennen.

Satz 6.4 *Für $n, m \in \mathbb{N}$ identifizieren wir $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ mit $\mathbb{R}^{n+m}$. Dann gilt $\mathcal{B}(\mathbb{R}^{n+m}) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$ und $\lambda_{n+m} = \lambda_n \otimes \lambda_m$.*

Beweis. Da $\mathbb{R}^n$ eine abzählbare Basis der Topologie hat, ist $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$ (siehe Satz nach Beispiel 1.37). Für jeden halboffenen Quader

$$[a, b[= \prod_{k=1}^{n+m} [a_k, b_k[$$

in $\mathbb{R}^{n+m}$ ist $[a, b[= \prod_{k=1}^{n} [a - k, b_k[\times \prod_{k=n+1}^{n+m} [a_k, b_k[$, also

$$\begin{aligned}
(\lambda_n \otimes \lambda_m)([a, b[) &= \lambda_n \left(\prod_{k=1}^{n} [a_k, b_k[\right) \lambda_m \left(\prod_{k=n+1}^{n+m} [a_k, b_k[\right) \\
&= (b_1 - a_1) \cdots (b_m - a_n)(b_{m+1} - a_{m+1}) \cdots (b_{m+n} - a_{m+n}) \\
&= \lambda_{n+m}([a, b[).
\end{aligned}$$

Nach Folgerung 5.17 ist also $\lambda_n \otimes \lambda_m = \lambda_{n+m}$. □

Bemerkung 6.5 Allgemeiner gilt

$$\lambda_{n+m}|_{X \times Y} = (\lambda_n|_X) \otimes (\lambda_m|_Y) \tag{55}$$

für alle $X \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ und $Y \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$.

Es ist nämlich $X \times Y \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^m) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m)$, folglich $\lambda_{n+m}|_{X\times Y}$ ein Maß auf

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m)|_{X\times Y} = \mathcal{B}(X \times Y) = \mathcal{B}(X) \otimes \mathcal{B}(Y) \tag{56}$$

derart, dass

$$\lambda_{n+m}|_{X\times Y}(A \times B) = \lambda_{n+m}(A \times B) = \lambda_n(A)\lambda_m(B) = \lambda_m|_X(A)\lambda_m|_Y(B)$$

für alle $A \in \mathcal{B}(X)$ und $B \in \mathcal{B}(Y)$, wobei Satz 1.32 und Satz 6.4 benutzt wurde. Wegen der σ-Endlichkeit von $\lambda_n|_X$ (siehe Übungsblatt 12) folgt (55).

Als Konsequenz von Satz 6.4 erhält man das Prinzip von Cavalieri, welches uns die Berechnung der Volumina der für die Schule relevanten Körper im Raum (wie Kugel, Kegel, Zylinder u.ä.) ermöglicht.

Satz 6.6 (Prinzip von Cavalieri). *Für jede Borelmenge $M \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m = \mathbb{R}^{n+m}$ gilt:*

(a) *Für jedes $x \in \mathbb{R}^n$ ist*

$$M_x \ := \ \{y \in \mathbb{R}^m : (x, y) \in M\} \tag{57}$$

eine Borelmenge in $\mathbb{R}^m$.

(b) *Die Funktion $h_M : \mathbb{R}^n \to [0, \infty]$, $h_M(x) := \lambda_m(M_x)$ ist messbar.*

(c) *Das Lebesgue-Borel-Maß von M kann mit folgender Formel berechnet werden:*

$$\lambda_{n+m}(M) \ = \ \int_{\mathbb{R}^n} \lambda_m(M_x)\, d\lambda_n(x)\,. \tag{58}$$

Beweis. Nach Satz 6.1 (a) (samt Beweis) und (b) ist $\int_{\mathbb{R}^n} \lambda_m(M_x)\, d\lambda_n(x)$ sinnvoll für alle $M \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^m) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m)$ und $\int_{\mathbb{R}^n} \lambda_m(M_x)\, d\lambda_n(x) = (\lambda_n \otimes \lambda_m)(M)$, wobei $\lambda_n \otimes \lambda_m = \lambda_{m+n}$ nach Satz 6.4. □

Bemerkung 6.7 Im Falle $n = 1$, $m = 2$ besagt das Prinzip von Cavalieri, dass man das Volumen einer messbaren Teilmenge (Salami) $M \subseteq \mathbb{R}^3$ berechnen kann, indem man M in Salamischeiben $M_x \subseteq \mathbb{R}^2$ zerschneidet und deren Flächeninhalte $\lambda_2(M_x)$ aufintegriert:

$$\lambda_3(M) = \int_{\mathbb{R}} \lambda_2(M_x)\, d\lambda_1(x).$$

Mit dem Cavalierischen Prinzip können wir überprüfen, ob unsere naive Vorstellung aus der Analysis 1 gerechtfertigt ist, dass das Integral einer nicht-negativen Funktion die Fläche unter dem Funktionsgraphen beschreibt.

Folgerung 6.8 *Für jede messbare Funktion $f\colon \mathbb{R}^n \to [0,\infty]$ ist die Menge*

$$M^f \;:=\; \big\{(x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^{n+1} : 0 \le t < f(x)\big\}$$

messbar, vom Maße

$$\lambda_{n+1}\big(M^f\big) \;=\; \int_{\mathbb{R}^n} f \, d\lambda_n \,.$$

Beweis. Die Projektionen $\pi_1\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, $(x,t) \mapsto x$ und $\pi_2\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(x,t) \mapsto t$ sind stetig und somit messbar. Folglich ist $g := f \circ \pi_1\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$, $g(x,t) = f(x)$ messbar. Nach Lemma 1.44 und Satz 1.47 ist $h := g - \pi_2 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(x,t) = f(x) - t$ messbar, somit

$$\begin{aligned} M^f &= \{(x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} :\, t \ge 0 \text{ und } f(x) - t > 0\} \\ &= \pi_2^{-1}([0,\infty[) \,\cap\, h^{-1}(]0,\infty]) \end{aligned}$$

eine messbare Menge. Für $x \in \mathbb{R}^n$ ist

$$M^f_x \;:=\; \big\{t \in \mathbb{R} : (x,t) \in M^f\big\} \;=\; [0, f(x)[$$

und daher $\lambda_1(M^f_x) = f(x)$. Satz 6.6 liefert $\lambda_{n+1}(M_f) = \int_{\mathbb{R}^n} \lambda_1\big(M^f_x\big)\, d\lambda_n(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, d\lambda_n(x)$. □

Mit analogem Beweis bekommen wir die Schlussfolgerungen von Folgerung 6.8 übrigens auch für die Menge

$$\{(x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}\colon 0 \le t \le f(x)\}$$

an Stelle von M^f.

Dies ist nicht überraschend, da sich diese Menge von M^f nur um Hinzunahme des Graphen von $f|_{f^{-1}([0,\infty[)}$ unterscheidet. Dieser ist eine messbare Menge von Maß 0, wie jeder Graph einer messbaren Funktion:

Folgerung 6.9 *Ist $X \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Borelmenge, $m \in \mathbb{N}$ und $f\colon X \to \mathbb{R}^m$ eine messbare Funktion, so ist der Graph*

$$\Gamma_f := \{(x, f(x))\colon x \in X\}$$

eine Borelmenge in $\mathbb{R}^{n+m}$ und $\lambda_{n+m}(\Gamma_f) = 0$.

Beweis. Die Funktion $h\colon X \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$, $(x,y) \mapsto f(x) - y$ ist messbar bzgl. $\mathcal{B}(X \times \mathbb{R}^m)$ da sie messbare Komponenten hat (vgl. Beweis von Folgerung 6.8). Da die Menge $\{0\} \subseteq \mathbb{R}^m$ abgeschlossen und somit eine Borelmenge ist, ist

$$\Gamma_f = h^{-1}(\{0\}) \in \mathcal{B}(X \times \mathbb{R}^m).$$

Da $X \times \mathbb{R}^m \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^m) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m)$, ist hierbei $\mathcal{B}(X \times \mathbb{R}^m) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m)|_{X \times \mathbb{R}^m} \subseteq \mathcal{B}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m)$. Es ist

$$(\Gamma_f)_x := \{y \in \mathbb{R}^m \colon (x,y) \in \Gamma_f\} = \begin{cases} \{f(x)\} & \text{wenn } x \in X \\ \emptyset & \text{wenn } x \in \mathbb{R}^n \setminus X, \end{cases}$$

mit $0 = \lambda_m(\emptyset)$ und $0 = \lambda_m(\{f(x)\})$, somit

$$\lambda_{n+m}(\Gamma_f) = \int_{\mathbb{R}^n} \lambda_m((\Gamma_f)_x)\, d\lambda_n(x) = 0$$

unter Benutzung des Prinzips von Cavalieri. □

Flächen- und Volumenberechnungen. Mit dem Prinzip von Cavalieri können wir z.B. den Flächeninhalt einer abgeschlossenen Kreisscheibe D vom Radius r berechnen und erhalten die aus der Schule bekannte Form

$$\lambda_2(D) = \pi r^2$$

(siehe Aufgabe P31(a)). Das Prinzip von Cavalieri ermöglicht uns darüber hinaus, das Volumen von Körpern der Elementargemetrie zu berechnen, etwa das Volumen

$$\lambda_3(B) = \frac{4\pi}{3} r^3$$

einer abgeschlossenen Kugel vom Radius r sowie die Volumina von Zylindern und Kegeln (siehe Aufgabe P32(b)).

Aus dem Prinzip von Cavalieri (bzw. Formel (53)) können wir den Satz von Fubini herleiten, ein zentrales Hilfsmittel zur Berechnung mehrdimensonaler Integrale.

Satz 6.10 (Satz von Fubini). *Gegeben σ-endliche Maßräume $(X, \mathcal{S}, \mu)$ und $(Y, \mathcal{T}, \nu)$ versehen wir $X \times Y$ mit der Produkt-σ-Algebra $\mathcal{S} \otimes \mathcal{T}$ und dem Produktmaß $\mu \otimes \nu$.*

(a) *Für jede messbare Funktion* $f\colon X \times Y \to [0,\infty]$ *gilt: Die Funktion*

$$f_x \;:=\; f(x,\cdot) : Y \to [0,\infty]\,, \quad y \mapsto f(x,y)$$

ist messbar für jedes $x \in X$*, die Funktion*

$$F\colon X \to [0,\infty]\,, \qquad F(x) \;:=\; \int_Y f_x \, d\nu$$

ist messbar, und es gilt

$$\int_{X\times Y} f \; d(\mu \otimes \nu) = \int_X \left(\int_Y f(x,y) \; d\nu(y) \right) \, d\mu(x). \tag{59}$$

(b) *Für jede bzgl.* $\mu \otimes \nu$ *integrierbare Funktion* $f\colon X \times Y \to \overline{\mathbb{R}}$ *gilt: Die Menge* X_0 *aller* $x \in X$*, für welche*

$$f_x \;:=\; f(x,\cdot) : Y \to \overline{\mathbb{R}}, \quad y \mapsto f(x,y)$$

bzgl. ν *integrierbar ist, ist in* $\mathcal{S}$ *und* $\mu(X \setminus X_0) = 0$*; weiter ist*

$$F\colon X_0 \to \overline{\mathbb{R}}\,, \qquad F(x) \;:=\; \int_Y f_x \, d\nu$$

bzgl. μ *über* X_0 *integrierbar und es gilt*

$$\int_{X\times Y} f \; d(\mu \otimes \nu) = \int_{X_0} \left(\int_Y f(x,y) \; d\nu(y) \right) \, d\mu(x). \tag{60}$$

Beweis. Wir benutzen das Beweisprinzip der Integrationstheorie.

(a) *Ist* $f = \mathbf{1}_M$ *die charakteristische Funktion einer Menge* $M \in \mathcal{S} \otimes \mathcal{T}$, so ist

$$\int_{X\times Y} f \; d(\mu \otimes \nu) \;=\; (\mu \otimes \nu)(M) \;=\; \int_X \underbrace{\int_Y \mathbf{1}_M(x,y) \; d\nu(y)}_{=F(x)} \, d\mu(x)$$

mit messbaren Funktionen $\mathbf{1}_M(x,\cdot)$ und F nach Satz 6.1(a).

Ist $f = \sum_{j=1}^k \alpha_j \mathbf{1}_{A_j}$ *eine nicht-negative Stufenfunktion*, so ist $f_x = \sum_{j=1}^k \alpha_j (\mathbf{1}_{A_j})_x$. Somit ist $F\colon X \to [0,\infty]$, $y \mapsto \int_Y f_x \, d\nu = \sum_{j=1}^k \alpha_j \int_Y (\mathbf{1}_{A_j})_x \, d\nu$ messbar und

$$\begin{aligned}
\int_{X\times Y} f \; d(\mu \otimes \nu) \;&=\; \sum_{j=1}^k \alpha_j \int_{X\times Y} \mathbf{1}_{A_j} \; d(\mu\otimes\nu) \\
&=\; \sum_{j=1}^k \alpha_j \int_X \int_Y \mathbf{1}_{A_j}(x,y) \; d\nu(y)\, d\mu(x) \\
&=\; \int_X \int_Y \sum_{j=1}^k \alpha_j \mathbf{1}_{A_j}(x,y) \; d\nu(y)\, d\mu(x) \\
&=\; \int_X \int_Y f(x,y) \; d\nu(y)\, d\mu(x)\,.
\end{aligned}$$

Ist f *beliebig*, so finden wir mit Satz 3.23 eine monoton wachsende Folge $(s_k)_{k\in\mathbb{N}}$ nicht-negativer Stufenfunktionen $s_k : X \times Y \to [0,\infty[$ mit $s_k \to f$ punktweise. Nach dem Satz über monotone Konvergenz ist dann

$$\int_{X\times Y} f \; d(\mu\otimes\nu) \;=\; \lim_{k\to\infty} \int_{X\times Y} s_k \; d(\mu\otimes\nu)\,. \tag{61}$$

Für jedes $x \in X$ ist andererseits $((s_k)_x)_{k\in\mathbb{N}}$ eine monoton wachsende Funktionenfolge mit punktweisem Grenzwert $f_x = \lim_{k\to\infty}(s_k)_x$. Also ist f_x messbar und nach dem Satz über monotone Konvergenz ist

$$\int_Y f_x \; d\nu \;=\; \lim_{k\to\infty} \int_Y (s_k)_x \; d\nu\,.$$

Da jede der Funktionen $F_k : X \to [0,\infty]$, $x \mapsto \int_Y (s_k)_x \; d\nu$ messbar ist, ist auch der punktweise Grenzwert $F\colon X \to [0,\infty]$, $x \mapsto \int_Y f_x \, d\nu$ messbar. Da die Funktionenfolge F_k hierbei monoton wachsend in k ist, liefert der Satz über monotone Konvergenz:

$$\int_X \int_Y f_x \; d\nu \; d\mu(x) \;=\; \lim_{k\to\infty} \int_X \int_Y (s_k)_x \; d\nu \; d\mu(x)\,. \tag{62}$$

Wegen $\int_{X\times Y} s_k \; d(\mu\otimes\nu) = \int_X \int_Y (s_k)_x \, d\nu \, d\mu(x)$ folgt (59) durch Vergleich der rechten Seiten von (61) und (62).

(b) Mit Teil (a) erhalten wir nach Aufspaltung in Positiv- und Negativteil:

$$\begin{aligned}\int_{X\times Y} f\, d(\mu\otimes\nu) &= \int_{X\times Y} f_+\, d(\mu\otimes\nu) - \int_{X\times Y} f_-\, d(\mu\otimes\nu)\\ &= \int_X \underbrace{\left(\int_Y (f_+)_x\, d\nu\right)}_{=:\, g(x)} d\mu(x) - \int_X \underbrace{\left(\int_Y (f_-)_x\, d\nu\right)}_{=:\, h(x)} d\mu(x)\\ &= \int_X g\, d\mu - \int_X h\, d\mu\,. \qquad (63)\end{aligned}$$

Beachten Sie, dass wir die beiden Integrale in (63) nicht ohne weiteres zu einem Integral zusammenfassen können, denn es könnte ja $g(x) = h(x) = \infty$ sein, so dass undefinierte Ausdrücke der Form "$\infty - \infty$" auftreten würden. Da $\int_X g\, d\mu < \infty$ und $\int_X h\, d\mu < \infty$, müssen die Funktionen g und h jedoch fast überall endlich sein (siehe Satz 3.7 (f)). Also ist

$$X \setminus X_0 = g^{-1}(\{\infty\}) \cup h^{-1}(\{\infty\})$$

eine messbare Menge mit $\mu(X \setminus X_0) = 0$. Da man messbare Mengen vom Maß 0 beim Integrieren weglassen darf, können wir (63) wie folgt umformen:

$$\begin{aligned}\int_{X\times Y} f\, d(\mu\otimes\nu) &= \int_{X_0} g\, d\mu - \int_{X_0} h\, d\mu = \int_{X_0} (g-h)\, d\mu\\ &= \int_{X_0} \left(\int_Y f_x\, d\nu\right) d\mu(x).\end{aligned}$$

Dies beendet den Beweis. □

Bemerkung 6.11 Nach Bemerkung 6.3 können wir in Satz 6.10(a) die Rollen von X und Y vertauschen und erhalten, dass für jedes $y \in Y$ die Funktion $f^y := f(\cdot, y) : X \to [0,\infty]$ messbar ist, die Funktion

$$Y \to [0,\infty]\,, \qquad y \mapsto \int_X f^y\, d\mu$$

messbar ist, und

$$\int_{X\times Y} f\, d(\mu\otimes\nu) = \int_Y \left(\int_X f(x,y)\, d\mu(x)\right) d\nu(y)$$

gilt. Satz 6.10(b) kann entsprechend umgeschrieben werden.

Beispiel 6.12 Es ist

$$\begin{aligned}
\int_{[0,2]\times[1,3]} x^2y\,d\lambda_2(x,y) &= \int_{[0,2]\times[1,3]} x^2y\,d\lambda_2|_{[0,2]\times[1,3]}(x,y)\\
&= \int_{[0,2]\times[1,3]} x^2y\,d(\lambda_1|_{[0,2]}\otimes\lambda_1|_{[1,3]})(x,y)\\
&= \int_{[0,2]}\int_{[1,3]} x^2y\,d\lambda_1|_{[1,3]}(y)\,d\lambda_1|_{[0,2]}(x)\\
&= \int_{[0,2]}\int_{[1,3]} x^2y\,d\lambda_1(y)d\lambda_1(y) \qquad (64)\\
&= \int_{[0,2]}\underbrace{\int_1^3 x^2y\,dy}_{=4x^2}\,d\lambda_1(x)\\
&= \int_0^2 4x^2\,dx = 32/3,
\end{aligned}$$

unter Angabe aller Rechenschritte. Künftig werden wir eher direkt nach (64) springen und die vorigen Schritte als selbstverständlich auslassen.

Wir hätten das Integral ebenso mit umgekehrter Integrationsreihenfolge berechnen können:

$$\begin{aligned}
\int_{[0,2]\times[1,3]} x^2y\,d\lambda_2(x,y) &= \int_{[1,3]}\int_{[0,2]} x^2y\,d\lambda_1(x)d\lambda_1(y)\\
&= \int_{[1,3]}\underbrace{\int_0^2 x^2y\,dx}_{8y/3}\,d\lambda_1(y)\\
&= \int_1^3 8y/3\,dy = [4y^2/3]_1^3 = 32/3.
\end{aligned}$$

Bemerkung 6.13 Setzt man in Satz 6.10(b) die Funktion F durch $F(x) := 0$ für $x \in X\setminus X_0$ zu einer Funktion $F: X\to\mathbb{R}$ fort,[26] so ist F messbar und wir erhalten einfach

$$\int_{X\times Y} f\,d(\mu\otimes\nu) = \int_X F\,d\mu.$$

[26]Statt durch 0 darf man F hier sogar ganz beliebig fortsetzen, solange die Fortsetzung nur messbar ist.

Es kann tatsächlich vorkommen, dass X_0 eine echte Teilmenge von X ist.

Beispiel 6.14 Wir betrachten die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\,, \quad f(x,y) \;:=\; \begin{cases} \;\;\,1 & \text{falls } x=0 \text{ und } y \geq 0; \\ -1 & \text{falls } x=0 \text{ und } y<0; \\ \;\;\,0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Da $f_x = \mathbf{1}_{[0,\infty[} - \mathbf{1}_{]-\infty,0[}$ für $x=0$ mit $\int_{\mathbb{R}} (f_0)_\pm \, d\lambda_1 = \infty$, ist $\int_{\mathbb{R}} f_0 \, d\lambda_1$ nicht definiert. Es ist $X_0 = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und

$$\int_{\mathbb{R}^2} f \, d\lambda_2 \;=\; \int_{X_0} \int_{\mathbb{R}} f_x \, d\lambda_1 \, d\lambda_1(x) \;=\; 0$$

(da $f_x = 0$ für $x \neq 0$).

Folgerung 6.15 *Ist $U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Borelmenge und sind $g, h\colon U \to \overline{\mathbb{R}}$ messbare Funktionen mit $g(x) \leq h(x)$ für alle $x \in U$, so ist*

$$M := \{(x,y)\colon x \in U \text{ und } g(x) \leq y \leq h(x)\}$$

eine Borelmenge in $\mathbb{R}^{n+1}$. Für jede messbare Funktion $f\colon M \to [0,\infty]$ gilt

$$\int_M f \, d\lambda_{n+1} = \int_U \int_{[g(x),h(x)]} f(x,y) \, d\lambda_1(y) \, d\lambda_n(x).$$

Ist $f\colon M \to \overline{\mathbb{R}}$ bzgl. λ_{n+1} über M integrierbar, so ist

$$U_0 := \left\{ x \in U\colon \int_{[g(x),h(x)]} |f(x,y)| \, d\lambda_1(y) < \infty \right\}$$

eine Borelmenge mit $\lambda_n(U \setminus U_0) = 0$ und

$$\int_M f \, d\lambda_{n+1} = \int_{U_0} \int_{[g(x),h(x)]} f(x,y) \, d\lambda_1(y) \, d\lambda_n(x).$$

Beweis. Dass M eine Borelmenge ist, sieht man wie im Beweis von Folgerung 6.8. Die Aussagen über Integrale erhält man mit dem Satz von Fubini (Satz 6.10), angewandt auf $\lambda_n|_U \otimes \lambda_1$ und die durch

$$\tilde{f}(x,y) := \begin{cases} f(x,y) & \text{wenn } (x,y) \in M; \\ \quad 0 & \text{wenn } (x,y) \notin M \end{cases}$$

definierte messbare Funktion auf $U \times \mathbb{R}$. Gegeben $x \in U$ ist $\tilde{f}_x(y) = 0$ wenn $y < g(x)$ oder $y > h(x)$, also

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} \tilde{f}_x \, d\lambda_1(y) &= \int_{]-\infty, g(x)[} \underbrace{\tilde{f}_x(y)}_{=0} \, d\lambda_1(y) + \int_{[g(x),h(x)]} \underbrace{\tilde{f}_x(y)}_{=f_x(y)} \, d\lambda_1(y) \\
&\quad + \int_{]h(x),\infty[} \underbrace{\tilde{f}_x(y)}_{=0} \, d\lambda_1(y) \\
&= \int_{[g(x),h(x)]} f_x(y) \, d\lambda_1(y).
\end{aligned}$$

□

Bemerkung 6.16 Ist $n = 1$ in Folgerung 6.15, so nennen Anwender

$$M = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \colon x \in U, \, g(x) \le y \le h(x)\}$$

einen *x-y-Normalbereich* in $\mathbb{R}^2$ (wobei meist U als Intervall $[a,b]$ und die Funktionen g und h stetig angenommen werden). Mengen der Form

$$M = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \colon y \in U, \, g(y) \le x \le h(y)\}$$

heißen y-x-Normalbereich; für messbare Funktionen $f \colon M \to [0,\infty]$ ist dann

$$\int_M f(x,y) \, d\lambda_2(x,y) = \int_U \int_{[g(y),h(y)]} f(x,y) \, d\lambda_1(x) \, d\lambda_1(y).$$

Beispiel 6.17 Sei $M := \{(x,y) \in D \colon x \ge 0\}$ die rechte Hälfte der abgeschlossenen Einheitskreisscheibe $D \subseteq \mathbb{R}^2$. Wir wollen

$$\int_D x \, d\lambda_2(x,y)$$

berechnen.

Dies gelingt wie folgt: Die Menge M ist ein x-y-Normalbereich, denn Sie besteht aus allen $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ mit $x \in [0,1]$ und

$$-\sqrt{1-x^2} \le y \le \sqrt{1-x^2}.$$

Mit Folgerung 6.15 erhalten wir

$$\begin{aligned}
\int_M x\,d\lambda_2(x,y) &= \int_{[0,1]} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} x\,d\lambda_1(y)\,d\lambda_1(x) \\
&= \int_{[0,1]} x\lambda_1([-\sqrt{1-x^2}, \sqrt{1-x^2}]) = \int_{[0,1]} 2x\sqrt{1-x^2}\,d\lambda_1(x) \\
&= \int_0^1 2x\sqrt{1-x^2}\,dx = \left[-\frac{2}{3}(1-x^2)^{3/2}\right]_0^1 = \frac{2}{3}.
\end{aligned}$$

Definition 6.18 Sei $M \subseteq \mathbb{R}^2$ eine Borelmenge und $\rho\colon M \to [0,\infty[$ eine messbare Funktion. Betrachtet ein Anwender $\rho(x)$ als eine Massendichte (in Gramm/Quadratmeter) an der Stelle $x \in M$, so ist

$$m := \int_M \rho\,d\lambda_2$$

die Gesamtmasse von M (etwa die Masse eines dünnen Blechs variierender Dicke). Ist $0 < m < \infty$ und die Funktionen $M \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto x\rho(x,y)$ bzw. $(x,y) \mapsto y$ bezüglich λ_2 über M integrierbar, so nennt man

$$\overline{x} := \frac{1}{m} \int_M x\rho(x,y)\,d\lambda_2(x,y)$$

die x-Komponente des Schwerpunkts von M bei Massendichte ρ und $\overline{y} := \frac{1}{m}\int_M y\rho(x,y)\,d\lambda_2(x,y)$ seine y-Komponente; der Schwerpunkt ist also

$$(\overline{x}, \overline{y}).$$

Ist M gleichmäßig mit Masse belegt und somit $\rho = c$ konstant, so können wir c kürzen und erhalten

$$(\overline{x}, \overline{y}) = \left(\frac{1}{\lambda_2(M)} \int_M x\,d\lambda_2(x,y),\ \frac{1}{\lambda_2(M)} \int_M y\,d\lambda_2(x,y) \right).$$

Den Schwerpunkt einer messbaren Menge $M \subseteq \mathbb{R}^3$ bei gegebener Dichtefunktion $\rho\colon M \to [0,\infty[$ (in Gramm/Kubikmeter) definiert man analog.

Beispiel 6.19 Mit der konstanten Funktion $\rho(x,y) = 1$ erhalten wir für die rechte Hälfte M der Einheitskreisscheibe

$$m = \lambda_2(M) = \pi/2$$

und nach Beispiel 6.17 folglich

$$\overline{x} = \frac{1}{\lambda_2(M)} \int_M x \, d\lambda_2(x,y) = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{3\pi} = 0,424\ldots$$

für die x-Komponente des Schwerpunkts von M. Aus Symmetriegründen (bzw. aufgrund einer simplen Rechnung) ist $\overline{y} = 0$.

Wir tragen nun den Beweis von Satz 6.1 nach und beginnen mit einem Lemma.

Lemma 6.20 *Es seien $(X, \mathcal{S})$ und $Y, \mathcal{T})$ Messräume. Ist $P \in \mathcal{S}$ und $Q \in \mathcal{T}$, so gilt*

$$(\mathcal{S} \otimes \mathcal{T})|_{P \times Q} = (\mathcal{S}|_P) \otimes (\mathcal{T}|_Q).$$

Beweis. Es sei $\mathcal{E} := \{A \times B \colon A \in \mathcal{S} \text{ und } B \in \mathcal{T}\}$ und

$$\mathcal{F} := \{A \times B \colon A \in \mathcal{S}|_P \text{ und } B \in \mathcal{T}|_Q\}.$$

Dann ist

$$\begin{aligned}(\mathcal{S} \otimes \mathcal{T})|_{P \times Q} &= \sigma(\mathcal{E})|_{P \times Q} = \sigma(\{(A \times B) \cap (P \times Q) \colon A \times B \in \mathcal{E}\}) \\ &= \sigma(\mathcal{F}) = \mathcal{S}|_P \otimes \mathcal{T}|_Q\end{aligned}$$

nach dem in Beispiel 1.35 beschriebenen Spezialfall von Lemma 1.34(b). □

Beweis von Satz 6.1. (a) Für jedes $x \in X$ ist die Abbildung

$$i_x \colon (Y, \mathcal{T}) \to (X \times Y, \mathcal{S} \otimes \mathcal{T}), \quad y \mapsto (x, y)$$

messbar, da sie messbare Komponenten (eine konstante Funktion und id_Y) hat. Also ist für jedes $A \in \mathcal{S} \otimes \mathcal{T}$ die Menge

$$A_x := \{y \in Y \colon (x,y) \in A\} = i_x^{-1}(A)$$

in $\mathcal{S}$, somit

$$h_A(x) := \nu(A_x) = \int_Y \mathbf{1}_A(x,y) \, d\nu(y) \tag{65}$$

sinnvoll definiert.

Schritt 1. Wir nehmen zunächst an, dass $\nu(Y) < \infty$. Sei

$$\mathcal{D} \subseteq \mathcal{S} \otimes \mathcal{T}$$

die Menge aller $A \in \mathcal{S} \otimes \mathcal{T}$ derart, dass $h_A\colon X \to [0,\infty[$ messbar ist. $\mathcal{D}$ *ist ein Dynkin-System*:

D1: Es ist $h_\emptyset = 0$ messbar, somit $\emptyset \in \mathcal{D}$.

D2: Ist $A \in \mathcal{D}$, so ist $h_A\colon X \to [0,\infty[$ messbar. Für $x \in X$ gilt

$$((X \times Y) \setminus A)_x = i_x^{-1}((X \times Y) \setminus A) = Y \setminus i_x^{-1}(A) = Y \setminus A_x.$$

Folglich ist $h_{(X\times Y)\setminus A}(x) = \nu(Y \setminus A_x) = \nu(Y) - \nu(A_x)$. Also ist $h_{(X\times Y)\setminus A} = \nu(Y) - h_A$ eine messbare Funktion (vgl. Satz 1.30), somit $(X \times Y) \setminus A \in \mathcal{D}$.

D3: Ist $(A_j)_{j\in\mathbb{N}}$ eine Folge paarweise disjunkter Mengen $A_j \in \mathcal{D}$ und $A := \bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j$, so sind für jedes $x \in X$ die Mengen $(A_j)_x = i_x^{-1}(A_j)$ paarweise disjunkt und $A_x = i_x^{-1}(A) = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} i_x^{-1}(A_j) = \bigcup_{j\in\mathbb{N}}(A_j)_x$. Also ist

$$h_A(x) \;=\; \nu(A_x) \;=\; \sum_{j=1}^{\infty} \nu((A_j)_x) \;=\; \sum_{j=1}^{\infty} h_{A_j}(x)\,. \tag{66}$$

Nach Folgerung 3.27 ist h_A messbar und somit $A \in \mathcal{D}$.

Die Menge

$$\mathcal{E} := \{A \times B\colon A \in \mathcal{S}, B \in \mathcal{T}\}$$

ist (wie $\mathcal{S}$ und $\mathcal{T}$) $\cap$-stabil. Also gilt

$$\mathcal{S} \otimes \mathcal{T} = \sigma(\mathcal{E}) = \delta(\mathcal{E}).$$

Weiter ist $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{D}$, denn für $A \in \mathcal{S}$ und $B \in \mathcal{T}$ ist

$$(A \times B)_x = \begin{cases} B & \text{wenn } x \in A; \\ \emptyset & \text{wenn } x \in X \setminus A, \end{cases}$$

somit ist

$$h_{A\times B} = \nu(B)\mathbf{1}_A\colon X \to [0,\infty[, \tag{67}$$

eine messbare Funktion. Aus

$$\sigma(\mathcal{E}) \supseteq \mathcal{D} \supseteq \delta(\mathcal{E}) = \sigma(\mathcal{E})$$

folgt nun $\mathcal{D} = \sigma(\mathcal{E}) = \mathcal{S} \otimes \mathcal{T}$. Also ist h_A messbar für alle $A \in \mathcal{S} \otimes \mathcal{T}$.

Schritt 2: Ist nun ν ein beliebiges σ-endliches Maß, so gibt es eine Folge

$(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Teilmengen $Y_n \subseteq Y$ derart, dass $Y_n \in \mathcal{T}$ und $\nu(Y_n) < \infty$, für alle $n \in \mathbb{N}$. Nach Ersetzen von Y_n durch $Y_1 \cup \cdots \cup Y_n$ dürfen wir annehmen, dass $Y_1 \subseteq Y_2 \subseteq \cdots$. Ist $A \in \mathcal{S} \otimes \mathcal{T}$, so ist

$$A \cap (X \times Y_n) \in (\mathcal{S} \otimes \mathcal{T})|_{X\times Y_n} = \mathcal{S} \otimes (\mathcal{T}|_{Y_n})$$

unter Benutzung von Lemma 6.20, also nach Schritt 1

$$h_{A\cap(X\times Y_n)}\colon X \to [0,\infty], \quad x \mapsto \nu((A \cap (X \times Y_n))_x) = \nu|_{Y_n}((A \cap (X \times Y_n))_x)$$

eine messbare Funktion. Da die Folge der Mengen $A \cap (X \times Y_n)$ aufsteigend ist mit Vereinigung A, sind die Mengen $(A \cap (X \times Y_n))_x = i_x^{-1}(A \cap (X \times Y_n))$ aufsteigend mit Vereinigung $i_x^{-1}(A) = A_x$. Also ist

$$h_A(x) = \nu(A_x) = \lim_{n\to\infty} \nu((A \cap (X \times Y_n))_x) = \lim_{n\to\infty} h_{A\cap(X\times Y_n)}(x),$$

nach Lemma 2.5(c). Als punktweiser Grenzwert messbarer Funktionen ist h_A messbar (siehe Satz 1.56). Also ist die Funktion $\mu \otimes \nu\colon \mathcal{S} \otimes \mathcal{T} \to [0,\infty]$,

$$A \mapsto \int_X h_A(x)\,d\mu(x) = \int_X \nu(A_x)\,d\mu(x) = \int_X \int_Y \mathbf{1}_A(x,y)\,d\nu(y)\,d\mu(x)$$

sinnvoll definiert. Dies ist ein Maß auf $(X \times Y, \mathcal{S} \otimes \mathcal{T})$: Es ist nämlich

$$(\mu \otimes \nu)(\emptyset) = \int_X h_\emptyset\,d\mu = \int_X 0\,d\mu = 0.$$

Ist $(A_j)_{j\in\mathbb{N}}$ eine Folge paarweise disjunkter Mengen $A_j \in \mathcal{S} \otimes \mathcal{T}$, so gilt wegen (66) für $A := \bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j$

$$\begin{aligned}(\mu \otimes \nu)\left(\bigcup_{j\mathbb{N}} A_j\right) &= \int_X h_A(x)\,d\mu(x) = \int_X \sum_{j=1}^{\infty} h_{A_j}(x)\,d\mu(x) \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \int_X h_{A_j}\,d\mu(x) = \sum_{j=1}^{\infty} (\mu \otimes \nu)(A_j),\end{aligned}$$

wobei Folgerung 3.27 benutzt wurde. Also ist $\mu \otimes \nu$ ein Maß. Für $A \in \mathcal{S}$ und $B \in \mathcal{T}$ gilt wegen (67) weiter

$$\begin{aligned}(\mu \otimes \nu)(A \times B) &= \int_X \nu(B)\mathbf{1}_A(x)\,d\mu(x) = \nu(B) \int_X \mathbf{1}_A(x)\,d\mu(x) \\ &= \nu(B)\mu(A) = \mu(A)\nu(B).\end{aligned}$$

Also wird (54) durch $\mu \otimes \nu$ erfüllt.

(b) Seien τ_1 und τ_2 Maße auf $X \times Y, \mathcal{S} \otimes \mathcal{T})$ derart, dass für $j \in \{1,2\}$

$$\tau_j(A \times B) = \mu(A)\nu(B) \quad \text{für alle } A \in \mathcal{S} \text{ und } B \in \mathcal{T}. \tag{68}$$

Sei $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n$ und $Y = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} Y_n$ mit Mengen $X_n \in \mathcal{S}$ und $Y_n \in \mathcal{T}$ derart, dass

$$\mu(X_n) < \infty \quad \text{und} \quad \nu(Y_n) < \infty.$$

Setzen wir $\mathcal{E} := \{A \times B \colon A \in \mathcal{S}, B \in \mathcal{T}\}$, so ist $\mathcal{E}$ eine $\cap$-stabile Menge, $\mathcal{S} \times \mathcal{T} = \sigma(\mathcal{E})$, $X_n \times Y_n \in \mathcal{E}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit

$$\tau_1(X_n \times Y_n) = \tau_2(X_n \times Y_n) = \mu(X_n)\nu(Y_n) < \infty$$

und $\tau_1(A \times B) = \mu(A)\nu(B) = \tau_2(A \times B)$ für alle $A \times B \in \mathcal{E}$. Nach dem Eindeutigkeitssatz für σ-endliche Maße (Folgerung 5.16) ist also $\tau_1 = \tau_2$. $\square$

7 Die Transformationsformel

Aus der Analysis 1 kennen wir die Substitutionsregel für Riemann-Integrale. Nun lernen wir eine entsprechende Formel für Integrale über offene Teilmengen von $\mathbb{R}^n$ kennen, welche die allgemeine Transformel (Satz 5.3) konkretisiert. Wir beginnen mit dem Spezialfall linearer oder auch affin-linearer Transformationen.

Satz 7.1 (Transformationsformel / affin lineare Transformationen) *Es sei $\alpha \in \mathrm{GL}(\mathbb{R}^n)$ eine invertierbare lineare Abbildung und $b \in \mathbb{R}^n$. Dann ist das Bildmaß von λ_n unter der affin-linearen Abbildung*

$$\phi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \quad x \mapsto \alpha(x) + b$$

von der Form

$$\phi_*(\lambda_n) = |\det(\alpha)|^{-1}\lambda_n.$$

Es gilt daher

$$\int_{\phi(U)} f(y)\,d\lambda_n(y) = \int_U f(\alpha(x)+b)|\det(\alpha)|\,d\lambda_n(x) \tag{69}$$

für jede Borelmenge $U \subseteq \mathbb{R}^n$ und jede messbare Abbildung $f\colon \phi(U) \to [0,\infty]$. Weiter ist $f\colon \phi(U) \to \overline{\mathbb{R}}$ genau dann bzgl. λ_n über $\phi(U)$ integrierbar, wenn $f \circ \phi$ bzgl. λ_n über U integrierbar ist; wieder gilt (69).

Beweis. Nach Aufgabe H33 ist

$$\alpha_*(\lambda_n) = |\det(\alpha)|^{-1}\lambda_n.$$

Nun ist $\phi = \tau \circ \alpha$ mit der Translation $\tau\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $x \mapsto x + b$, somit wie behauptet

$$\phi_*(\lambda_n) = \tau_*(\alpha_*(\lambda_n)) = \tau_*(|\det(\alpha)|^{-1}\lambda_n) = |\det(\alpha)|^{-1}\tau_*(\lambda_n) = |\det(\alpha)|^{-1}\lambda_n$$

unter Benutzung der Translationsinvarianz des Lebesgue-Borel-Maßes (Satz 2.11) und Aufgabe H32(a). Nach der allgemeinen Transformationsformel (Satz 5.3) ist also

$$\int_{\mathbb{R}^n} g \circ \phi\,d\lambda_n = \int_{\mathbb{R}^n} g\,d\phi_*(\lambda_n) = \int_{\mathbb{R}^n} g\,|\det(\alpha)|^{-1}d\lambda_n$$

für jede messbare Funktion $g\colon \mathbb{R}^n \to [0,\infty]$. Setzen wir $g(y) := f(y)$ wenn $y \in \phi(U)$, $g(y) := 0$ wenn $y \in \mathbb{R}^n \setminus \phi(U)$, so ergibt sich (69). Die letzte Aussage ergibt sich durch Aufspalten von f in Positivteil und Negativteil. □

Beispiel 7.2 Gegeben reelle Zahlen $a, b > 0$ wollen wir den Flächeninhalt der Ellipse
$$E := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon (x/a)^2 + (y/b)^2 \leq 1\}$$
mit den Halbachsen a und b berechnen. Es ist
$$\alpha \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad (x, y) \mapsto (x/a, y/b)$$
ein Automorphismus des Vektorraums $\mathbb{R}^2$ derart, dass
$$\alpha^{-1}(x, y) = (ax, ay)$$
und somit
$$\alpha^{-1}(K) = E$$
für die Einheitskreisscheibe $K := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2+y^2 \leq 1\}$. Der Flächeninhalt der Ellipse ist also
$$\lambda_2(E) = \lambda_2(\alpha^{-1}(K)) = \alpha_*(\lambda_2)(K) = |\det(\alpha)|^{-1}\lambda_2(K) = \pi ab.$$

Beispiel 7.3 Gegeben $a, b, c > 0$ können wir das Ellipsoid
$$E := \{(x, y, z) \colon (x/a)^2 + (y/b)^2 + (z/c)^2 \leq 1\}$$
mit den Halbachsen a, b, c betrachten und erhalten analog mit der abgeschlossenen Einheitskugel B in $(\mathbb{R}^3, \|\cdot\|_2)$ und
$$\alpha \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad (x, y, z) \mapsto (x/a, y/b, z/c)$$
das Volumen
$$\lambda_3(E) = \lambda_3(\alpha^{-1}(B)) = \alpha_*(\lambda_3)(B) = |\det(\alpha)|^{-1}\lambda_3(B) = \frac{4\pi}{3}abc.$$

Beispiel 7.4 (Rotationsinvarianz des Lebesgue-Borel-Maßes). Für jede orthogonale Matrix $O \in O_n$ und jede Borelmenge $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ ist $OA \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ und
$$\lambda_n(OA) = \lambda_n(A).$$
Mit $\alpha \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $x \mapsto O^{-1}x$ ist nämlich $OA = \alpha^{-1}(A) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ wegen der Messbarkeit der stetigen Abbildung α und
$$\begin{aligned} \lambda_n(OA) &= \lambda_n(\alpha^{-1}(A)) = \alpha_*(\lambda_n)(A) = |\det(\alpha)|^{-1}\lambda_n(A) \\ &= |\det(O)|\lambda_n(A) = \lambda_n(A). \end{aligned}$$

Beispiel 7.5 Es gilt

$$\lambda_n(E) = 0$$

für jeden echten Untervektorraum $E \subseteq \mathbb{R}^n$ (und somit auch $\lambda_n(E + x) = \lambda_n(E) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ wegen der Translationsinvarianz des Lebesgue-Boel-Maßes). Beweis: Es ist $\lambda_n(\{0\}) = 0$, weswegen wir $k := \dim_{\mathbb{R}}(E) \in \{1, \ldots, n-1\}$ annehmen dürfen. Dann ist

$$\lambda_n(\mathbb{R}^k \times \{0\}) = (\lambda_k \otimes \lambda_{n-k})(\mathbb{R}^k \times \{0\}) = \lambda_k(\mathbb{R}^k)\lambda_{n-k}(\{0\}) = \infty \cdot 0 = 0.$$

Wir wählen eine Orthonormalbasis $b_1, \ldots, b_k$ in E und ergänzen diese zu einer Orthonormalbasis $b_1, \ldots, b_n$ von $\mathbb{R}^n$. Dann ist $O := (b_1, \ldots, b_n)$ eine orthogonale Matrix und

$$\lambda_n(E) = \lambda_n(O(\mathbb{R}^k \times \{0\})) = \lambda_n(\mathbb{R}^k \times \{0\}) = 0.$$

Wir erinnern an die Definition eines Diffeomorphismus:

Definition 7.6 Eine bijektive Abbildung $\phi\colon U \to V$ zwischen offenen Mengen $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt *Diffeomorphismus*, wenn ϕ und ϕ^{-1} stetig differenzierbar sind.

Satz 7.7 (Transformationsformel). *Es seien $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $\phi : U \to V$ ein Diffeomorphismus. Eine Funktion $f : V \to \overline{\mathbb{R}}$ ist genau dann bzgl. des Lebesgue-Borel-Maßes λ_n über V integrierbar, wenn die Funktion $U \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(\phi(x))\,|\det \phi'(x)|$ über U integrierbar ist. In diesem Fall* (*und auch in dem Fall, wenn f nicht-negativ und messbar ist*) *gilt*

$$\int_V f(y)\, dy \;=\; \int_U f\big(\phi(x)\big)\; |\det \phi'(x)|\; dx\,. \tag{70}$$

Insbesondere ist

$$\lambda_n\big(\phi(A)\big) \;=\; \int_A |\det \phi'(x)|\; dx \qquad \text{für jede Borelmenge } A \in \mathcal{B}(U). \tag{71}$$

Bemerkung 7.8

(a) Wir schreiben hier $\int_B f(x)\,dx$ statt $\int_B f\,d\lambda_n$. Weiter steht $\phi'(x) \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ für die Ableitung von $\phi : U \to V$ an der Stelle $x \in U$.

(b) Man beachte, dass (71) tatsächlich aus (70) folgt, wenn wir $f = \mathbf{1}_{\phi(A)} : V \to [0, \infty[$ wählen, da $\mathbf{1}_{\phi(A)}(\phi(x)) = \mathbf{1}_A(x)$.

Als Hilfsmittel für den Beweis der Transformatonsformel benutzen wir den Quantitativen Satz über die Umkehrfunktion aus dem in PANDA erhältlichen Analysis 2-Skript von Prof. Glöckner vom Sommersemester 2019 (den dortigen Satz 23.7), der damals alternativ auch "Satz über die Größe des Bildes" genannt wurde. Kombiniert mit Lemma 22.12 aus dem Analysis 2-Skript beinhaltet der Satz als Spezialfall:

Lemma 7.9 *Es sei $r > 0$, $x \in \mathbb{R}^n$ und $\|\cdot\|$ eine Norm auf $\mathbb{R}^n$. Ist $\varepsilon \in]0,1[$ und $f\colon B_r(x) \to \mathbb{R}^n$ eine C^1-Abbildung derart, dass*

$$f'(x) = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}$$

und

$$\|f'(y) - f'(x)\|_{\mathrm{op}} \leq \varepsilon \quad \text{für alle } y \in B_r(x),$$

so gilt

$$B_{\alpha r}(f(x)) \subseteq f(B_r(x)) \subseteq B_{\beta r}(f(x))$$

mit $\alpha := 1 - \varepsilon$ und $\beta := 1 + \varepsilon$. $\square$

Beweis der Transformationsformel. *Es genügt,* (71) *zu beweisen.* Die linke Seite von (70) können wir nämlich mithilfe der Allgemeinen Transformationsformel (Satz 5.3) umschreiben als ein Integral bzgl. des Bildmaßes $(\phi^{-1})_*(\lambda_n|_V)$:

$$\int_V f \, d\lambda_n|_V \;=\; \int_V f \circ \phi \circ \phi^{-1} \, d\lambda_n|_V \;=\; \int_U f \circ \phi \; d(\phi^{-1})_*(\lambda_n|_V)\,, \tag{72}$$

wobei jeder der jeweiligen Integranden genau dann integrierbar ist, wenn die anderen es auch sind. Andererseits ist aufgrund des Satzes über Integration bzgl. Maßen mit Dichten (Satz 5.1) der Integrand auf der rechten Seite von (70) genau dann integrierbar, wenn $f \circ \phi$ bzgl. des Maßes $|\det \phi'(x)| \, d\lambda_n|_U(x)$ mit Dichte $|\det \phi'(x)|$ bzgl. $\lambda_n|_U$ integrierbar ist, und in diesem Falle gilt

$$\int_U f\Big(\phi(x)\Big) \, |\det \phi'(x)| \, d\lambda_n|_U(x) \;=\; \int_U f\Big(\phi(x)\Big) \, \Big(|\det \phi'(x)| \, d\lambda_n|_U(x)\Big)\,. \tag{73}$$

Gleichung (71) bedeutet, dass das Bildmaß $(\phi^{-1})_*(\lambda_n|_V)$ mit dem Maß

$$|\det \phi'(x)| \, d\lambda_n|_U(x)$$

übereinstimmt. Ist dies der Fall, so wird in den Integralen auf der rechten Seite von (72) bzw. (73) die gleiche Funktion bzgl. des gleichen Maßes integriert: Die Integrale sind daher gleich, wann immer sie existieren.

Nach Folgerung 5.17 sind die Maße $(\phi^{-1})_*(\lambda_n|_V)$ und

$$|\det \phi'(x)|\, d\lambda_n|_U(x)$$

gleich, wenn wir zeigen können, dass sie auf jedem Quader $Q := [a,b[$ mit $[a,b] \subseteq U$ den gleichen Wert annehmen. Hierbei sind $a = (a_1, \ldots, a_n)$ und $b = (b_1, \ldots, b_n)$ Vektoren in $\mathbb{R}^n$ mit $a_j < b_j$ für alle $j \in \{1, \ldots, n\}$. Wir halten Q fest. Der Mittelpunkt von Q ist $z := (z_1, \ldots, z_n)$ mit

$$z_j := (b_j - a_j)/2.$$

Weiter ist $\|\cdot\| \colon \mathbb{R}^n \to [0, \infty[$,

$$x = (x_1, \ldots, x_n) \mapsto \max_{j=1,\ldots,n} \frac{|x_j - z_j|}{b_j - z_j}$$

eine Norm auf $\mathbb{R}^n$ derart, dass

$$]a,b[\,=\, B_1(z) \quad \text{und} \quad [a,b] \,=\, \overline{B}_1(z)$$

gilt für die offene bzw. abgeschlossene Kugel vom Radius 1 um z. Es seien $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}}$ und $(\beta_k)_{k\in\mathbb{N}}$ Folgen von Zahlen $\alpha_k \in]0,1[$ und $\beta_k \in]1,\infty[$ derart, dass

$$\lim_{k\to\infty} \alpha_k = \lim_{k\to\infty} \beta_k = 1.$$

Die Abbildung

$$[a,b] \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto |\det \phi'(x)|$$

ist stetig und somit gleichmäßig stetig, da der Quader $[a,b]$ kompakt ist. Gegeben $k \in \mathbb{N}$ existiert also ein $m_k \in \mathbb{N}$ derart, dass

$$\big| |\det \phi'(x)| - |\det \phi'(y)| \big| \leq \frac{1}{k} \tag{74}$$

für alle $x, y \in [a,b]$ mit $\|x - y\| \leq \frac{1}{m_k}$. Auch die Abbildung

$$[a,b] \times [a,b] \to (L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n), \|\cdot\|_{\mathrm{op}}), \quad (x,y) \mapsto \phi'(x)^{-1}\phi'(y)$$

ist stetig und somit gleichmäßig stetig. Nachdem wir m_k gegebenenfalls vergrößern, dürfen wir also annehmen, dass

$$\|\phi'(x)^{-1}\phi'(y) - \phi'(v)^{-1}\phi'(w)\|_{\mathrm{op}} \leq \min\{1-\alpha_k, \beta_k - 1\}$$

für alle $(x, y) \in [a, b]^2$ und $(v, w) \in [a, b]^2$ mit $\max\{\|x - v\|, \|y - w\|\} \leq \frac{1}{m_k}$. Da wir $v := w := x$ nehmen können, gilt dann insbesondere

$$\|\phi'(x)^{-1}\phi'(y) - \mathrm{id}\|_{\mathrm{op}} \leq \min\{1-\alpha_k, \beta_k - 1\}$$

für alle $x, y \in [a, b]$ mit $\|x-y\| \leq \frac{1}{m_k}$, wobei $\mathrm{id} := \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}$. Sei $r \in]0, 1/m_k]$ (z.B. $r = 1/m_k$) und $x \in [a, b]$ mit $B_r(x) \subseteq [a, b]$. Wir können dann Lemma 7.9 auf die Funktion

$$B_r(x) \to \mathbb{R}^n, \quad y \mapsto \phi'(x)^{-1}\phi(y)$$

mit $\varepsilon := \min\{1-\alpha_k, \beta_k - 1\}$ anwenden (mit Ableitung $\phi'(x)^{-1} \circ \phi'(y)$ an der Stelle $y \in B_r(x)$) und erhalten

$$B_{\alpha_k r}(\phi'(x)^{-1}\phi(x)) \subseteq \phi'(x)^{-1}\phi(B_r(x)) \subseteq B_{\beta_k r}(\phi'(x)^{-1}\phi(x)).$$

Folglich ist

$$B_{\alpha_k r}(\phi'(x)^{-1}\phi(x)) \subseteq \phi'(x)^{-1}\phi(B_r(x)) \subseteq \phi'(x)^{-1}\phi(\overline{B}_r(x)) \subseteq \overline{B}_{\beta_k r}(\phi'(x)^{-1}\phi(x)).$$

Anwenden von $\phi'(x)$ führt auf

$$\phi'(x)(A) \subseteq \phi(B_r(x)) \subseteq \phi(\overline{B}_r(x)) \subseteq \phi'(x)(B)$$

mit $A := B_{\alpha_k r}(\phi'(x)^{-1}\phi(x))$ und $B := \overline{B}_{\beta_k r}(\phi'(x)^{-1}\phi(x))$. Wir wenden λ_n an und erhalten wegen Satz 7.1

$$|\det \phi'(x)|\lambda_n(A) \leq \lambda_n(\phi(B_r(x)) \leq |\det \phi'(x)|\lambda_n(B).$$

Wegen der Translationsinvarianz des Lebesgue-Borel-Maßes und seines Verhaltens unter Homothetien ist

$$\lambda_n(A) = (\alpha_k)^n \lambda_n(B_r(x))$$

und $\lambda_n(B) = (\beta_k)^n \lambda_n(\overline{B}_r(x))$, also

$$\begin{aligned} (\alpha_k)^n |\det \phi'(x)|\lambda_n(B_r(x)) &\leq \lambda_n(\phi(B_r(x))) \\ &\leq \lambda_n(\phi(\overline{B}_r(x)) \leq (\beta_k)^n |\det \phi'(x)|\lambda_n(\overline{B}_r(x)). \end{aligned} \tag{75}$$

Für festes $k \in \mathbb{N}$ unterteilen wir die Intervalle $[a_1, b_1[, \ldots, [a_n, b_n[$ äquidistant in je m_k Teilintervalle; diese führen auf eine Partition von $[a, b[$ in $(m_k)^n$ Teilquader Q_i mit $i \in \{1, \ldots, (m_k)^n\}$. Sei x_i der Mittelpunkt von Q_i. Der Quader Q_i, sein Inneres $B_{1/m_k}(x_i)$ und sein Abschluss $\overline{B}_{1/m_k}(x_i)$ haben das gleiche Maß. Also liefert (75), dass

$$(\alpha_k)^n |\det \phi'(x_i)| \lambda_n(Q_i) \leq \lambda_n(\phi(Q_i)) \leq (\beta_k)^n |\det \phi'(x_i)| \lambda_n(Q_i).$$

Daraus folgt

$$\lambda_n(\phi(Q)) = \sum_{i=1}^{(m_k)^n} \lambda_n(\phi(Q_i)) \leq (\beta_k)^n \sum_{i=1}^{(m_k)^n} |\det \phi'(x_i)| \lambda_n(Q_i) = (\beta_k)^n \int_Q h_k \, d\lambda_n$$

mit der durch $h_k(x) := |\det \phi'(x_i)|$ für $x \in Q_i$ gegebenen Stufenfunktion. Analog ist

$$\lambda_n(\phi(Q)) = \sum_{i=1}^{(m_k)^n} \lambda_n(\phi(Q_i)) \geq (\alpha_k)^n \sum_{i=1}^{(m_k)^n} |\det \phi'(x_i)| \lambda_n(Q_i) = (\alpha_k)^n \int_Q h_k \, d\lambda_n,$$

folglich

$$(\alpha_k)^n \int_Q h_k \, d\lambda_n \leq \lambda(\phi(Q)) \leq (\beta_k)^n \int_Q h_k \, d\lambda_n. \tag{76}$$

Wegen (74) gilt

$$\big| h_k(x) - |\det \phi'(x)| \big| \leq \frac{1}{k} \quad \text{für alle } x \in Q,$$

so dass also $h_k(x) \to |\det \phi'(x)|$ gleichmäßig (also auch punktweise) in $x \in Q$. Weiter ist die konstante Funktion

$$Q \to [0, \infty[, \quad x \mapsto \sup_{y \in [a,b]} |\det \phi'(y)|$$

eine bzgl. λ_n über Q integrierbare Majorante für die Funktionenfolge $(h_k)_{k \in \mathbb{N}}$. Der Satz über majorisierte Konvergenz liefert also

$$\int_Q h_k \, d\lambda_n \to \int_Q |\det \phi'(x)| \, d\lambda_n(x) \quad \text{für } k \to \infty.$$

Da zudem $\alpha_k \to 1$ und $\beta_k \to 1$, folgern wir aus (76), dass

$$\int_Q |\det \phi'(x)| \, d\lambda_n(x) \leq \lambda_n(\phi(Q)) \leq \int_Q |\det \phi'(x)| \, d\lambda_n(x).$$

Also gilt

$$(\phi^{-1})_*(\lambda_n|_V)(Q) = \lambda_n(\phi(Q)) = \int_Q |\det \phi'(x)|\, d\lambda_n(x),$$

wobei die rechte Seite gleich dem Wert des Maßes $|\det \phi'(x)|\, d\lambda_n|_U(x)$ ist, angewandt auf Q. Dies war zu zeigen. □

Bemerkung 7.10 Man kann die Substitutionsregel der Analysis 1 so umformulieren, dass die Ähnlichkeit zur obigen Transformationsformel klarer wird. Sei hierzu $\phi\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare und monoton wachsende Funktion und $f\colon \phi([a,b]) \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist

$$\int_a^b (f \circ \phi)(t)\, \phi'(t)\; dt \;=\; \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(x)\; dx$$

bzw., als Lebesgue-Integral geschrieben,

$$\int_{[a,b]} (f \circ \phi)(t)\, \phi'(t)\; dt \;=\; \int_{\phi([a,b])} f(x)\; dx\,.$$

Ist dagegen ϕ monoton fallend, d.h. orientierungsumkehrend, so ist

$$\int_a^b (f \circ \phi)(t)\, \phi'(t)\, dt = \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(x)\, dx = -\int_{\phi(b)}^{\phi(a)} f(x)\, dx = -\int_{\phi([a,b])} f(x)\, dx.$$

Da hier stets $\phi'(t) \geq 0$ (bzw. $\phi'(t) \leq 0$) wegen der Monotonie, lassen sich die beiden Identitäten zusammenfassen zu

$$\int_{[a,b]} (f \circ \phi)(t)\, |\phi'(t)|\; dt \;=\; \int_{\phi([a,b])} f(x)\; dx. \tag{77}$$

Anhang zu Kapitel 7: Erkennen von Lebesgue-Nullmengen

Um die Transformationsformel auf gegebene Integrale anwenden zu können, ist es oft nötig, zuerst gewisse Borelmengen vom Maß 0 im Integrationsbereich wegzulassen. Es ist daher wichtig, Hilfsmittel zu haben, um Borelmengen $A \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $\lambda_n(A) = 0$ erkennen zu können. Wir haben bereits zwei solche Hilfsmittel kennengelernt, nämlich Folgerung 6.9 über Graphen und Beispiel 7.5 über echte Untervektorräume (und echte affine Unterräume). Für die Allgemeinbildung erwähnen wir noch eine weitere Quelle messbarer Mengen vom Maß 0, eine Variante des Satzes von Sard (wobei wir den Beweis in der Vorlesung überspringen).

Satz 7.11 *Seien $k < n$ natürliche Zahlen, $U \subseteq \mathbb{R}^k$ eine offene Teilmenge und $f\colon U \to \mathbb{R}^n$ eine Funktion, die lokal Lipschitzstetig ist, d.h. jeder Punkt $x \in U$ hat eine Umgebung $W_x \subseteq U$ derart, dass $f|_{W_x}$ Lipschitzstetig ist. Dann ist $f(U)$ eine Borelmenge in $\mathbb{R}^n$ mit*

$$\lambda_n(f(U)) = 0.$$

Dies bleibt auch gültig, wenn (allgemeiner) U eine relativ abgeschlossene Teilmenge einer offenen Teilmenge $V \subseteq \mathbb{R}^k$ ist.

Beweis. Sei $V \subseteq \mathbb{R}^k$ offen und $U = V \cap A$ mit einer abgeschlossenen Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}^k$. Wir dürfen annehmen, dass all die Umgebungen W_x relativ offen in U sind und somit von der Form

$$W_x = P_x \cap A$$

mit einer offenen Teilmenge $P_x \subseteq V$. Da P_x offen in $\mathbb{R}^n$ ist und $x \in P_x$, gibt es einen Quader $[a_x, b_x] \subseteq P_x$ mit $a_x, b_x \in \mathbb{Q}^n$ und $x \in [a_x, b_x]$ (vgl. Beweis von Folgerung 5.17). Die Mengen $K_x := [a_x, b_x] \cap A \subseteq W_x$ sind kompakt, $f|_{K_x}$ ist Lipschitzstetig und

$$\mathcal{K} := \{K_x \colon x \in U\}$$

ist eine abzählbare Menge mit $U = \bigcup_{x \in U} K_x = \bigcup_{K \in \mathcal{K}} K$. Dann ist

$$f(U) = \bigcup_{K \in \mathcal{K}} f(K)$$

eine abzählbare Vereinigung von kompakten (somit abgeschlossenen und somit messbaren) Mengen, also eine Borelmenge. Wir brauchen nur noch zu zeigen, dass $\lambda_n(K) = 0$ für alle $K \in \mathcal{K}$. Sei K gegeben und L eine Lipschitzkonstante für $f|_K$ bezüglich den Maximumnormen auf $\mathbb{R}^k$ und $\mathbb{R}^n$. Es ist $K = [a, b] \cap A$ für Punkte $a = (a_1, \ldots, a_k)$ und $b = (b_1, \ldots, b_k) \in \mathbb{Q}^k$ mit $a_j < b_j$ für alle $j \in \{1, \ldots, k\}$. Für jedes $m \in \mathbb{N}$ können $[a, b]$ als Vereinigung von m^k Teilquadern schreiben, indem wir jedes der Intervalle $[a_j, b_j]$ äquidistant in m Teilintervalle aufteilen. Sei Q solch ein Teilquader. Ist $Q \cap K \neq \emptyset$, so gilt für den Durchmesser

$$\operatorname{diam}(Q \cap K) \leq \operatorname{diam}(Q) = \frac{1}{m} \operatorname{diam}([a, b]).$$

Die Lipschitzstetigkeit impliziert nun

$$\operatorname{diam}(f(Q \cap K)) \leq L \operatorname{diam}(Q \cap K) \leq \frac{L}{m} \operatorname{diam}([a, b]).$$

Es ist also $f(Q \cap K)$ in einer abgeschlossenen Kugel B vom Radius

$$\frac{L}{m} \operatorname{diam}([a, b]) = C/m$$

mit $C := L \operatorname{diam}([a, b])$ enthalten. Wegen $\lambda_n(B) = (2C/m)^n$ gilt somit

$$\lambda_n(f(Q \cap K)) \leq (2C/m)^n. \tag{78}$$

Ist $Q \cap K = \emptyset$, gilt (78) trivialerweise. Da $K = \bigcup_Q (Q \cap K)$, folgt

$$\lambda_n(f(K)) \leq \sum_Q \lambda_n(f(Q \cap K)) \leq m^k (2C/m)^n = m^{k-n}(2C)^n.$$

Da $k < n$, gilt $m^{k-n}(2C)^n \to 0$ für $m \to \infty$; also ist $\lambda_n(f(K)) = 0$. $\square$

Bemerkung 7.12 In der Analysis 2 haben wir gesehen, dass jede stetig differenzierbare Funktion $f\colon U \to \mathbb{R}^n$ auf einer offenen Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}^k$ lokal Lipschitzstetig ist. Ist $k < n$, so ist also $\lambda_n(f(U)) = 0$.

Das aus Beispiel 7.5 uns schon bekannte Ergebnis kann man alternativ auch mit Satz 7.11 begründen:

Beispiel 7.13 Jeder echte Untervektorraum F von $\mathbb{R}^n$ und allgemeiner jeder zugehörige affine Unterraum $F + x$ mit $x \in \mathbb{R}^n$ ist eine Borelmenge vom Maß $\lambda_n(F + x) = 0$, denn F ist das Bild einer affin-linearen (und somit Lipschitzstetigen) Abbildung $f\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ mit $k < n$.

8 Beispiele von Koordinatentransformationen

Wir diskutieren nun Koordinatentransformationen, die in der Praxis häufig gebraucht werden (ebene und räumliche Polarkoordinaten sowie Zylinderkoordinaten).

Ist der Integrand eines Mehrfachintegrals eine rotationssymmetrische Funktion (bzw. invariant unter Rotationen um die z-Achse), so lassen sich Integralberechnungen durch Übergang zu Polar- bzw. Zylinderkoordinaten häufig stark vereinfachen.

8.1 Polarkoordinaten, Zylinderkoordinaten

Oft lassen sich vorhandene Symmetrien dadurch ausnutzen, dass man Integrationsbereiche durch Koordinatentransformationen (d.h. durch eine geeignete Parametrisierung) in Quader überführt, auf denen Integrale iterativ berechnet werden können. Im folgenden schauen wir uns die für die Praxis wichtigsten Koordinatentransformationen an: Ebene und räumliche *Polarkoordinaten* (auch bekannt als "Kugelkoordinaten") sowie *Zylinderkoordinaten.*

Polarkoordinaten in der Ebene. Die Punkte der Ebene lassen sich anhand ihres Abstands r zum Ursprung und des (im Gegenuhrzeigersinn gemessenen) Winkels ϕ zur x-Achse (den sog. "Polarkoordinaten") beschreiben:

$$P\colon [0,\infty[\times[0,2\pi]\to\mathbb{R}^2, \qquad P(r,\phi) := (r\cos\phi, r\sin\phi)\,. \tag{79}$$

Die Jacobi-Matrix von P in (r,ϕ) ist gegeben durch

$$J_{(r,\phi)}(P) = \begin{pmatrix} \cos\phi & -r\sin\phi \\ \sin\phi & r\cos\phi \end{pmatrix},$$

und ihre Determinante ist gleich r; für $r>0$ ist die Matrix $J_{(r,\phi)}(P)$ also invertierbar. Man beachte, dass P nicht injektiv ist; z.B. ist $P(r,0)=P(r,2\pi)$. Jedoch erhält man einen Diffeomorphismus zwischen offenen Teilmengen von $\mathbb{R}^2$, wenn man den Definitionsbereich zu $]0,\infty[\times]0,2\pi[$ verkleinert und im Bild die nicht-negative x-Achse weglässt: Die Einschränkung von P zu einer Abbildung

$$]0,\infty[\times]0,2\pi[\;\to\;\mathbb{R}^2\setminus([0,\infty[\times\{0\})$$

ist ein Diffeomorphismus. Nach der Transformationsformel (Satz 7.7) ist eine Funktion $f : \mathbb{R}^2 \setminus ([0,\infty[\times\{0\}) \to \mathbb{R}$ somit genau dann integrierbar, wenn die Funktion

$$(r,\phi) \mapsto f\big(P(r,\phi)\big) \cdot |\det P'(r,\phi)| \;=\; f(r\cos\phi, r\sin\phi) \cdot r$$

auf $]0,\infty[\times]0,2\pi[$ integrierbar ist. Da Nullmengen beim Integrieren weggelassen werden dürfen, erhalten wir für jede messbare Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^2} f\, d\lambda_2 \;&=\; \int_{\mathbb{R}^2\setminus([0,\infty[\times\{0\})} f\, d\lambda_2 \;=\; \int_{]0,\infty[\times]0,2\pi[} f(r\cos\phi, r\sin\phi)\, r\, d\lambda_2(r,\phi) \\
&=\; \int_{[0,\infty[\times[0,2\pi]} f(r\cos\phi, r\sin\phi)\, r\, d\lambda_2(r,\phi) \\
&=\; \int_{[0,\infty[} \int_{[0,2\pi]} f(r\cos\phi, r\sin\phi)\, r\, d\phi\, dr\,, \qquad (80)
\end{aligned}$$

wann immer einer (und somit jeder) der Integranden integrierbar ist. Hierbei haben wir zunächst die Nullmenge $[0,\infty[\times\{0\}$ beim Integrieren weggelassen, dann die Transformationsformel benutzt, dann die Nullmengen $\{0\}\times[0,2\pi]$ und $[0,\infty[\times\{\pi,-\pi\}$ hinzugenommen und schließlich den Satz von Fubini benutzt.

Wichtig ist, vor Anwendung der Transformationsformel zu prüfen, ob die "Ausnahmemengen" auf beiden Seiten Nullmengen sind.

Beispiel 8.1 Als Anwendung von (80) berechnen wir das Integral $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\, dx$. Dazu betrachten wir die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\,, \quad f(x,y) \;:=\; e^{-x^2-y^2}\,.$$

Diese ist rotationssymmetrisch; mit Polarkoordinaten, (80) und der Substitution $s = r^2$ erhalten wir

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\, d\lambda_2(x,y) \;&=\; \int_0^\infty \int_0^{2\pi} e^{-r^2}\, r\, d\phi\, dr \;=\; 2\pi \int_0^\infty e^{-r^2}\, r\, dr \\
&=\; \pi \int_0^\infty e^{-s}\, ds \;=\; \pi \lim_{t\to\infty} \Big[-e^{-s}\Big]_0^t \\
&=\; \pi \lim_{t\to\infty} (1-e^{-t}) \;=\; \pi\,.
\end{aligned}$$

Insbesondere ist also f integrierbar. Andererseits erhalten wir mit dem Satz von Fubini:

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^2} e^{x^2+y^2}\, d\lambda_2(x,y) &= \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}e^{-y^2}\, dx\, dy \;=\; \int_{\mathbb{R}}\Big(\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\, dx\Big)\, e^{-y^2}\, dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\, dx \cdot \int_{\mathbb{R}} e^{-y^2}\, dy \;=\; \Big(\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\, dx\Big)^2,\end{aligned}$$

so dass schließlich

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\, dx \;=\; \sqrt{\pi} \tag{81}$$

folgt. Dieses Integral spielt in der Wahrscheinlichkeitstheorie eine zentrale Rolle.

Zylinderkoordinaten. Die Punkte des Raums lassen sich mittels ihrer z-Koordinate, ihres Abstands r von der z-Achse und des (im Gegenuhrzeigersinn gemessenen) Winkels ϕ ihrer Projektion auf die x-y-Ebene zur x-Achse beschreiben (also mittels der sog. "Zylinderkoordinaten" (r,ϕ,z)) :

$$Z\colon [0,\infty[\,\times[0,2\pi]\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3\,,\quad Z(r,\phi,z) \;:=\; \big(r\cos\phi,\, r\sin\phi,\, z\big)\,.$$

Hier ist

$$J_{(r,\phi,z)}(Z) \;=\; \begin{pmatrix} \cos\phi & -r\sin\phi & 0\\ \sin\phi & r\cos\phi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

und somit

$$\det J_{(r,\phi,z)}(Z) \;=\; r \;\neq\; 0$$

für $r>0$. Die Einschränkung von Z auf

$$]0,\infty[\,\times\,]0,2\pi[\,\times\mathbb{R}$$

ist ein Diffeomorphismus auf die offene Menge [27]

$$\mathbb{R}^3 \;\setminus\; \big([0,\infty[\,\times\{0\}\times\mathbb{R}\big)\,.$$

Hierbei wurden im Definitionsbereich und im Bild wieder lediglich Nullmengen weggelassen.

[27] Diese Abbildung ist nämlich eine Bijektion, und da ihr Differential an jeder Stelle nach dem Vorigen invertierbar ist, ist die Abbildung nach dem Satz über die Umkehrfunktion ein Diffeomorphismus.

Räumliche Polarkoordinaten (Kugelkoordinaten). Die Punkte des Raums lassen sich mittels ihres Abstands r zum Ursprung, des Winkels θ zur z-Achse (Breitengrad) und des im Gegenuhrzeigersinn gemessenen Winkels ϕ ihrer Projektion auf die x-y-Ebene zur x-Achse (Längengrad) beschreiben (also durch die sog. "Kugelkoordinaten" (r, θ, ϕ)):

$$K\colon [0,\infty[\,\times[0,\pi]\times[0,2\pi] \;\to\; \mathbb{R}^3\,,$$

$$K(r,\theta,\phi) \;:=\; \big(r\sin\theta\cos\phi,\; r\sin\theta\sin\phi,\; r\cos\theta\big)\,.$$

Man erhält

$$J_{(r,\theta,\phi)}(K) \;=\; \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\phi & r\cos\theta\cos\phi & -r\sin\theta\sin\phi \\ \sin\theta\sin\phi & r\cos\theta\sin\phi & r\sin\theta\cos\phi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{pmatrix}$$

mit Determinante

$$\det J_{(r,\theta,\phi)}(K) \;=\; r^2\sin\theta \;>\; 0$$

für $r > 0$ und $\theta \in\,]0,\pi[$. Die Einschränkung von K auf

$$]0,\infty[\,\times\,]0,\pi[\,\times\,]0,2\pi[$$

ist ein Diffeomorphismus auf die offene Menge $\mathbb{R}^3 \setminus \big([0,\infty[\,\times\{0\}\times\mathbb{R}\big)$, wobei in Definitionsbereich und Bild nur Nullmengen weggelassen wurden. [28]

Teil IV : Integration über Untermannigfaltigkeiten

In der Analysis 2 haben wir bereits Kurven in $\mathbb{R}^n$ eine Länge zugeordnet (also ein "eindimensionales Volumen") und Funktionen über Kurven integriert. In ähnlichem Sinne würden wir gern auch Flächen in $\mathbb{R}^3$ (z.B. der Oberfläche der Einheitskugel) einen Flächeninhalt zuordnen können und Funktionen über solche Flächen integrieren.

Im vorigen Kapitel haben wir zur Berechnung von Integralen über Teilmengen von $\mathbb{R}^n$ stets das Lebesgue-Borel-Maß λ_n benutzt. Für die jetzigen Zwecke taugt das Lebesgue-Borel-Maß allerdings nicht, denn Flächenstücke in $\mathbb{R}^3$ sind λ_3-Nullmengen, so dass alle Integrale bzgl. λ_3 über solche Mengen verschwinden. Man muss also anders vorgehen: Wir werden jeder Fläche M ein Maß S_M zuordnen, welches ihren Flächeninhalt (und den Flächeninhalt ihrer Teilmengen) misst.

Zunächst präzisieren wir in Kapitel 9, was genau wir unter Flächen in $\mathbb{R}^n$ (bzw. ihren höher-dimensionalen Verallgemeinerungen, sog. "Untermannigfaltigkeiten von $\mathbb{R}^n$") verstehen wollen. Anschließend ordnen wir jeder k-dimensionalen Untermannigfaltigkeit $M \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Maß S_M auf $(M, \mathcal{B}(M))$ zu, das sogenannte "Oberflächenmaß" (Kapitel 10). Man interpretiert dann $S_M(A)$ als das "k-dimensionale Volumen" der Borelmenge $A \subseteq M$. Insbesondere ist $S_M(M)$ das k-dimensionale Volumen von M.

9 Untermannigfaltigkeiten von $\mathbb{R}^n$

Grob gesagt sind Untermannigfaltigkeiten von $\mathbb{R}^n$ "schöne" und "glatte" Teilmengen kleinerer Dimension wie z.B. der Kreis

$$\mathbb{S}_1 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 = 1\}$$

in $\mathbb{R}^2$, die Einheitssphäre $\mathbb{S}_2 := \{(x, y, z) \colon x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ in $\mathbb{R}^3$ oder der Zylinder

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + y^2 = 1\}$$

in $\mathbb{R}^3$. Der Einheitskreis $\mathbb{S}_1$ lässt sich einerseits als Nullstellenmenge

$$\mathbb{S}_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 - 1 = 0\}$$

beschreiben, andererseits auch durch einen reellen Parameter parametrisieren, z.B. via $t \mapsto (\cos t, \sin t)$. Analoges wird uns bei allgemeinen Untermannigfaltigkeiten wieder begegnen: Zunächst definieren wir Untermannigfaltigkeiten (lokal) als Nullstellenmengen geeigneter Funktionen. Anschließend zeigen wir, dass solche Untermannigfaltigkeiten sich immer lokal durch Parameter beschreiben lassen und hierdurch auch charakterisiert sind.

Bemerkung 9.1 Beide Sichtweisen kennen wir aus der Linearen Algebra, wo man Untervektorräume einerseits als Lösungsmengen homogener linearer Gleichungssysteme erhält, andererseits nach Wahl einer Basis durch eine Parameterdarstellung beschreiben kann.

Genauer: Gegeben $k \leq n$ und eine Teilmenge $E \subseteq \mathbb{R}^n$ sind äquivalent:

(a) E ist ein k-dimensionaler Untervektorraum von $\mathbb{R}^n$;

(b) $E = \ker \alpha$ für eine geeignete surjektive lineare Abbildung $\alpha : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-k}$ (α hat also den Rang $n-k$);

(c) $E = \operatorname{im} \alpha$ für eine geeignete injektive lineare Abbildung $\alpha \colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ (α hat also den Rang k);

(d) $\alpha(E) = \mathbb{R}^k \times \{0\} \subseteq \mathbb{R}^n$ für eine geeignete bijektive lineare Abbildung $\alpha \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.

Es ist nützlich, diese Charakterisierungen k-dimensionaler Untervektorräume im Hinterkopf zu behalten; im Folgenden begegnen wir nicht-linearen Varianten dieser Bedingungen.

In diesem Kapitel seien stets $k, n \in \mathbb{N}$ mit $k \leq n$. Weiter sei $r \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.

Definition 9.2 Eine C^r-Funktion $f \colon U \to \mathbb{R}^k$ auf einer offenen Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt *C^r-Submersion* (oder kurz: "Submersion"), wenn an jeder Stelle $x \in U$ die Ableitung

$$f'(x) \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$$

surjektiv ist, also die Jacobi-Matrix $J_f(x) \in \mathbb{R}^{k \times n}$ den vollen Rang k (und somit linear unabhängige Zeilen) hat. Zudem nennen wir jede Funktion $f \colon U \to \mathbb{R}^0 = \{0\}$ eine Submersion.

Definition 9.3 Eine Teilmenge $M \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt *k-dimensionale C^r-Untermannigfaltigkeit*, wenn es zu jedem Punkt $a \in M$ eine offene Umgebung $U \subseteq \mathbb{R}^n$ von a und eine C^r-Submersion $f\colon U \to \mathbb{R}^{n-k}$ gibt mit

$$M \cap U = \{x \in U\colon f(x) = 0\}.$$

Statt von C^∞-Untermannigfaltigkeiten spricht man auch von *glatten* Untermannigfaltigkeiten; weiter nennt man 2-dimensionale Untermanngfaltigkeiten auch *Flächen*.

Also sehen k-dimensionale C^r-Untermannigfaltigkeiten von $\mathbb{R}^n$ lokal aus wie Nullstellenmengen von C^r-Submersionen nach $\mathbb{R}^{n-k}$.

Beispiel 9.4 Jede offene Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ist trivialerweise eine n-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$, denn es ist $U = f^{-1}(\{0\})$ mit der Nullfunktion $f\colon U \to \mathbb{R}^0 = \{0\}$.

Interessant und spannend ist der Fall $k < n$.

Beispiel 9.5 Der Einheitskreis $\mathbb{S}_1$ ist eine 1-dimensionale glatte Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^2$, denn $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$, $f(x,y) := x^2 + y^2 - 1$ ist eine C^∞-Funktion derart, dass mit $U := \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

$$\mathbb{S}_1 \;=\; \{(x,y) \in U\colon f(x,y) = 0\}$$

und

$$\operatorname{grad} f(x,y) \;=\; \big(2x,\, 2y\big) \;\neq\; 0$$

für alle $(x,y) \in U$, so dass f eine C^∞-Submersion ist (in diesem Beispiel können wir also sogar für alle $a \in \mathbb{S}_1$ die gleiche Funktion f nehmen).

Beispiel 9.6 Die Einheitssphäre $\mathbb{S}_2$ ist eine 2-dimensionale glatte Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^3$ (also eine glatte Fläche), denn $f\colon U \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) := x^2 + y^2 + z^2 - 1$ ist eine glatte Funktion auf $U := \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ derart, dass

$$\mathbb{S}_2 \;=\; \{x \in U\colon f(x,y,z) = 0\}$$

und

$$\operatorname{grad} f(x,y,z) \;=\; \big(2x,\, 2y,\, 2z\big) \;\neq\; 0$$

für alle $(x,y,z) \in U$.

Analog sieht man, dass die $(n-1)$-dimensionale Einheitssphäre

$$\mathbb{S}_{n-1} \;:=\; \{(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n\colon x_1^2+\cdots+x_n^2=1\}$$

eine $(n-1)$-dimensionale glatte Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$ ist.

Beispiel 9.7 Der Zylinder $Z := \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2=1\}$ ist eine 2-dimensionale glatte Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^3$ (also eine glatte Fläche), denn $f\colon U\to\mathbb{R}$, $f(x,y,z):=x^2+y^2-1$ mit

$$U := \mathbb{R}^3\setminus(\{(0,0)\}\times\mathbb{R})$$

ist eine C^∞-Funktion derart, dass

$$Z \;=\; \{(x,y,z)\in U\colon f(x,y,z)=0\}$$

und

$$\operatorname{grad} f(x,y,z) \;=\; \big(2x,\,2y,\,0\big) \;\neq\; 0 \quad \text{für alle } (x,y,z)\in U.$$

Beispiel 9.8 Der Einheitskreis $\mathbb{S}_1\times\{0\}\subseteq\mathbb{R}^3$ in der xy-Ebene ist eine 1-dimensionale glatte Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^3$, denn es ist

$$\mathbb{S}_1\times\{0\} \;=\; \{(x,y,z)\in U\colon f_1(x,y,z)=f_2(x,y,z)=0\}$$

mit

$$U := \mathbb{R}^3\setminus\{(0,0)\}\times\mathbb{R}$$

und den C^∞-Funktionen $f_1\colon U\to\mathbb{R}$, $f_1(x,y,z):=x^2+y^2-1$ und $f_2\colon\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$, $f_2(x,y,z):=z$, deren Gradienten

$$\operatorname{grad} f_1(x,y,z) \;=\; \big(2x,\,2y,\,0\big)$$

und

$$\operatorname{grad} f_2(x,y,z) \;=\; \big(0,\,0,\,1\big)$$

linear unabhängig sind für alle $(x,y,z)\in U$.

Bei der Definition von Untermannigfaltigkeiten haben wir uns von Bemerkung 9.1 (b) leiten lassen. Wir haben die lokale Beschreibung von Untermannigfaltigkeiten als Nullstellenmengen zu ihrer Definition gewählt, da diese Bedingung für konkrete Beispiele leicht nachzuprüfen ist. Dass Untermannigfaltigkeiten tatsächlich "schöne" und "glatte" Mengen sind (die sich also zum

Beispiel lokal durch C^r-Funktionen parametrisieren lassen), sieht man dieser Definition nicht direkt an, sondern muss es beweisen. Die Parametrisierungen, mit denen wir arbeiten wollen, sollen insbesondere sogenannte *topologische Einbettungen* sein und *Immersionen*. Diese und weitere nützliche Begriffe stellen wir jetzt bereit.

Definition 9.9 Eine Abbildung $f\colon X \to Y$ zwischen topologischen Räumen heißt *topologische Einbettung*, wenn die Ko-Einschränkung

$$f|^{f(X)}\colon X \to f(X)$$

ein Homöomorphismus ist, d.h. f ist stetig, injektiv und die Umkehrabbildung $(f|^{f(S)})^{-1}\colon f(X) \to X$ ist stetig, wenn man das Bild $f(X)$ mit der von Y induzierten Topologie versieht.

Man nennt f dann auch einen *Homöomorphismus auf das Bild*.

Lemma 9.10 *Ist K ein kompakter topologischer Raum und Y ein Hausdorffscher topologischer Raum, so ist jede injektive stetige Abbildung $f\colon K \to Y$ eine topologische Einbettung.*

Beweis. Nach Ersetzen von Y durch $f(K)$ dürfen wir annehmen, dass f bijektiv ist. Die Umkehrabbildung $g := f^{-1}\colon Y \to K$ ist stetig, wenn wir zeigen können, dass das Urbild $g^{-1}(A)$ in Y abgeschlossen ist für jede abgeschlossene Teilmenge $A \subseteq K$. Da K kompakt ist, ist auch A kompakt, somit auch

$$g^{-1}(A) = f(A)$$

kompakt als stetiges Bild einer kompakten Menge. Da Y Hausdorffsch ist, ist die kompakte Teilmenge $f(A)$ in Y abgeschlossen. $\square$

Lemma 9.11 *Ist $f\colon X \to Y$ eine topologische Einbettung und $S \subseteq X$ eine Teilmenge, so ist auch $f|_S$ eine topologische Einbettung.*

Beweis. $f|_S$ ist injektiv, stetig und $(f|_S^{f(S)})^{-1} = (f|^{f(X)})^{-1}|_{f(S)}^S$ ist stetig. $\square$

Beispiel 9.12 Gegeben $\alpha \in]0, 2\pi[$ ist die Abbildung

$$\phi\colon [0, \alpha] \to \mathbb{S}_1, \quad t \mapsto (\cos t, \sin t)$$

stetig und injektiv, also eine topologische Einbettung, da $[0, \alpha]$ kompakt ist (nach Lemma 9.10). Nach Lemma 9.11 ist auch $\phi|_{]0,\alpha[}$ eine topologische Einbettung.

Definition 9.13 Eine C^r-Funktion $f\colon U \to \mathbb{R}^m$ auf einer offenen Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}^k$ heißt *C^r-Immersion* (oder kurz: "Immersion"), wenn an jeder Stelle $x \in U$ die Ableitung

$$f'(x)\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$$

injektiv ist, also die Jacobi-Matrix $J_f(x) \in \mathbb{R}^{n\times k}$ den vollen Rang k (und somit linear unabhängige Spalten) hat.

Beispiel 9.14 Die glatte Abbildung $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto (t^2, t^3)$ ist keine Immersion, denn es ist $J_f(t) = (2t, 3t^2)$, also $J_f(0) = (0, 0)$ vom Rang 0. Das Bild von f wird übrigens die *Neilsche Parabel* genannt.

Definition 9.15 Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Teilmenge. Eine C^r-Abbildung $\phi\colon W \to \mathbb{R}^n$ auf einer offenen Teilmenge $W \subseteq \mathbb{R}^k$ mit Bild $\phi(W) \subseteq M$ heißt *lokale C^r-Parametrisierung von M*, wenn gilt:

(a) ϕ ist eine C^r-Immersion;

(b) ϕ ist eine topologische Einbettung; und

(c) $\phi(W)$ ist relativ offen in M.

Kürzer spricht man auch von einer C^r-Parametrisierung von M. Gegeben $a \in M$ nennt man ϕ (wie zuvor) eine lokale C^r-Parametrisierung *um a*, wenn $a \in \phi(W)$. Ist $\phi(W) = M$, so nennt man ϕ eine *globale C^r-Parametrisierung* von M.

Bemerkung 9.16 Dass eine C^r-Abbildung $\phi\colon W \to M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine C^r-Submersion ist, lässt sich durch Berechnen der Jacobi-Matrizen $J_\phi(x)$ oft leicht nachrechnen. Um Bedingung (b) aus Definition **??** nachtzuprüfen, können die Lemmata 9.10 und 9.11 hilfreich sein. Ist bereits bekannt, dass $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine k-dimensionale C^r-Untermannigfaltigkeit ist, so folgen die Bedingungen (b) und (c) in Definition 9.15 übrigens aus (a) und brauchen nicht nachgeprüft zu werden (wie wir in Lemma 9.24 sehen werden).

Beispiel 9.17 (Parametrisierung eines Graphen). Ist $U \subseteq \mathbb{R}^k$ offen und $f = (f_1, \ldots, f_{n-k})\colon U \to \mathbb{R}^{n-k}$ eine C^r-Abbildung, so ist

$$\phi\colon U \to \mathbb{R}^n\,, \quad \phi(x) := \Big(x,\, f(x)\Big)$$

eine C^r-Immersion. Die der Ableitung $\phi'(x) \in L(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^n)$ entsprechende Jacobimatrix $J_\phi(x)$ ist nämlich von der Form

$$J_\phi(x) = \begin{pmatrix} \mathbf{1}_k \\ J_f(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ & & * & \end{pmatrix}$$

(mit der $(k \times k)$-Einheitsmatrix $\mathbf{1}_k$) und hat daher offenbar für jedes $x \in U$ den Rang k. Sei M der Graph von f. Dann ist offenbar $M = \phi(U)$ und ϕ injektiv, denn es gilt

$$\mathrm{pr}_1|_M \circ \phi = \mathrm{id}_U$$

mit $\mathrm{pr}_1 \colon \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k} \to \mathbb{R}^k$, $(x, y) \mapsto x$. Da pr_1 stetig ist, ist auch $(\phi|^M)^{-1} = \mathrm{pr}_1|_M$ stetig und somit ϕ eine topologische Einbettung. Also ist ϕ eine globale C^r-Parametrisierung des Graphen M.

Bemerkung 9.18 Es sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Teilmenge, $\phi \colon W \to \mathbb{R}^n$ eine lokale C^r-Parametrisierung für M und $\psi \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ein C^r-Diffeomorphismus (z.B. eine invertierbare lineare Abbildung). Dann ist $\psi \circ \phi$ eine lokale C^r-Parametrisierung für $\psi(M)$.

[Für alle $x \in W$ ist $(\psi \circ \phi)'(x) = \psi(\phi(x)) \circ \phi'(x)$ injektiv, also $\psi \circ \phi$ eine Immersion. Da $\psi|_M^{\psi(M)} \colon M \to \psi(M)$ ein Homöomorphismus ist, ist $\psi(\phi(W)) = \psi|_M^{\psi(M)}(\phi(W))$ offen in $\psi(M)$. Weiter ist $(\psi \circ \phi)|^{\psi(\phi(W))} = \psi|_{\phi(W)}^{\psi(\phi(W))} \circ \phi|^{\phi(W)}$ ein Homöomorphismus.]

Wir werden gelegentlich Koordinaten vertauschen, um die Situation zu vereinfachen und wenden also den vorigen Sachverhalt an, wenn $\psi(x) = Px$ mit einer Permutationsmatrix P.

Definition 9.19 Eine Matrix $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ heißt *Permutationsmatrix*, wenn eine Permutation $\pi \in S_n$ der Menge $\{1, \dots, n\}$ existiert derart, dass

$$Ae_j = e_{\pi(j)}$$

für alle $j \in \{1, \dots, n\}$.

Satz 9.20 (Charakterisierungen von Untermannigfaltigkeiten) *Für eine Teilmenge $M \subseteq \mathbb{R}^n$ sind äquivalent:*

(a) *M ist eine k-dimensionale C^r-Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$;*

(b) *M sieht (ggf. nach einer Permutation der Koordinaten) lokal aus wie ein Graph einer $\mathbb{R}^{n-k}$-wertigen C^r-Funktion von k Variablen;*[28]

(c) *M erlaubt um jeden Punkt $a \in M$ eine lokale C^r-Parametrisierung;*

(d) *M sieht lokal aus wie $\mathbb{R}^k \times \{0\}$ in $\mathbb{R}^n$, d.h. für jedes $a \in M$ existiert eine offene a-Umgebung $U \subseteq \mathbb{R}^n$, eine offene Teilmenge $V \subseteq \mathbb{R}^n$ und ein C^r-Diffeomorphismus $\psi\colon U \to V$ derart, dass*

$$\psi(U \cap M) = V \cap (\mathbb{R}^k \times \{0\}.$$

Das folgende Lemma hilft uns beim Beweis des Satzes.

Lemma 9.21 (Parametrisierungen zu Diffeomorphismen fortsetzen) *Es sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Teilmenge, $W \subseteq \mathbb{R}^k$ eine offene Teilmenge, $\phi\colon W \to \mathbb{R}^n$ eine lokale C^r-Parametrisierung von M und $\overline{x} \in W$. Dann existiert eine offene $\overline{x}$-Umgebung $W_0 \subseteq W$ und ein C^r-Diffeomorphismus $\psi\colon U \to V$ zwischen offenen Teilmengen $U, V \subseteq \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$ derart, dass gilt:*

(a) *$U \cap (\mathbb{R}^k \times \{0\}) = W_0 \times \{0\}$;*

(b) *$\psi(x, 0) = \phi(x)$ für alle $x \in W_0$; und*

(c) *$\psi(U) \cap M = \phi(W_0)$.*

Nach (a), (b) und (c) ist dann also

$$\psi(U) \cap M = \psi(U \cap (\mathbb{R}^k \times \{0\})). \tag{82}$$

Beweis. Da ϕ eine Immersion ist, hat die Jacobi-Matrix $J_\phi(\overline{x}) \in \mathbb{R}^{n \times k}$ den vollen Rang, ihre Spalten $\frac{\partial \phi}{\partial x_1}(\overline{x}), \ldots, \frac{\partial \phi}{\partial x_k}(\overline{x})$ sind also linear unabhängig. Mit dem Basisergänzungssatz finden wir $i_1 < i_2 < \cdots < i_{n-k}$ in $\{1, 2, \ldots, n\}$ derart, dass

$$\frac{\partial \phi}{\partial x_1}(\overline{x})\,,\ \ldots\,,\ \frac{\partial \phi}{\partial x_k}(\overline{x})\,,\ e_{i_1}\,,\ e_{i_2}\,,\ \ldots\,,\ e_{i_{n-k}} \tag{83}$$

[28]Damit meinen wir: Für alle $a \in M$ existiert eine Permutationsmatrix $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und eine offene $P(a)$-Umgebung $V \subseteq \mathbb{R}^n$ derart, dass $P(M) \cap V = \mathrm{graph}(g)$ für eine C^r-Funktion $g\colon W \to \mathbb{R}^{n-k}$ auf einer offenen Teilmenge $W \subseteq \mathbb{R}^k$.

eine Basis von $\mathbb{R}^n$ ist (wobei $e_1, \ldots, e_n$ die Standard-Basisvektoren von $\mathbb{R}^n$ sind). Dann ist

$$h\colon W \times \mathbb{R}^{n-k} \to \mathbb{R}^n\,, \quad (x, t_1, \ldots, t_{n-k}) \mapsto \phi(x) + \sum_{j=1}^{n-k} t_j e_{i_j}$$

eine C^r-Abbildung, deren Jacobi-Matrix in $\overline{x}$ die $n{\times}n$-Matrix mit den linear unabhängigen Spalten (83) ist und somit eine invertierbare Matrix. Nach dem Satz über die Umkehrfunktion finden wir nun eine offene Umgebung $P \subseteq W \times \mathbb{R}^{n-k}$ von $(\overline{x}, 0)$ derart, dass $h(P)$ offen in $\mathbb{R}^n$ und $h|_P\colon P \to h(P)$ ein C^r-Diffeomorphismus ist. Nach Verkleinern von P dürfen wir annehmen, dass $P = W_0 \times Y$ mit einer offenen Umgebung W_0 von $\overline{x}$ in W und einer offenen 0-Umgebung $Y \subseteq \mathbb{R}^{n-k}$. Da ϕ eine topologische Einbettung und $\phi(W)$ in M relativ offen ist, ist $\phi(W_0)$ relativ offen in M. Es gibt also eine offene Teilmenge $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ derart, dass

$$\phi(W_0) \;=\; M \cap Q \tag{84}$$

(wobei die linke Seite auch gleich $h(W_0 \times \{0\})$ ist). Nach Ersetzen von Q durch $Q \cap h(P)$ dürfen wir annehmen, dass $Q \subseteq h(P)$. Setzen wir $U := (h|_P)^{-1}(Q)$, so ist also

$$\psi := h|_U^Q\colon U \to Q$$

ein C^r-Diffeomorphismus. Für $x \in W_0$ ist $(x, 0) \in P$ und

$$h(x, 0) = \phi(x) \in \phi(W_0) \subseteq Q,$$

also $(x, 0) \in U$. Somit gilt

$$W_0 \times \{0\} \subseteq U \cap (\mathbb{R}^k \times \{0\})$$

und wir haben sogar Gleichheit der zwei Mengen (und somit (a)), denn für $(x, 0) \in U \cap (\mathbb{R}^k \times \{0\})$ folgt aus

$$\phi(x) = \psi(x, 0) \in M \cap Q = \phi(W_0),$$

dass $x \in W_0$. Per Definition von h (also auch ψ) gilt (b). Da $\psi(U) = Q$, folgt (c) aus (84). $\square$

Bemerkung 9.22 In der Situation von Lemma 9.21 sei $Q \subseteq \psi(U)$ eine offene $\phi(\overline{x})$-Umgebung. Setzen wir $W_1 := \phi^{-1}(Q)$ und $U_1 := \psi^{-1}(Q)$, so gelten die Schlussfolgerungen des Lemmas auch für $\phi|_{W_1}$ und $\psi|_{U_1} \colon U_1 \to Q$ an Stelle von $\phi|_{W_0}$ und ψ.

[(b) ist klar und weil $\phi(W_1) = M \cap Q$, folgt (c). Für $x \in W_1$ ist $\psi(x, 0) = \phi(x) \in M \cap Q \subseteq Q$, also $(x, y) \in U_1$ und somit

$$W_1 \times \{0\} \subseteq U_1 \cap (\mathbb{R}^k \times \{0\}).$$

Die zwei Mengen sind gleich, denn ist $(x, 0) \in U_1 \cap (\mathbb{R}^k \times \{0\})$, so ist $\phi(x) = \psi(x, 0) \in M \cap Q = \phi(W_1)$, also $x \in W_1$.]

Beweis von Satz 9.20. (a)$\Rightarrow$(b): Ist M eine C^r-Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$ und $a \in M$, so finden wir eine offene a-Umgebung $U \subseteq \mathbb{R}^n$ und eine C^r-Immersion $f \colon U \to \mathbb{R}^{n-k}$ derart, dass

$$M \cap U = \{x \in U \colon f(x) = 0\}.$$

Da f eine Submersion ist, hat die Jacobi-Matrix $J_f(a) \in \mathbb{R}^{(n-k) \times n}$ den vollen Rang, es gibt also

$$i_1 < \ldots < i_j \quad \text{in } \{1, \ldots, n\}$$

derart, dass die Spaltenvektoren

$$\frac{\partial f}{\partial x_{i_1}}(a), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_{i_{n-k}}}(a) \tag{85}$$

in $\mathbb{R}^{n-k}$ linear unabhängig sind. Es sei π eine Permutation von $\{1, \ldots n\}$ derart, dass

$$\pi(k + j) = i_j \quad \text{für alle } j \in \{1, \ldots, n - k\},$$

und $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ die zugehörige Permutationsmatrix. Dann ist $P^{-1}U$ eine offene Umgebung von $P^{-1}a$ in $\mathbb{R}^n$ und

$$h \colon P^{-1}U \to \mathbb{R}^{n-k}, \quad x \mapsto f(Px)$$

eine C^r-Submersion derart, dass

$$J_h(P^{-1}a) = J_f(a)P. \tag{86}$$

Per Wahl von P sind die letzen $n-k$ Spalten dieser Matrix genau die Vektoren aus (85) und somit linear unabhängig; sie bilden eine Basis von $\mathbb{R}^{n-k}$ und ergeben hintereinander gestellt eine invertierbare $(n-k) \times (n-k)$-Matrix. Nach dem Satz über implizite Funktionen gibt es also eine offene $P^{-1}a$-Umgebung $V \subseteq P^{-1}U$ derart, dass

$$\{x \in V \colon h(x) = 0\} = \operatorname{graph}(g)$$

für eine C^r-Funktion $g\colon W \to \mathbb{R}^{n-k}$ auf einer offenen Teilmenge $W \subseteq \mathbb{R}^k$. Hierbei ist $f(Px) = h(x) = 0$ genau dann, wenn $Px \in M$, also $x \in P^{-1}M$. Also ist

$$V \cap P^{-1}M = \operatorname{graph}(g).$$

(b)⇒(c): Gegeben $a \in M$ sei $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine Permutationsmatrix derart, dass

$$V \cap PM = \operatorname{graph}(g)$$

für eine offene Pa-Umgebung $V \subseteq \mathbb{R}^n$ und eine C^r-Funktion $g\colon W \to \mathbb{R}^{n-k}$ auf einer offenen Teilmenge $W \subseteq \mathbb{R}^k$. Nach Beispiel 9.17 ist dann

$$\phi\colon W \to \mathbb{R}^n,\;\; x \mapsto (x, g(x))$$

eine C^r-Parametrisierung von $\operatorname{graph}(g) = PM \cap V$ um Pa und somit auch für PM. Nach Bemerkung 9.18 ist somit $W \to \mathbb{R}^n$, $x \mapsto P^{-1}\phi(x)$ eine C^r-Parametrisierung von M um a.

(c)⇒(d): Gegeben $a \in M$ sei $\phi\colon W \to \mathbb{R}^n$ eine lokale C^r-Parametrisierung von M um a, mit einer offenen Teilmenge $W \subseteq \mathbb{R}^k$. Es gibt ein $\overline{x} \in W$ mit $\phi(\overline{x} = a$. Seien nun $W_0 \subseteq W$ und $\psi\colon U \to V$ wie in Lemma 9.21; insb. gilt nach (82) also

$$\psi(U \cap (\mathbb{R}^k \times \{0\})) = V \cap M. \tag{87}$$

Dann ist $\psi^{-1}\colon V \to U$ ein C^r-Diffeomorphismus derart, dass $a = \phi(\overline{x}) = \psi(\overline{x}, 0) \in V$; Anwenden von ψ^{-1} auf (87) zeigt, dass zudem

$$\psi^{-1}(V \cap M) = U \cap (\mathbb{R}^k \times \{0\}).$$

(d)⇒(a): Gegeben $a \in M$ sei $\psi\colon U \to V$ ein C^r-Diffeomorphismus zwischen offenen Teilmengen $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ derart, dass $a \in U$ und

$$\psi(U \cap M) = V \cap (\mathbb{R}^k \times \{0\}).$$

Seien $\psi_1, \ldots, \psi_n\colon U \to \mathbb{R}$ die Komponenten von ψ, betrachtet als Abbildung nach $\mathbb{R}^n$. Setzen wir $f := (\psi_{k+1}, \ldots, \psi_n)\colon U \to \mathbb{R}^{n-k}$, so ist nach dem Vorigen

$$\begin{aligned} U \cap M &= \psi^{-1}(V \cap (\mathbb{R}^k \times \{0\})) = \{x \in U \colon \psi(x) \in \mathbb{R}^k \times \{0\}\} \\ &= \{x \in U \colon f(x) = 0\}. \end{aligned}$$

Da ψ ein Diffeomorphismus ist, ist $J_\psi(x)$ für jedes $x \in U$ eine invertierbare Matrix, also die Zeilen von $J_\psi(x)$ linear unabhängig. Nun sind die Zeilen von $J_f(x)$ die $n-k$ letzen Zeilen von $J_\psi(x)$, also linear unabhängig, somit $J_f(x)$ von vollem Rang $n-k$. Also ist f eine Submersion. $\square$

Das folgende Hilfsresultat ist nützlich:

Lemma 9.23 *Es sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine k-dimensionale C^r-Untermannigfaltigkeit und $f\colon Q \to \mathbb{R}^n$ eine C^r-Abbildung auf einer offenen Teilmenge $Q \subseteq \mathbb{R}^\ell$, mit $f(Q) \subseteq M$. Dann ist für jede lokale C^r-Parametrisierung $\phi\colon W \to M$ die Menge $f^{-1}(\phi(W))$ offen in Q und*

$$h\colon f^{-1}(\phi(W)) \;\to\; \mathbb{R}^k\,, \qquad x \mapsto \phi^{-1}(f(x))$$

eine C^r-Abbildung. Ist f eine Immersion, so auch h.

Beweis. Da $f|^M\colon Q \to M$ stetig ist und $\phi(W)$ offen in M, ist $f^{-1}(\phi(W)) = (f|^M)^{-1}(\phi(W))$ eine offene Teilmenge von Q. Gegeben $z \in f^{-1}(\phi(W))$ wenden wir Lemma 9.21 auf ϕ und $\overline{x} := f(z)$ an; es seien $W_0 \subseteq W$ und $\psi\colon U \to V$ wie im Lemma. Für x in der offenen Teilmenge $f^{-1}(\phi(W_0))$ von Q ist

$$\psi^{-1}(f(x)) \;=\; (\phi^{-1}(f(x)),0) \;=\; (h(x),0) \tag{88}$$

eine $\mathbb{R}^n$-wertige C^r-Funktion von x, also auch $h(x)$. Ist f eine Immersion, so ist $(\psi^{-1}\circ f)'(x) = (\psi^{-1})'(f(x)) \circ f'(x)$ eine injektive lineare Abbildung, deren Bild wegen (88) in $\mathbb{R}^k \times \{0\}$ enthalten ist. Folglich ist auch $h'(x) = \mathrm{pr}_1 \circ (\psi^{-1})'(f(x)) \circ f'(x)$ injektiv und somit h eine Immersion. $\square$

Lemma 9.24 *Ist $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine k-dimensionale C^r-Untermannigfaltigkeit, $W \subseteq \mathbb{R}^k$ offen und $\phi\colon W \to M$ eine injektive C^r-Immersion, so ist ϕ eine lokale Parametrisierung für M.*

Beweis. Für den Beweis braucht man nur zu zeigen, dass ϕ eine "offene" Abbildung ist, also $\phi(Q)$ offen in M (mit der von $\mathbb{R}^n$ induzierten Topologie) ist für jede offene Teilmenge $Q \subseteq W$. Dann ist nämlich (da man $Q := W$ wählen kann) $\phi(W)$ offen in M (somit die dritte Bedingung in der Definition einer lokalen C^r-Parametrisierung erfüllt); zudem ist $f := \phi^{-1}\colon \phi(W) \to W$ stetig, da $f^{-1}(Q) = \phi(Q)$ offen in M ist für jede offene Teilmenge $Q \subseteq W$ (und somit ist auch die zweite Bedingung erfüllt, ϕ ist eine topologische

Einbettung).

Können wir zeigen, dass jeder Punkt $a \in W$ eine offene Umgebung $W_a \subseteq W$ besitzt derart, dass $\phi|_{W_a}$ eine offene Abbildung ist, so ist auch ϕ eine offene Abbildung, denn für jede offene Teilmenge $Q \subseteq W$ ist wegen $Q = Q \cap W = Q \cap \bigcup_{a \in W} W_a = \bigcup_{a \in W}(Q \cap W_a)$ dann

$$\phi(Q) \;=\; \phi\left(\bigcup_{a \in W}(Q \cap W_a)\right) \;=\; \bigcup_{a \in W} \phi(Q \cap W_a) \;=\; \bigcup_{a \in W} \phi|_{W_a}(Q \cap W_a)$$

offen in M als Vereinigung offener Mengen.

Sei $a \in W$ und $\psi \colon V \to \mathbb{R}^n$ eine lokale C^r-Parametrisierung von M mit $\phi(a) \in \psi(V)$. Nach Lemma 9.23 ist dann

$$h : \phi^{-1}(\psi(V)) \;\to\; V \subseteq \mathbb{R}^k\,, \quad x \mapsto \psi^{-1}(\phi(x))$$

eine C^r-Immersion, wobei der Definitionsbereich von h eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^k$ ist. Als injektive lineare Selbstabbildung von $\mathbb{R}^k$ ist $h'(a)$ invertierbar. Der Satz über die Umkehrfunktion liefert daher eine offene Umgebung $P \subseteq \phi^{-1}(\psi(V))$ von a derart, dass $h(P) \subseteq V$ offen ist und $h|_P : P \to h(P)$ ein Diffeomorphismus. Folglich ist $h|_P$ eine offene Abbildung und somit ist auch $\phi|_P = \psi \circ h|_P : P \to M$ eine offene Abbildung als Komposition offener Abbildungen. Nun setze $W_a := P$. □

Beispiel 9.25 Schließlich sehen wir uns noch eine Parametrisierung der zweidimensionalen Sphäre (durch Polarkoordinaten) an. Wir betrachten die glatte Abbildung

$$P : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3\,, \quad P(\theta, \phi) \;:=\; \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\phi \\ \sin\theta\sin\phi \\ \cos\theta \end{pmatrix}$$

mit der Jacobi-Matrix

$$J_P(\theta, \phi) \;=\; \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\phi & -\sin\theta\sin\phi \\ \cos\theta\sin\phi & \sin\theta\cos\phi \\ -\sin\theta & 0 \end{pmatrix}.$$

Diese Matrix hat genau dann den Rang 2, wenn $\sin\theta \neq 0$. Die Einschränkung von P auf die offene Menge $]0,\pi[\,\times\mathbb{R}$ ist also eine C^∞-Immersion, und

$$P\Big(\,]0,\pi[\,\times\mathbb{R}\Big) \;=\; \Big\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2=1,\;\; |z|\neq 1\Big\}$$

ist die Einheitssphäre ohne Nord- und Südpol. Die Einschränkung von P zu einer Abbildung

$$]0,\pi[\,\times\,]0,2\pi[\,\to\mathbb{R}^3$$

ist eine C^∞-Immersion mit Bild in der glatten Mannigfaltigkeit $\mathbb{S}_2$ und injektiv; die Abbildung ist nach Lemma 9.24 also eine C^∞-Parametrisierung von $\mathbb{S}_2$.

Der Wechsel zwischen zwei C^r-Parametrisierungen wird durch einen C^r-Diffeomorphismus beschrieben.

Satz 9.26 (Umparametrisieren). *Es sei $M\subseteq\mathbb{R}^n$ eine k-dimensionale C^r-Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$. Sind $\phi_1: W_1\to\mathbb{R}^n$ und $\phi_2: W_2\to\mathbb{R}^n$ lokale C^r-Parametrisierungen für M, so ist $V:=\phi_1(W_1)\cap\phi_2(W_2)$ offen in M, für $j\in\{1,2\}$ ist $\phi_j^{-1}(V)$ eine offene Teilmenge von W_j, und die Abbildung*

$$\phi_1^{-1}(V)\to\phi_2^{-1}(V),\quad x\mapsto\phi_2^{-1}(\phi_1(x)) \tag{89}$$

ist ein C^r-Diffeomorphismus.

Beweis. Da die Mengen $\phi_1(W_1)$ und $\phi_2(W_2)$ in M offen sind, ist auch die Schnittmenge V offen. Nach Lemma 9.23 haben die Abbildung in (89) und ihre Umkehrabbildung einen offenen Definitionsbeeich und sind C^r. $\square$

10 Integration über Untermannigfaltigkeiten

10.1 Das Oberflächenmaß auf einer Untermannigfaltigkeit mit einer globalen Parametrisierung

Wir wollen nun das Integral von Funktionen über k-dimensionale Untermannigfaltigkeiten M von $\mathbb{R}^n$ definieren. Dabei nehmen wir zunächst an, dass M durch eine einzige Parametrisierung beschrieben werden kann. Sobald wir diesen Spezialfall gründlich verstanden haben, wenden wir uns dem (deutlich aufwendigeren) allgemeinen Fall zu.

10.1 Motivation, Teil I. Zur Motivation betrachten wir zunächst wieder eine lineare Version. Es sei $k < n$, $A \in \mathbb{R}^{n\times k}$ eine $n \times k$-Matrix vom Rang k und $W := [0,1]^k$ der k-dimensionale Einheitswürfel. Dann ist das n-dimensionale Volumen von $AW \subseteq \mathbb{R}^n$ gleich Null nach Beispiel 7.5 (und wenig interessant). Wir wollen ein "k-dimensionales Volumen" von AW definieren. Dieses soll sich nicht ändern, wenn eine orthogonale Matrix (Drehmatrix) $T \in O_n(\mathbb{R})$ auf AW angewandt wird. Wie aus der linearen Algebra bekannt ist, kann T so gewählt werden, dass [29] $TA\,\mathbb{R}^k = \mathbb{R}^k \times \{0\} \subseteq \mathbb{R}^n$. Die Projektion

$$\mathrm{pr}_1 \colon \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k} \to \mathbb{R}^k\,, \quad (x,y) \mapsto x$$

(die wir im folgenden durch die $k \times n$-Matrix P beschreiben) bildet $\mathbb{R}^k \times \{0\}$ bijektiv (und isometrisch) auf $\mathbb{R}^k$ ab. Es ist plausibel, dass TAW und $PTAW$ daher das gleiche k-dimensionale Volumen besitzen sollen. Nun beschreibt aber PTA eine bijektive lineare Abbildung von $\mathbb{R}^k$ nach $\mathbb{R}^k$ und somit ist

$$\lambda_k(PTAW) \;=\; |\det(PTA)|\,\lambda_k(W) \;=\; |\det(PTA)|$$

(vgl. Aufgabe H33). Diese Formel ist noch nicht sehr hilfreich, da sie die orthogonale Matrix T enthält (die wir wählen mussten). Nun ist aber [30]

$$\begin{aligned} |\det(PTA)|^2 &= \det(A^tT^tP^t)\det(PTA) \;=\; \det(A^tT^tP^tPTA) \\ &= \det(A^tT^tTA) \;=\; \det(A^tA)\,. \end{aligned} \tag{90}$$

[29] Dies geht wie folgt: Wir wählen eine Orthonormalbasis $v_1,\ldots,v_k$ von $A\mathbb{R}^k$, ergänzen diese zu einer Orthonormalbasis $v_1,\ldots,v_n$ von $\mathbb{R}^n$ und definieren dann T als die durch $Tv_j := e_j$ festgelegte Matrix, wobei $e_1,\ldots,e_n$ die Standard-Basisvektoren von $\mathbb{R}^n$ sind, d.h. $T := (v_1,\ldots,v_n)^{-1}$.

[30] Man beachte: P^tP beschreibt die Orthogonalprojektion $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ mit Bild $\mathbb{R}^k \times \{0\} \subseteq \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k} = \mathbb{R}^n$; wegen $TA\,\mathbb{R}^k = \mathbb{R}^k \times \{0\}$ ist somit $P^tPTA = TA$.

Damit haben wir eine brauchbare Formel für das k-dimensionale Volumen von AW:

$$\mathrm{Vol}_k(AW) \;=\; \sqrt{\det(A^tA)}\,.$$

Beachten Sie, dass $\det(A^tA) \geq 0$ nach (90). [31]

Motivation, Teil II. Nun sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit mit einer globalen Parametrisierung $\phi : \mathbb{R}^k \supseteq U \to M$. Wir betrachten einen Punkt $x_0 \in U$ und einen kleinen Würfel $W := x_0 + [0, \varepsilon]^k \subseteq U$. Da ϕ stetig differenzierbar ist, können wir ϕ um x_0 linearisieren: Es ist

$$\phi(x) \;=\; \phi(x_0) + J_\phi(x_0)(x - x_0) \;+\; R(x) \qquad \text{für } x \in U,$$

mit

$$\lim_{x \to x_0} \frac{R(x)}{\|x - x_0\|_2} = 0.$$

Das Flächenstück $\phi(W)$ sieht also etwa aus wie $\phi(x_0) + J_\phi(x_0)([0, \varepsilon]^n)$, wobei letztere Menge aufgrund unserer Vorüberlegungen zum linearen Fall das k-dimensionale Volumen $\sqrt{\det(J_\phi(x_0)^t J_\phi(x_0))}\,\lambda_k([0, \varepsilon]^k)$ haben sollte.

Es ist plausibel, dass man (wie beim 1-dimensionalen Riemann-Integral) eine Approximation für das k-dimensionale Volumen von M erhält, indem man U in kleine Würfel aufteilt und die eben berechneten Volumina der linearisierten Flächenstücke aufaddiert. Da für feinere und feinere Unterteilungen die Approximation durch die Linearisierung immer besser wird, erwartet man, das korrekte Volumen zu erhalten, wenn man die Summation durch ein Integral ersetzt:

$$\mathrm{Vol}_k(M) \;=\; \int_U \sqrt{\det(J_\phi(x)^t J_\phi(x))}\; d\lambda_k(x)\,.$$

Nach diesen Vorüberlegungen ist der Weg zur Definition des k-dimensionalen Volumens von Untermannigfaltigkeiten mit globaler Parametrisierung vorgezeichnet.

Im Rest des Kapitels halten wir $r \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ fest; Untermannigfaltigkeiten meinen C^r-Untermannigfaltigkeiten, Immersionen meinen C^r-Immersionen.

Definition 10.2 Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^k$ offen, $\phi \colon U \to \mathbb{R}^n$ eine Immersion und $J_\phi(x)$ ihre Jacobi-Matrix im Punkt $x \in U$. Für jedes $x \in U$ ist

$$G_\phi(x) \;:=\; J_\phi(x)^t J_\phi(x)$$

[31] Alternativ: Die Matrix A^tA ist positiv semidefinit und hat daher eine nichtnegative Determinante.

eine $k\times k$-Matrix; die so erhaltene Matrix-wertige Funktion $G_\phi\colon U\to\mathbb{R}^{k\times k}$ heißt der *Maßtensor* von ϕ. Die Funktion

$$g_\phi\colon U\to\mathbb{R}\,,\quad g_\phi(x)\;:=\;\det G_\phi(x)$$

wird die *Gramsche Determinante* von ϕ genannt.

Bemerkung 10.3 Da die Einträge der Matrix $J_\phi(x)$ stetig von x abhängen, sind G_ϕ und g_ϕ stetige Funktionen.

Bemerkung 10.4 Offensichtlich ist $G_\phi(x)$ eine symmetrische Matrix. Wir zeigen nun, dass $G_\phi(x)$ sogar positiv definit ist und somit $g_\phi(x)>0$ für alle $x\in U$.

Beweis: Gegeben $0\neq v\in\mathbb{R}^k$ ist

$$\begin{aligned} v^tG_\phi(x)v &= v^tJ_\phi(x)^tJ_\phi(x)v \;=\; (J_\phi(x)v)^tJ_\phi(x)v \;=\; (\phi'(x).v)^t\phi'(x).v\\ &= \|\phi'(x).v\|_2^2 \;>\; 0\,, \end{aligned}$$

denn $\phi'(x)$ ist injektiv (da ϕ eine Immersion ist) und somit $\phi'(x).v\neq 0$.

Bemerkung 10.5 Für Rechnungen ist oft zeitsparend, den Maßtensor nicht als Matrixprodukt zu berechnen, sondern mithilfe von Skalarprodukten: Es ist

$$G_\phi(x)\;=\;J_\phi(x)^tJ_\phi(x)\;=\;\left(\left\langle\frac{\partial\phi}{\partial x_i}(x),\;\frac{\partial\phi}{\partial x_j}(x)\right\rangle\right)_{i,j=1}^k\,,\tag{91}$$

wobei $\frac{\partial\phi}{\partial x_i}(x)=\left(\frac{\partial\phi_1}{\partial x_i}(x),\ldots,\frac{\partial\phi_n}{\partial x_i}(x)\right)$. Da die Matrix symmetrisch ist, braucht man übrigens nicht alle Einträge einzeln auszurechnen, was zusätzlich Arbeit spart!

Definition 10.6 Es sei $M\subseteq\mathbb{R}^n$ eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit mit einer globalen Parametrisierung, d.h. es existiere eine offene Teilmenge $U\subseteq\mathbb{R}^k$ und eine C^r-Parametrisierung $\phi\colon U\to M$ mit Bild $\phi(U)=M$. Wir definieren das *Oberflächenmaß* $S_M\colon\mathcal{B}(M)\to[0,\infty[$ *auf* M als das Bildmaß

$$S_M\;:=\;(\phi|^M)_*\Big(\sqrt{g_\phi(x)}\,d\lambda_k|_U(x)\Big)$$

des Maßes $\sqrt{g_\phi(x)}\,d\lambda|_U(x)$ auf $(U,\mathcal{B}(U))$ mit Dichte $\sqrt{g_\phi}$ bzgl. $\lambda_k|_U$ unter der (stetigen und daher) messbaren Abbildung $\phi|^M\colon(U,\mathcal{B}(U))\to(M,\mathcal{B}(M))$.

Bemerkung 10.7 Das Oberflächenmaß S_M ist also ein Maß auf dem Messraum $(M, \mathcal{B}(M))$, wobei $\mathcal{B}(M)$ die Borelsche σ-Algebra von M ist (hierbei ist M mit der von $\mathbb{R}^n$ induzierten Metrik versehen). Die in der Definition gegebene Beschreibung von S_M macht klar, dass dies wirklich ein Maß ist. In einer expliziten Formel bedeutet die Definition, dass

$$S_M(E) \;=\; \int_{\phi^{-1}(E)} \sqrt{g_\phi(x)}\, d\lambda_k(x) \qquad \text{für alle } E \in \mathcal{B}(M). \tag{92}$$

Insbesondere ist also $S_M(M)$ durch die im zweiten Teil der Motivation **10.1** plausibel gemachten Formel (für $\mathrm{Vol}_k(M)$) gegeben.

In der vorigen Situation nennt man $S_M(E)$ das *k-dimensionale Volumen* der Borelmenge $E \subseteq M$. Übrigens steht das "S" in S_M für das englische Wort "surface."

Hinweis: Das suggestive Symbol "Vol_k", das uns für die Zwecke der Motivation gute Dienste leistete, wird im Folgenden nicht mehr benutzt.

Beispiel 10.8 (Oberflächenmaß auf einem Funktionsgraphen). Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^k$ offen und $h : U \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Aus Satz 9.20(b) wissen wir, dass dann der Graph

$$M \;:=\; \big\{(x, h(x)) \colon x \in U\big\}$$

eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^{k+1}$ ist und $\phi : U \to M$, $\phi(x) := (x, h(x))$ eine globale Parametrisierung. Wir zeigen nun:

Die Gramsche Determinante von ϕ ist

$$g_\phi(x) \;=\; 1 + \|\operatorname{grad} h(x)\|_2^2\,. \tag{93}$$

Somit ist das Oberflächenmaß auf dem Graphen M gegeben durch die Formel

$$S_M(E) \;=\; \int_{\phi^{-1}(E)} \sqrt{1 + \|\operatorname{grad} h(x)\|_2^2}\; d\lambda_k(x) \qquad \text{für } E \in \mathcal{B}(M),$$

wobei $\phi^{-1}(E) = \mathrm{pr}_1(E)$ mit $\mathrm{pr}_1 : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^k$, $(x, y) \mapsto x$. Insbesondere ergibt sich für das k-dimensionale Volumen des Graphen M

$$S_M(M) \;=\; \int_U \sqrt{1 + \|\operatorname{grad} h(x)\|_2^2}\; d\lambda_k(x)\,. \tag{94}$$

Beweis: Wir haben

$$J_\phi(x) \;=\; \begin{pmatrix} \mathbf{1}_k \\ J_h(x) \end{pmatrix}$$

und

$$G_\phi(x) \;=\; \Big(\mathbf{1}_k \;\; J_h(x)^t\Big) \begin{pmatrix} \mathbf{1}_k \\ \\ J_h(x) \end{pmatrix} \;=\; \mathbf{1}_k + J_h(x)^t J_h(x)\,,$$

wobei $\mathbf{1}_k$ die $k \times k$-Einheitsmatrix ist.

1. Fall: Ist $h'(x) = 0$, so ist $G_\phi(x) = \mathbf{1}_k$ und somit $g_\phi(x) = \det G_\phi(x) = \det \mathbf{1}_k = 1 = 1 + \|\operatorname{grad} h(x)\|_2^2$; also gilt (93).

2. Fall: Sei nun $h'(x) \neq 0$. Wir bestimmen zunächst die Eigenwerte der symmetrischen Matrix $G_\phi(x)$. Ist $v \in \ker h'(x)$, so ist $J_x(h)v = 0$ und somit $G_\phi(x)v = v$. Alle Vektoren $\neq 0$ aus dem $(k-1)$-dimensionalen Kern von $h'(x)\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ sind also Eigenvektoren von $G_\phi(x)$ zum Eigenwert 1. Außerdem ist für den Vektor $\operatorname{grad} h(x) \in \mathbb{R}^k$, den wir uns als Spaltenvektor denken,

$$\begin{aligned} G_\phi(x)\operatorname{grad} h(x) \;&=\; \operatorname{grad} h(x) - \operatorname{grad} h(x)\big(\operatorname{grad} h(x)\big)^t \operatorname{grad} h(x) \\ &=\; \Big(1 + \|\operatorname{grad} h(x)\|_2^2\Big)\operatorname{grad} h(x)\,, \end{aligned}$$

so dass $\operatorname{grad} h(x)$ Eigenvektor von $G_\phi(x)$ zum Eigenwert $1+\|\operatorname{grad} h(x)\|_2^2$ ist. Da $\operatorname{grad} h(x)$ senkrecht auf $\ker h'(x)$ steht,[32] haben wir damit k paarweise orthogonale Eigenvektoren gefunden. Weil die Determinante von $G_\phi(x)$ das Produkt der Eigenwerte der Matrix $G_\phi(x)$ ist, erhalten wir (93).

Beispiel 10.9 Mit den vorigen Formeln kann man ganz konkret Flächeninhalte ausrechnen. Betrachten wir z.B. die Funktion

$$h\colon]-1,1[^2 \to \mathbb{R}\,, \quad h(x,y) \;:=\; \sqrt{1-x^2}\,,$$

so ist der Graph $M := \{(x,y,h(x,y)) : (x,y) \in\,]-1,1[^2\}$ ein halber Zylinder(mantel), der sich über dem Quadrat $]-1,1[^2$ wölbt. Was ist der Flächeninhalt von M? Da

$$\operatorname{grad} h(x,y) \;=\; \Big(-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}},\; 0\Big)$$

[32] Es ist ja $h'(x).y = \langle \operatorname{grad} h(x), y\rangle$ für $y \in \mathbb{R}^k$.

mit $1+\|\operatorname{grad} h(x,y)\|_2^2 = \frac{1}{1-x^2}$, erhalten wir mit Formel (94) den Flächeninhalt

$$
\begin{aligned}
S_M(M) &= \int_{]-1,1[^2} \sqrt{1+\|\operatorname{grad} h(x,y)\|_2^2}\; d\lambda_2(x,y) \\
&= \int_{]-1,1[^2} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, d\lambda_2(x,y) \;=\; \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx\, dy \\
&= \int_{-1}^{1}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} 1\, du\, dy \;=\; 2\pi\,,
\end{aligned}
$$

wobei der Satz von Fubini benutzt wurde und anschließend die Substitution $x = \sin u$ zur Berechnung des inneren Integrals.

Bisher haben wir die Frage ignoriert, ob das Oberflächenmaß S_M wohldefiniert ist, unabhängig von der Wahl der globalen Parametrisierung ϕ. Glücklicherweise gibt es keine Probleme:

Lemma 10.10 *Es sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit, $U, V \subseteq \mathbb{R}^k$ offene Mengen und $\phi\colon U \to M$, $\psi\colon V \to M$ globale Parametrisierungen. Dann gilt*

$$
\phi_*\Big(\sqrt{g_\phi(x)}\; d\lambda_k|_U(x)\Big) \;=\; \psi_*\Big(\sqrt{g_\psi(x)}\; d\lambda_k|_V(x)\Big)\,,
$$

d.h. S_M ist unabhängig von der Wahl der globalen Parametrisierung.

Beweis. Nach Satz 9.26 ist $\tau := \phi^{-1}\circ\psi\colon V \to U$ ein Diffeomorphismus. Da $\psi = \phi\circ\tau$, gilt nach der Kettenregel $J_\psi(x) = J_\phi(\tau(x))\circ J_\tau(x)$ für alle $x \in V$. Daraus folgt

$$
G_\psi(x) \;=\; J_\psi(x)^t J_\psi(x) \;=\; J_\tau(x)^t J_\phi(\tau(x))^t J_\phi(\tau(x)) J_\tau(x)
$$

und somit $g_\psi(x) = \det G_\psi(x) = (\det J_\tau(x)^2\, g_\phi(\tau(x)) = (\det \tau'(x))^2\, g_\phi(\tau(x))$. Mit der Transformationsformel erhalten wir für alle $E \in \mathcal{B}(M)$ nun wie gewünscht

$$
\begin{aligned}
\int_{\psi^{-1}(E)} \sqrt{g_\psi(x)}\; d\lambda_k(x) &= \int_V \underbrace{\mathbf{1}^V_{\psi^{-1}(E)}(x)}_{=\mathbf{1}^U_{\phi^{-1}(E)}(\tau(x))}\; \sqrt{g_\phi(\tau(x))}\,|\det\tau'(x)|\; d\lambda_k(x) \\
&= \int_U \mathbf{1}^U_{\phi^{-1}(E)}(x)\,\sqrt{g_\phi(x)}\; d\lambda_k(x) \\
&= \int_{\phi^{-1}(E)} \sqrt{g_\phi(x)}\; d\lambda_k(x)\,.
\end{aligned}
$$

$\square$

Integrale bzgl. des Oberflächenmaßes kann man explizit wie folgt ausrechnen:

Lemma 10.11 *Es sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit mit einer globalen Parametrisierung $\phi\colon \mathbb{R}^k \supseteq U \to M$. Eine messbare Funktion $f\colon (M, \mathcal{B}(M)) \to (\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$ ist genau dann bzgl. S_M über M integrierbar, wenn die Funktion*

$$U \to \overline{\mathbb{R}}, \quad x \mapsto f\big(\phi(x)\big)\sqrt{g_\phi(x)}$$

bzgl. des Lebesgue-Borel-Maßes λ_k über U integrierbar ist. In diesem Fall gilt

$$\int_M f\, dS_M \;=\; \int_U f\big(\phi(x)\big)\,\sqrt{g_\phi(x)}\;d\lambda_k(x)\,. \tag{95}$$

Die vorige Formel gilt auch für beliebige messbare Funktionen $f\colon M \to [0,\infty[$.

Beweis. Aufgrund der Allgemeinen Transformationsformel (Satz 5.3) und dem Satz über Integration bzgl. Maßen mit Dichten (Satz 5.1) ist jedes der folgenden Integrale genau dann definiert, wenn die anderen es sind, und die Integrale stimmen in diesem Falle überein:

$$\begin{aligned}\int_M f\, dS_M \;&\overset{\text{def}}{=}\; \int_M f\, d\phi_*\Big(\sqrt{g_\phi(x)}\; d\lambda_k|_U(x)\Big) \;=\; \int_U f\big(\phi(x)\big)\,\Big(\sqrt{g_\phi(x)}\; d\lambda_k(x)\Big)\\ &=\; \int_U f\big(\phi(x)\big)\,\sqrt{g_\phi(x)}\; d\lambda_k(x)\,.\end{aligned}$$

$\square$

Beispiel 10.12 Wir betrachten den Fall $k = 1$. Sei $U = \,]a,b[\, \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ eine Immersion, die eine Einbettung ist. Nach Satz 9.20(c) ist das Bild $M := \phi(U)$ eine 1-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$ mit globaler Parametrisierung ϕ. Aus

$$G_\phi(x) \;=\; J_\phi(x)^t J_\phi(x) \;=\; \langle \phi'(x), \phi'(x)\rangle \;=\; \|\phi'(x)\|_2^2$$

erhalten wir $g_\phi(x) = \|\phi'(x)\|_2^2$ und damit

$$S_M(M) \;=\; \int_U \|\phi'(x)\|_2\; d\lambda_1(x) \;=\; \int_a^b \|\phi'(x)\|_2\; dx\,.$$

Das ist die Formel, die in der Analysis 2 für die Länge der stetig differenzierbaren Kurve ϕ gefunden wurde. Das Integral einer integrierbaren (oder nicht-negativen messbaren) Funktion $f\colon M \to \mathbb{R}$ ist gegeben durch

$$\int_M f\, dS_M \;=\; \int_U f\big(\phi(x)\big)\, \|\phi'(x)\|_2\, d\lambda_1(x)\,;$$

für stetiges f erhalten wir also $\int_a^b f(\phi(x))\, \|\phi'(x)\|\, dx$, das übliche Wegintegral aus der Analysis 2.

Beispiel 10.13 (Integrale über Funktionsgraphen). Wie in Beispiel 10.8 betrachten wir den Graphen $M \subseteq \mathbb{R}^{k+1}$ einer stetig differenzierbaren Funktion $h\colon \mathbb{R}^k \supseteq U \to \mathbb{R}$. In diesem Falle können wir das Integral einer messbaren Funktion $f : M \to \overline{\mathbb{R}}$ bzgl. S_M über M mit der folgenden Formel explizit ausrechnen:

$$\int_M f\, dS_M \;=\; \int_U f\big(x, h(x)\big)\, \sqrt{1 + \|\operatorname{grad} h(x)\|_2^2}\; d\lambda_k(x) \tag{96}$$

wann immer eines (und somit beide) der Integrale definiert sind (siehe (95) und (93)).

Wir halten noch eine Beobachtung fest.

Lemma 10.14 *Es sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine k-dimensionale C^r-Untermannigfaltigkeit mit einer globalen C^r-Parametrisierung $\phi\colon U \to \mathbb{R}^n$. Dann erlaubt auch jede relativ offene Teilmenge $N \subseteq M$ eine globale C^r-Parametrisierung und es gilt $S_N = S_M|_N$.*

Beweis. Offenbar ist $V := \phi^{-1}(N)$ eine offene Teilmenge von $U \subseteq \mathbb{R}^k$ und $\phi|_V\colon V \to \mathbb{R}^n$ eine globale C^r-Parametrisierung für N. Für jede Borelmenge $A \subseteq N$ gilt also

$$S_N(A) = \int_{\phi^{-1}(A)} \sqrt{g_\phi(x)}\, d\lambda_k(x) = S_M(A),$$

was zu zeigen war. □

10.2 Das Oberflächenmaß im allgemeinen Fall

Wir schauen uns nun beliebige k-dimensionale Untermannigfaltigkeiten $M \subseteq \mathbb{R}^n$ an, die im allgemeinen nicht mehr durch eine einzige Parametrisierung beschrieben werden können. Auch dann lässt sich ein Oberflächenmaß S_M auf M definieren. Der folgende Satz zeigt die Existenz und Eindeutigkeit eines solchen Maßes. Häufig findet man eine abgeschlossene Teilmenge $N \subseteq M$ vom Maß $S_M(N) = 0$ derart, dass $M \setminus N$ eine globale C^r-Parametrisierung besitzt; da N beim Integrieren weggelassen werden kann, sind dann nur noch Integrale wie in §10 zu berechnen. Wir beschreiben daher im folgenden Satz auch gleich eine Beispielklasse von S_M-Nullmengen.

Satz 10.15 *Für jede k-dimensionale C^r-Mannigfaltigkeit $M \subseteq \mathbb{R}^n$ gilt:*

(a) *Es gibt genau ein Maß S_M auf $(M, \mathcal{B}(M))$ derart, dass*

$$S_M|_{\phi(U)} = S_{\phi(U)}$$

für jede lokale C^r-Parametrisierung $\phi\colon U \to \mathbb{R}^n$ von M.

(b) *Ist $\ell < k$ und $f : U \to \mathbb{R}^n$ eine stetig differenzierbare Funktion auf einer offenen Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}^\ell$ mit Bild $f(U) \subseteq M$, so ist $f(U)$ eine Borelmenge in M und $S_M(f(U)) = 0$.*

Bevor wir den Satz beweisen, schauen wir ein Beispiel an.

Beispiel 10.16 (Integrale über die Einheitssphäre in $\mathbb{R}^3$). Die Abbildung

$$P \, : \,]0,\pi[\, \times \,]0,2\pi[\, \to \mathbb{S}_2 \; \subseteq \; \mathbb{R}^3 \, , \quad P(\theta,\phi) \; := \; \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\phi \\ \sin\theta\sin\phi \\ \cos\theta \end{pmatrix}$$

ist nach Beispiel 9.25 eine lokale C^∞-Parametrisierung für die Einheitssphäre $\mathbb{S}_2 \subseteq \mathbb{R}^3$. Wir behaupten:

Für jede integrierbare (oder nicht-negative messbare) Funktion $f : \mathbb{S}_2 \to \overline{\mathbb{R}}$ gilt

$$\int_{\mathbb{S}_2} f \, dS_{\mathbb{S}_2} \; = \; \int_{]0,\pi[} \int_{]0,2\pi[} f\big(P(\theta,\phi)\big) \, \sin\theta \, d\lambda_1(\phi) d\lambda_1(\theta) \, . \tag{97}$$

Insbesondere ergibt sich für das 2-dimensionale Volumen (Flächeninhalt) der Einheitssphäre

$$S_{\mathbb{S}_2}(\mathbb{S}_2) \;=\; \int_{\mathbb{S}_2} 1 \, dS_{\mathbb{S}_2} \;=\; \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \sin\theta \, d\phi \, d\theta \;=\; 4\pi\,.$$

Beweis: Die gewählte lokale Parametrisierung P ist besonders schön, denn ihr Bild ist "fast alles": Das Komplement des Bildes ist

$$\mathbb{S}_2 \setminus \operatorname{im} P \;=\; \{(x,y,z) \colon y = 0,\; x \geq 0 \text{ und } x^2 + z^2 = 1\}\,,$$

ein Halbkreis. Dieser ist im Bild der stetig differenzierbaren Abbildung $\mathbb{R} \to \mathbb{S}_2 \subseteq \mathbb{R}^3$, $x \mapsto (\cos(x), 0, \sin(x))$ enthalten und somit nach Satz 10.15(b) eine $S_{\mathbb{S}_2}$-Nullmenge und somit eine Borelmenge vom Maß 0 (da er kompakt ist). Da man messbare Mengen vom Maß 0 beim Integrieren weglassen darf, erhalten wir für jede integrierbare Funktion $f \colon \mathbb{S}_2 \to \overline{\mathbb{R}}$:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{S}_2} f \, dS_{\mathbb{S}_2} \;&=\; \int_{\operatorname{im} P} f \, dS_{\mathbb{S}_2} \;=\; \int_{\operatorname{im} P} f \, dS_{\operatorname{im} P} \\
&=\; \int_{]0,\pi[\,\times\,]0,2\pi[} f\big(P(\theta,\phi)\big)\, \sqrt{g_P(\theta,\phi)}\; d\lambda_2(\theta,\phi) \\
&=\; \int_{]0,\pi[\,\times\,]0,2\pi[} f\big(P(\theta,\phi)\big)\, \sin(\theta)\; d\lambda_2(\theta,\phi) \\
&=\; \int_{]0,\pi[} \int_{]0,2\pi[} f\big(P(\theta,\phi)\big)\, \sin\theta \; d\lambda_1(\phi)\, d\lambda_1(\theta)\,,
\end{aligned}$$

wobei wir den Satz von Fubini benutzt und eine explizite Formel für die Gramsche Determinante $g_P(\theta,\phi)$ eingesetzt haben: Da

$$J_P(\theta,\phi) \;=\; \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\phi & -\sin\theta\sin\phi \\ \cos\theta\sin\phi & \sin\theta\cos\phi \\ -\sin\theta & 0 \end{pmatrix}$$

nach Beispiel 9.25, ist der Maßtensor gegeben durch[33]

$$G_P(\theta,\phi) \;=\; \begin{pmatrix} \langle \frac{\partial P}{\partial\theta}(\theta,\phi),\, \frac{\partial P}{\partial\theta}(\theta,\phi)\rangle & \langle \frac{\partial P}{\partial\theta}(\theta,\phi),\, \frac{\partial P}{\partial\phi}(\theta,\phi)\rangle \\ \langle \frac{\partial P}{\partial\phi}(\theta,\phi),\, \frac{\partial P}{\partial\theta}(\theta,\phi)\rangle & \langle \frac{\partial P}{\partial\phi}(\theta,\phi),\, \frac{\partial P}{\partial\phi}(\theta,\phi)\rangle \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sin^2\theta \end{pmatrix}$$

(siehe (91) in Bemerkung 10.5) und somit $g_P(\theta,\phi) = \det G_P(\theta,\phi) = \sin^2\theta$.

[33] Vergleiche auch Aufgabe P42.

Als Hilfsmittel für den Beweis von Satz 10.15 überlegen wir uns, dass man immerhin nur *abzählbar viele* lokale Parametrisierungen zur Beschreibung von M braucht.

Lemma 10.17 *Für jede k-dimensionale Untermannigfaltigkeit $M \subseteq \mathbb{R}^n$ existiert eine Folge $(\phi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ von lokalen Parametrisierungen $\phi_j\colon \mathbb{R}^k \supseteq U_j \to \mathbb{R}^n$ von M derart, dass $M = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} \phi_j(U_j)$.*

Beweis. Nach Satz 9.20(c) gibt es zu jedem $a \in M$ eine offene Umgebung $V_a \subseteq \mathbb{R}^n$ derart, dass $V_a \cap M = \psi_a(W_a)$ für eine lokale Parametrisierung $\psi_a\colon W_a \to \mathbb{R}^n$ von M. Nach Verkleinern von V_a können wir annehmen, dass

$$V_a \;=\; \{x \in \mathbb{R}^n\colon \|x - q_a\|_\infty < r_a\}$$

mit einem geeigenten Punkt $q_a \in \mathbb{Q}^n$ und $0 < r_a \in \mathbb{Q}$ (denn wir wissen, dass solche Quader eine abzählbare Basis der Topologie auf $\mathbb{R}^n$ bilden). Da es nur abzählbar viele solcher Mengen gibt und da jeder Punkt $a \in M$ in einer solchen Menge liegt, ist $\{V_a\colon a \in M\}$ eine abzählbare Überdeckung von M. Wir können daher aus den lokalen Parametrisierungen ψ_a eine geeignete Folge von lokalen Parametrisierungen ϕ_j auswählen. □

Beweis von Satz 10.15. (a) Nach Lemma 10.17 gibt es eine Folge $(\phi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ von C^r-Parametrisierungen $\phi_j\colon U_j \to \mathbb{R}^n$ von M derart, dass

$$M = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} \phi_j(U_j).$$

Eindeutigkeit von S_M. Angenommen, es gibt ein Maß S_M auf $(M, \mathcal{B}(M))$ derart, dass $S_M|_{\phi(U)} = S_{\phi(U)}$ für jede lokale C^r-Parametrisierung $\phi\colon U \to \mathbb{R}^n$ von M. Ist $A \subseteq M$ eine Borelmenge, so ist $A = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} B_j$ mit den paarweise disjunkten Borelmengen

$$B_1 := A \cap \phi_1(U_1), \quad B_j := \big(A \cap \phi_j(U_j)\big) \setminus \bigcup_{i=1}^{j-1} \phi_i(U_i).$$

Da S_M σ-additiv ist, erhalten wir

$$S_M(A) = \sum_{j=1}^{\infty} S_M(B_j) = \sum_{j=1}^{\infty} S_{\phi(U_j)}(B_j),$$

es ist also $S_M(A)$ eindeutig festgelegt. Wir haben benutzt, dass B_j eine Borelmenge in $\phi_j(U_j)$ ist und $S_M|_{\phi_j(U_j)} = S_{\phi_j(U_j)}$.

Existenz von S_M. Wir wählen eine Folge $(A_j)_{j\in\mathbb{N}}$ paarweise disjunkter Borelmengen $A_j \subseteq \phi_j(U_j)$ derart, dass[34]

$$M = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j.$$

Gegeben $j \in \mathbb{N}$ sei $i_j\colon \phi_j(U_j) \to M$, $x \mapsto x$ die Inklusionsabbldung und $\mathbf{1}_{A_j}\colon \phi_j(U_j) \to [0,\infty[$ die charakteristische Funktion von A_j. Dann ist

$$S_M := \sum_{j=1}^{\infty} (i_j)_*(\mathbf{1}_{A_j} \odot S_{\phi_j(U_j)}) \tag{98}$$

ein Maß auf $(M, \mathcal{B}(M))$, wobei wir die Bildmaße unter der Abbildung i_j jeweils als Maße auf $(M, \mathcal{B}(M))$ auffassen (nicht auf der ganzen Obermenge $(i_j)_*(\mathcal{B}(\phi_j(U_j)))$ von $\mathcal{B}(M)$). Ist $\phi\colon U \to \mathbb{R}^n$ eine lokale C^r-Parametrisierung von M und $A \subseteq U$ eine Borelmenge, so ist

$$A = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} (A \cap A_j),$$

wobei $A \cap A_j \subseteq \phi(U) \cap \phi_j(U_j)$ und somit, indem wir Lemma 10.14 zweimal anwenden,

$$S_{\phi_j(U_j)}(A \cap A_j) = S_{\phi_j(U_j)\cap\phi(U)}(A \cap A_j) = S_{\phi(U)}(A \cap A_j).$$

Wegen $A_j \subseteq \phi_j(U_j)$ ist hierbei

$$A \cap A_j = A \cap \phi_j(U_j) \cap A_j = i_j^{-1}(A) \cap A_j.$$

Wir schließen, dass

$$\begin{aligned} S_M(A) &= \sum_{j=1}^{\infty} \int_{i_j^{-1}(A)} \mathbf{1}_{A_j}\, dS_{\phi_j(U_j)} = \sum_{j=1}^{\infty} S_{\phi_j(U_j)}(i_j^{-1}(A) \cap A_j) \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} S_{\phi_j(U_j)}(A \cap A_j) = \sum_{j=1}^{\infty} S_{\phi(U)}(A \cap A_j) \\ &= S_{\phi(U)}(A). \end{aligned}$$

[34]Wir können z.B. $A_1 := \phi_1(U_1)$ nehmen und $A_j := \phi_j(U_j) \setminus (\phi_1(U_1) \cup \cdots \cup \phi_{j-1}(U_{j-1}))$ für $j \geq 2$.

Also ist $S_M|_{\phi(U)} = S_{\phi(U)}$.

(b) Nach Satz 7.11 ist $f(U) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ und somit auch $f(U) \in \mathcal{B}(M)$, da $f(U) \subseteq M$. Nach Lemma 10.17 gibt es eine Folge $(\phi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ von lokalen Parametrisierungen $\phi_j \colon U_j \to M$ von M mit $M = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} \phi_j(U_j)$. Da

$$f(U) \;=\; \bigcup_{j\in\mathbb{N}} \underbrace{f(U) \cap \phi_j(U_j)}_{=:\, N_j},$$

brauchen wir nur noch zu zeigen, dass $S_M(N_j) = 0$ für alle $j \in \mathbb{N}$. Es ist

$$S_M(N_j) \;=\; \int_{\phi_j^{-1}(N_j)} \sqrt{g_{\phi_j}(x)}\, d\lambda_k(x)\;;$$

dieses Integral verschwindet wie gewünscht, wenn der Integrationsbereich $\phi_j^{-1}(N_j)$ eine λ_k-Nullmenge ist. Nun ist aber $W := f^{-1}(\phi_j(U_j))$ eine offene Teilmenge von U und

$$h \colon W \to \mathbb{R}^k\,, \quad h(x) \;:=\; \phi_j^{-1}(f(x))$$

nach Lemma 9.23 eine stetig differenzierbare Funktion, mit Bild $h(W) = \phi_j^{-1}(N_j)$. Da $\ell < k$, ist nach Satz 7.11 wie gewünscht $\phi_j^{-1}(N_j) = h(W)$ eine λ_k-Nullmenge. $\square$

Machen wir uns an einer vertrauten Situation klar, wie die vorige Konstruktion funktioniert:

Beispiel 10.18 Nach Beispiel 9.5 ist die Kreislinie $\mathbb{S}_1$ eine 1-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^2$. Da $\mathbb{S}_1$ kompakt ist, kann $\mathbb{S}_1$ nicht durch eine einzige Parametrisierung $\phi : \mathbb{R} \supseteq U \to \mathbb{R}^2$ beschrieben werden.[35] Jedoch können wir $\mathbb{S}_1$ durch zwei lokale Parametrisierungen beschreiben, z.B. durch

$$\phi_1 \colon]-\pi,\pi[\, \to \mathbb{R}^2, \qquad \phi_1(x) \;:=\; \big(\cos x,\, \sin x\big)$$

mit Bild $M_1 := \operatorname{im}\phi_1 = \mathbb{S}_1 \setminus \{(-1,0)\}$ und die durch die gleiche Formel gegebene Abbildung $\phi_2 \colon]0,2\pi[\, \to \mathbb{R}^2$ mit Bild $M_2 := \operatorname{im}\phi_2 = \mathbb{S}_1 \setminus \{(1,0)\}$. Dann sind $A_1 := M_1 = \operatorname{im}\phi_1$ und $A_2 := \{(-1,0)\} \subseteq \operatorname{im}\phi_2$ paarweise disjunkte Borelmengen, die $\mathbb{S}_1$ überdecken.[36] Da $g_{\phi_j}(x) = \|\phi_j'(x)\|_2^2 = 1$ (vgl.

[35] Andernfalls wäre die offene Menge $U \subseteq \mathbb{R}$ als stetiges Bild $\phi^{-1}(\mathbb{S}_1)$ der kompakten Menge $\mathbb{S}_1$ kompakt, was unmöglich ist.

[36] Penibel können wir noch $\phi_j := \phi_2$ und $A_j := \emptyset$ für $j \geq 3$ setzen.

Beispiel 10.12), erhalten wir für jede Borelmenge $E \subseteq \mathbb{S}_1$

$$\begin{aligned} S_{\mathbb{S}_1}(E) &= S_{M_1}(E \cap A_1) \;+\; S_{M_2}(E \cap A_2) \;=\; \int_{\phi_1^{-1}(E)} 1 \, d\lambda_1 + \int_{\phi_2^{-1}(E \cap A_2)} 1 \, d\lambda_1 \\ &= \lambda_1(\phi_1^{-1}(E)) + \lambda_1(\phi_2^{-1}(E \cap A_2)) \;=\; \lambda_1(\phi_1^{-1}(E))\,; \end{aligned}$$

hierbei haben wir im letzten Schritt benutzt, dass $\phi_2^{-1}(E \cap A_2)$ eine höchstens einpunktige Menge ist und daher das Maß 0 hat. Insbesondere erhalten wir für das eindimensionale Volumen des Kreises $S_{\mathbb{S}_1}(\mathbb{S}_1) = \lambda_1\big(]-\pi, \pi[\big) = 2\pi$ (den üblichen Kreisumfang).

Bemerkung 10.19 Ist M eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$ und $W \subseteq M$ eine offene Teilmenge, so ist $S_M|_W = S_W$. Jede lokale Parametrisierung $\phi\colon U \to W$ von W ist nämlich auch eine lokale Parametrisierung von M und somit $S_W|_{\phi(U)} = S_{\phi(U)} = S_M|_{\phi(U)} = \big(S_M|_W\big)|_{\phi(U)}$. Die Eindeutigkeitsaussage in Satz 10.15(a) liefert nun $S_W = S_M|_W$.

Mithilfe des Oberflächenmaßes S_M können wir Funktionen über M integrieren. Der folgende Satz beschreibt explizit, wie die so erhaltenen Integrale ausschauen:

Satz 10.20 *Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit, $(\phi_j)_{j \in \mathbb{N}}$ eine Folge von lokalen Parametrisierungen $\phi_j : U_j \to \mathbb{R}^n$ von M mit Bild $M_j := \phi_j(U_j)$ und $(A_j)_{j \in \mathbb{N}}$ eine Folge paarweise disjunkter Borelmengen $A_j \subseteq M_j$ derart, dass $\bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j = M$. Ist $f\colon (M, \mathcal{B}(M)) \to (\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$ eine messbare Funktion, so gilt:*

(a) *Ist $f \geq 0$, so ist*

$$\int_M f \, dS_M \;=\; \sum_{j=1}^{\infty} \int_{A_j} f \, dS_{M_j}\,, \tag{99}$$

wobei die Integrale auf der rechten Seite explizit mit der Formel (95) *aus Lemma* 10.11 *berechnet werden können, da M_j eine Untermannigfaltigkeit mit globaler Parametrisierung ϕ_j ist.*

(b) *f ist genau dann bzgl. S_M über M integrierbar, wenn*

$$\sum_{j=1}^{\infty} \int_{A_j} |f| \, dS_{M_j} < \infty;$$

in diesem Fall gilt (99).

Beweis. Bezeichnet $i_j \colon M_j \to M$, $\lambda_j(x) := x$ die Inklusion, so ist nach (98)

$$S_M = \sum_{j=1}^{\infty} \mu_j$$

mit $\mu_j := (i_j)_*(\mathbf{1}_{A_j} \odot S_{M_j})$. Nach Satz 5.6 ist also

$$\int_M f \, dS_M \; = \; \sum_{j=1}^{\infty} \int_M f \, d\mu_j$$

falls $f \geq 0$ oder f bzgl. S_M integrierbar ist, wobei letzteres genau dann der Fall ist, wenn $\int_M |f| \, dS_M = \sum_{j=1}^{\infty} \int_M |f| \, d\mu_j < \infty$.

(a) Im Falle einer messbaren Funktion $f \colon (M, \mathcal{B}(M)) \to ([0,\infty], \mathcal{B}([0,\infty]))$ ist

$$\int_M f \, d\mu_j \;=\; \int_M f \, d(i_j)_*(\mathbf{1}_{A_j} \odot S_{M_j}) = \int_{M_j} f \circ i_j \, d(\mathbf{1}_{A_j} \odot S_{M_j}) \quad (100)$$

$$= \int_{M_j} f|_{M_j} \mathbf{1}_{A_j} \, dS_{M_j} = \int_{A_j} f \, dS_{M_j} \quad (101)$$

und somit (a) gezeigt. Im zweiten Integral in (100) ist es hierbei nach Satz 4.11(b) egal, ob das Bildmaß auf ganz $(i_j)_*(\mathcal{B}(M_j))$ betrachtet wird oder nur auf der Teilmenge $\mathcal{B}(M)$. Man kann dann also die allgemeine Transformationsformel (Satz 5.3) anwenden, den Satz über Integrale bzgl. Maßen mit Dichten (Satz 5.1) und schließlich Satz 3.10(a).

(b) Nach Satz 4.11(c), Satz 5.3, Satz 5.1 und Satz 3.10(a) existiert je eines der Integrale in (100)–(101) genau dann und ist in $\mathbb{R}$, wenn dies für die anderen gilt, und sie sind dann gleich. $\square$

Teil V : Integralsätze

Ein zentrales Resultat der Differential- und Integralrechnung für Funktionen einer Veränderlichen ist der Hauptsatz, der besagt, dass

$$F(b) - F(a) = \int_a^b F'(t)\, dt$$

für jede stetig differenzierbare Funktion $F\colon [a, b] \to \mathbb{R}$. Wir können diesen Satz betrachten als eine Beziehung zwischen den Werten von F auf dem Rand $\partial[a, b] = \{a, b\}$ von $[a, b]$ und den Werten von F' im Inneren von $[a, b]$. Das Ziel dieses letzten Teils der Vorlesung sind Verallgemeinerungen der vorigen Beziehung. Der allgemeine Stokessche Integralsatz

$$\int_{\partial M} \omega \;=\; \int_M d\omega \tag{102}$$

für Differentialformen, den wir hier nicht behandeln können, liefert eine weitreichende und elegante Verallgemeinerung des Hauptsatzes.[37] Wir betrachten lediglich Spezialfälle von (102): den Gaußschen Integralsatz, den klassischen Stokesschen Integralsatz im Raum und den Greenschen Integralsatz in der Ebene.

11 Kompakta mit C^1-Rand

Der Gaußsche Integralsatz ist eines der wichtigsten Resultate der Integralrechnung im $\mathbb{R}^n$. Er beschreibt den Zusammenhang zwischen dem Integral der Divergenz eines Vektorfeldes über einen Bereich im $\mathbb{R}^n$ und einem Oberflächenintegral über dem Rand des Bereiches. Wir beweisen ihn nur für spezielle Bereiche: *Kompakta mit C^1-Rand.*

Definition 11.1 Es sei $K \subseteq \mathbb{R}^n$ eine kompakte Teilmenge und $r \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Man nennt K ein *Kompaktum mit C^r-Rand*, wenn es zu jedem Randpunkt $p \in \partial K$ eine offene Umgebung $U \subseteq \mathbb{R}^n$ von p und eine C^r-Submersion $\psi\colon U \to \mathbb{R}$ gibt derart, dass

$$K \cap U = \{x \in U : \psi(x) \leq 0\}.$$

[37] Mehr darüber finden Sie z.B. in Forsters Analysis 3 (bzw. später einmal noch allgemeiner in “Fundamentals of Differential Geometry” von Serge Lang, Kapitel XVII, erschienen im Springer-Verlag).

Kompakta mit C^∞-Rand nennt man auch Kompakta mit *glattem* Rand.

Beispiel 11.2 Sei $R > 0$. Die Kugel $K := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_2 \leq R\}$ ist ein Kompaktum mit glattem Rand, denn $\psi\colon \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $\psi(x) := \|x\|_2^2 - R^2$ leistet das Gewünschte.

Lemma 11.3 *In der Situation von Definition* 11.1 *gilt* $\partial K \cap U = \{x \in U\colon \psi(x) = 0\}$.

Beweis. Sei zunächst $x \in \partial K \cap U$. Da K kompakt ist, ist K abgeschlossen. Damit ist $x \in K$ und $\psi(x) \leq 0$. Wäre $\psi(x) < 0$, so wäre $\{y \in U\colon \psi(y) < 0\}$ eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^n$, die in K liegt und x enthält. Dies widerspricht $x \in \partial K$. Also ist $\psi(x) = 0$.

Sei nun $x \in U$ und $\psi(x) = 0$. Dann ist $x \in K$, und wir zeigen, dass x ein Randpunkt von K ist. Es gibt ein $\varepsilon > 0$ derart, dass

$$x + t \operatorname{grad} \psi(x) \in U \quad \text{für alle } t \in]-\varepsilon, \varepsilon[.$$

Wir können also die Hilfsfunktion

$$h\colon\ ]-\varepsilon, \varepsilon[\to \mathbb{R}, \quad t \mapsto \psi(x + t \operatorname{grad} \psi(x))$$

betrachten, deren Ableitung an der Stelle $t = 0$ gleich der Richtungsableitung

$$h'(0) = \psi'(x)(\operatorname{grad} \psi(x)) = \langle \operatorname{grad} \psi(x), \operatorname{grad} \psi(x) \rangle$$

von ψ ist. Es ist also

$$h'(0) = \|\operatorname{grad} \psi(x)\|_2^2 > 0.$$

Da h stetig differenzierbar und somit h' stetig ist, dürfen wir nach Verkleinern von ε annehmen, dass

$$h'(t) > 0 \quad \text{für alle } t \in]-\varepsilon, \varepsilon[$$

und folglich h streng monoton wachsend ist. Da $h(0) = 0$, folgt $0 < h(t) = \psi(x + t \operatorname{grad} \psi(x))$ und somit

$$x + t \operatorname{grad} \psi(x) \notin K \quad \text{für alle } t \in]0, \varepsilon[. \tag{103}$$

Folglich enthält jede x-Umgebung in $\mathbb{R}^n$ sowohl Punkte aus K (nämlich x) als auch welche aus $\mathbb{R}^n \setminus K$ und somit ist $x \in \partial K$. Übrigens ist $0 > h(t) = \psi(x + t \operatorname{grad} \psi(x))$ und somit

$$x + t \operatorname{grad} \psi(x) \in K \quad \text{für alle } t \in]-\varepsilon, 0[, \tag{104}$$

was später noch von Nutzen sein wird. □

Beispiel 11.4 Die Sphäre $\mathbb{S}_2$ ist zwar auch kompakt und sieht glatt aus (sie ist ja eine Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^3$), aber sie ist kein Kompaktum mit glattem (oder C^r-) Rand in $\mathbb{R}^3$ im Sinne von Definition 11.1. Jedes (nicht-leere) Kompaktum mit C^r-Rand hat nämlich ein nicht-leeres Inneres (vgl. Beweis von Lemma 11.3), was bei $\mathbb{S}_2$ nicht der Fall ist.

Folgerung 11.5 *Der Rand eines Kompaktums $K \subseteq \mathbb{R}^n$ mit C^r-Rand ist eine $(n-1)$-dimensionale C^r-Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$.*

Beweis. Nach Definition 11.1 und Lemma 11.3 finden wir zu jedem $p \in \partial K$ eine C^r-Submersion $\psi \colon U \to \mathbb{R}$ auf einer offenen Umgebung U von p derart, dass

$$\partial K \cap U \;=\; \{x \in U \colon \psi(x) = 0\}.$$

Also ist ∂K eine $(n-1)$-dimensionale C^r-Untermannigfaltigkeit. □

Für den Gaußschen Integralsatz benötigen wir das (äußere) *Normalenfeld* von ∂K. Dazu definieren wir zunächst allgemein Tangential- und Normalenvektoren.

Definition 11.6 Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine k-dimensionale C^r-Untermannigfaltigkeit und $p \in M$.

(a) Ein Vektor $v \in \mathbb{R}^n$ heißt ein *Tangentialvektor an M in p*, wenn ein $\varepsilon > 0$ und ein stetig differenzierbarer Weg $\gamma \colon]-\varepsilon, \varepsilon[\to M$ mit $\gamma(0) = p$ und $\gamma'(0) = v$ existieren. Die Menge aller Tangentialvektoren an M in p bezeichnen wir mit $T_p(M)$.

(b) Ein Vektor $v \in \mathbb{R}^n$ heißt ein *Normalenvektor an M in p*, wenn er auf $T_p(M)$ senkrecht steht (d.h. wenn $\langle v, w \rangle = 0$ für alle $w \in T_p(M)$). Die Menge aller Normalenvektoren an M in p bezeichnen wir mit $N_p(M)$.

Den Tangentialraum $T_p(M)$ kann man wie folgt beschreiben:

Lemma 11.7 *Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine k-dimensionale C^r-Untermannigfaltigkeit.*

(a) *Ist $U \subseteq \mathbb{R}^k$ offen und $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ eine lokale C^r-Parametrisierung von M, so gilt*

$$T_{\phi(x)}(M) \;=\; \operatorname{im} \phi'(x) \qquad \textit{für alle } x \in U.$$

(b) *Ist $p \in M$ und $\psi \colon U \to \mathbb{R}^{n-k}$ eine C^r-Submersion auf einer offenen p-Umgebung $U \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $M \cap U = \{x \in U \colon \psi(x) = 0\}$, so gilt*

$$T_pM = \ker \psi'(p).$$

Beweis. Dies haben wir in der Übung nachgeprüft (Aufgabe H37). □

Insbesondere stellen wir fest, dass $T_p(M)$ ein k-dimensionaler und $N_p(M)$ ein $(n-k)$-dimensionaler Untervektorraum von $\mathbb{R}^n$ ist und dass

$$T_p(M) \oplus N_p(M) \;=\; \mathbb{R}^n\,.$$

Beispiel 11.8 Ist $U \subseteq \mathbb{R}^k$ offen und $h \colon U \to \mathbb{R}$ eine C^r-Abbildung, so ist der Graph M von h eine k-dimensionale C^r-Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^{k+1}$ mit einer globalen C^r-Parametrisierung, nämlich $\phi \colon U \to M$, $\phi(x) := (x, h(x))$. Da $T_p(M)$ die Dimension k hat, ist $N_p(M)$ eindimensional für jeden Punkt $p \in M$. Es gibt daher genau zwei Normalenvektoren in $N_p(M)$, deren Länge 1 ist. Wie sehen diese explizit aus? Einer davon ist der folgende Vektor (und der andere dessen Negatives):

$$\nu(\phi(x)) \;:=\; \frac{1}{\sqrt{1 + \|\operatorname{grad} h(x)\|_2^2}} \big(-\operatorname{grad} h(x),\; 1\big)\,. \tag{105}$$

Per Definition ist nämlich $\nu(\phi(x))$ ein Einheitsvektor, und berechnen der Skalarprodukte zeigt, dass $\nu(\phi(x))$ auf $\frac{\partial \phi}{\partial x_j}(x) = (e_j, \frac{\partial h}{\partial x_j}(x))$ senkrecht steht für $j \in \{1, \ldots, k\}$, so dass also $\nu(\phi(x)) \in N_{\phi(x)}(M)$. Nach (105) ist übrigens $\nu \circ \phi \colon U \to \mathbb{R}^{k+1}$ stetig, somit auch $\nu \colon M \to \mathbb{R}^{k+1}$.

Ist $M = \partial K$ der Rand eines Kompaktums mit C^r-Rand, so ist $N_p(\partial K)$ für jeden Punkt $p \in M$ ein eindimensionaler Vektorraum. Es gibt also genau zwei Normalenvektoren der Länge 1. Wir wollen denjenigen auszeichnen, der "nach außen zeigt."

Satz 11.9 *Es sei K ein Kompaktum mit C^r-Rand ∂K.*

(a) *Für jedes $p \in \partial K$ gibt es genau einen Vektor $\nu(p) \in N_p(\partial K)$ der Länge 1 mit folgender Eigenschaft: Es gibt ein $\varepsilon > 0$ derart, dass $p + t\nu(p) \notin K$ für alle $t \in]0, \varepsilon[$.*

(b) *Die Abbildung $\nu\colon \partial K \to \mathbb{R}^n$ ist stetig.*

Der Vektor $\nu(p)$ heißt der *äußere Normalenvektor an ∂K in p*, und ν heißt das *äußere Normalenfeld* von K.

Beweis. (a) Gegeben $p \in \partial K$ sei $\psi\colon U \to \mathbb{R}$ eine C^r-Submersion auf einer offenen p-Umgebung $U \subseteq \mathbb{R}^n$ derart, dass $U \cap K = \{x \in U : \psi(x) \leq 0\}$. Nach Lemma 11.3 gilt $U \cap \partial K = \{x \in U : \psi(x) = 0\}$. Also ist nach Lemma 11.7

$$T_p(\partial K) = \ker \psi'(p) = \ker\langle \cdot, \operatorname{grad} \psi(p)\rangle = \big(\operatorname{grad} \psi(p)\big)^{\perp}.$$

Folglich ist

$$N_p(\partial K) = \big(T_p M\big)^{\perp} = \big(\operatorname{grad} \psi(p)\big)^{\perp\perp} = \mathbb{R} \operatorname{grad} \psi(p).$$

Somit gibt es genau zwei Vektoren der Länge 1 in $N_p(\partial K)$, nämlich

$$v := \frac{1}{\|\operatorname{grad} \psi(p)\|_2} \operatorname{grad} \psi(p)$$

und $-v$. Nach dem Beweis von Lemma 11.3 gibt es ein $\varepsilon > 0$ derart, dass

$$p + tv \notin K \quad \text{und} \quad p + t(-v) = p - tv \in K \quad \text{für alle } t \in]0, \varepsilon[$$

(vgl. (103) und (104)). Also hat $\nu(p) := v$ die in (a) verlangte Eigenschaft und $-v$ hat diese nicht, so dass $\nu(p)$ eindeutig festgelegt ist.

(b) Ist $U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Menge und $\psi\colon U \to \mathbb{R}$ eine C^r-Submersion mit $U \cap K = \{x \in U : \psi(x) \leq 0\}$, so gilt nach dem Beweis von (a)

$$\nu(p) = \frac{1}{\|\operatorname{grad} \psi(p)\|_2} \operatorname{grad} \psi(p) \tag{106}$$

für alle $p \in U \cap \partial K$. Die rechte Seite von (106) ist eine stetige $\mathbb{R}^n$-wertige Funktion von $p \in U \cap \partial K$; also ist $\nu|_{U \cap \partial K}$ stetig. $\square$

Beispiel 11.10 Es sei $K = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_2 \leq R\}$ die Kugel um 0 vom Radius R und $\psi\colon \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $\psi(x) := \|x\|_2^2 - R^2$ (siehe Beispiel 11.2). Für $p \in \partial K$ ist $\operatorname{grad}\psi(p) = 2p$, und damit ist wegen (106) der Vektor $\nu(p) = \frac{2}{\|2p\|}\, p = \frac{1}{R}\, p$ der zugehörige äußere Normalenvektor.

Beispiel 11.11 Sei $U \subseteq \mathbb{R}^2$ offen und $\phi\colon U \to \mathbb{R}^3$ eine C^r-Immersion, die zudem eine topologische Einbettung ist. Wir interessieren uns für die Normalenvektoren an die Fläche $\psi(U)$. Für $x \in U$ haben wir $T_{\phi(x)}(\phi(U)) = \operatorname{im}\phi'(x)$, und da ϕ eine Immersion ist, ist dies ein 2-dimensionaler Untervektorraum von $\mathbb{R}^3$. Es gibt im Punkt $p := \phi(x)$ also genau 2 Normalenvektoren der Länge 1. Wir legen einen Normalenvektor $\nu(p)$ dadurch fest, dass wir

$$\det\Big(\frac{\partial\phi}{\partial x_1}(x), \frac{\partial\phi}{\partial x_2}(x), \nu(p)\Big) \;>\; 0$$

verlangen, d.h. die Vektoren

$$X_1(p) \;:=\; \frac{\partial\phi}{\partial x_1}(x)\,, \quad X_2(p) \;:=\; \frac{\partial\phi}{\partial x_2}(x) \quad \text{und} \quad \nu(p)$$

sollen ein Rechtssystem bilden. Mit dieser Information können wir $\nu(p)$ direkt berechnen:

$$\nu(p) \;=\; \frac{X_1(p) \times X_2(p)}{\|X_1(p) \times X_2(p)\|}\,,$$

wobei $v \times w$ das *Vektorprodukt* der Vektoren $v, w \in \mathbb{R}^3$ ist, d.h.

$$v \times w \;=\; \det\begin{pmatrix} e_1 & v_1 & w_1 \\ e_2 & v_2 & w_2 \\ e_3 & v_3 & w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_2w_3 & - & v_3w_2 \\ v_3w_1 & - & v_1w_3 \\ v_1w_2 & - & v_2w_1 \end{pmatrix}$$

(wobei die “Determinante” nur als Gedächtnisstütze zu betrachten ist).

Ist speziell $\phi(x) = (x, h(x))$ für eine C^r-Funktion $h\colon \mathbb{R}^2 \supseteq U \to \mathbb{R}$, so ist

$$X_1(p) \;=\; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \dfrac{\partial h}{\partial x_1}(x) \end{pmatrix}, \qquad X_2(p) \;=\; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \dfrac{\partial h}{\partial x_2}(x) \end{pmatrix},$$

also

$$X_1(p) \times X_2(p) \;=\; \begin{pmatrix} -\dfrac{\partial h}{\partial x_1}(x) \\ -\dfrac{\partial h}{\partial x_2}(x) \\ 1 \end{pmatrix}$$

und daher (wie in Beispiel 11.8)

$$\nu(p) \;=\; \nu\Big(\phi(x)\Big) \;=\; \frac{1}{\sqrt{1+(\frac{\partial h}{\partial x_1}(x))^2+(\frac{\partial h}{\partial x_2}(x))^2}} \begin{pmatrix} -\dfrac{\partial h}{\partial x_1}(x) \\ -\dfrac{\partial h}{\partial x_2}(x) \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Beachten Sie, dass die x_3-Komponente von $\nu(\phi(x))$ positiv ist und $\nu(\phi(x))$ in diesem Sinne "nach oben" zeigt; wir nennen $\nu(\phi(x))$ den "oberen" Normalenvektor an den Graphen von f.

Beispiel 11.12 In diesem Beispiel geht es darum, den Rand eines Kompaktums mit C^r-Rand lokal als Graphen einer Funktion h darzustellen und den äußeren Normalenvektor mit Hilfe von h zu beschreiben.

Es sei $K \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Kompaktum mit C^r-Rand und $p \in \partial K$. Wir wählen eine offene Umgebung $U \subseteq \mathbb{R}^n$ von p und eine C^r-Submersion $\psi : U \to \mathbb{R}$ mit $K \cap U = \{x \in U \colon \psi(x) \leq 0\}$. Nach Lemma 11.3 ist dann

$$\partial K \cap U \;=\; \{x \in U \colon \psi(x) = 0\}\,.$$

Wegen $\psi'(p) \neq 0$ dürfen wir o.B.d.A. annehmen, dass $\frac{\partial \psi}{\partial x_n}(p) \neq 0$. Sei etwa $\frac{\partial \psi}{\partial x_n}(p) > 0$ (den Fall $\frac{\partial \psi}{\partial x_n}(p) < 0$ diskutiert man analog). Nach Verkleinern von U dürfen wir dann annehmen, dass

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_n}(x) \;>\; 0 \qquad \text{für alle } x \in U. \tag{107}$$

Mit dem Satz über implizite Funktionen finden wir dann eine offene Menge $V \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$, ein Intervall $]b,c[\; \subseteq \mathbb{R}$ mit $W := V\times\,]b,c[\; \subseteq U$ und eine stetig differenzierbare Funktion $h\colon V \to\,]b,c[$ derart, dass

$$\partial K \cap \big(V\times\,]b,c[\big) \;=\; \big\{(x,h(x)) \in \mathbb{R}^n \colon x \in V\big\}\,,$$

d.h. $\partial K \cap W$ ist der Graph von h. Wegen (107) ist dann

$$K \cap \big(V \times \,]b,c[\big) \;=\; \big\{x \in W : x_n \le h(x')\big\}\,,$$

wobei wir $x = (x', x_n) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$ geschrieben haben, und es ist weiter

$$\nu(p) \;=\; \frac{\big(-\operatorname{grad} h(p'),\, 1\big)}{\sqrt{1 + \|\operatorname{grad} h(p')\|_2^2}} \tag{108}$$

mit $p = (p', p_n)$ (vgl. Beispiel 11.8).

Schließlich vermerken wir eine weitere Eigenschaft kompakter Mengen. Wir erinnern daran, dass der *Durchmesser* einer Teilmenge M eines metrischen Raumes (X, d) durch

$$\operatorname{diam} M \;:=\; \sup\{d(x,y) \colon x, y \in M\} \;\in\; [0, \infty]$$

definiert ist.

Satz 11.13 (Lebesguesches Lemma). *Sei K eine kompakte Teilmenge eines metrischen Raumes (X, d) und $(U_i)_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von K. Dann gibt es ein $\lambda > 0$ (eine sogenannte* Lebesguesche Zahl der Überdeckung*) derart, dass jede Teilmenge M von X mit $\operatorname{diam} M \le \lambda$ und $M \cap K \neq \emptyset$ in einer der Mengen U_i enthalten ist.*

Beweis. Gegeben $x \in X$ und $r > 0$ sei $B_r(x) := \{y \in X : d(x,y) < r\}$. Zu jedem Punkt $x \in K$ gibt es ein $i \in I$ mit $x \in U_i$. Da U_i offen ist, findet man ein $\varepsilon(x) > 0$ mit $B_{2\varepsilon(x)}(x) \subseteq U_i$. Nun bildet die Familie $(B_{\varepsilon(x)}(x))_{x \in K}$ eine offene Überdeckung von K. Da K kompakt ist, lässt sich daraus eine endliche Teilüberdeckung auswählen, d.h. es gibt Punkte $x_1, \ldots, x_m \in K$ mit

$$K \;\subseteq\; \bigcup_{j=1}^{m} B_{\varepsilon(x_j)}(x_j)\,.$$

Wir setzen $\lambda := \min(\varepsilon(x_1), \ldots, \varepsilon(x_m))$. Sei nun $M \subseteq X$ eine Teilmenge mit $M \cap K \neq \emptyset$ und $\operatorname{diam} M \le \lambda$. Dann gibt es ein $x \in K$ mit $x \in M \cap K$, und es gibt ein j mit $d(x, x_j) < \varepsilon(x_j)$. Für jedes $y \in M$ ist dann

$$d(y, x_j) \;\le\; d(y,x) + d(x, x_j) \;<\; \lambda + \varepsilon(x_j) \le 2\varepsilon(x_j)\,,$$

d.h. $M \subseteq B_{2\varepsilon(x_j)}(x_j)$. Nach Konstruktion ist aber die Kugel $B_{2\varepsilon(x_j)}(x_j)$ (und damit auch die Menge M) in einer der Mengen U_i enthalten. □

12 Der Gaußsche Integralsatz

Ist $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $F\colon U \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar, so heißt die Funktion

$$\operatorname{div} F : U \to \mathbb{R}\,, \quad x \mapsto \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial F_j}{\partial x_j}(x)$$

die *Divergenz* des Vektorfelds F.

Satz 12.1 (Gaußscher Integralsatz). *Es sei $K \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Kompaktum mit C^1-Rand, $\nu : \partial K \to \mathbb{R}^n$ das äußere Normalenfeld und $V \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Menge, die K umfasst. Dann gilt für jedes stetig differenzierbare Vektorfeld $F\colon V \to \mathbb{R}^n$*

$$\int_K \operatorname{div} F \, d\lambda_n \;=\; \int_{\partial K} \langle F(x), \nu(x)\rangle \, dS_{\partial K}(x)\,. \tag{109}$$

Bemerkung 12.2 Der Gaußsche Integralsatz gilt auch noch für Kompakta, deren Ränder niedrigdimensionale Singularitäten wie Ecken und Kanten aufweisen. Auch die Voraussetzung, dass F auf einer ganzen Umgebung von K definiert ist, lässt sich abschwächen.

Bemerkung 12.3 Andere, insbesondere unter Physikern gebräuchliche Notationen sind

$$\int_{\partial K} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{S} \;:=\; \int_{\partial K} \vec{F} \bullet d\vec{S} \;:=\; \int_{\partial K} \langle F(x), \nu(x)\rangle \, dS_{\partial K}(x)\,.$$

Bemerkung 12.4 (Physikalische Interpretation). Da $\nu(x)$ ein Einheitsvektor ist, haben wir $\langle F(x), \nu(x)\rangle = \|F(x)\| \cdot \cos\alpha(x)$, wobei $\alpha(x) \in [0, \pi]$ der Winkel zwischen $F(x)$ und $\nu(x)$ ist. Es ist also $\langle F(x), \nu(x)\rangle$ die Länge der orthogonalen Projektion von $F(x)$ auf $\nu(x)$. Ein Physiker stellt sich $\langle F(x), \nu(x)\rangle dS(x)$ als den durch das Oberflächenelement $dS(x)$ austretenden Fluss des Vektorfeldes F vor. Demzufolge wird das Integral

$$\int_{\partial K} \langle F(x), \nu(x)\rangle \, dS_{\partial K}(x)$$

als Gesamtfluss durch die Oberfläche von K interpretiert. Ist das Vektorfeld F *quellenfrei*, d.h. ist $\operatorname{div} F = 0$, so ergibt sich

$$\int_{\partial K} \langle F(x), \nu(x)\rangle \, dS_{\partial K}(x) \;=\; 0\,, \tag{110}$$

d.h. der Gesamtfluss durch den Rand des Kompaktums verschwindet.[38] Diese Situation tritt z.B. auf, wenn wir die Bewegung einer inkompressiblen Flüssigkeit betrachten und $F(x)$ die Stromdichte an der Stelle $x \in \mathbb{R}^3$ (= Geschwindigkeit an Stelle x mal Massendichte) ist (zu einem festen Zeitpunkt). Die Inkompressibilität entspricht der Bedingung $\operatorname{div} F = 0$. Das Verschwinden des Gesamtflusses durch ∂K kann man sich in diesem Fall so veranschaulichen, dass ja die Flüssigkeitsmenge (Masse), die sich innerhalb von K befindet, wegen der Inkompressibilät dem Volumen von K entspricht, also konstant ist. Daher ist die Massenbilanz in K ausgewogen: zu jedem Zeitpunkt fließt gleichviel hinein wie hinaus.

Wir bereiten den Beweis des Gaußschen Integralsatzes vor, indem wir einige Werkzeuge bereitstellen und zwei Lemmas beweisen, die Spezialfälle behandeln und Teile des eigentlichen Beweises vorwegnehmen.

Stetige Funktionen mit kompaktem Träger; Zerlegungen der Eins

Zunächst einige Begriffe.

Definition 12.5 Ist M ein metrischer Raum und $f : M \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, so nennt man den Abschluss

$$\operatorname{supp} f \ := \ \overline{\{x \in M : f(x) \neq 0\}}$$

den *Träger* von f. Wir schreiben $C(M)$ für den Raum der stetigen reellwertigen Funktionen auf M und $C_c(M)$ für den Raum der Funktionen aus $C(M)$, deren Träger kompakt ist. Ist $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, so bezeichne $C_c^k(U)$ den Raum der k-mal stetig diffenzierbaren Funktionen mit kompaktem Träger in U.

Bemerkung 12.6 Beachten Sie: $f \in C(\mathbb{R}^n)$ liegt genau dann in $C_c(\mathbb{R}^n)$, wenn $\operatorname{supp} f$ beschränkt ist (da Träger per Definition abgeschlossen sind), und $f \in C(\,]a,b[\,)$ liegt genau dann in $C_c(\,]a,b[\,)$, wenn es ein $\varepsilon > 0$ so gibt, dass $\operatorname{supp} f \subseteq \,]a+\varepsilon, b-\varepsilon[$.

[38] Gilt umgekehrt (110) für jedes Kompaktum $K \subseteq V$ mit glattem Rand, so ist F quellenfrei, wie wir uns in der Übung überlegen. Quellenfreiheit ist also durch das Verschwinden der Integrale (110) charakterisiert.

Ist $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f \in C_c^k(U)$, so liegt die durch

$$F(x) := \begin{cases} f(x) & \text{für } x \in U \\ 0 & \text{für } x \neq U \end{cases}$$

definierte Fortsetzung von f durch 0 in $C_c^k(\mathbb{R}^n)$. Ist nämlich $x \in U$, so stimmen f und F in einer Umgebung von x überein. Ist dagegen $x \notin U$, so ist $x \notin \operatorname{supp} f$, und da $\operatorname{supp} f$ abgeschlossen ist, ist das Komplement $\mathbb{R}^n \setminus \operatorname{supp}(f)$ eine offene Umgebung von x, auf der F verschwindet.

Hat man erst einmal ein Beispiel einer Funktion mit kompaktem Träger (wie die folgende), so kann man diese benutzen, um Funktionen mit zusätzlichen erwünschten Eigenschaften daraus zu bauen:

Beispiel 12.7 Wir betrachten die Funktion

$$g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad g(t) := \begin{cases} \exp\Big(-\dfrac{1}{1-t^2}\Big) & \text{für } |t| < 1 \\ 0 & \text{für } |t| \geq 1. \end{cases}$$

Diese ist beliebig oft differenzierbar (dies beweist man ganz ähnlich wie in Forster 1, § 22, (22.2)), und ihr Träger ist $[-1,1]$ (so dass $g \in C_c^\infty(\mathbb{R})$).

12.8 (Eine glatte Zerlegung der Eins). Da die Funktion g aus Beispiel 12.7 einen kompakten Träger hat, ist die Funktion

$$G\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad G(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} g(t-k)$$

sinnvoll definiert (denn für jedes $t \in \mathbb{R}$ sind nur endlich viele Summanden der Reihe von 0 verschieden). Genauere Betrachtung zeigt, dass für jedes $t_0 \in \mathbb{R}$ und jede beschränkte Umgebung U von t_0 nur endlich viele Summanden der Reihe für $t \in U$ nicht identisch verschwinden; somit ist $G|_U \in C^\infty(U)$ und daher $G \in C^\infty(\mathbb{R})$ (da t_0 beliebig war). Offensichtlich ist G zudem positiv und 1-periodisch. Also wird durch $h(t) := g(t)/G(t)$ eine Funktion aus $C_c^\infty(\mathbb{R})$ definiert. Für diese ist $\operatorname{supp} h = [-1,1]$ und es gilt

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} h(t-k) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{g(t-k)}{G(t-k)} = \frac{1}{G(t)} \sum_{k \in \mathbb{Z}} g(t-k) = \frac{G(t)}{G(t)} = 1 \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}.$$

Für $p = (p_1, \ldots, p_n) \in \mathbb{Z}^n$ und $\varepsilon > 0$ definieren wir nun $a_{p,\varepsilon} \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ durch

$$a_{p,\varepsilon}(x) \;:=\; h(\tfrac{x_1}{\varepsilon} - p_1) \cdot \ldots \cdot h(\tfrac{x_n}{\varepsilon} - p_n)\,.$$

Dann ist $\operatorname{supp} a_{p,\varepsilon} \;=\; \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - \varepsilon p\|_\infty \le \varepsilon\}$, und man hat

$$\sum_{p \in \mathbb{Z}^n} a_{p,\varepsilon}(x) \;=\; 1 \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^n.$$

Die Familie $(a_{p,\varepsilon})_{p \in \mathbb{Z}^n}$ heißt eine (glatte) *Zerlegung der Eins* (auch: “Partition der Eins”).

Bemerkung 12.9 Mit der Zerlegung $(a_{p,\varepsilon})_{p \in \mathbb{Z}^n}$ der Eins können wir nun auch beliebige C^k-Funktionen $f \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ in C^k-Funktionen mit kompaktem Träger zerlegen: Es ist

$$f \;=\; f \cdot 1 \;=\; f \cdot \sum_{p \in \mathbb{Z}^n} a_{p,\varepsilon} \;=\; \sum_{p \in \mathbb{Z}^n} f \cdot a_{p,\varepsilon}\,,$$

wobei $f a_{p,\varepsilon} \in C_c^k(\mathbb{R}^n)$ für alle $p \in \mathbb{Z}^n$, mit Träger $\operatorname{supp}(f a_{p,\varepsilon}) \subseteq \operatorname{supp}(a_{p,\varepsilon})$.

Bemerkung 12.10 Zerlegungen der Eins werden in Analysis und Differentialgeometrie viel benutzt; mit ihrer Hilfe gelingt es häufig (wie weiter unten im Beweis des Gaußschen Integralsatzes), globale Probleme in lokale Probleme überzuführen. Sie dienen auch dazu, lokal definierte Objekte zu globalen zusammenzubauen.

Vorbereitende Lemmas

Lemma 12.11 *Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $j \in \{1, \ldots, n\}$. Dann gilt*

(a) $\int_U \frac{\partial \phi}{\partial x_j}\, d\lambda_n = 0$ *für alle* $\phi \in C_c^1(U)$.

(b) $\int_U \frac{\partial \phi}{\partial x_j}\, \psi\, d\lambda_n = -\int_U \phi \frac{\partial \psi}{\partial x_j}\, d\lambda_n$ *für alle* $\phi \in C_c^1(U)$ *und* $\psi \in C^1(U)$.

Beweis. Wir dürfen o.B.d.A. $U = \mathbb{R}^n$ annehmen, da wir ψ durch 0 zu einer Funktion in $C_c^1(\mathbb{R}^n)$ fortsetzen können.

Da $\operatorname{supp} \phi$ kompakt ist, gibt es ein $R > 0$ mit $\operatorname{supp} \phi \subseteq [-R, R]^n$. Insbesondere verschwindet ϕ auf dem Rand des Würfels $[-R, R]^n$. Sei nun z.B. $j = 1$

(für die übrigen j verläuft der Beweis analog). Für alle $(x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n-1}$ ist dann

$$\int_{-R}^{R} \frac{\partial \phi}{\partial x_1}(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \;=\; \phi(R, x_2, \ldots, x_n) - \phi(-R, x_2, \ldots, x_n) \;=\; 0\,.$$

Mit dem Satz von Fubini erhalten wir daher

$$\begin{aligned}
\int_U \frac{\partial \phi}{\partial x_1}(x)\, d\lambda_n(x) \;&=\; \int_{[-R,R]^n} \frac{\partial \phi}{\partial x_1}(x)\, d\lambda_n(x) \\
&=\; \int_{[-R,R]^{n-1}} \int_{-R}^{R} \frac{\partial \phi}{\partial x_1}(x)\, dx_1\, d\lambda_{n-1}(x_2, \ldots, x_n) \;=\; 0\,.
\end{aligned}$$

Das liefert Aussage (a), und für (b) wenden wir (a) auf die Funktion $\phi\psi \in C_c^1(\mathbb{R}^n)$ an. Da $\frac{\partial(\phi\psi)}{\partial x_j} = \frac{\partial \phi}{\partial x_j}\psi + \phi\frac{\partial \psi}{\partial x_j}$ nach der Produktregel, folgt die Behauptung. □

Lemma 12.12 *Es sei $U' \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ offen, $I = \,]a,b[\, \subseteq \mathbb{R}$ und $h\colon U' \to I$ stetig differenzierbar. Wir setzen*

$$E \;:=\; \big\{(x', x_n) \in U' \times I \colon x_n \leq h(x')\big\} \;\text{ und }\; M \;:=\; \big\{(x', x_n) \in U' \times I \colon x_n = h(x')\big\}\,.$$

Dann gilt für jede Funktion $f \in C_c^1(U' \times I)$ und jedes $j \in \{1, \ldots, n\}$

$$\int_E \frac{\partial f}{\partial x_j}(x)\, d\lambda_n(x) \;=\; \int_M f(x)\, \nu_j(x)\, dS_M(x)\,,$$

wobei $\nu_j(x)$ die j-te Komponente des Normalenvektors

$$\nu(x) \;:=\; \frac{\big(-\operatorname{grad} h(x'),\, 1\big)}{\sqrt{1 + \|\operatorname{grad} h(x')\|_2^2}} \quad \text{mit } x = (x', x_n) \tag{111}$$

ist (*vgl. Beispiel* 11.8).

Beweis. Wir erinnern zunächst daran, dass das Oberflächenintegral einer Funktion H auf M nach Beispiel 10.13 gegeben ist durch

$$\int_M H\, dS_M(x') \;=\; \int_{U'} H(x', h(x'))\, \sqrt{1 + \|\operatorname{grad} h(x')\|_2^2}\; d\lambda_{n-1}(x')\,. \tag{112}$$

Wir unterscheiden nun zwei Fälle.

Fall 1: Sei $1 \leq j < n$. Für die Funktion

$$F \colon U' \times I \to \mathbb{R}\,, \quad F(x', z) \;:=\; \int_a^z \; f(x', x_n)\, dx_n$$

gilt nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung und Satz 3.35

$$\frac{\partial F}{\partial z}\,(x', z) \;=\; f(x', z) \quad \text{und} \quad \frac{\partial F}{\partial x_j}\,(x', z) \;=\; \int_a^z \frac{\partial f}{\partial x_j}\,(x', x_n)\, dx_n\,.$$

Hieraus folgt mit der Kettenregel

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x_j} \int_a^{h(x')} & f(x', x_n)\, dx_n \\
&= \frac{\partial}{\partial x_j}\, F\Big(x', h(x')\Big) \\
&= \frac{\partial F}{\partial z}\,\Big(x', h(x')\Big) \frac{\partial h}{\partial x_j}\,(x') + \frac{\partial F}{\partial x_j}\,\Big(x', h(x')\Big) \\
&= f\Big(x', h(x')\Big) \frac{\partial h}{\partial x_j}\,(x') + \int_a^{h(x')} \frac{\partial f}{\partial x_j}\,(x', x_n)\; dx_n\,. \qquad (113)
\end{aligned}$$

Wir beachten nun, dass die Menge $L := \mathrm{pr}_1(\mathrm{supp} f) \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ kompakt ist als Bild einer kompakten Menge unter der stetigen Abbildung $\mathrm{pr}_1 \colon \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n-1}$. Die Funktion $U' \to \mathbb{R}$, $x' \mapsto \int_a^{h(x')} f(x', x_n)\, dx_n$ verschwindet außerhalb L und hat somit einen kompakten Träger. Nach Lemma 12.11 (a) ist also

$$\int_{U'} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\int_a^{h(x')} f(x', x_n)\, dx_n \right) d\lambda_{n-1}(x') \;=\; 0\,. \qquad (114)$$

Somit ergibt sich

$$
\begin{aligned}
\int_E \frac{\partial f}{\partial x_j}(x)\, d\lambda_n(x) \;&=\; \int_{U'} \int_a^{h(x')} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x', x_n)\, dx_n\, d\lambda_{n-1}(x') \\
&= \int_{U'} \frac{\partial}{\partial x_j} \int_a^{h(x')} f(x', x_n)\, dx_n\, d\lambda_{n-1}(x') - \int_{U'} f\big(x', h(x')\big) \frac{\partial h}{\partial x_j}(x')\, d\lambda_{n-1}(x') \\
&= \int_{U'} f(x', h(x'))\, \underbrace{\frac{-\frac{\partial h}{\partial x_j}(x')}{\sqrt{1 + \|\operatorname{grad} h(x')\|_2^2}}}_{=\nu_j(x', h(x'))} \sqrt{1 + \|\operatorname{grad} h(x')\|_2^2}\, d\lambda_{n-1}(x') \\
&= \int_M f(x)\, \nu_j(x)\, dS_M(x)\,,
\end{aligned}
$$

wobei wir den Satz von Fubini benutzt haben, dann (113) zum Umschreiben des inneren Integrals, dann (114) und schließlich (112).

Fall 2: Sei $j = n$. Da für jedes $x' \in U'$ die Funktion $x_n \mapsto f(x', x_n)$ einen kompakten Träger hat, folgt aus dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

$$
\int_a^{h(x')} \frac{\partial f}{\partial x_n}(x', x_n)\, dx_n \;=\; f\big(x', h(x')\big)\,,
$$

so dass wieder

$$
\begin{aligned}
&\int_E \frac{\partial f}{\partial x_n}(x)\, d\lambda_n(x) \\
&\qquad= \int_{U'} \int_a^{h(x')} \frac{\partial f}{\partial x_n}(x', x_n)\, dx_n\, d\lambda_{n-1}(x') \\
&\qquad= \int_{U'} f\big(x', h(x')\big)\, d\lambda_{n-1}(x') \\
&\qquad= \int_{U'} f\big(x', h(x')\big)\, \underbrace{\frac{1}{\sqrt{1 + \|\operatorname{grad} h(x')\|_2^2}}}_{\nu_n(x', h(x'))} \sqrt{1 + \|\operatorname{grad} h(x')\|_2^2}\, d\lambda_{n-1}(x') \\
&\qquad= \int_M f(x)\, \nu_n(x)\, dS_M(x)\,.
\end{aligned}
$$

Damit ist der Beweis vollständig. □

Bemerkung 12.13 Sind U', I, h, E und M wie in Lemma 12.12 und $F = (F_1, \ldots, F_n) : U' \times I \to \mathbb{R}^n$ ein Vektorfeld mit $F_j \in C_c^1(U' \times I)$ für alle $j \in \{1, \ldots, n\}$, so liefert Anwendung des Lemmas auf $f = F_j$:

$$\int_E \frac{\partial F_j}{\partial x_j}(x)\, d\lambda_n(x) \;=\; \int_M F_j(x)\, \nu_j(x)\, dS_M(x) \quad \text{für } j \in \{1, \ldots, n\}.$$

Summation über $j = 1, \ldots, n$ führt auf

$$\int_E \operatorname{div} F \, d\lambda_n \;=\; \int_M \big\langle F(x), \nu(x) \big\rangle \, dS_M(x)\,. \tag{115}$$

Beweis des Gaußschen Integralsatzes

Es sei $V \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $F\colon V \to \mathbb{R}^n$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld und $K \subseteq V$ ein Kompaktum in $\mathbb{R}^n$ mit C^1-Rand. Wir haben in Beispiel 11.12 gesehen, dass jeder Punkt $a \in \partial K$ eine Umgebung $U \subseteq \mathbb{R}^n$ hat, in der sich ∂K (notfalls nach Permutieren der Koordinaten) als Graph einer Funktion darstellen lässt und $K \cap U$ die Menge derjenigen Punkte ist, die unter diesem Graphen liegen (oder oberhalb: Dieser Fall lässt sich analog behandeln, weswegen er im Folgenden nicht im Detail ausgeführt wird). Es existiert deshalb eine Familie $(U_j)_{j \in J}$ offener Teilmengen $U_j \subseteq V$ mit $K \subseteq \bigcup_{j \in J} U_j$ derart, dass jedes U_j *eine* der folgenden Bedingungen erfüllt:

(a) $U_j \subseteq K \setminus \partial K = \overset{\circ}{K}$ (Inneres von K); oder:

(b) Nach eventueller Umnummerierung der Koordinaten hat U_j die Form $U_j = U' \times\,]a, b[$, wobei $U' \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ offen ist und eine stetig differenzierbare Funktion $h\colon U' \to \mathbb{R}$ existiert derart, dass

$$U_j \cap K \;=\; \big\{(x', x_n) \in U' \times\,]a, b[\,: x_n \leq h(x')\big\}$$

ist (oder die analoge Menge mit $x_n \geq h(x')$ statt $x_n \leq h(x')$) und

$$U_j \cap \partial K \;=\; \big\{(x', x_n) \in U' \times\,]a, b[\,: x_n = h(x')\big\}\,.$$

Es sei λ eine Lebesguesche Zahl der Überdeckung $(U_j)_{j \in J}$ des Kompaktums K (siehe Satz 11.13) und $\varepsilon := \frac{\lambda}{2\sqrt{n}}$. Zu diesem ε betrachten wir die in **12.8** konstruierte glatte Zerlegung der Eins $(a_{p,\varepsilon})_{p \in \mathbb{Z}^n}$. Der Träger jeder Funktion

$a_{p,\varepsilon}$ ist ein Würfel der Seitenlänge 2ε und hat somit den Durchmesser $2\varepsilon\sqrt{n} = \lambda$. Setze

$$P \;:=\; \{p \in \mathbb{Z}^n \colon \operatorname{supp} a_{p,\varepsilon} \cap K \neq \emptyset\}\,.$$

Nach Definition der Lebesgueschen Zahl (siehe Satz 11.13) ist für jedes $p \in P$ dann der Träger $\operatorname{supp} a_{p,\varepsilon}$ in einer der Mengen U_j enthalten. Da K beschränkt ist, ist P eine endliche Menge. Wir benutzen nun die Zerlegung der Eins, um den Gaußschen Integralsatz auf den Fall zurückzuführen, wo sich alles in einer der Mengen U_j abspielt. Es ist

$$\int_K \operatorname{div} F \, d\lambda_n \;=\; \int_K \operatorname{div}\left(\sum_{p\in P} a_{p,\varepsilon} F\right) d\lambda_n \;=\; \sum_{p\in P} \int_K \operatorname{div}\left(a_{p,\varepsilon} F\right) d\lambda_n$$

und analog

$$\int_{\partial K} \big\langle F(x), \nu(x)\big\rangle \, dS_{\partial K}(x) \;=\; \sum_{p\in P} \int_{\partial K} \big\langle (a_{p,\varepsilon}F)(x), \nu(x)\big\rangle \, dS_{\partial K}(x)\,.$$

Zum Beweis von (109) müssen wir also nur zeigen, dass

$$\int_K \operatorname{div}\left(a_{p,\varepsilon} F\right) d\lambda_n \;=\; \int_{\partial K} \big\langle (a_{p,\varepsilon}F)(x), \nu(x)\big\rangle \, dS_{\partial K}(x) \tag{116}$$

für alle $p \in P$. Gemäß unserer Konstruktion ist für jedes $p \in P$ der Träger von $a_{p,\varepsilon}$ in einer der Mengen U_j enthalten. Ist $U_j \subseteq \mathring{K}$, so ist

$$\int_{\partial K} \big\langle (a_{p,\varepsilon}F)(x), \nu(x)\big\rangle \, dS_{\partial K}(x) \;=\; 0\,,$$

da $a_{p,\varepsilon}$ auf ∂K verschwindet. Da auch

$$\int_K \operatorname{div}\left(a_{p,\varepsilon} F\right) d\lambda_n \;=\; \int_{U_j} \operatorname{div}\left(a_{p,\varepsilon} F\right) d\lambda_n \;=\; \sum_{i=1}^{n} \int_{U_j} \frac{\partial (a_{p,\varepsilon}F)}{\partial x_j} \, d\lambda_n \;=\; 0$$

nach Lemma 12.11 (a), gilt (116) in diesem Fall. Genügt hingegen U_j der Bedingung (b), so gilt (116) nach Bemerkung 12.13. □

Anwendung: Die Greensche Formel

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $K \subseteq U$ ein Kompaktum mit C^1-Rand und ν das äußere Normalenfeld von K. Für eine stetig differenzierbare Funktion $f : U \to \mathbb{R}$ definieren wir die *Ableitung in Normalenrichtung im Punkt* $a \in \partial K$ durch

$$\frac{\partial f}{\partial \nu}(a) \;:=\; \big\langle \operatorname{grad} f(a),\, \nu(a) \big\rangle \;=\; \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(a)\, \nu_j(a)\,.$$

Weiter definieren wir für $f \in C^2(U)$

$$\Delta f \;:=\; \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2} \;:\; U \;\to\; \mathbb{R}$$

und nennen $\Delta \colon C^2(U) \to C(U)$, $f \mapsto \Delta f$ den *Laplace-Operator*.

Lemma 12.14 *Für $f, g \in C^2(U)$ und $F \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$ gilt*

(a) $\operatorname{div}(fF) \;=\; f \operatorname{div} F + \langle \operatorname{grad} f, F \rangle$.

(b) $\operatorname{div} \operatorname{grad} F \;=\; \Delta f$.

Der Beweis erfolgt durch Nachrechnen.

Satz 12.15 (Greensche Formel). *Für $f, g \in C^2(U)$ und K wie oben gilt*

$$\int_K (f\Delta g - g\Delta f)\, d\lambda_n \;=\; \int_{\partial K} \Big(f\frac{\partial g}{\partial \nu} - g\frac{\partial f}{\partial \nu} \Big)\, dS_{\partial K}\,.$$

Beweis. Wir wenden den Gaußschen Integralsatz auf das Vektorfeld

$$F \colon U \to \mathbb{R}^3\,, \qquad F(x) \;:=\; f(x)\,(\operatorname{grad} g)(x) - g(x)\,(\operatorname{grad} f)(x)$$

an:

$$\int_K \operatorname{div}\, F\, d\lambda_n \;=\; \int_{\partial K} \langle F(x), \nu(x) \rangle\, dS_{\partial K}(x)\,. \tag{117}$$

Nach Lemma 12.14 ist hier

$$\begin{aligned} \operatorname{div} F \;&=\; \operatorname{div}(f \operatorname{grad} g) - \operatorname{div}(g \operatorname{grad} f) \\ &=\; f \operatorname{div}(\operatorname{grad} g) + \langle \operatorname{grad} f, \operatorname{grad} g \rangle - g \operatorname{div}\big(\operatorname{grad} f\big) \\ &\qquad - \langle \operatorname{grad} g, \operatorname{grad} f \rangle \;=\; f\Delta g - g\Delta f\,. \end{aligned} \tag{118}$$

Auf ∂K ergibt sich

$$\langle F,\, \nu \rangle \;=\; f\, \langle \operatorname{grad} g,\, \nu \rangle - g\, \langle \operatorname{grad} f,\, \nu \rangle \;=\; f\,\frac{\partial g}{\partial \nu} - g\,\frac{\partial f}{\partial \nu}\,. \tag{119}$$

Einsetzen von (118) und (119) in (117) liefert die Behauptung. □

13 Die Integralsätze von Green und Stokes

13.1 Der Greensche Integralsatz in der Ebene

In diesem Abschnitt beweisen wir eine Umformulierung des Gaußschen Integralsatzes im 2-dimensionalen Fall, den Greenschen Integralsatz. Bevor wir ihn angeben und beweisen können, sei kurz an die verschiedenen Typen von Wegintegralen erinnert, die wir aus der Analysis 2 kennen.

In Beispiel 10.12 sind uns Wegintegrale skalarwertiger Funktionen der Gestalt

$$\int_I f(\gamma(t))\, \|\gamma'(t)\|_2\, dt$$

begegnet, wobei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall ist, $\gamma\colon I \to \mathbb{R}^n$ ein stetig differenzierbarer Weg und $f : \gamma(I) \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. In diesem Kapitel benötigen wir nun eine andere Art von Wegintegralen (für vektorwertige Funktionen), definiert wie folgt:

Definition 13.1 Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n) : I \to \mathbb{R}^n$ ein stetig differenzierbarer Weg und $F = (F_1, \ldots, F_n) : \gamma(I) \to \mathbb{R}^n$ eine stetige Funktion. Wir definieren

$$\int_\gamma \langle F,\, d\vec{s}\,\rangle \;:=\; \int_\gamma F_1\, dx_1 \;+\; \cdots \;+\; F_n\, dx_n \;:=\; \sum_{j=1}^n \int_I F_j(\gamma(t))\, \gamma_j'(t)\, dt\,,$$

wann immer die beteiligten eigentlichen oder uneigentlichen Riemann-Integrale existieren (für ein kompaktes Intervall I ist dies automatisch erfüllt).[39]

Bemerkung 13.2 (a) Physiker würden für das Wegintegral $\int_\gamma \langle F,\, d\vec{s}\rangle$ eher $\int_\gamma \vec{F}(\vec{x}) \bullet d\vec{s}$ oder $\int_\gamma \mathbf{F}(\mathbf{x}) \bullet d\mathbf{s}$ schreiben.

(b) Manchen (aber nicht allen) Hörern der Vorlesung sind in anderen Vorlesungen bereits “Pfaffsche Formen” begegnet; das Wegintegral aus Definition 13.1 entspricht dem Integral einer Pfaffschen Form längs des Weges γ. Wir werden den Formalismus Pfaffscher Formen nicht benutzen.

[39] In diesem Kapitel bezeichnen wir mit $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ einerseits die Komponenten eines Weges γ; an anderer Stelle jedoch betrachten wir k Wege $\gamma_1, \ldots, \gamma_k$ in $\mathbb{R}^2$. Es ist immer aus dem Zusammenhang klar, was gemeint ist.

Unser Ziel ist nun die folgende Variante des Gaußschen Integralsatzes im $\mathbb{R}^2$ (wobei die Definition des Integrals auf der rechten Seite sofort nachgetragen wird):

Satz 13.3 (Greenscher Integralsatz). *Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^2$ offen und $K \subseteq U$ ein Kompaktum mit C^1-Rand. Für jedes stetig differenzierbare Vektorfeld $F = (F_1, F_2)\colon U \to \mathbb{R}^2$ gilt dann*

$$\int_K \operatorname{div} F \, d\lambda_2 \;=\; \int_{\partial K} F_1 \, dx_2 - F_2 \, dx_1 \,. \tag{120}$$

Bemerkung 13.4 Der Rand ∂K eines Kompaktums $K \subseteq \mathbb{R}^2$ mit C^1-Rand ist eine kompakte 1-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^2$. Wir werden im folgenden stets die Annahme machen, dass ∂K eine disjunkte Vereinigung

$$\partial K \;=\; \Gamma_1 \cup \cdots \cup \Gamma_k$$

von endlich vielen geschlossenen C^1-Kurven $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_k$ ist. In Wirklichkeit ist diese Annahme unnötig, sie ist automatisch erfüllt. Aus Zeitgründen wollen wir dies jedoch nicht beweisen. Für die wichtigsten Kompakta mit glattem Rand (Kreisscheibe, Kreisring, etc.) ist die Annahme offensichtlich erfüllt.

Allgemeiner gilt sogar:

Satz 13.5 *Jede* 1*-dimensionale kompakte Untermannigfaltigkeit $M \subseteq \mathbb{R}^n$ ist eine disjunkte Vereinigung $M = \Gamma_1 \cup \cdots \cup \Gamma_k$ von endlich vielen geschlossenen C^1-Kurven $\Gamma_j \subseteq \mathbb{R}^n$.* □

In einem (nicht prüfungsrelevanten) Anhang zum Skript können Sie bei Interesse den Beweis nachlesen. Hierbei sind geschlossene C^1-Kurven wie folgt definiert:

Definition 13.6

(a) Ein auf einem offenen Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ definierter C^1-Weg $\gamma\colon I \to \mathbb{R}^n$ heißt *regulär*, wenn er eine Immersion ist, also $\gamma'(t) \neq 0$ für alle $t \in I$.

(b) Eine Teilmenge $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt *geschlossene C^1-Kurve*,[40] wenn es einen 1-periodischen, regulären C^1-Weg $\gamma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ mit Bild $\gamma(\mathbb{R}) = \Gamma$ gibt derart, $\gamma|_{[0,1[}$ injektiv ist.

[40] Eigentlich sollte man solche Kurven auch noch "doppelpunktfrei" nennen, aber die Bezeichnung würde dann sehr schwerfällig.

Beispielsweise ist der Kreis $\mathbb{S}_1$ eine geschlossene C^1-Kurve in $\mathbb{R}^2$.

Bemerkung 13.7 Geschlossene C^1-Kurven in $\mathbb{R}^n$ sind übrigens kompakte 1-dimensionale Untermannigfaltigkeiten von $\mathbb{R}^n$.

Beweis: Für Γ und γ wie in Definition 13.6 (b) gilt $\Gamma = \gamma([0,1])$ (denn γ ist 1-periodisch). Also ist Γ kompakt. Für jedes $a \in \mathbb{R}$ ist $\gamma|_{[a,a+\frac{1}{2}]}$ injektiv und somit $\gamma|_{]a,a+\frac{1}{2}[}$ eine topologische Einbettung. Das Bild $W := \gamma(]a, a+\frac{1}{2}[)$ ist offen in Γ, denn es ist

$$W \;=\; \gamma([a,a+1]) \setminus \gamma([a+\tfrac{1}{2}, a+1])\,,$$

wobei $\gamma([a+\frac{1}{2}, a+1])$ kompakt und somit abgeschlossen ist. Also ist $\gamma|_{]a,a+\frac{1}{2}[}\colon\,]a, a+\frac{1}{2}[\, \to \Gamma$ eine Immersion mit offenem Bild, die eine topologische Einbettung ist. Somit ist Γ eine 1-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$ und vorige Abbildungen sind lokale Parametrisierungen. Mit Lemma 9.24 (oder direkt) sehen wir nun, dass sogar $\gamma|_{]a,a+1[}$ eine lokale Parametrisierung für Γ ist, für alle $a \in \mathbb{R}$.

Um das Integral über $\partial K = \Gamma_1 \cup \cdots \cup \Gamma_k$ auf der rechten Seite von (120) zu definieren, wobei $\Gamma_j = \gamma_j(\mathbb{R})$ mit einem 1-periodischen regulären C^1-Weg wie in Definition 13.6 (b), müssen wir alle Wege γ_j so wählen, dass K "links von γ_j liegt". Damit ist folgendes gemeint:

Definition 13.8 Ist $K \subseteq \mathbb{R}^2$ ein Kompaktum mit C^1-Rand und $\gamma\colon I \to \partial K \subseteq \mathbb{R}^2$ ein regulärer C^1-Weg, so sagen wir K *liegt links von* γ, wenn für jedes $t \in I$ der äußere Normalenvektor $\nu(\gamma(t))$ an ∂K und $\gamma'(t)$ ein Rechtssystem bilden, also

$$\det\Big(\nu(\gamma(t)),\ \gamma'(t)\Big) \;>\; 0 \tag{121}$$

(wobei die Vektoren als Spaltenvektoren zu verstehen sind).

Bemerkung 13.9 Ist $\gamma\colon I \to \partial K \subseteq \mathbb{R}^2$ ein regulärer C^1-Weg, so ist $\gamma'(t) \in T_{\gamma(t)}(\partial K)$ und somit sind $\gamma(t)$ und $\nu(\gamma(t))$ zueinander orthogonale Vektoren. Weil beide Vektoren von Null verschieden sind, gilt also

$$h(t) \;:=\; \det\Big(\nu(\gamma(t)),\ \gamma'(t)\Big) \;\neq\; 0\,.$$

Da $h\colon I \to \mathbb{R}\setminus\{0\}$ stetig ist, folgt mit dem Zwischenwertsatz, dass entweder $h(I) \subseteq \,]0,\infty[$ oder $h(I) \subseteq \,]-\infty, 0[$. Folglich liegt entweder K links von γ, oder K liegt links vom umgekehrten Weg $t \mapsto \gamma(-t)$.

Nun können wir endlich Integrale über ∂K definieren:

Definition 13.10 Ist $F\colon \partial K \to \mathbb{R}^2$ stetig, so definieren wir

$$\int_{\partial K} \langle F,\, d\vec{s}\rangle \;:=\; \sum_{j=1}^{k} \int_{\eta_j} \langle F,\, d\vec{s}\rangle\,,$$

wobei $\partial K = \Gamma_1 \cup \cdots \cup \Gamma_k$ mit paarweise disjunkten geschlossenen C^1-Kurven Γ_j und $\eta_j\colon I_j \to \Gamma_j$ auf offenen Intervallen $I_j \subseteq \mathbb{R}$ definierte lokale Parametrisierungen von Γ_j sind derart, dass $\Gamma_j \setminus \eta_j(I_j)$ einpunktig (und somit eine Nullmenge) ist und K links von η_j liegt (man nehme z.B. $\eta_j := \gamma_j|_{]0,1[}$ für einen 1-periodischen regulären C^1-Weg γ_j wie oben).

Wir müssten nun eigentlich zeigen, dass $\int_{\partial K}\langle F,\, d\vec{s}\rangle$ wohldefiniert ist, unabhängig von der Wahl der lokalen Parametrisierungen η_j. Für das uns ausschließlich interessierende Integral auf der rechten Seite von (120) ist die Wohldefiniertheit jedoch automatisch, sobald wir den Satz bewiesen haben (denn wir erhalten stets die linke Seite).[41]

Eine nützliche Beobachtung ist:

Lemma 13.11 *Ist $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)\colon I \to \partial K \subseteq \mathbb{R}^2$ ein regulärer C^1-Weg und liegt K links von γ, so gilt*

$$\nu\big(\gamma(t)\big) \;=\; \frac{1}{\|\gamma'(t)\|_2} \begin{pmatrix} \gamma_2'(t) \\ -\gamma_1'(t) \end{pmatrix}. \tag{122}$$

Beweis. Vorübergehend schreiben wir $w(t)$ für den Vektor auf der rechten Seite von (122). Offensichtlich ist $\|w(t)\|_2 = 1$, und Ausrechnen zeigt

$$\langle \gamma'(t),\, w(t)\rangle \;=\; 0\,,$$

woraus $w(t) \in \big(T_{\gamma(t)}(\partial K)\big)^\perp = N_{\gamma(t)}(\partial K)$ folgt. Da $N_{\gamma(t)}(\partial K)$ eindimensional ist, folgt $w(t) = \nu(\gamma(t))$ oder $w(t) = -\nu(\gamma(t))$. Da

$$\det\Big(w(t),\; \gamma'(t)\Big) \;=\; \frac{\|\gamma'(t)\|_2^2}{\|\gamma'(t)\|_2} \;=\; \|\gamma'(t)\|_2 \;>\; 0$$

[41] Der Vollständigkeit halber zeigen wir im Anhang zu diesem Kapitel die Wohldefiniertheit allgemein.

wie auch in (121), folgt $w(t) = \nu(\gamma(t))$. $\square$

Beweis des Greenschen Integralsatzes. Nach dem Gaußschen Integralsatz ist

$$\int_K \operatorname{div} F \, d\lambda_2 \;=\; \int_{\partial K} \langle F(x),\; \nu(x)\rangle \, dS_{\partial K}(x)\,.$$

Wir brauchen also nur zu zeigen, dass

$$\int_{\partial K} F_1 \, dx_2 - F_2 \, dx_1 \;=\; \int_{\partial K} \langle F(x), \nu(x)\rangle \, dS_{\partial K}(x)\,. \tag{123}$$

Wir führen den Beweis für den Fall, dass $\partial K = \Gamma$ eine geschlossene C^1-Kurve ist; der allgemeine Beweis für $\partial K = \Gamma_1 \cup \cdots \cup \Gamma_k$ geht ganz analog, man hat nur stets Γ (und seine lokalen Parametrisierungen) durch die Kurven Γ_j (und ihre lokalen Parametrisierungen) zu ersetzen und über $j = 1, \ldots, k$ zu summieren.

Sei nun also $\gamma\colon]a, b[\to \Gamma = \partial K$ eine lokale Parametrisierung derart, dass K links von γ liegt und $\partial K \setminus \gamma(]a, b[)$ einpunktig ist. Wir berechnen die rechte und linke Seite von (123). Zunächst ist

$$\int_\gamma F_1 \, dx_2 - F_2 \, dx_1 \;=\; \int_a^b \Big(F_1(\gamma(t))\gamma_2'(t) - F_2(\gamma(t))\gamma_1'(t) \Big) \, dt$$

das Integral auf der linken Seite. Das rechte Integral in (123) berechnen wir zu

$$\begin{aligned}
\int_{\partial K} \langle F(x), \nu(x)\rangle \, dS_{\partial K}(x) \;&=\; \int_{\gamma(]a,b[)} \big\langle F(x), \nu(x) \big\rangle \, dS_{\partial K}(x) \\
&=\; \int_a^b \big\langle F(\gamma(t)),\; \nu(\gamma(t)) \big\rangle \, \|\gamma'(t)\|_2 \, dt \\
&=\; \int_a^b \Big\langle F(\gamma(t)),\; \Big(\begin{matrix} \gamma_2'(t) \\ -\gamma_1'(t) \end{matrix} \Big) \Big\rangle \, dt \\
&=\; \int_a^b \Big(F_1(\gamma(t))\gamma_2'(t) - F_2(\gamma(t))\gamma_1'(t) \Big) \, dt\,;
\end{aligned}$$

hierbei wurde zuerst eine einpunktige Menge (Nullmenge)weggelassen, dann Beispiel 10.12 benutzt und schließlich die Formel (122) für das äußere Normalenfeld eingesetzt. Da beide Integrale übereinstimmen, folgt (123) und somit die Behauptung. $\square$

13.2 Der Stokessche Integralsatz im Raum

Hält man eine geschlossene Drahtschlinge Γ in eine strömende Flüssigkeit, so hat man den Eindruck, man könne sagen, wieviel Flüssigkeit pro Zeit durch die Schlinge hindurchfließt. Ist $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ein Vektorfeld, so würde man also gerne dem "Fluss von F durch die geschlossene Kurve Γ" einen Sinn geben.[42] Um dies zu erreichen, verfährt man, grob gesagt, wie folgt: Man "spannt eine Fläche G in Γ ein" (die also von Γ berandet wird) und berechnet den Fluss durch G.

Um diese Idee zu präzisieren, sei $U \subseteq \mathbb{R}^2$ offen und $\phi : U \to \mathbb{R}^3$ eine Immersion, die eine topologische Einbettung ist. Dann ist $M := \phi(U)$ eine 2-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^3$. Sei nun $K \subseteq U$ ein Kompaktum mit C^1-Rand. Dann ist $G := \phi(K) \subseteq M$ eine kompakte Menge, die von der Kurve $\partial G = \phi(\partial K)$ berandet wird (denn $\phi : U \to M$ ist ein Homöomorphismus). Wir definieren den *Fluss eines stetigen Vektorfeldes F durch die Kurve ∂G* als das Integral

$$\int_G \big\langle F(x), \nu(x) \big\rangle \, dS_M(x), \tag{124}$$

wobei wir die Richtung des Normalenvektors so festlegen, dass

$$\det\Big(\frac{\partial \phi}{\partial x_1}(p), \frac{\partial \phi}{\partial x_2}(p), \nu(\phi(p)) \Big) \; > \; 0\,.$$

Natürlich ist dieses Vorgehen problematisch, denn der "Fluss von F durch Γ" könnte ja von der "eingespannten Fläche" G abhängen. Wir zeigen nun, dass für spezielle Felder (Rotationsfelder) das Integral (124) tatsächlich nur von der Randkurve ∂G abhängt, und stellen das Integral (124) als Kurvenintegral über den Rand dar.

Zur Erinnerung: Ist $V \subseteq \mathbb{R}^3$ offen und $F : V \to \mathbb{R}^3$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld. Wir definieren ein neues Vektorfeld $\operatorname{rot} F : V \to \mathbb{R}^3$, die *Rotation*

[42] Auch in vielen anderen Anwendungen ist diese Denkweise wichtig, z.B. in der Elektrodynamik.

von F, durch

$$\operatorname{rot} F \;:=\; \det \begin{pmatrix} e_1 & \dfrac{\partial}{\partial x_1} & F_1 \\ e_2 & \dfrac{\partial}{\partial x_2} & F_2 \\ e_3 & \dfrac{\partial}{\partial x_3} & F_3 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \dfrac{\partial F_3}{\partial x_2} - \dfrac{\partial F_2}{\partial x_3} \\ \dfrac{\partial F_1}{\partial x_3} - \dfrac{\partial F_3}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial x_1} - \dfrac{\partial F_1}{\partial x_2} \end{pmatrix}$$

(wobei die Determinantenschreibweise nur symbolisch zu verstehen ist).

Satz 13.12 (Stokesscher Integralsatz). *Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^2$ offen und $\phi\colon U \to \mathbb{R}^3$ eine zweimal stetig differenzierbare Immersion, die eine Einbettung ist. Weiter sei $K \subseteq U$ ein Kompaktum mit C^1-Rand und F ein stetig differenzierbares Vektorfeld auf einer offenen Umgebung $V \subseteq \mathbb{R}^3$ von $G := \phi(K)$. Es sei $M := \phi(U)$ und $\nu\colon M \to \mathbb{R}^3$ das durch*

$$\nu\big(\phi(u)\big) \;=\; \frac{X_1(u) \times X_2(u)}{\|X_1(u) \times X_2(u)\|_2} \tag{125}$$

mit

$$X_1(u) \;:=\; \frac{\partial \phi}{\partial u_1}(u) \;=\; \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \phi_1}{\partial u_1}(u) \\ \dfrac{\partial \phi_2}{\partial u_1}(u) \\ \dfrac{\partial \phi_3}{\partial u_1}(u) \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad X_2(u) \;:=\; \frac{\partial \phi}{\partial u_2}(u) \;=\; \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \phi_1}{\partial u_2}(u) \\ \dfrac{\partial \phi_2}{\partial u_2}(u) \\ \dfrac{\partial \phi_3}{\partial u_2}(u) \end{pmatrix}$$

definierte Normalenfeld,[43] *wobei wir Elemente $u \in U$ als $u = (u_1, u_2)$ schreiben. Dann gilt*

$$\int_G \langle \operatorname{rot} F(x),\, \nu(x)\rangle \, dS_M(x) \;=\; \int_{\partial G} \big\langle F,\ d\vec{s}\,\big\rangle\,. \tag{126}$$

Hierbei ist das Integral auf der rechten Seite von (126) definiert als

$$\int_{\partial G} \big\langle F,\ d\vec{s}\,\big\rangle \;=\; \sum_{j=1}^{k} \int_{\phi\circ\gamma_j} \big\langle F,\ d\vec{s}\,\big\rangle\,,$$

[43] Siehe Beispiel 11.11.

wobei $\partial K = \Gamma_1 \cup \cdots \cup \Gamma_k$ ist mit paarweise disjunkten geschlossenen C^1-Kurven Γ_j und $\gamma_j : I_j \to \Gamma_j$ lokale Parametrisierungen sind derart, dass K links von γ_j liegt und $\Gamma_j \setminus \gamma_j(I_j)$ einpunktig ist. Sobald wir (126) gezeigt haben, ist die Wohldefiniertheit des vorigen Integrals automatisch gegeben.

Beweis. Die Beweisstrategie ist, die Behauptung auf den Greenschen Integralsatz für ein geeignetes Vektorfeld auf U zurückzuführen.

Nachdem wir notfalls U durch $\phi^{-1}(V)$ ersetzt haben, dürfen wir annehmen, dass $M = \phi(U) \subseteq V$. Die Oberfläche des von den Vektoren $X_1(u)$ und $X_2(u)$ aufgespannten Parallelogramms ist gleich $\|X_1(u) \times X_2(u)\|_2$ und somit

$$\sqrt{g_\phi(u)} \;=\; \|X_1(u) \times X_2(u)\|_2 \tag{127}$$

(vgl. Motivation 10.1). Für das Oberflächenintegral erhalten wir somit

$$\begin{aligned}
&\int_G \big\langle (\operatorname{rot} F)(x),\, \nu(x) \big\rangle \, dS_M(x) \\
&\quad= \int_K \big\langle (\operatorname{rot} F)(\phi(u)), \nu(\phi(x)) \big\rangle \sqrt{g_\phi(u)} \, d\lambda_2(u) \\
&\quad= \int_K \left\langle (\operatorname{rot} F)(\phi(u)), \frac{X_1(u) \times X_2(u)}{\|X_1(u) \times X_2(u)\|_2} \right\rangle \|X_1(u) \times X_2(u)\|_2 \, d\lambda_2(u) \\
&\quad= \int_K \Big\langle (\operatorname{rot} F)(\phi(u)),\, X_1(u) \times X_2(u) \Big\rangle \, d\lambda_2(u) \,,
\end{aligned} \tag{128}$$

wobei die expliziten Formeln (125) und (127) eingesetzt wurden. Bevor wir weiterrechnen, beachten wir, dass beide Seiten von (126) linear von F abhängen. Wir können daher die Fälle, wo F nur eine von Null verschiedene Komponente hat, getrennt betrachten und nehmen o.B.d.A. $F_2 = F_3 = 0$ an. Dann ist

$$\operatorname{rot} F \;=\; \begin{pmatrix} 0 \\[4pt] \dfrac{\partial F_1}{\partial x_3} \\[4pt] -\dfrac{\partial F_1}{\partial x_2} \end{pmatrix},$$

und mit den Bezeichnungen $\partial_j \phi_k := \frac{\partial \phi_k}{\partial u_j}$ vereinfacht sich der Integrand von (128) zu

$$
\begin{aligned}
\langle \operatorname{rot} F, X_1 \times X_2 \rangle &= \\
&= \frac{\partial F_1}{\partial x_3} (\partial_1\phi_3 \partial_2\phi_1 - \partial_1\phi_1\partial_2\phi_3) - \frac{\partial F_1}{\partial x_2} (\partial_1\phi_1\partial_2\phi_2 - \partial_1\phi_2\partial_2\phi_1) \\
&= \Big(\frac{\partial F_1}{\partial x_3}\,\partial_1\phi_3 + \frac{\partial F_1}{\partial x_2}\,\partial_1\phi_2\Big)\partial_2\phi_1 - \Big(\frac{\partial F_1}{\partial x_3}\,\partial_2\phi_3 + \frac{\partial F_1}{\partial x_2}\,\partial_2\phi_2\Big)\partial_1\phi_1 \\
&= \Big(\frac{\partial F_1}{\partial x_3}\,\partial_1\phi_3 + \frac{\partial F_1}{\partial x_2}\,\partial_1\phi_2 + \frac{\partial F_1}{\partial x_1}\,\partial_1\phi_1\Big)\partial_2\phi_1 \\
&\quad -\Big(\frac{\partial F_1}{\partial x_1}\,\partial_2\phi_1 + \frac{\partial F_1}{\partial x_3}\,\partial_2\phi_3 + \frac{\partial F_1}{\partial x_2}\,\partial_2\phi_2\Big)\partial_1\phi_1 \\
&= \frac{\partial(F_1\circ\phi)}{\partial u_1}\,\frac{\partial\phi_1}{\partial u_2} - \frac{\partial(F_1\circ\phi)}{\partial u_2}\,\frac{\partial\phi_1}{\partial u_1}\,. \qquad (129)
\end{aligned}
$$

Es ist $\partial K = \Gamma_1 \cup \cdots \cup \Gamma_k$ mit paarweise disjunkten geschlossenen C^1-Kurven Γ_j. Wir führen den Beweis nur für den Fall, dass $\partial K = \Gamma$ eine geschlossene C^1-Kurve ist; der allgemeine Fall geht jedoch völlig analog, man hat nur überall Γ durch Γ_j zu ersetzen und über j zu summieren. Wir wählen eine lokale Parametrisierung $\gamma\colon\,]a,b[\to \partial K$ derart, dass K links von γ liegt und $\partial K \setminus \gamma(]a,b[)$ einpunktig ist. Für das Kurvenintegral auf der rechten Seite von (126) erhalten wir nun

$$
\begin{aligned}
\int_{\phi\circ\gamma} F_1\,dx_1 &= \int_a^b F_1\Big((\phi\circ\gamma)(t)\Big)(\phi_1\circ\gamma)'(t)\,dt \\
&= \int_a^b F_1\Big((\phi\circ\gamma)(t)\Big)\Big(\frac{\partial\phi_1(\gamma(t))}{\partial u_1}\,\gamma_1'(t) + \frac{\partial\phi_1(\gamma(t))}{\partial u_2}\,\gamma_2'(t)\Big)\,dt \\
&= \int_\gamma (F_1\circ\phi)\frac{\partial\phi_1}{\partial u_1}\,du_1 + (F_1\circ\phi)\frac{\partial\phi_1}{\partial u_2}\,du_2\,. \qquad (130)
\end{aligned}
$$

Wir wollen den Greenschen Satz benutzen und betrachten dazu die beiden Integranden dieses Wegintegrals als Komponenten eines Vektorfeldes $H = (H_1, H_2)\colon U \to \mathbb{R}^2$:

$$
H_1 := (F_1\circ\phi)\frac{\partial\phi_1}{\partial u_2}\,, \quad H_2 := -(F_1\circ\phi)\frac{\partial\phi_1}{\partial u_1}\,.
$$

Dann ist

$$
\begin{aligned}
\operatorname{div} H &= \frac{\partial(F_1\circ\phi)}{\partial u_1}\frac{\partial\phi_1}{\partial u_2} + (F_1\circ\phi)\frac{\partial^2\phi_1}{\partial u_1\partial u_2} - \frac{\partial(F_1\circ\phi)}{\partial u_2}\frac{\partial\phi_1}{\partial u_1} - (F_1\circ\phi)\frac{\partial^2\phi_1}{\partial u_1\partial u_2} \\
&= \frac{\partial(F_1\circ\phi)}{\partial u_1}\frac{\partial\phi_1}{\partial u_2} - \frac{\partial(F_1\circ\phi)}{\partial u_2}\frac{\partial\phi_1}{\partial u_1}\,,
\end{aligned}
$$

d.h.

$$\big\langle (\operatorname{rot} F)\circ\phi, X_1\times X_2\big\rangle \;=\; \operatorname{div} H\,. \tag{131}$$

Der Greensche Integralsatz liefert nun

$$\int_{\partial K} H_1\,du_2 \;-\; H_2\,du_1 \;=\; \int_K \operatorname{div} H\; d\lambda_2\,. \tag{132}$$

Die rechte Seite von (132) stimmt wegen (131), (129) und (128) mit dem Flächenintegral in (126) überein. In Anbetracht der Definition von H und (130) stimmt die linke Seite von (132) mit dem Kurvenintegral aus (126) überein. Also gilt (126). □

A Existenz des Lebesgue-Borel-Maßes

In diesem Anhang tragen wir u.a. die Existenz des Lebesgue-Borel-Maßes nach.[44]

Es empfiehlt sich, diesen Anhang nicht vor Kapitel 5 zu lesen. Rein logisch gesehen kann der Anhang jedoch, was die Existenzaussagen angeht, direkt nach Kapitel 2 gelesen werden.[45] Der Beweis der Eindeutigkeitsaussagen benutzt den Eindeutigkeitssatz für σ-endliche Maße (Folgerung 5.16).[46]

Für die Konstruktion von Maßen ist ein weiterer Typ von Mengensystemen nützlich, die sogenannten "Mengenringe". Auf solchen Mengenringen $\mathcal{R}$ kann man oft von Hand ein "Prämaß" definieren (eine gewisse Vorstufe eines Maßes). Anschließend setzt man mit dem sogenannten "Hahnschen Fortsetzungssatz" das Prämaß zu einem Maß auf der von $\mathcal{R}$ erzeugten σ-Algebra $\sigma(\mathcal{R})$ fort.

Definition A.1 Es sei X eine Menge. Ein *Ring auf* X ist eine Menge $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{P}(X)$ von Teilmengen von X mit den folgenden Eigenschaften:

R1 $\emptyset \in \mathcal{R}$;

R2 $A, B \in \mathcal{R} \Rightarrow A \setminus B \in \mathcal{R}$;

R3 $A, B \in \mathcal{R} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{R}$.

Bemerkung A.2 (a) Jede σ-Algebra ist ein Ring, aber nicht umgekehrt.

(b) Ein Ring $\mathcal{R}$ enthält mit je zwei Mengen A, B auch deren Durchschnitt, denn es ist $A \cap B = A \setminus (A \setminus B)$.

Für uns ist der folgende Ring von Interesse:

[44] Wir orientieren uns an entsprechenden Abschnitten aus Bauers "Maß- und Integrationstheorie." Jedoch wurde der unnötig komplizierte Beweis von Bauers Satz 4.4 durch einen einfacheren ersetzt und die unnötige Benutzung von Dynkinsystemen im Beweis von Bauers Satz 5.4 eliminiert.

[45] Wenn man Lemma A.9 hinnimmt, dessen Beweis Kapitel 3 benutzt.

[46] Zum Beweis des Eindeutigkeitssatzes benötigt man Definition 5.7 bis Folgerung 5.16, die rein logisch gesehen ebenfalls unmittelbar nach Kapitel 2 gelesen werden können.

Definition A.3 Gegeben eine offene Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}^n$ sei $\mathcal{F}(U)$ die Menge aller endlichen disjunkten Vereinigungen in U gelegener halboffener Quader. Die Elemente von $\mathcal{F}(U)$ heißen *Figuren in* U. Ist U aus dem Zusammenhang klar, so schreibt man auch $\mathcal{F} := \mathcal{F}(U)$.

Eine Figur in U ist also eine Menge $A \subseteq U$ der Form $A = Q_1 \cup Q_2 \cup \cdots \cup Q_k$, wobei $k \in \mathbb{N}_0$ und $Q_1, \ldots, Q_k \subseteq \mathbb{R}^n$ paarweise disjunkte (rechts) halboffene Quader mit $Q_k \subseteq U$ sind.

Lemma A.4 *$\mathcal{F}(U)$ ist ein Ring auf U.*

Beweis. R1: Es ist $\emptyset = \bigcup_{j=1}^{0} Q_k \in \mathcal{R}$.

R2 und **R3:** Es seien $A, B \in \mathcal{F}(U)$, wobei o.B.d.A. $A \neq \emptyset$ und $B \neq \emptyset$ (sonst sind die Behauptungen trivial). Dann existieren $k, \ell \in \mathbb{N}$, paarweise disjunkte halboffene Quader $[a^i, b^i[$ für $i \in \{1, \ldots, k\}$ und paarweise disjunkte halboffene Quader $[c^j, d^j[$ für $j \in \{1, \ldots, \ell\}$ derart, dass

$$A = \bigcup_{i=1}^{k} [a^i, b^i[\quad \text{und} \quad B = \bigcup_{j=1}^{\ell} [c^j, d^j[\,,$$

wobei $a^i = (a^i_1, \ldots, a^i_n)$, $b^j = (b^j_1, \ldots, b^j_n) \in \mathbb{R}^n$. Wir wollen die vorigen Zerlegungen in Quader durch geeignete "Verfeinerungen" ersetzen, um sie kompatibel zu machen. Für festes $m \in \{1, \ldots, n\}$ definieren wir hierzu $H_m \subseteq \mathbb{R}$ als die Menge aller Zahlen a^i_m, b^i_m, c^j_m und d^j_m mit $i \in \{1, \ldots, k\}$, $j \in \{1, \ldots, \ell\}$. Dann ist etwa $H_m = \{r_{m,0}, r_{m,1}, \ldots, r_{m,\alpha_m}\}$ mit $\alpha_m \in \mathbb{N}$ und $r_{m,0} < r_{m,1} < \cdots < r_{m,\alpha_m}$. Wir definieren nun $\mathcal{Q}$ als die Menge der Quader

$$\prod_{m=1}^{n} [r_{m,j_m-1},\, r_{m,j_m}[$$

mit $j_m \in \{1, \ldots, \alpha_m\}$ für $m \in \{1, \ldots, n\}$ und beobachten, dass diese Quader paarweise disjunkt sind. Für jeden Quader $[a^i, b^i[$ gilt nun

$$[a^i, b^i[= \bigcup_{Q \in \mathcal{Q} \text{ mit } Q \subseteq [a^i, b^i[} Q\,,$$

denn wir haben den Quader $[a^i, b^i[$ ja lediglich in die kleineren Quader Q zerteilt, indem wir zu den Koordinatenebenen parallele Hyperebenen eingezogen haben.[47] Eine analoge Formel gilt auch für $[c^j, d^j[$. Setzen wir $I :=$

[47] Im 2-Dimensionalen entspricht dies dem Aufteilen eines Schachbretts in seine Felder.

$\{Q \in \mathcal{Q} \colon Q \subseteq A\}$ und $J := \{Q \in \mathcal{Q} \colon Q \subseteq B\}$, so folgt

$$A = \bigcup_{Q \in I} Q \quad \text{und} \quad B = \bigcup_{Q \in J} Q \,.$$

Da die Mengen $Q \in \mathcal{Q}$ paarweise disjunkt sind, erhalten wir jetzt wie gewünscht

$$A \setminus B = \bigcup_{Q \in I \setminus J} Q \in \mathcal{F}(U) \quad \text{und} \quad A \cup B = \bigcup_{Q \in I \cup J} Q \in \mathcal{F}(U) \,. \qquad \square$$

Definition A.5 Es sei $\mathcal{R}$ ein Ring auf einer Menge X. Eine Funktion $\mu \colon \mathcal{R} \to [0, \infty]$ wird ein *Prämaß* auf $\mathcal{R}$ genannt, wenn gilt:

P1 $\mu(\emptyset) = 0$;

P2 Für jede Folge $(A_j)_{j \in \mathbb{N}}$ paarweise disjunkter Mengen $A_j \in \mathcal{R}$ mit Vereinigung $\bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j \in \mathcal{R}$ gilt $\mu\big(\bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j\big) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j)$.

Eine Funktion $\mu \colon \mathcal{R} \to [0, \infty]$ wird *Inhalt* auf $\mathcal{R}$ genannt, wenn gilt:

I1 $\mu(\emptyset) = 0$;

I2 $A, B \in \mathcal{R}$ mit $A \cap B = \emptyset \Rightarrow \mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$.

Da wir $A_3 := A_4 := \cdots := \emptyset$ wählen können, ist jedes Prämaß insbesondere auch ein Inhalt.[48] Zur späteren Benutzung halten wir einige elementare Eigenschaften von Inhalten und Prämaßen fest:

Lemma A.6 *Für einen Inhalt $\mu \colon \mathcal{R} \to [0, \infty]$ auf einem Ring $\mathcal{R}$ gilt:*

(a) *μ ist endlich additiv, d.h. sind $A_1, \ldots, A_k \in \mathcal{R}$ paarweise disjunkt, so gilt $\mu\big(\bigcup_{j=1}^{k} A_j\big) = \sum_{j=1}^{k} \mu(A_j)$.*

(b) *Für alle $A, B \in \mathcal{R}$ gilt $\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B)$.*

(c) *μ ist monoton, d.h. sind $A, B \in \mathcal{R}$ mit $A \subseteq B$, so folgt $\mu(A) \leq \mu(B)$.*

(d) *μ ist subadditiv, d.h. für alle $A_1, \ldots, A_k \in \mathcal{R}$ gilt $\mu\big(\bigcup_{j=1}^{k} A_j\big) \leq \sum_{j=1}^{k} \mu(A_j)$.*

[48] Die Umkehrung gilt nicht.

(e) *Für jede Folge* $(A_j)_{j\in\mathbb{N}}$ *paarweise disjunkter Mengen* $A_j \in \mathcal{R}$ *mit* $\bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j \in \mathcal{R}$ *gilt*

$$\sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j) \;\le\; \mu\Big(\bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j\Big).$$

Beweis. (a) Folgt aus **I2** durch Induktion.

(b) Da $A \cup B = A \cup (B \setminus A)$ und $B = (A \cap B) \cup (B \setminus A)$ Vereinigungen disjunkter Mengen sind, folgt

$$\mu(A\cup B) \;=\; \mu(A)+\mu(B\setminus A) \quad \text{und} \quad \mu(B) \;=\; \mu(A\cap B)+\mu(B\setminus A). \tag{133}$$

Addition der zwei Gleichungen liefert

$$\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) + \mu(B \setminus A) \;=\; \mu(A) + \mu(B) + \mu(B \setminus A).$$

Hieraus ergibt sich $\mu(A\cup B)+\mu(A\cap B) = \mu(A)+\mu(B)$, wenn $\mu(B\setminus A) < \infty$. Ist hingegen $\mu(B \setminus A) = \infty$, so gilt nach (133) auch $\mu(A \cup B) = \infty$ und $\mu(B) = \infty$, so dass ebenfalls die gewünschte Formel gilt.

(c) Falls $A \subseteq B$, liefert (133)

$$\mu(B) \;=\; \mu(A) + \mu(B \setminus A) \;\ge\; \mu(A).$$

(d) Setzt man $B_j := A_j \setminus \bigcup_{i=1}^{j-1} A_i$ für $j \in \{1, \ldots, k\}$, so sind $B_1, \ldots, B_k$ paarweise disjunkte Mengen aus $\mathcal{R}$ mit $B_j \subseteq A_j$ und $\bigcup_{j=1}^{k} B_j = \bigcup_{j=1}^{k} A_j$. Somit

$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^{k} A_j\right) \;=\; \mu\left(\bigcup_{j=1}^{k} B_j\right) \;=\; \sum_{j=1}^{k} \mu(B_j) \;\le\; \sum_{j=1}^{k} \mu(A_j);$$

hierbei wurde zunächst die endliche Additivität von μ benutzt, anschließend die Monotonie.

(e) Ist $(A_j)_{j\in\mathbb{N}}$ eine Folge paarweise disjunkter Mengen $A_j \in \mathcal{R}$ mit $A := \bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j \in \mathcal{R}$, so gilt $\bigcup_{j=1}^{k} A_j \subseteq A$ für jedes $k \in \mathbb{N}$ und somit wegen endlicher Additivität und Monotonie

$$\sum_{j=1}^{k} \mu(A_j) \;=\; \mu\left(\bigcup_{j=1}^{k} A_j\right) \;\le\; \mu(A).$$

Der Grenzübergang $k \to \infty$ liefert nun die Behauptung. $\square$

Lemma A.7 *Es sei $\mathcal{R}$ ein Ring auf einer Menge X und $\mu\colon \mathcal{R} \to [0,\infty]$ ein Prämaß. Für beliebige Mengen $A_0, A_1, A_2, \ldots$ aus $\mathcal{R}$ gilt dann*

$$A_0 \subseteq \bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j \quad \Rightarrow \quad \mu(A_0) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j)\,. \tag{134}$$

Beweis. Gilt $A_0 \subseteq \bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j$, so ist $A_0 = \bigcup_{j\in\mathbb{N}}(A_0 \cap A_j)$ mit $A_0 \cap A_j \in \mathcal{R}$ und $\mu(A_0 \cap A_j) \leq \mu(A_j)$, weil μ ja insbesondere ein Inhalt und somit nach Lemma A.6 (c) monoton ist. Wir dürfen daher o.B.d.A. $A_0 = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j$ annehmen. Dann sind $B_j := A_j \setminus \bigcup_{i=1}^{j-1} A_j \in \mathcal{R}$ für $j \in \mathbb{N}$ paarweise disjunkte Mengen mit Vereinigung $\bigcup_{j\in\mathbb{N}} B_j = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j = A_0$ und $B_j \subseteq A_j$. Somit

$$\mu(A_0) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(B_j) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j)$$

wegen **P2** und der Monotonie von μ. □

Das folgende Lemma zeigt, dass es genau ein Prämaß μ auf dem Ring $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ der Figuren in $\mathbb{R}^n$ gibt, welches jedem halboffenen Quader sein natürliches Volumen zuordnet (das Produkt der Seitenlängen). Man nennt μ das *Lebesguesche Prämaß.*

Lemma A.8 (Lebesguesches Prämaß). *Es sei $\mathcal{F} := \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ der Ring der Figuren in $\mathbb{R}^n$. Dann gilt:*

(a) *Sind $[a^1, b^1[, \ldots, [a^k, b^k[\subseteq \mathbb{R}^n$ paarweise disjunkte halboffene Quader sowie auch $[c^1, d^1[, \ldots, [c^\ell, d^\ell[$ und ist $A := \bigcup_{i=1}^k [a^i, b^i[= \bigcup_{j=1}^\ell [c^j, d^j[$, so gilt*

$$\mu(A) := \sum_{i=1}^{k} \prod_{m=1}^{n} (b^i_m - a^i_m) = \sum_{j=1}^{\ell} \prod_{m=1}^{n} (d^j_m - c^j_m)\,. \tag{135}$$

(b) *Die nach Teil* (a) *wohldefinierte Abbildung*

$$\mu : \mathcal{F} \to [0, \infty[$$

ist ein Prämaß auf $\mathcal{F}$ derart, dass $\mu([a,b[) = \prod_{m=1}^n (b_m - a_m)$ für jeden halboffenen Quader $[a,b[\subseteq \mathbb{R}^n$. Es ist μ das einzige Prämaß mit dieser Eigenschaft.

Beweis. Wir stellen dem Beweis eine Vorüberlegung voran. Es sei $[a,b[\ \subseteq \mathbb{R}^n$ ein halboffener Quader mit $a = (a_1,\ldots,a_n)$ und $b = (b_1,\ldots,b_n)$. Weiter seien für alle $m \in \{1,\ldots,n\}$ Zahlen $\alpha_m \in \mathbb{N}$ und $a_m = r_{m,0} < r_{m,1} < \cdots < r_{m,\alpha_m} = b_m$ gegeben. Dann gilt

$$b_m - a_m = \sum_{j=1}^{\alpha_m} (r_{m,j} - r_{m,j-1})$$

(Teleskopsumme!) für $m = 1,\ldots,n$ und somit durch Ausmultiplizieren (Distributivgesetz):

$$\begin{aligned}(b_1 - a_1)\cdot\ldots\cdot(b_n - a_n) &= \left(\sum_{j_1=1}^{\alpha_1}(r_{1,j_1} - r_{1,j_1-1})\right)\cdot\ldots\cdot\left(\sum_{j_n=1}^{\alpha_n}(r_{n,j_n} - r_{1,j_n-1})\right)\\ &= \sum_{j_1=1}^{\alpha_1}\cdots\sum_{j_n=1}^{\alpha_n}\prod_{m=1}^{n}(r_{m,j_m} - r_{m,j_m-1})\,.\end{aligned}$$

Das natürliche Volumen (Produkt der Seitenlängen) von $[a,b[$ ist also gleich der Summe der Volumina der paarweise disjunkten Quader $\prod_{m=1}^{n}[r_{m,j_m-1}, r_{m,j_m}[$ mit Vereinigung $[a,b[$.

(a) In der beschriebenen Situation definieren wir α_m, reelle Zahlen $r_{m,j}$ und eine Menge $\mathcal{Q}$ von Quadern wir im Beweis von Lemma A.4. Nach der Vorüberlegung lässt sich das natürliche Volumen $\mathrm{Vol}_n([a^i,b^i[)$ von $[a^i,b^i[$ umschreiben als

$$\mathrm{Vol}_n([a^i,b^i[) = \sum_{Q\in\mathcal{Q} \text{ mit } Q\subseteq[a^i,b^i[} \mathrm{Vol}_n(Q)\,.$$

Da die Mengen $Q \in \mathcal{Q}$ paarweise disjunkt sind und A überdecken, erhalten wir für die linke Seite von (135):

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{k}\prod_{m=1}^{n}(b_m^i - a_m^i) &= \sum_{i=1}^{k}\mathrm{Vol}_n([a^i,b^i[) = \sum_{i=1}^{k}\sum_{Q\in\mathcal{Q} \text{ mit } Q\subseteq[a^i,b^i[}\mathrm{Vol}_n(Q)\\ &= \sum_{Q\in\mathcal{Q}}\mathrm{Vol}_n(Q)\,.\end{aligned}$$

Analog erhalten wir $\sum_{j=1}^{\ell}\prod_{m=1}^{n}(d_m^j - c_m^j) = \sum_{Q\in\mathcal{Q}}\mathrm{Vol}_n(Q)$ für die rechte Seite von (135), die beiden sind also gleich.

(b) Da jede Figur eine endliche Vereinigung paarweise disjunkter halboffener Quader ist und Prämaße endlich additiv sind, kann es höchstens ein Prämaß auf $\mathcal{F}$ geben, das jedem halboffenen Quader sein natürliches Volumen zuordnet. Die Funktion μ aus (a) ordnet jedem halboffenen Quader das richtige Volumen zu. Wir zeigen nun, dass μ ein Prämaß ist.

P1 ist klar. Als eine Vorüberlegung für den Beweis von **P2** zeigen wir nun die endliche Additivität von μ (wobei man natürlich nur zwei Summanden zu betrachten braucht). Seien also $A, B \in \mathcal{R}$ disjunkt. Dann gilt $A = Q_1 \cup \cdots \cup Q_k$ für gewisse paarweise disjunkte halboffene Quader $Q_j \subseteq \mathbb{R}^n$ und $B = Q_{k+1} \cup \cdots \cup Q_\ell$ für ebensolche Q_j, per Definition einer Figur. Da $A \cap B = \emptyset$, gilt sogar $Q_i \cap Q_j = \emptyset$ für alle $i, j \in \{1, \ldots, \ell\}$ mit $i \neq j$. Da $A \cup B = \bigcup_{i=1}^{\ell} Q_j$, gilt per Definition von $\mu(A \cup B)$ wie gewünscht

$$\mu(A \cup B) \ = \ \sum_{j=1}^{\ell} \mu_j(Q_j) \ = \ \sum_{j=1}^{k} \mu(Q_j) + \sum_{j=k+1}^{\ell} \mu(Q_j) \ = \ \mu(A) + \mu(B)\,.$$

P2: Sei nun $(A_j)_{j \in \mathbb{N}}$ eine Folge paarweise disjunkter Mengen $A_j \in \mathcal{F}$ mit Vereinigung $A := \bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j \in \mathcal{F}$. Wir haben zu zeigen, dass

$$\mu(A) \ = \ \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j)\,.$$

Da A eine Figur ist, gilt $A = Q_1 \cup \cdots \cup Q_k$ für gewisse paarweise disjunkte, halboffene Quader $Q_k \subseteq \mathbb{R}^n$. Dann ist $Q_i = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} Q_i \cap A_j \in \mathcal{F}$ und

$$\mu(A) = \sum_{i=1}^{k} \mu(Q_k) \ \text{ und } \ \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{k} \mu(Q_i \cap A_j) = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{\infty} \mu(Q_i \cap A_j).$$

Es genügt daher, die Behauptung für $Q_1, \ldots, Q_k$ statt A zu beweisen, und wir dürfen somit o.B.d.A. annehmen, dass $A = [a, b[$ ein halboffener Quader ist, mit $a, b \in \mathbb{R}^n$.

Nach Lemma A.6 (e) gilt zunächst

$$\mu(A) \ \geq \ \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j)\,.$$

Zum Beweis der umgekehrten Ungleichung wählen wir $r > 0$ derart, dass $a_i < b_i - r$ für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$. Ist $\varepsilon \in]0, r]$ gegeben, so ist

$$B \;:=\; B_\varepsilon \;:=\; [a, b - \varepsilon e[\qquad \text{mit } e := (1, 1, \ldots, 1) \in \mathbb{R}^n$$

ein halboffener Quader, dessen kompakter Abschluss $\overline{B} = [a, b - \varepsilon e]$ ganz in A enthalten ist. Wir definieren nun eine Figur $Q_j^\varepsilon \in \mathcal{F}$ mit

$$Q_j \subseteq (Q_j^\varepsilon)^\circ \;\; \text{(Inneres)} \qquad \text{und} \quad \mu(Q_j^\varepsilon) \;\leq\; \mu(Q_j) + 2^{-j}\varepsilon\,,$$

wie folgt: Wir schreiben $Q_j = \bigcup_{i=1}^k [c^i, d^i[$ als disjunkte Vereinigung halboffener Quader und setzen

$$Q_j^\varepsilon \;:=\; \bigcup_{i=1}^k [c^i - \delta e, d^i + \delta e[\,,$$

wobei $\delta > 0$ so klein gewählt ist, dass

$$\mu(Q_j^\varepsilon) \;=\; \sum_{i=1}^k \prod_{m=1}^n (d_m^i - c_m^i + 2\delta) \;<\; \sum_{i=1}^k \prod_{m=1}^n (d_m^i - c_m^i) + 2^{-j}\varepsilon \;=\; \mu(Q_j) + 2^{-j}\varepsilon\,.$$

Dann gilt $\overline{B} \subseteq A = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} Q_j \subseteq \bigcup_{j \in \mathbb{N}} (Q_j^\varepsilon)^\circ$. Da $\overline{B}$ kompakt ist, existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit $\overline{B} \subseteq \bigcup_{j=1}^N (Q_j^\varepsilon)^\circ$. Folglich gilt $B \subseteq \bigcup_{j=1}^N Q_j^\varepsilon$ und somit

$$\begin{aligned}
\mu(B_\varepsilon) \;=\; \mu(B) \;&\leq\; \mu\Big(\bigcup_{j=1}^N Q_j^\varepsilon\Big) \;\leq\; \sum_{j=1}^N \mu(Q_j^\varepsilon) \;\leq\; \sum_{j=1}^N \big(\mu(Q_j) + 2^{-j}\varepsilon\big) \\
&\leq\; \sum_{j=1}^\infty \big(\mu(Q_j) + 2^{-j}\varepsilon\big) \;=\; \sum_{j=1}^\infty \mu(Q_j) \;\; + \varepsilon\,. \qquad (136)
\end{aligned}$$

Da $\mu(B_\varepsilon) = \prod_{m=1}^n (b_m - \varepsilon - a_m) \to \prod_{m=1}^n (b_m - a_m) = \mu(A)$ für $\varepsilon \to 0$, folgt aus (136) durch Grenzübergang $\varepsilon \to 0$ wie gewünscht $\mu(A) \leq \sum_{j=1}^\infty \mu(Q_j)$. □

Als technisches Hilfsmittel brauchen wir noch eine kleine Ergänzung zum Doppelreihensatz (Folgerung 2.4):

Lemma A.9 *Ist* $a_{j,k} \in [0, \infty]$ *für* $(j, k) \in \mathbb{N}^2$ *und* $\kappa\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}^2$ *eine Bijektion, so gilt*

$$\sum_{j=1}^\infty \left(\sum_{k=1}^\infty a_{j,k}\right) \;=\; \sum_{i=1}^\infty a_{\kappa(i)}\,. \qquad (137)$$

Beweis. Es sei $\zeta\colon \mathcal{P}(\mathbb{N}^2) \to [0,\infty]$ das Zählmaß auf $\mathbb{N}^2$ und $a\colon \mathbb{N}^2 \to [0,\infty]$, $(j,k) \mapsto a_{j,k}$. Wie im Beweis des Doppelreihensatzes sehen wir, dass

$$\int_{\{j\}\times\mathbb{N}} a\,d\zeta \;=\; \sum_{k=1}^{\infty} a_{j,k}\,,$$

für alle $j \in \mathbb{N}$. Da $\{1,\ldots,n\}\times\mathbb{N} = \bigcup_{j=1}^{n}(\{j\}\times\mathbb{N})$ eine disjunkte Vereinigung ist, folgt

$$\int_{\{1,\ldots,n\}\times\mathbb{N}} a\,d\zeta \;=\; \sum_{j=1}^{n}\int_{\{j\}\times\mathbb{N}} a\,d\zeta \;=\; \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{\infty} a_{j,k}$$

mit Satz 3.30 (a). Da $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(\{1,\ldots,n\}\times\mathbb{N}) = \mathbb{N}^2$, wobei die beteiligten Mengen aufsteigen, erhalten wir weiter mit Satz 3.30 (a) und Lemma 2.5 (c)

$$\int_{\mathbb{N}^2} a\,d\zeta \;=\; \lim_{n\to\infty}\int_{\{1,\ldots,n\}\times\mathbb{N}} a\,d\zeta \;=\; \lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{\infty} a_{j,k} \;=\; \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} a_{j,k}\,.$$

Die Mengen $X_n := \kappa(\{1,\ldots,n\})$ steigen ebenfalls gegen $\mathbb{N}^2$ auf, und somit gilt auch

$$\int_{\mathbb{N}^2} a\,d\zeta \;=\; \lim_{n\to\infty}\int_{X_n} a\,d\zeta \;=\; \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} a_{\kappa(i)} \;=\; \sum_{i=1}^{\infty} a_{\kappa(i)}\,. \qquad \square$$

Satz A.10 (Hahnscher Fortsetzungssatz). *Es sei $\mathcal{R}$ ein Ring auf einer Menge X und $\mu\colon \mathcal{R} \to [0,\infty[$ ein Prämaß auf $\mathcal{R}$. Dann gilt:*

(a) *μ lässt sich zu einem Maß $\bar\mu$ auf $(X,\sigma(\mathcal{R}))$ fortsetzen, d.h. es gilt $\bar\mu|_{\mathcal{R}} = \mu$.*

(b) *Gilt $X = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} X_j$ für eine Folge von Mengen $X_j \in \mathcal{R}$ mit $\mu(X_j) < \infty$, so ist die Fortsetzung $\bar\mu$ eindeutig festgelegt. Sie ist gegeben durch die Formel*

$$\bar\mu(A) \;=\; \inf\left\{\sum_{j=1}^{\infty}\mu(A_j)\colon A_j \in \mathcal{R} \text{ mit } A \subseteq \textstyle\bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j\right\} \quad \text{für alle } A \in \sigma(\mathcal{R}). \tag{138}$$

Beweis. (a) Für jede Menge $Q \subseteq X$ bezeichne $\mathcal{U}(Q)$ die Menge aller Folgen $(A_j)_{j\in\mathbb{N}}$ von Mengen $A_j \in \mathcal{R}$, die Q überdecken, also

$$Q \subseteq \bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j \,.$$

Wir definieren nun

$$\mu^*(Q) := \inf \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j) \colon (A_j)_{j\in\mathbb{N}} \in \mathcal{U}(Q) \right\} \tag{139}$$

für jede Teilmenge $Q \subseteq X$ und erhalten damit eine Funktion $\mu^* \colon \mathcal{P}(X) \to [0,\infty]$ auf der Potenzmenge von X. Können wir Q nicht durch abzählbar viele Mengen aus $\mathcal{R}$ überdecken, (wenn also $\mathcal{U}(Q) = \emptyset$), so ist übrigens $\mu^*(Q) = \infty$. Dies liegt daran, das wir das Infimum in der geordneten Menge $[0,\infty]$ bilden, und

$$\inf \emptyset = \infty$$

dort (für alle $x \in \emptyset$ gilt ja $\infty \le x$, und somit ist ∞ eine untere Schranke für $\emptyset$ in $[0,\infty]$).

Die Funktion μ^* besitzt folgende Eigenschaften und wird daher ein sogenanntes "äußeres Maß" (engl. "outer measure") genannt:[49]

OM1 $\mu^*(\emptyset) = 0$;

OM2 μ^* ist *monoton*, d.h. für alle $Q_1, Q_2 \subseteq X$ mit $Q_1 \subseteq Q_2$ gilt $\mu^*(Q_1) \le \mu^*(Q_2)$;

OM3 Für jede Folge $(Q_j)_{j\in\mathbb{N}}$ von Teilmengen $Q_j \subseteq X$ gilt $\mu^*\Big(\bigcup_{j\in\mathbb{N}} Q_j\Big) \le \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(Q_j)$.

Hierbei folgt **OM1** aus der Bemerkung, dass die konstante Folge $\emptyset, \emptyset, \ldots$ in $\mathcal{U}(\emptyset)$ liegt. Gilt $Q_1 \subseteq Q_2$, so ist jede Überdeckung von Q_2 auch eine von Q_1 und somit $\mathcal{U}(Q_2) \subseteq \mathcal{U}(Q_1)$, woraus **OM2** folgt. Für den Beweis von **OM3** darf o.B.d.A. angenommen werden, dass

$$\mu^*(Q_j) < \infty \qquad \text{für alle } j \in \mathbb{N}, \tag{140}$$

[49]Warnung: Ein "äußeres" Maß ist im Allgemeinen kein Maß! Die Bezeichnung ist irreführend!

denn andernfalls ist $\sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(Q_j) = \infty$ und somit ist die geforderte Ungleichung automatisch erfüllt. Gelte also (140). Zu jedem $\varepsilon > 0$ und jedem $j \in \mathbb{N}$ existiert dann eine Folge $(A_{j,k})_{k\in\mathbb{N}} \in \mathcal{U}(Q_j)$ derart, dass

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_{j,k}) \;\le\; \mu^*(Q_j) \;+\; 2^{-j}\,\varepsilon\,. \tag{141}$$

Um die Doppelfolge $(A_{j,k})_{(j,k)\in\mathbb{N}^2}$ als ein Element von $\mathcal{U}(\bigcup_{j\in\mathbb{N}} Q_j)$ auffassen zu können, wählen wir eine Bijektion $\kappa\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}^2$ und betrachten stattdessen die Folge $(A_{\kappa(i)})_{i\in\mathbb{N}}$. Da $\bigcup_{j\in\mathbb{N}} Q_j \subseteq \bigcup_{(j,k)\in\mathbb{N}^2} A_{j,k} = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_{\kappa(i)}$, ist $(A_{\kappa(i)})_{i\in\mathbb{N}} \in \mathcal{U}(\bigcup_{j\in\mathbb{N}} Q_j)$ und somit

$$\mu^*\Big(\bigcup_{j\in\mathbb{N}} Q_j\Big) \;\le\; \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_{\kappa(i)}) \;=\; \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_{j,k}) \;\le\; \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(Q_j) \;+\; \varepsilon\,,$$

wobei das Gleicheitszeichen auf Lemma A.9 beruht, die letzte Abschätzung auf (141) und der Summenformel für die geometrische Reihe. Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt $\mu^*\Big(\bigcup_{j\in\mathbb{N}} Q_j\Big) \le \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(Q_j)$.

Entscheidend für das Weitere ist nun die Bemerkung, dass für alle $A \in \mathcal{R}$ gilt:

$$\mu^*(A) \;=\; \mu(A) \tag{142}$$

sowie

$$\mu^*(Q) \;\ge\; \mu^*(Q\cap A) + \mu^*(Q\cap A^c) \qquad \text{für alle } Q \in \mathcal{P}(X), \tag{143}$$

wobei $A^c := X \setminus A$. Für den Beweis von (143) kann hierbei $\mu^*(Q) < \infty$ angenommen werden (sonst ist die Aussage trivial), weswegen insbesondere $\mathcal{U}(Q) \neq \emptyset$. Zunächst gilt

$$\sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j) \;=\; \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j\cap A) \;+\; \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j \setminus A)$$

für jede Folge $(A_j)_{j\in\mathbb{N}} \in \mathcal{U}(Q)$ wegen der endlichen Additivität von μ. Da $(A_j\cap A)_{j\in\mathbb{N}} \in \mathcal{U}(A)$ und $(A_j\cap A^c)_{j\in\mathbb{N}} \in \mathcal{U}(A^c)$, folgt

$$\sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j) \;\ge\; \mu^*(Q\cap A) \;+\; \mu^*(Q\setminus A)$$

für jede Folge $(A_j)_{j\in\mathbb{N}} \in \mathcal{U}(Q)$. Übergang zum Infimum liefert nun (143).

Zum Beweis von (142) beachten wir zunächst, dass $\mu^*(A) \leq \mu(A)$, da die Folge $A, \emptyset, \emptyset, \ldots$ in $\mathcal{U}(A)$ liegt. Ist $(A_j)_{j\in\mathbb{N}} \in \mathcal{U}(A)$, so ist $A \subseteq \bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j$ und somit $\mu(A) \leq \sum_{j\in\mathbb{N}} \mu(A_j)$ nach Lemma A.7, woraus $\mu(A) \leq \mu^*(A)$ folgt. Also besteht Gleichheit.

A.11 Eine Teilmenge $A \subseteq X$ wird μ^*-*messbar* genannt, wenn (143) gilt. Wir schreiben Σ_{μ^*} für die Menge aller μ^*-messbaren Teilmengen von X.

Nach dem Vorigen gilt also $\mathcal{R} \subseteq \Sigma_{\mu^*}$. Der folgenden Satz zeigt, dass auch

$$\sigma(\mathcal{R}) \subseteq \Sigma_{\mu^*}$$

gilt und

$$\bar{\mu} := \mu^*|_{\sigma(\mathcal{R})} \tag{144}$$

ein Maß auf $\sigma(\mathcal{R})$ definiert, welches nach (142) wie gewünscht das Prämaß μ fortsetzt.

(b) Nach dem Eindeutigkeitssatz für σ-endliche Maße (Folgerung 5.16) gibt es in der Situation von (b) höchstens eine Fortsetzung von μ zu einem Maß auf $\sigma(\mathcal{R})$. Also ist das durch (144) definierte Maß $\bar{\mu}$ die einzige Fortsetzung von μ. Wegen (139) und (144) gilt (138). □

Satz A.12 *Ist $\mu^* : \mathcal{P}(X) \to [0,\infty]$ ein äußeres Maß auf einer Menge X, so ist die Menge Σ_{μ^*} aller im Sinne von* **A.11** *μ^*-messbaren Mengen eine σ-Algebra auf X. Die Einschränkung*

$$\mu^*|_{\Sigma_{\mu^*}} : \Sigma_{\mu^*} \to [0,\infty]$$

ist ein Maß.

Beweis. Zunächst bemerken wir, dass (143) und damit die Bedingung $A \in \Sigma_{\mu^*}$ für jede Teilmenge $A \subseteq X$ äquivalent ist zu

$$\mu^*(Q) = \mu^*(Q \cap A) + \mu^*(Q \setminus A) \qquad \text{für alle } Q \in \mathcal{P}(X). \tag{145}$$

Aus **OM3**, angewandt auf die Folge $Q \cap A$, $Q \setminus A, \emptyset, \emptyset, \ldots$ folgt nämlich die Gültigkeit der zu (143) umgekehrten Ungleichung für alle $Q \in \mathcal{P}(X)$.

Wir prüfen nun die Axiome einer σ-Algebra für Σ_{μ^*} nach.

S1: Aus (143) oder (145) folgt sofort, dass $\emptyset \in \Sigma_{\mu^*}$.

S2: Da (145) in A und A^c symmetrisch ist, enthält Σ_{μ^*} mit A auch das Komplement A^c.

S3: Wir zeigen zunächst, dass Σ_{μ^*} unter endlichen Vereinigungen abgeschlossen ist, also $A \cup B \in \Sigma_{\mu^*}$ für alle $A, B \in \Sigma_{\mu^*}$. Da $B \in \Sigma_{\mu^*}$, gilt nach (145)

$$\begin{aligned} \mu^*(Q \cap A) &= \mu^*(Q \cap A \cap B) + \mu^*((Q \cap A) \setminus B) \quad \text{und} \\ \mu^*(Q \cap A^c) &= \mu^*(Q \cap A^c \cap B) + \mu^*((Q \cap A^c) \setminus B)\,. \end{aligned}$$

Setzt man diese Formeln in (145) ein, so ergibt sich

$$\begin{aligned} \mu^*(Q) &= \mu^*(Q \cap A) + \mu^*(Q \setminus A) \\ &= \mu^*(Q \cap A \cap B) + \mu^*(Q \cap A \cap B^c) \\ &\quad + \mu^*(Q \cap A^c \cap B) + \mu^*(Q \cap \underbrace{A^c \cap B^c}_{=(A \cup B)^c}). \end{aligned} \tag{146}$$

Ersetzt man hier Q durch $Q \cap (A \cup B)$, so gewinnt man

$$\mu^*(Q \cap (A \cup B)) = \mu^*(Q \cap A \cap B) + \mu^*(Q \cap A \cap B^c) + \mu^*(Q \cap A^c \cap B)\,. \tag{147}$$

Die Summe der ersten drei Summanden in (146) ist also $\mu^*(Q \cap (A \cup B))$, und somit lässt sich (146) umschreiben zu

$$\begin{aligned} \mu^*(Q) &= \mu^*(Q \cap (A \cup B)) + \mu^*(Q \cap (A \cup B)^c) \\ &= \mu^*(Q \cap (A \cup B)) + \mu^*(Q \setminus (A \cup B))\,. \end{aligned}$$

Da $Q \in \mathcal{P}(X)$ beliebig war, ist also $A \cup B \in \Sigma_{\mu^*}$.

Nun sei $(A_j)_{j \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Mengen $A_j \in \Sigma_{\mu^*}$. Wegen **S2** und der Abgeschlossenheit von Σ_{μ^*} unter endlichen Vereinigungen ist dann

$$B_j := A_j \setminus \bigcup_{i=1}^{j-1} A_i = A_j \cap \Big(\bigcup_{i=1}^{j-1} A_i\Big)^c = \Big(A_j^c \cup \bigcup_{i=1}^{j-1} A_i\Big)^c \in \Sigma_{\mu^*}$$

für alle $j \in \mathbb{N}$, wobei $A := \bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} B_j$ und $B_i \cap B_j = \emptyset$ für $i \neq j$. Um $A \in \Sigma_{\mu^*}$ einzusehen, darf man also o.B.d.A. annehmen, dass die Mengen

A_j paarweise disjunkt sind.

Nach (147), angewandt mit A_1 und A_2 anstelle von A und B, gilt

$$\mu^*(Q \cap (A_1 \cup A_2)) \;=\; \mu^*(Q \cap A_1) + \mu^*(Q \cap A_2)\,.$$

Hieraus folgt durch vollständige Induktion

$$\mu^*\Big(Q \cap \bigcup_{j=1}^{n} A_j\Big) \;=\; \sum_{j=1}^{n} \mu^*(Q \cap A_j)$$

für alle $Q \in \mathcal{P}(X)$ und $n \in \mathbb{N}$. Da $C_n := \bigcup_{j=1}^{n} A_j \in \Sigma_{\mu^*}$ nach dem Vorigen und $Q \setminus C_n \supseteq Q \setminus A$, also $\mu^*(Q \setminus B_n) \geq \mu^*(Q \setminus A)$ gilt, erhält man

$$\mu^*(Q) \;=\; \mu^*(Q \cap C_n) + \mu^*(Q \setminus C_n) \;\geq\; \sum_{j=1}^{n} \mu^*(Q \cap A_j) \;+\; \mu^*(Q \setminus A)$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Hieraus folgt mit **OM3**

$$\mu^*(Q) \;\geq\; \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(Q \cap A_j) \;+\; \mu^*(Q \setminus A) \;\geq\; \mu^*(Q \cap A) + \mu^*(Q \setminus A)$$

und damit nach der einleitenden Bemerkung zu Beweisbeginn sogar

$$\mu^*(Q) \;=\; \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(Q \cap A_j) \;+\; \mu^*(Q \setminus A) \;=\; \mu^*(Q \cap A) + \mu^*(Q \setminus A) \qquad (148)$$

für alle $Q \in \mathcal{P}(X)$. Also gilt $A \in \Sigma_{\mu^*}$, und somit ist Σ_{μ^*} eine σ-Algebra.

Wählt man in (148) $Q := A$, so erhalten wir $\mu^*(\bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(A_j)$, d.h. $\mu^*|_{\Sigma_{\mu^*}}$ ist σ-additiv und somit ein Maß. $\square$

Die Beweisidee, einem Prämaß durch (139) zunächst ein äußeres Maß zuzuordnen und daraus ein Maß auf den μ^*-messbaren Mengen zu gewinnen, geht auf C. Carathéodory (1873–1950) zurück.

Beweis von Satz 2.6: (a) Es sei $\mu\colon \mathcal{F} \to [0,\infty]$ das Lebesguesche Prämaß auf dem Ring $\mathcal{F}$ der Figuren in $\mathbb{R}^n$, wie in Lemma A.8. Nach dem Hahnschen Fortsetzungsatz existiert dann ein Maß $\lambda := \bar{\mu}$ auf $\sigma(\mathcal{F}) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, welches μ fortsetzt. Für jeden halboffenen Quader $[a,b[\; \subseteq \mathbb{R}^n$ gilt dann $\lambda([a,b[) = \mu([a,b[) = \prod_{m=1}^n (b_m - a_m)$, wie gewünscht. Nach dem Eindeutigkeitssatz für σ-endliche Maße (Folgerung 5.16) ist λ durch vorige Eigenschaft eindeutig festgelegt, da sich $\mathbb{R}^n$ durch eine Folge halboffener Quader ausschöpfen lässt.

(b) Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $\nu \colon \mathcal{B}(U) \to [0,\infty]$ ein Maß, welches auf allen kompakten Teilmengen von $\mathcal{B}(U)$ endliche Werte annimmt, und $\mathcal{F}(U)$ der Ring der Figuren in U. Dann ist $\mu := \nu|_{\mathcal{F}(U)}$ ein Prämaß auf $\mathcal{F}(U)$. Der Hahnsche Fortsetzungssatz liefert ein Maß $\bar{\mu} : \mathcal{B}(U) = \sigma(\mathcal{F}(U)) \to [0,\infty]$, welches μ fortsetzt und (138) erfüllt, also die in Satz 2.6 (b) beschriebene Bedingung. Da sich U durch eine Folge $(Q_k)_{k\in\mathbb{N}}$ halboffener Quader Q_k mit kompaktem Abschluss $\overline{Q_k} \subseteq U$ ausschöpfen lässt und dann $\mu(Q_k) = \nu(Q_k) \leq \nu(\overline{Q_k}) < \infty$ per Voraussetzung, gilt $\nu = \bar{\mu}$ aufgrund der Eindeutigkeitsaussage im Hahnschen Fortsetzungssatz. Also erfüllt auch ν die in Satz 2.6 (b) beschriebene Bedingung. □

B Ergänzungen zu Kapitel 13

Im Folgenden sind einige Ergänzungen zu Kapitel 13 zusammengestellt. Insbesondere wird gezeigt, dass jede 1-dimensionale kompakte Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$ eine Vereinigung von endlich vielen paarweise disjunkten geschlossenen C^1-Kurven ist.

Wegkomponenten einer Untermannigfaltigkeit

Wir erinnern an die Definition der Wegkomponenten eines metrischen Raumes:

Definition B.1 Es sei (M, d) ein metrischer Raum.

(a) Gegeben $x, y \in M$ schreiben wir $x \sim y$, wenn es eine stetige Abbildung $\gamma\colon [0,1] \to M$ gibt mit $\gamma(0) = x$ und $\gamma(1) = y$ (einen "Weg von x nach y in M"). Dann ist $\sim$ eine Äquivalenzrelation[50] auf M. Wir schreiben $M_x := [x]_\sim$ für die Äquivalenzklasse eines Elements $x \in M$ und nennen M_x die *Wegkomponente von x*.

(b) Besitzt M nur eine Wegkomponente, so wird M *wegzusammenhängend* genannt.

Bemerkung B.2 (a) M_x besteht also aus allen Punkten $y \in M$, die wir durch einen Weg mit x verbinden können.

(b) Da $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist, bilden die Wegkomponenten eine Partition von M (eine Zerlegung in paarweise disjunkte, nicht-leere Mengen mit Vereinigung M).

(c) Jede Wegkomponente von M ist wegzusammenhängend.

---

[50] *Reflexivität*: Gegeben $x \in M$ gilt $x \sim x$, da wir x mit sich selbst durch einen konstanten Weg verbinden können. *Symmetrie*: Gilt $x \sim y$, so gibt es einen Weg $\gamma\colon [0,1] \to M$ von x nach y. Dann ist $[0,1] \to M$, $t \mapsto \gamma(1-t)$ ein Weg von y nach x, somit $y \sim x$. *Transitivität*: Gilt $x \sim y$ und $y \sim z$, so gibt es Wege γ und η von x nach y bzw. von y nach z. Definieren wir $\zeta(t) := \gamma(2t)$ für $t \in [0, 1/2]$, $\zeta(t) := \eta(2t-1)$ für $t \in [1/2, 1]$, so ist ζ überall rechts- und linksseitig stetig und somit stetig, mithin ein Weg von x nach z. Also $x \sim z$.

(d) Ist $f : M \to N$ eine stetige Abbildung zwischen metrischen Räumen und $x \in M$, so gilt $f(M_x) \subseteq N_{f(x)}$ (ist nämlich $\gamma\colon [0,1] \to M$ ein Weg in M von x nach $y \in M_x$, so ist $f \circ \gamma$ ein Weg in N von $f(x)$ nach $f(y)$).

(e) Als Konsequenz des Zwischenwertsatzes ist eine nichtleere Teilmenge von $\mathbb{R}$ genau dann wegzusammenhängend, wenn sie ein Intervall ist.

(f) Ein metrischer Raum M heißt *zusammenhängend*, wenn es keine nichtleeren, disjunkten offenen Teilmengen $U, V \subseteq M$ gibt mit $M = U \cup V$. Aus der Analysis II wissen wir, dass jeder wegzusammenhängende metrische Raum auch zusammenhängend ist.

Satz B.3 (Wegkomponenten einer Untermannigfaltigkeit). *Es sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit. Dann gilt:*

(a) *Jede Wegkomponente von M ist offen und abgeschlossen in M, und sie ist eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$.*

(b) *Ist $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine k-dimensionale kompakte Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$, so besitzt M nur endlich viele verschiedene Wegkomponenten $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_m$. Dann ist also*

$$M = \Gamma_1 \cup \cdots \cup \Gamma_m ,$$

wobei $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_m$ paarweise disjunkte, offene und abgeschlossene Teilmengen von M sind sowie wegzusammenhängende, kompakte, k-dimensionale Untermannigfaltigkeiten von $\mathbb{R}^n$.

Beweis. (a) Gegeben $x \in M$ und $y \in M_x$ gibt es eine C^1-Parametrisierung $\phi : U \to M$ von M mit $y \in \phi(U)$. Es existiert ein $\varepsilon > 0$ derart, dass $W := B_\varepsilon(\phi^{-1}(y)) \subseteq U$. Da die Kugel W wegzusammenhängend ist, gilt dies (nach Bemerkung B.2 (d)) auch für die offene Umgebung $\phi(W)$ von y. Also gilt $\phi(W) \subseteq M_x$ und somit ist M_x eine Umgebung von y in M. Da y beliebig war, ist M_x offen in M. Als offene Teilmenge von M ist auch M_x eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$.

Da die Wegkomponenten eine Partition bilden, ist $M \setminus M_x$ die Vereinigung der anderen Wegkomponenten und somit offen in M. Also ist M_x abgeschlossen in M.

(b) Die Menge $\pi_0(M)$ aller Wegkomponenten von M ist nach (a) eine offene Überdeckung von M. Ist M kompakt, so gibt es eine endliche Teilüberdeckung, wir finden also endlich viele paarweise verschiedene Mengen $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_m \in \pi_0(M)$ mit Vereinigung $\bigcup_{j=1}^m \Gamma_j = M$. Da $\pi_0(M)$ eine Partition ist, sind die Mengen Γ_j paarweise disjunkt und es folgt $\pi_0(M) = \{\Gamma_1, \ldots, \Gamma_m\}$. Als abgeschlossene Teilmenge der kompakten Menge M ist jede der Komponenten Γ_j kompakt. Alles Weitere wurde bereits in (a) gezeigt. $\square$

Parametrisierung von Kurven durch Bogenlänge

Definition B.4 Ist $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, $t_0 \in I$ und $\gamma\colon I \to \mathbb{R}^n$ ein C^1-Weg, so definiert man die von t_0 aus gemessene Bogenlänge von γ als die Funktion

$$L_{\gamma,t_0}\colon I \to \mathbb{R}\,, \qquad L_{\gamma,t_0}(t) \;=\; \int_{t_0}^{t} \|\gamma'(s)\|_2 \, ds\,.$$

Definition B.5 Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall. Ein C^1-Weg $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ heißt *auf Bogenlänge parametrisiert*, wenn eine (und somit jede) der im folgenden Lemma formulierten Bedingungen erfüllt ist.

Lemma B.6 *Es sei $I \subseteq \mathbb{R}^n$ ein offenes Intervall und $\gamma\colon I \to \mathbb{R}$ ein C^1-Weg. Die folgenden Bedingungen sind äquivalent:*

(a) $\|\gamma'(t)\|_2 = 1$ *für alle* $t \in I$.

(b) $L_{\gamma,t_0}(t) = t - t_0$ *für alle* $t_0 \in I$ *und alle* $t \in I$.

(c) *Es existiert ein* $t_0 \in I$ *derart, dass* $L_{\gamma,t_0}(t) = t - t_0$ *für alle* $t \in I$.

Beweis. (a)$\Rightarrow$(b): Gilt $\|\gamma'(t)\|_2 = 1$ für alle t, so folgt für alle $t_0, t \in I$

$$L_{\gamma,t_0}(t) \;\stackrel{\text{def}}{=}\; \int_{t_0}^{t} \|\gamma'(s)\|_2 \, ds \;=\; \int_{t_0}^{t} 1 \, ds \;=\; t - t_0\,.$$

(b)$\Rightarrow$(c) ist trivial.

(a)$\Rightarrow$(a): Gilt $L_{\gamma,t_0}(t) = t - t_0$, so folgt

$$1 \;=\; \frac{d}{dt} L_{\gamma,t_0}(t) \;=\; \frac{d}{dt} \int_{t_0}^{t} \|\gamma'(s)\|_2 \, ds \;=\; \|\gamma'(t)\|_2$$

mit dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung. $\square$

Insbesondere ist jeder auf Bogenlänge parametrisierte Weg ein regulärer Weg, wegen Lemma B.6 (a).

Lemma B.7 *Ist $\gamma\colon I \to \mathbb{R}^n$ ein regulärer C^1-Weg und $t_0 \in I$, so gilt:*

(a) *$J := L_{\gamma,t_0}(I) \subseteq \mathbb{R}$ ist ein offenes Intervall;*

(b) *$L_\gamma(t)\colon I \to J$ ist streng monoton wachsend und ein Diffeomorphismus.*

Beweis. Nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung ist $L_{\gamma,t_0}\colon I \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, mit Ableitung

$$(L_{\gamma,t_0})'(t) = \|\gamma'(t)\|_2 \; > \; 0\,.$$

Die Behauptungen folgen. $\square$

Lemma B.8 *Ist $\gamma\colon I \to \mathbb{R}^n$ ein regulärer C^1-Weg, $t_0 \in I$ und $J := L_{\gamma,t_0}(I)$, so ist $\eta := \gamma \circ (L_{\gamma,t_0})^{-1} : J \to \mathbb{R}^n$ ein auf Bogenlänge parametrisierter C^1-Weg.*

Beweis. Schreiben wir $\tau := L_{\gamma,t_0}^{-1}$, so ist $\eta = \gamma \circ \tau$ und somit

$$\eta'(s) \;=\; \tau'(s)\,\gamma'(\tau(s)) \;=\; \frac{1}{(L_{\gamma,t_0})'(\tau(s))}\,\gamma'(\tau(s)) \;=\; \frac{1}{\|\gamma'(\tau(s))\|_2}\,\gamma'(\tau(s))$$

nach der Kettenregel. Also ist $\|\eta'(s)\|_2 = \frac{\|\gamma'(\tau(s))\|_2}{\|\gamma'(\tau(s))\|_2} = 1$ und somit ist η nach Lemma B.6 (a) auf Bogenlänge parametrisiert. $\square$

Lemma B.9 *Es seien $\gamma\colon I \to \mathbb{R}^n$ und $\eta\colon J \to \mathbb{R}^n$ auf Bogenlänge parametrisierte C^1-Wege, welche Einbettungen sind. Gilt $\gamma(I) = \eta(J)$, so ist eine der folgenden Bedingungen erfüllt:*

(a) *Es existiert ein $a \in \mathbb{R}$ mit $J = I + a$ und $\gamma(t) = \eta(t + a)$ für alle $t \in I$. Oder:*

(b) *Es existiert ein $a \in \mathbb{R}$ derart, dass $J = a - I$ und $\gamma(t) = \eta(a - t)$ für alle $t \in I$.*

Beweis. Da γ eine Immersion und eine Einbettung ist, ist $M := \gamma(I)$ eine 1-dimensionale C^1-Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$, mit globaler Parametrisierung $\gamma\colon I \to M$. Das gleiche Argument zeigt, dass auch $\eta\colon J \to M$ eine globale Parametrisierung ist. Nach Satz 9.26 ist die Abbildung

$$\tau \;:=\; \eta^{-1} \circ \gamma : I \to J$$

stetig differenzierbar. Es ist $\eta \circ \tau = \gamma$, somit

$$\tau'(t)\,\eta'(\tau(t)) \;=\; \gamma'(t)$$

nach der Kettenregel und somit

$$|\tau'(t)| \;=\; |\tau'(t)|\,\|\eta'(\tau(t))\|_2 \;=\; \|\tau'(t)\,\eta'(\tau(t))\|_2 \;=\; \|\gamma'(t)\|_2 \;=\; 1\,,$$

woraus $|\tau'(t)| = 1$ folgt. Also $\tau'(t) \in \{1, -1\}$ für alle $t \in I$. Da I ein Intervall ist, schließen wir mit dem Zwischenwertsatz, dass $\tau(t)$ nicht das Vorzeichen wechseln kann, also $\tau'(I) = \{1\}$ oder $\tau'(I) = \{-1\}$ gilt. Wählen wir $t_0 \in I$, so folgt im ersten Falle

$$\tau(t) \;=\; \tau(t_0) - t_0 + t \qquad \text{für alle } t \in I,$$

im zweiten Falle $\tau(t) \;=\; \tau(t_0) + t_0 - t$. Die Behauptung gilt also mit $a := \tau(t_0) - t_0$ bzw. $a := \tau(t_0) + t_0$. □

1-dimensionale kompakte Untermannigfaltigkeiten von $\mathbb{R}^n$

Wir zeigen nun, dass jede wegzusammenhängende, kompakte 1-dimensionale Untermannigfaltigkeit M von $\mathbb{R}^n$ eine geschlossene C^1-Kurve ist. Der Beweis beruht auf einem Lemma, das es ermöglicht, nach und nach einzelne Parametrisierungen für M passend zusammenzusetzen, bis man einen periodischen Weg mit Bild M erhalten hat.

Vorüberlegung. Zur Motivation der folgenden Beweisstrategie schauen wir uns zunächst einmal eine prototypische kompakte 1-dimensionale Untermannigfaltigkeit an, den Kreis $\mathbb{S}_1$ in $\mathbb{R}^2$. In diesem Falle ist $\theta\colon \mathbb{R} \to \mathbb{S}_1$, $\theta(t) := (\cos t, \sin t)$ ein 2π-periodischer regulärer C^1-Weg mit Bild $\theta(\mathbb{R}) = \mathbb{S}_1$, der auf $[0, 2\pi[$ injektiv ist, und somit ist $\mathbb{S}_1$ eine geschlossene C^1-Kurve im Sinne von Definition 13.6. Sind $I, J \subseteq \mathbb{R}$ offene Intervalle mit Längen $< 2\pi$, so sind $\gamma := \theta|_I$ und $\eta := \theta|_J$ Parametrisierungen für $\mathbb{S}_1$. Die Bilder $\gamma(I)$

und $\eta(J)$ sind Kreisbögen; wenn sie überlappen, so können sie entweder vollständig ineinander enthalten sein, oder sie überlappen in einem Kreisbogen, oder aber ihr Durchschnitt besteht aus zwei Kreisbögen. Dieser Fall tritt z.B. auf, wenn $I =]0, 2\pi[$ und $J =]-\pi, \pi[$. In diesem Fall ist $\gamma(I) \cup \eta(J) = \mathbb{S}_1$ kompakt, und wir können aus γ und η durch eine stückweise Definition und periodische Fortsetzung die Funktion θ zurückgewinnen.

Lemma B.10 (Zusammenbauen von Wegen). *Es seien $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine 1-dimensionale wegzusammenhängende Untermannigfaltigkeit, $I, J \subseteq \mathbb{R}$ beschränkte offene Intervalle und $\gamma\colon I \to M$ sowie $\eta\colon J \to M$ auf Bogenlänge parametrisierte injektive C^1-Wege derart, dass $\gamma(I) \cap \eta(J) \neq \emptyset$. Dann gilt:*

(a) *Ist $\gamma(I) \cup \eta(J)$ kompakt, so ist $\gamma(I) \cup \eta(J) = M$ und M ist eine geschlossene C^1-Kurve im Sinne von Definition* 13.6.

(b) *Andernfalls existiert ein beschränktes offenes Intervall $E \subseteq \mathbb{R}$ mit $I \subseteq E$ und ein auf Bogenlänge parametrisierter, injektiver C^1-Weg $\zeta\colon E \to M$ derart, dass $\zeta(E) = \gamma(I) \cup \eta(J)$ und $\zeta|_I = \gamma$.*

Beweis. Sei etwa $I =]a, b[$ und $J =]c, d[$. Da M eine 1-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$ ist, sind die injektiven Immersionen γ und η nach Lemma 9.24 Parametrisierungen für M und somit insbesondere Einbettungen.

1. Fall: Ist $\eta(J) \subseteq \gamma(I)$, so ist $\eta(J) \cup \gamma(I) = \gamma(I)$ nicht kompakt (denn sonst wäre das zu $\gamma(I)$ homöomorphe offene Intervall I kompakt, was nicht der Fall ist). Wir sind also in der Situation von (b) und setzen einfach $E := I$ und $\zeta := \gamma$.

2. Fall: Ist $\gamma(I) \subseteq \eta(J)$, so ist $\gamma(I) \cup \eta(J) = \eta(J)$ nicht kompakt. Die Menge $U := \eta^{-1}(\gamma(I)) \subseteq \mathbb{R}$ ist offen und wegzusammenhängend, somit ein offenes Intervall. Da γ und $\eta|_U$ Einbettungen und auf Bogenlänge parametrisierte Wege mit gleichem Bild sind, gibt es nach Lemma B.9 ein $a \in \mathbb{R}$ derart, dass entweder $U = I + a$ und $\gamma(t) = \eta(t + a)$ für alle $t \in I$, oder $U = a - I$ und $\gamma(t) = \eta(a - t)$ für alle $t \in I$. In der ersten Situation setzen wir $E := J - a$ und definieren $\zeta\colon E \to M$ via $\zeta(t) := \eta(t + a)$; andernfalls setzen wir $E := a - J$ und definieren $\zeta : E \to M$ via $\zeta(t) := \eta(a - t)$. Dann leistet ζ das in (b) Verlangte.

3.Fall: Wir nehmen nun an, dass weder $\gamma(I) \subseteq \eta(J)$ noch $\eta(J) \subseteq \gamma(I)$. Dann ist $W := \gamma^{-1}(\eta(J))$ eine nicht-leere echte offene Teilmenge von I. Behauptung: $I \setminus W$ ist ein Intervall. Dazu seien $x, y \in I$ mit $x \leq y$; wir haben zu zeigen, dass $[x, y] \subseteq I \setminus W$. Widerspruchsbeweis: Andernfalls gibt es ein $z \in \,]x, y[\, \cap W =: V$. Da V offen in $\mathbb{R}$ ist, ist nach Satz B.3 (a) die Wegkomponente V_z eine offene wegzusammenhängende Teilmenge von $\mathbb{R}$ und daher ein offenes Intervall, somit $V_z = \,]\alpha, \beta[$ mit $x \leq \alpha < z < \beta \leq y$. Nach Satz 9.26 ist $\tau : W \to \eta^{-1}(\gamma(I))$, $\tau(t) := \eta^{-1}(\gamma(t))$ ein Diffeomorphismus auf die offene Teilmenge $\eta^{-1}(\gamma(I))$ von J. Als wegzusammenhängende offene Teilmenge von $\mathbb{R}$ ist dann $\tau(V_z)$ ein Intervall, etwa $\tau(V_z) = \,]\alpha', \beta'[$ mit $c \leq \alpha' < \beta' \leq d$. Als Diffeomorphismus zwischen offenen Intervallen ist $\tau|_{V_z}$ entweder streng monoton wachsend oder streng monoton fallend. Wir nehmen an, dass $\tau|_{V_z}$ streng monoton wachsend ist (den anderen Fall behandelt man analog). Wir behaupten, dass $\alpha' = c$. Andernfalls wäre nämlich $\alpha' \in J$ und $\lim_{t \to 0_+} \tau(\alpha + t) = \alpha'$. Da η stetig ist, wäre dann

$$\gamma(\alpha) \;=\; \lim_{t \to 0_+} \gamma(\alpha + t) \;=\; \lim_{t \to 0_+} \eta(\tau(\alpha + t)) \;=\; \eta(\alpha') \tag{149}$$

und somit $\alpha \in \gamma^{-1}(\eta(J)) = W$, folglich $\alpha \neq x$ und daher $[\alpha, \beta[\, \subseteq \,]x, y[\, \cap W = V$, was auf den Widerspruch $[\alpha, \beta[\, \subseteq V_z$ führt. Also ist $\alpha' = c$. Analog sieht man, dass $\beta' = d$. Somit ist $\tau(V_z) = J$ und daher $\eta(J) \subseteq \gamma(I)$, im Widerspruch zu den im vorliegenden 3. Fall gemachten Voraussetzungen. Also ist doch $I \setminus W$ ein Intervall. Da W offen ist, gibt es drei Möglichkeiten:

Fall 3 (i): Es ist $W = \,]r, b[$ für ein $r \in \,]a, b[$. Dann ist $\tau|_W$ entweder von der in Lemma B.9 (a) beschriebenen Gestalt, oder wie in (b). Wir nehmen Ersteres an (den zweiten Fall behandelt man analog). Dann gibt es also ein $\delta \in \mathbb{R}$ mit $\tau(W) = \delta + W \subseteq J$ und $\tau(t) = \delta + t$, also $\gamma(t) = \eta(\tau(t)) = \eta(\delta + t)$ für alle $t \in W$. Wiederholung des bei (149) benutzten Arguments zeigt, dass $r + \delta = c$ sein muss. Wir setzen nun $E := \,]a, r + d - c[$ und definieren

$$\zeta \colon E \to M\,, \qquad \zeta(t) \;:=\; \begin{cases} \gamma(t) & \text{falls } t \in \,]a, b[; \\ \eta(\delta + t) & \text{falls } t \in \,]r, r + d - c[. \end{cases}$$

Nach dem Vorigen ist ζ wohldefiniert, und per Konstruktion hat ζ die in (b) geforderten Eigenschaften.

Fall 3 (ii): Es ist $W = \,]a, r[$ für ein $r \in \,]a, b[$. Dieser Fall kann analog zu Fall 3 (i) behandelt werden.

Fall 3 (iii): Es ist $W = \,]a, r[\, \cup \,]s, b[$ mit $a < r \leq s < b$. Nachdem wir notfalls η durch einen entsprechenden in umgekehrter Richtung durchlaufenen Weg ersetzen, dürfen wir annehmen, dass $\tau|_{]s,b[}$ monoton wachsend ist. Eine Wiederholung des bei (149) benutzten Arguments zeigt, dass dann $\tau(]s,b[) =]c, c+b-s[$ sein muss und

$$\tau(t) \;=\; c - s + t \qquad \text{für alle } t \in]s,b[. \tag{150}$$

Analog muss dann $\tau(]a,r[) =]d-(r-a), d[$ sein und

$$\tau(t) \;=\; d - r + t \qquad \text{für alle } t \in]a,r[. \tag{151}$$

Wir setzen $\ell := (b-a)+(d-c)-(r-a)-(b-s) = d-c-r+s$ und definieren $\theta\colon\ ]r-(d-c),\ s+(d-c)[\to M$,

$$\theta(t) \;:=\; \begin{cases} \eta(d-r+t) & \text{wenn } t \in]r-(d-c), r[; \\ \gamma(t) & \text{wenn } t \in]a,b[; \\ \eta(c-s+t) & \text{wenn } t \in]s, s+(d-c)[. \end{cases}$$

Nach dem Vorigen ist θ wohldefiniert und man sieht nun leicht, dass θ ein auf Bogenlänge parametrisierter (und somit regulärer) C^1-Weg ist, der auf $]r, r+\ell[$ injektiv ist und derart, dass

$$\theta(t+\ell) \;=\; \theta(t) \qquad \text{wann immer } t, t+\ell \in]r-(d-c), s+(d-c)[.$$

Folglich ist durch $\bar{\theta}(t) := \theta(t+k\ell)$ mit $k \in \mathbb{Z}$ derart, dass $t+k\ell \in]r-(d-c), s+(d-c)[$ eine ℓ-periodische Funktion $\bar{\theta}: \mathbb{R} \to M$ wohldefiniert. Diese setzt θ fort und ist somit ein regulärer C^1-Weg. Nun ist $\theta(\mathbb{R}) = \gamma(I) \cup \eta(I)$ offen in M aber wegen der Periodizität auch $\theta(\mathbb{R}) = \theta([0,\ell])$ kompakt, somit abgeschlossen in M, folglich $M \setminus \theta(\mathbb{R})$ offen in M. Da M wegzusammenhängend und somit zusammenhängend ist, folgt $M = \theta(\mathbb{R})$. Also ist $M = \theta(\mathbb{R})$ eine geschlossene C^1-Kurve und somit insbesondere $\gamma(I) \cup \eta(J) = M$ kompakt; wir sind also in der Situation von (a) und haben die gewünschte Schlussfolgerung bewiesen. □

Satz B.11 (1-dimensionale kompakte Untermannigfaltigkeiten). *Jede wegzusammenhängende kompakte* 1*-dimensionale Untermannigfaltigkeit* M *von* $\mathbb{R}^n$ *ist eine geschlossene* C^1*-Kurve.*

Beweis. Für jeden Punkt $x \in M$ existiert eine lokale Parametrisierung $\gamma: I \to V_x \subseteq M$ mit $x \in V_x$, wobei I eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}$ ist.

Nach Ersetzen von I durch ein kleines Intervall um $\gamma^{-1}(x)$ dürfen wir annehmen, dass I ein offenes beschränktes Intervall ist und γ eine endliche Bogenlänge besitzt. Nach Lemma B.8 können wir γ durch einen auf Bogenlänge parametrisierten Weg mit dem gleichen Bild ersetzen. Wir dürfen daher o.B.d.A. annehmen, dass γ auf Bogenlänge parametrisiert ist. Da die hier auftretenden Mengen V_x eine offene Überdeckung der kompakten Menge M bilden, finden wir endlich viele auf offenen beschränkten Intervallen $I_1, \ldots, I_k$ definierte, auf Bogenlänge parametrisierte C_1-Wege $\gamma_j : I_j \to M$, deren Bilder $W_j := \gamma_j(I_j)$ die Menge M überdecken.

Wir zeigen nun durch Induktion nach k, dass M eine geschlossene C^1-Kurve ist.

Fall $k = 1$: Kann nicht auftreten, da sonst das offene Intervall I_1 zu M homöomorph und somit kompakt wäre.

Fall $k = 2$: Wäre $W_1 \cap W_2 = \emptyset$, so wären W_1 und W_2 disjunkte, nicht-leere offene Mengen, die M überdecken; daher wäre M nicht zusammenhängend und somit auch nicht wegzusammenhängend, Widerspruch. Da $M = W_1 \cup W_2 = \gamma_1(I_1) \cup \gamma_2(I_2)$, ist M nach Lemma B.10 (a) eine geschlossene C^1-Kurve.

Induktionsschritt: Es sei nun $k \geq 3$ und die Aussage für $k - 1$ bereits gezeigt. Wie im vorigen Fall sehen wir, dass $W_1 \cap (W_2 \cup \cdots \cup W_k) \neq \emptyset$ sein muss. Nach Umnummerieren von $\gamma_2, \ldots, \gamma_k$ dürfen wir daher o.B.d.A. annehmen, dass $W_1 \cap W_2 \neq \emptyset$. 1. Fall: $W_1 \cup W_2$ ist kompakt. Dann ist $W_1 \cup W_2$ in M abgeschlossen und somit $M \setminus (W_1 \cup W_2)$ eine in M offene Menge, die die offene Menge $W_1 \cup W_2$ nicht trifft. Da M zusammenhängend ist, muss $W_1 \cup W_2 = M$ sein; somit ist M nach Lemma B.10 (a) eine geschlossene C^1-Kurve. 2. Fall: $W_1 \cup W_2$ ist nicht kompakt. Dann gibt es nach Lemma B.10 (b) ein beschränktes offenes Intervall $E \subseteq \mathbb{R}$ mit $I_1 \subseteq E$ und einen auf Bogenlänge parametrisierten C^1-Weg $\gamma \colon E \to M$ derart, dass $\gamma(E) = W_1 \cup W_2$ und $\gamma|_{I_1} = \gamma_1$. Wir können nun $\gamma_1, \ldots, \gamma_k$ durch die $k - 1$ Wege $\gamma, \gamma_3, \ldots, \gamma_k$ ersetzen und erhalten per Induktion, dass M eine geschlossene C^1-Kurve ist. □

Ähnlich kann man zu jeder nicht-kompakten, wegzusammenhängenden 1-dimensionalen Untermannigfaltigkeit $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine globale Parametrisierung $\gamma \colon \mathbb{R} \to M$ konstruieren.

Wohldefiniertheit der Randintegrale

Der Vollständigkeit halber begründen wir noch die Wohldefiniertheit der in Kapitel 13 auftretenden Randintegrale.

Lemma B.12 *Sind $I, J \subseteq \mathbb{R}$ offene Intervalle, $\gamma : J \to \mathbb{R}^n$ ein C^1-Weg, $\tau : I \to J$ ein Diffeomorphismus mit $\tau'(t) > 0$ für alle t und $F : \gamma(J) \to \mathbb{R}^n$ eine stetige Funktion derart, dass das Integral $\int_\gamma \langle F,\, d\vec{s}\rangle$ existiert, so existiert auch $\int_{\gamma\circ\tau} \langle F,\, d\vec{s}\rangle$ und es gilt*

$$\int_\gamma \langle F,\, d\vec{s}\rangle \;=\; \int_{\gamma\circ\tau} \langle F,\, d\vec{s}\rangle\,.$$

Beweis. Nach der Substitutionsregel ist

$$\int_I F_j(\gamma(\tau(t)))\,\underbrace{(\gamma_j \circ \tau)'(t)}_{=\gamma_j'(\tau(t))\tau'(t)}\,dt = \int_J F_j(\gamma(s))\gamma_j'(s)\,ds$$

für $j = 1, \ldots, n$, woraus die Behauptung folgt. $\square$

Lemma B.13 *Das Integral $\int_{\partial K} \langle F,\, d\vec{s}\rangle$ in Definition* 13.10 *ist wohldefiniert, unabhängig von der Wahl der Kurven Γ_j und der Parametrisierungen η_j.*

Beweis. Schreibt man ∂K als disjunkte Vereinigung von geschlossenen C^1-Kurven $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_k$, so ist jedes Γ_j wegzusammenhängend und ist daher in einer Wegkomponente W von ∂K enthalten. Weiter ist Γ_j kompakt und hat kompaktes (und somit abgeschlossenes) Komplement $\bigcup_{i\neq j} \Gamma_i$ in ∂K, weswegen Γ_j auch offen in ∂K ist. Da W zusammenhängend ist und $W = \Gamma_j \cup (W \setminus \Gamma_j)$ eine Zerlegung in disjunkte offene Mengen, muss $\Gamma_j = W$ sein. Also sind die Mengen Γ_j genau die Wegkomponenten von ∂K. In welcher Reihenfolge man diese nummeriert hat, beinflusst die zur Integraldefinition benutzte Summe natürlich nicht. Wir müssen daher nur noch zeigen: Sind $\eta : I \to \Gamma_j$ und $\zeta : J \to \Gamma_j$ auf offenen Intervallen definierte Parametrisierungen für Γ_j derart, dass K links von η und ζ liegt und $\Gamma_j \setminus \eta(I)$ und $\Gamma_j \setminus \zeta(J)$ einpunktige Mengen sind, so ist

$$\int_\eta \langle F,\, d\vec{s}\rangle \;=\; \int_\zeta \langle F,\, d\vec{s}\rangle\,. \tag{152}$$

Ist $\eta(I) = \zeta(J)$, so ist $\tau := \eta^{-1} \circ \zeta : J \to I$ nach Satz 9.26 ein Diffeomorphismus. Da $\eta \circ \tau = \zeta$, ist $\tau'(t)\,\eta'(\tau(t)) = \zeta'(t)$ für $t \in J$; da der äußere Normalenvektor $\nu(\zeta(t))$ sowohl mit $\eta'(\tau(t))$ als auch mit $\zeta'(t) = \tau'(t)\,\eta'(\tau(t))$ ein Rechtssystem bildet, muss $\tau'(t) > 0$ sein. Die Integrale in (152) stimmen somit nach Lemma B.12 überein. Ist andererseits $\eta(I) \neq \zeta(J)$, so ist $\eta(I) \setminus \zeta(J) = \{\eta(s)\}$ für ein $s \in I$ und $\zeta(J) \setminus \eta(I) = \{\zeta(r)\}$ für ein $r \in J$. Ist $I =]a, b[$, $J =]c, d[$, so folgt

$$M \ := \ \eta(]a, s[) \cup \eta(]s, b[) \ = \ \zeta(]c, r[) \cup \zeta(]r, d[)\,.$$

Die beiden Mengen auf der linken Seite sind wegzusammenhängend, disjunkt, offen und nicht leer; sie sind also die beiden Wegkomponenten von M. Analoges gilt auf der rechten Seite. Folglich haben $\eta|_{]a,s[}$ und $\eta_{]s,b[}$ die gleichen Bilder wie die zwei Einschränkungen von ζ, und wie zuvor sehen wir nun mit Lemma B.12, dass die Wegintegrale längs der Teilwege übereinstimmen und somit auch die Wegintegrale längs η und ζ. $\square$