Übungsaufgaben zur Vorlesung "Mannigfaltigkeiten" von Prof. Dr. Helge Glöckner an der Universität Paderborn im Sommersemester 2021 (Übungsbetreuung: Dr. Ali Suri)

Aufgabe P1 (Topologische Mannigfaltigkeiten).
Skizzieren Sie die folgenden Teilmengen des $\mathbb{R}^2$ und entscheiden Sie ohne Beweis, welche davon mit der induzierten Topologie topologische Mannigfaltigkeiten sind.

(a) $M_1 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 - y^2 = 1\}$;

(b) $M_2 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 - y^2 = 0\}$;

(c) $M_3 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 - 1 \in \mathbb{N}\}$;

(d) $M_4 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon |x| - y = -1\}$;

(e) $M_5 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon |x| - y < -2\}$;

(f) $M_6 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon y \in \,]-2,-1[\}$;

(g) $M_7 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon y \in [-4,-3[\}$;

(h) $M_8 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon y < -5 \text{ und } y \in \mathbb{Q}\}$.

Aufgabe P2 (Einpunkt-Kompaktifizierung von $\mathbb{R}^n$).
Sei $X := \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$ für $n \in \mathbb{N}$ und $\infty \notin \mathbb{R}^n$. Wir betrachten die Menge

$$\mathcal{O} := \{U \subseteq \mathbb{R}^n \colon U \text{ ist offen in } \mathbb{R}^n\} \cup \{X \setminus K \colon K \text{ ist kompakt in } \mathbb{R}^n\} = \mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2$$

von Teilmengen von X.

(a) Zeigen Sie, dass $(X, \mathcal{O})$ ein Hausdorffscher topologischer Raum ist.

(b) Zeigen Sie, dass $(X, \mathcal{O})$ auf der Teilmenge $\mathbb{R}^n$ die gegebene Topologie $\mathcal{O}_1$ induziert.

Man kann zeigen, dass der Hausdorffraum $(X, \mathcal{O})$ kompakt ist, also jede offene Überdeckung eine endliche Teilüberdeckung besitzt.

Aufgabe P3 (Karten)
Sei $(X, \mathcal{O})$ der topologische Raum aus P2 und $\|\cdot\|$ eine Norm auf $\mathbb{R}^n$.

(a) Berechnen Sie $f \circ f$ für

$$f \colon \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \quad x \mapsto \frac{1}{\|x\|^2} x$$

und folgern Sie, dass f ein Homöomorphismus ist.

(b) Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$F \colon X \to X, \quad x \mapsto \begin{cases} f(x) & \text{wenn } x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}; \\ \infty & \text{wenn } x = 0; \\ 0 & \text{wenn } x = \infty \end{cases}$$

ein Homöomorphismus ist.

(c) Ist X eine n-dimensionale topologische Mannigfaltigkeit?

Aufgabe P4 (Quotiententopologie).
Sei X ein topologischer Raum und $q : X \longrightarrow Y$ eine surjektive Abbildung. Wir versehen Y mit der finalen Topologie bzgl. q. Diese Topologie wird auch Quotiententopologie genannt. Zeigen Sie:

(a) Eine Teilmenge von Y ist genau dann offen (bzw. abgeschlossen), wenn ihr Urbild unter q offen (bzw. abgeschlossen) ist.

(b) Sei nun Z ein topologischer Raum und $f : X \longrightarrow Z$ eine stetige, surjektive und offene Abbildung (d.h. $f(U) \subseteq Z$ offen für alle $U \subseteq X$ offen), dann ist die Topologie auf Z die Quotiententopologie bzgl. f.

(c) Die von $\mathbb{R}^2$ induzierte Topologie auf dem Einheitskreis $\mathbb{S}_1 \subseteq \mathbb{R}^2$ entspricht der Quotiententopologie bzgl.

$$\begin{aligned} k : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{S}^2 \\ t &\longmapsto (\cos(t), \sin(t)). \end{aligned}$$

Aufgabe P5 (Atlanten).

Sei M eine n-dimensionale C^k-Mannigfaltigkeit mit dem maximalen Atlas $\mathcal{A}$. Zeigen Sie:

(a) Sei $(\varphi : U_\varphi \longrightarrow V_\varphi) \in \mathcal{A}$ und $U \subseteq U_\varphi$ offen. Dann gilt $(\varphi|_U : U \longrightarrow \varphi(U)) \in \mathcal{A}$.

(b) Sei $W \subseteq M$ offen. Dann ist W eine C^k Mannigfaltigkeit mit dem maximalen Atlas $\mathcal{A}_W := \{\varphi \in \mathcal{A} : U_\varphi \subseteq W\}$.

Aufgabe P6 (Verschiedene Mannigfaltigkeitsstrukturen)

Gegeben sei $\mathbb{R}$ mit der gewöhnlichen Topologie. Wir definieren die Abbildungen

$$\begin{aligned} \phi_1 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x &\mapsto x^3 \\ \phi_2 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x &\mapsto x+1. \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass $\mathcal{A}_1 = \{\phi_1\}$ und $\mathcal{A}_2 = \{\phi_2\}$ je C^∞-Atlanten für $\mathbb{R}$ sind , dass aber $\mathcal{A}_3 = \{\phi_1, \phi_2\}$ kein C^∞-Atlas ist (d.h. es gibt keinen maximalen C^∞-Atlas, der ϕ_1 und ϕ_2 enthält). Zeigen Sie weiter, dass es einen Diffeomorphismus

$$\Phi : (\mathbb{R}, \mathcal{A}_1) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{A}_2)$$

gibt.

Aufgabe P7 (Untermannigfaltigkeiten von Vektorräumen)

(a) Sei $\mathbb{S}_n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \colon x_1^2 + \cdots + x_{n+1}^2 = 1\}$ mit $x = (x_1, \ldots, x_{n+1})$. Zeigen Sie, dass $\mathbb{S}_n \cap (\mathbb{R}^n \times\,]0, \infty[)$ eine Untermannigfaltigkeit der glatten Mannigfaltigkeit $\mathbb{R}^{n+1}$ ist.

(b) Zeigen Sie, dass $\mathbb{S}_n$ eine Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^{n+1}$ ist.

(c) Für $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n \in \mathbb{R}^{n\times n}$ zeigen Sie

$$\frac{\partial}{\partial a_{nn}}\Big|_{A=\mathbf{1}} \det(A) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=1} \det \operatorname{diag}(1, \ldots, 1, t) = 1.$$

(d) Zeigen Sie, dass $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ eine Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^{n\times n} \cong \mathbb{R}^{n^2}$ (und der offenen Teilmenge $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$) ist.

Aufgabe P8 (Eingebettete Tangentialvektoren)

(a) Sei M eine ℓ-dimensionale C^k-Untermannigfaltigkeit (mit $k \geq 1$) des $\mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass für $x \in M$ die Abbildung

$$\theta : T_xM \to \mathbb{R}^n; \quad [\gamma] \mapsto \gamma'(0)$$

wohldefiniert ist (Inbesondere existiert die Ableitung). Zeigen Sie weiter, dass $\theta : T_xM \to \mathrm{im}(\theta)$ ein Isomorphismus von Vektorräumen ist. Wir nennen $\mathcal{T}_xM := \mathrm{im}(\theta)$ den *eingebetteten Tangentialraum* an $x \in M$.

(b) Sei $M = \mathbb{S}_n$ die n-dimensionale Sphäre, aufgefasst als Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^{n+1}$. Zeigen Sie, dass für den eingebetten Tangentialraum an der Stelle $x \in M$ gilt

$$\mathcal{T}_xM = \{y \in \mathbb{R}^{n+1} : y \perp x\} = \{y \in \mathbb{R}^{n+1} : \langle x, y\rangle = 0\}.$$

(c) Zeichnen Sie $M := \mathbb{S}_1$ und skizzieren Sie $\mathcal{T}_xM$ (bzw. $x + \mathcal{T}_xM$) für einige Punkte $x \in M$.

Aufgabe P9 (Graphen sind Untermannigfaltigkeiten).

Ist M eine C^k-Mannigfaltigkeit, $N \subseteq M$ eine Teilmenge und $\phi\colon U_\phi \to V_\phi$ eine an N angepasste Karte von M, so ist für jede offene Teilmenge $U \subseteq M$ auch $\phi|_{U_\phi \cap U}\colon U_\phi \cap U \to \phi(U_\phi \cap U)$ eine an N angepasste Karte von M.

(a) Folgern Sie: Ist N eine n-dimensionale Untermannigfaltigkeit von M, so ist für jede offene Teilmenge $W \subseteq M$ der Durchschnitt $N \cap W$ eine n-dimensionale Untermannigfaltigkeit von M und von W.

(b) Zeigen Sie: Ist $f : M \to L$ eine C^k-Abbildung zwischen C^k-Mannigfaltigkeiten und M von der Dimension m, so ist der Graph von f eine m-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $M \times L$.

Aufgabe P10 (Étale Abbildungen)

(a) Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$k : \mathbb{R} \to \mathbb{S}_1; \quad t \mapsto (\cos(t), \sin(t))$$

eine glatte étale Abbildung ist.

(b) Wir definieren $\Omega_j := \{v \in \mathbb{R}^{n+1} : v_j \neq 0\}$ für $j \in \{1, \ldots, n+1\}$. Zeigen Sie, dass

$$\Gamma_j : \Omega_j \to \Omega_j, \quad (v_1, \ldots, v_{n+1}) \mapsto \left(\frac{v_1}{v_j}, \ldots \frac{v_{j-1}}{v_j}, v_j, \frac{v_{j+1}}{v_j}, \ldots \frac{v_{n+1}}{v_j}\right)$$

ein C^∞-Diffeomorphismus ist und dass

$$p_j : \Omega_j \to \mathbb{R}^n; \quad (w_1, \ldots, w_{n+1}) \mapsto (w_1, \ldots, w_{j-1}, w_{j+1}, \ldots, w_{n+1})$$

eine glatte Submersion ist.

(c) Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\Phi : \mathbb{R}^{n+1} \backslash \{0\} \to \mathbb{R}P^n, \quad v \mapsto \mathbb{R}v$$

eine glatte Submersion ist.

Hinweis: Zeigen Sie, dass $\Phi|_{\Omega_j} = f_j \circ p_j \circ \Gamma_j$ mit dem Diffeomorphismus f_j aus Beispiel 1.28 (sowie Beispiel 2.8 und Satz 2.9).

(d) Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\mathbb{S}^n \to \mathbb{R}P^n, \quad v \mapsto \mathbb{R}v$$

eine surjektive glatte étale Abbildung ist.

Aufgabe P11 (Faserprodukt) Wir betrachten die glatten Mannigfaltigkeiten $M_1 := M_2 := N := \mathbb{R}$ und die glatten Abbildungen $f_1 : M_1 \to N, \ x \mapsto x^2$ sowie $f_2 : M_2 \to N, y \mapsto y^2$. Zeigen Sie, dass das Faserprodukt

$$M_1 \times_N M_2 = \{(x, y) \in M_1 \times M_2 : f_1(x) = f_2(y)\}$$

keine Untermannigfaltigkeit von $M_1 \times M_2$ ist. Warum ist dies kein Widerspruch zum Satz über Faserprodukte aus der Vorlesung?

Aufgabe P12 (Submersionen).
Es sei $\| \cdot \|_2$ die euklidische Norm auf $\mathbb{R}^2$. Wir setzen $X := \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

(a) Zeigen Sie, dass die Abbildung $q : X \to]0, \infty[$, $x \mapsto \|x\|_2$ glatt ist und eine surjektive Submersion.

(b) Finden Sie für jedes $x \in X$ eine glatte Abbildung $\sigma :]0, \infty[\to X$ derart, dass $q \circ \sigma = \mathrm{id}_{]0,\infty[}$ und $\sigma(q(x)) = x$ (für q gibt also sogar glatte *globale* Schnitte).

Wir definieren eine Äquivalenzrelation R auf X via $xRy :\Leftrightarrow \|x\|_2 = \|y\|_2$. Es sei X/R die Menge aller Äquivalenzklassen $[x] := \{y \in X : xRy\}$.

(c) Finden Sie eine Bijektion $\psi : X/R \to]0, \infty[$. Zeigen Sie, dass X/R derart zu einer glatten Mannigfaltigkeit gemacht werden kann, dass die kanonische Quotientenabbildung $p : X \to X/R$, $x \mapsto [x]$ eine Submersion wird.

Aufgabe P13 (Submersionen und Orthogonale Gruppen)

(a) Sei $m \in \mathbb{N}$, $r \in \{1, \ldots, m\}$ und $S \subseteq \mathbb{R}^{r \times m}$ die Menge aller reellen $(r \times m)$-Matrizen A derart, dass A den vollen Rang r besitzt, also die lineare Abbildung

$$\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^r, \quad x \mapsto Ax$$

surjektiv ist. Zeigen Sie, dass S offen in $\mathbb{R}^{r \times m}$ ist.

[Hinweis: Für $A \in S$ können Sie Zeilenvektoren $w_{r+1}, \ldots, w_m$ finden, welche die Zeilen von A zu einer Basis von $\mathbb{R}^m$ ergänzen, so dass also

$$\begin{pmatrix} A \\ w_{r+1} \\ \vdots \\ w_m \end{pmatrix}$$

in $\mathrm{GL}_m(\mathbb{R})$ ist, einer offenen Teilmenge von $\mathbb{R}^{m \times m}$].

(b) Sei $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Zeigen Sie: Ist $f \colon M \to N$ eine C^k-Abbildung zwischen C^k-Mannigfaltigkeiten und $T_x f$ surjektiv für ein $x \in M$, so ist $f|_W$ eine Submersion für eine offene x-Umgebung W in M.

(c) Sei $n \in \mathbb{N}$. Berechnen Sie $f'(\mathbf{1})$ (oder die Richtungsableitung $f'(\mathbf{1})(B)$ für $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$) für die glatte Abbildung

$$f \colon \mathbb{R}^{n \times n} \to \mathrm{Symm}_n(\mathbb{R}), \quad A \mapsto A^T A$$

in den Vektorraum $\mathrm{Symm}_n(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}^{n\times n}$ aller symmetrischen $(n \times n)$-Matrizen. Folgern Sie, dass die orthogonale Gruppe

$$\mathrm{O}(n) := \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \colon A^T A = \mathbf{1}\}$$

eine Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^{n\times n}$ ist, der Dimension $n(n-1)/2$.

Aufgabe P14 (Lokale Diffeomorphismen). Sei $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.

(a) Sei M ein Hausdorffscher topologischer Raum und $(M_j)_{j\in J}$ eine offene Überdeckung von M. Jedes M_j sei eine C^k-Mannigfaltigkeit mit dem maximalen C^k-Atlas $\mathcal{A}_j$. Zeigen Sie:

Stimmt für alle $i, j \in J$ die von M_i und M_j auf ihrer offenen Teilmenge $M_i \cap M_j$ induzierte Mannigfaltigkeitsstruktur überein, so lässt sich M eindeutig so zu einer C^k-Mannigfaltigkeit machen, dass jedes M_j eine offene Untermannigfaltigkeit von M ist.[1]

(b) Sei N eine C^k-Mannigfaltigkeit, M ein Hausdorffscher topologischer Raum und $q \colon M \to N$ eine surjektive Abbildung, die ein lokaler Homöomorphismus ist. Zeigen Sie, dass es genau eine C^k-Mannigfaltigkeitsstruktur auf M gibt, die q zu einem lokalen Diffeomorphismus macht.

Aufgabe P15 (Kompaktheit der orthogonalen Gruppen)
Sei $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass die orthogonale Gruppe

$$\mathrm{O}(n) := \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \colon A^T A = \mathbf{1}\}$$

eine abgeschlossene Teilmenge des Vektorraums $\mathbb{R}^{n\times n} \cong \mathbb{R}^{n^2}$ aller reellen $(n \times n)$-Matrizen ist und beschränkt, also kompakt. Gilt Analoges für die unitäre Gruppe $U(n)$?

[Hinweis: Sind $v_1, \ldots, v_n$ die Spalten von A, so lässt sich $A^T A = \mathbf{1}$ mit Skalarprodukten und dem Kronecker-Delta umschreiben als

$$\langle v_j, v_k \rangle = \delta_{jk} \quad \text{für alle } j, k \in \{1, \ldots, n\}.]$$

[1] Ist also $\mathcal{A}$ der maximale C^k-Atlas auf M mit Karten $\phi \colon U_\phi \to V_\phi$, so ist $\mathcal{A}_j = \{\phi \in \mathcal{A} \colon U_\phi \subseteq M_j\}$ für jedes $j \in J$.

Aufgabe P16 (Gebrochen lineare Abbildungen)
Für $u = (u_1, u_2) \in \mathbb{C}^2 \setminus \{(0,0)\}$ und $A \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ sei

$$\widehat{A}(\mathbb{C}u^T) := \mathbb{C}Au^T.$$

Aus der Vorlesung wissen wir: Identifizieren wir $z \in \mathbb{C}$ mit $\mathbb{C}(z,1)^T \in \mathbb{C}P^1$, so ist

$$\mathbb{C}P^1 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$$

mit $\infty := \mathbb{C}(1,0)^T$. Sei $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ mit $a, b, c, d \in \mathbb{C}$. Mit der vorigen Identifizierung gilt $\widehat{A}(z) \in \mathbb{C}$ für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $cz + d \neq 0$, und es ist

$$\widehat{A}(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

(siehe Vorlesung). Zeigen Sie:

(a) Für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $cz + d = 0$ ist $\widehat{A}(z) = \infty$.

(b) Ist $c \neq 0$, so ist $\widehat{A}(\infty) = \frac{a}{c}$.

(c) Ist $c = 0$, so ist $\widehat{A}(\infty) = \infty$.

Aufgabe P17 (Transversalität).
Es seien M eine C^k-Mannigfaltigkeit mit $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ und N_1 sowie N_2 Untermannigfaltigkeiten von M. Man nennt N_1 und N_2 *transversal* an einer Stelle $x \in N_1 \cap N_2$, wenn

$$T_x(N_1) + T_x(N_2) = T_x M.$$

Wir wollen sehen:

Sind N_1 und N_2 an einer Stelle $x \in N_1 \cap N_2$ transversal, so gibt es eine offene x-Umgebung $U \subseteq M$ derart, dass $N_1 \cap N_2 \cap U$ eine Untermannigfaltigkeit von M ist, der Dimension $\dim(T_x(N_1) \cap T_x(N_2)) = \dim(N_1) + \dim(N_2) - \dim(M)$.

Zeigen Sie zu diesem Zweck:

(a) Für $n_1 := \dim(N_1)$ existiert eine offene x-Umgebung $U \subseteq M$ und eine Submersion $f \colon U \to \mathbb{R}^{m-n_1}$ derart, dass $N_1 \cap U = f^{-1}(\{0\})$.

(b) Es ist $T_x(N_1) = \ker T_x(f)$.

(c) Die lineare Abbildung $T_x(f|_{U\cap N_2})$ ist surjektiv; nach Verkleinern von U ist die Einschränkung $f|_{U\cap N_2}$ eine Submersion.

(d) Beenden Sie das Argument.

Sind N_1 und N_2 transversal an jeder Stelle $x \in N_1 \cap N_2$, so ist also $N_1 \cap N_2$ eine Untermannigfaltigkeit von M.

Aufgabe P18 (Topologische Summen)

Wir betrachten die topologische Summe $X = \bigcup_{j\in J} X_j$ einer Familie $(X_j)_{j\in J}$ topologischer Räume mit $X_j \cap X_k = \emptyset$ für alle $j \neq k$ in J. Zeigen Sie:

(a) Für jedes $j \in J$ ist X_j eine abgeschlossene Teilmenge von X.

(b) Ist X_j Hausdorffsch für jedes $j \in J$, so ist X Hausdorffsch.

(c) Ist Y ein topologischer Raum und für jedes $j \in J$ eine stetige Abbildung $f_j\colon X_j \to Y$ gegeben, so ist die Abbildung $f\colon X \to Y$ stetig, die stückweise definiert ist durch $f(x) := f_j(x)$ wenn $x \in X_j$.

(d) Ist X_j parakompakt für jedes $j \in J$, so ist X parakompakt.

Aufgabe P19 (Satz von Godement)

Es sei M eine C^k-Mannigfaltigkeit und R eine Äquivalenzrelation auf M derart, dass M/R eine C^k-Mannigfaltigkeitsstruktur zulässt, für welche die kanonische Abbildung $q\colon M \to M/R$, $x \mapsto [x]$ eine Submersion ist. Zeigen Sie, dass für jedes $x \in M$ die Äquivalenzklasse $[x]$ eine abgeschlossene Teilmenge von M ist und eine Untermannigfaltigkeit.
[Hinweis: Es ist $[x] = q^{-1}(\{[x]\})$.]

Aufgabe P20 (Whitneyscher Einbettungssatz)

Sei $k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$. Zeigen Sie, dass für jede kompakte C^k-Mannigfaltigkeit M eine Einbettung von C^k-Mannigfaltigkeiten

$$f\colon M \to \mathbb{R}^n$$

existiert für ein $n \in \mathbb{N}$. Gehen Sie wie folgt vor:

(a) Für $x \in M$ sei $\phi_x\colon U_x \to V_x \subseteq \mathbb{R}^m$ eine Karte für M um x. Zeigen Sie, dass es eine C^k-Abbildung $\psi_x\colon M \to \mathbb{R}^m$ gibt derart, dass $\psi_x|_{W_x} = \phi_x|_{W_x}$ für eine offene x-Umgebung $W_x \subseteq U_x$.

Für $x \in M$ sei $h_x \in C^k_c(M, \mathbb{R})$ derart, dass $\operatorname{supp}(h_x) \subseteq W_x$ und $h_x|_{Q_x} = 1$ für eine offene x-Umgebung $Q_x \subseteq W_x$.

(b) Da M kompakt ist, existieren $x_1, \ldots, x_\ell \in M$ mit $M = Q_{x_1} \cup \cdots \cup Q_{x_\ell}$. Zeigen Sie, dass

$$f := (\psi_{x_1}, \ldots, \psi_{x_\ell}, h_{x_1}, \ldots, h_{x_\ell})\colon M \to \mathbb{R}^{\ell(m+1)}$$

auf jeder der Mengen $Q_{x_1}, \ldots, Q_{x_\ell}$ eine Immersion ist und somit eine Immersion.

(c) Zeigen Sie, dass f auf jeder der Mengen $W_{x_1}, \ldots, W_{x_\ell}$ injektiv ist. Für $j \in \{1, \ldots, \ell\}$ und $y \in M$ folgt aus $h_{x_j}(y) = 1$, dass $y \in W_{x_j}$. Schließen Sie, dass f injektiv und somit eine Einbettung ist.

[Dies ist ein Spezialfall des Whitneyschen Einbettungssatzes: Für jede m-dimensionale σ-kompakte C^k-Mannigfaltigkeit M existiert eine Einbettung $f\colon M \to \mathbb{R}^{2m}$ von C^k-Mannigfaltigkeiten.]

Aufgabe P21 (Parakompaktheit)

Zeigen Sie, dass jeder σ-kompakte, lokalkompakte topologische Raum X parakompakt ist.

[Hinweis: Sei $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine kompakte Ausschöpfung für X. Gegeben eine offene Überdeckung $(U_i)_{i\in I}$ von X definiere man kompakte Teilmengen L_n und offene Mengen Q_n wie im Beweis von Satz 12.21. Jedes $x \in L_n$ ist in einem $U_{i(x)}$ enthalten und hat eine offene Umgebung $V_{n,x} \subseteq Q_n \cap U_{i(x)}$. Wählen Sie geeignete $V_{n,x}$ aus, um eine lokal endliche Überdeckung von X zu erhalten.]

Aufgabe P22 (Verknüpfte Vektorfelder) Sei $U := \mathbb{R}^2$.

(a) Berechnen Sie die Jacobi-Matrix $J_{(x,y)}(\phi)$ und $d\phi\colon U \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ für $\phi\colon U \to U$, $(x, y) \mapsto (x + y, y)$.

(b) Berechnen Sie $T\phi\colon U \times \mathbb{R}^2 \to U \times \mathbb{R}^2$.

(c) Wir betrachten die glatten Funktionen $a, b\colon U \to \mathbb{R}^2$,

$$a(x,y) := (\cos x + y, \sin x), \quad b(x,y) := (\cos(x-y) + y + \sin(x-y), \sin(x-y)).$$

Sind die Vektorfelder (id_U, a) und (id_U, b) auf U über ϕ verknüpft?

Aufgabe P23 (Lieklammer zweier Vektorfelder)
Sei $U := \mathbb{R}^2$. Berechnen Sie $[a,b] := a.b - b.a \in C^\infty(U, \mathbb{R}^2)$ für $a, b\colon U \to \mathbb{R}^2$ mit $a(x,y) := (x^2, x+y)$, $b(x,y) := (xy, y^2)$.

Aufgabe P24 (Jacobi-Identität und Derivationen) Sei $\mathfrak{g}$ eine Algebra mit der bilinearen Verknüpfung

$$\mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}, \quad (x,y) \mapsto [x,y];$$

diese sei antisymmetrisch (also $[y,x] = -[x,y]$). Zeigen Sie, dass $(\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot])$ genau dann die Jacobi-Identität erfüllt (und somit eine Liealgebra ist), wenn für jedes $x \in \mathfrak{g}$ die Abbildung

$$\mathrm{ad}_x\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}, \quad y \mapsto [x,y]$$

eine Derivation von $(\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot])$ ist.

Aufgabe P25 (Derivationen). Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit und $\delta\colon C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ eine Derivation. Zeigen Sie:

(a) Ist $f \in C^\infty(M)$ und $f|_W = 0$ für ein $z \in M$ und eine z-Umgebung $W \subseteq M$, so ist $\delta(f)(z) = 0$.
[Hinweis: Es gibt ein $h \in C_c^\infty(M)$ mit $h(z) = 1$ und $\mathrm{supp}(h) \subseteq W$. Dann ist $hf = 0$.]

(b) Sind $f, g \in C^\infty(M)$ und $f|_W = g|_W$ für ein $z \in M$ und eine z-Umgebung $W \subseteq M$, so ist $\delta(f)(z) = \delta(g)(z)$.

(c) Ist $U \subseteq M$ eine offene Teilmenge und $f \in C^\infty(U)$, so existiert für $z \in U$ ein $F \in C^\infty(M)$ derart, dass $F|_W = f|_W$ für eine z-Umgebung $W \subseteq U$. Zeigen Sie, dass $\delta_U(f)(z) := \delta(F)(z)$ wohldefiniert ist, $\delta_U(f) \in C^\infty(U)$ und $\delta_U\colon C^\infty(U) \to C^\infty(U)$ eine Derivation.

Aufgabe P26 (Differentialgleichungen).
Gegeben $v \in \mathbb{R}$ betrachten wir auf $\mathbb{R}$ das glatte Vektorfeld

$$X\colon \mathbb{R} \to T\mathbb{R} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \quad p \mapsto (p, v).$$

(a) Begründen Sie, dass die DGL $\dot{y}(t) = X(y(t))$ lokale Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen erfüllt (also die DGL

$$\dot{y}(t) = f(t, y(t))$$

mit $f\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to T\mathbb{R}$, $(t, p) \mapsto X(p)$). Finden Sie für $t_0 \in \mathbb{R}$ und $y_0 \in \mathbb{R}$ die maximale Lösung $\phi_{t_0,y_0}\colon I_{t_0,y_0} \to \mathbb{R}$ des Anfangswertproblems

$$\dot{y}(t) = X(y(t)), \quad y(t_0) = y_0;$$

es ist $I_{t_0,y_0} = \mathbb{R}$. Finden Sie eine Formel für den Fluss $\Phi\colon \mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Finden Sie die Bijektionen $\Phi_{t,t_0}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

(b) Gehen Sie im Falle $v = 1$ analog zu (a) vor für das Vektorfeld $X|_U$ auf $U :=]0, 1[$; was ist I_{t_0,y_0} für $(t_0, y_0) \in \mathbb{R}\times\,]0, 1[$, was ist der Definitionsbereich Ω das Flusses, was Ω_{t,t_0} und $\Phi_{t,t_0}\colon \Omega_{t,t_0} \to \Omega_{t_0,t}$?

(c) Gegeben $v \in \mathbb{R}$ betrachten wir für $z \in \mathbb{S}_1$ den Tangentialvektor

$$Y(z) := [t \mapsto ze^{ivt}] \in T_z\mathbb{S}.$$

Zeigen Sie für den surjektiven lokalen Diffeomorphismus $q\colon \mathbb{R} \to \mathbb{S}_1$, $t \mapsto e^{it}$, dass $Y \circ q = Tq \circ X$ mit X wie in (a). Folgern Sie, dass Y glatt ist.

(d) Begründen Sie, dass die DGL $\dot{z}(t) = Y(z(t))$ auf $\mathbb{S}_1$ lokale Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen erfüllt.

(e) Sei $z_0 \in \mathbb{S}_1$. Finden Sie die maximale Lösung des Anfangswertproblems $\dot{z}(t) = Y(z(t))$, $z(t_0) = z_0$; der Definitionsbereich sollte $\mathbb{R}$ sein. Finden Sie den Fluss $\mathrm{Fl}\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{S}_1 \to \mathbb{S}_1$.

Aufgabe P27 (Derivationen und Vektorfelder). Es soll gezeigt werden, dass für jede glatte Mannigfaltigkeit M der injektive Liealgebra-Homomorphismus

$$\mathcal{L}\colon \mathcal{V}(M) \to \mathfrak{der}(C^\infty(M)), \quad X \mapsto \mathcal{L}_X$$

surjektiv ist und somit ein Isomorphismus. Zeigen Sie hierzu:

(a) Ist $\psi\colon A \to B$ ein Isomorphismus zwischen $\mathbb{R}$-Algebren $(A,\cdot)$ und $(B,\cdot)$, so ist für jede Derivation δ von A die Abbildung $\widetilde{\delta} := \psi \circ \delta \circ \psi^{-1}$ eine Derivation von B.

[Beispielsweise $\psi := \phi^*\colon C^\infty(V_\phi) \to C^\infty(U_\phi)$, $f \mapsto f \circ \phi$ für eine Karte $\phi\colon U_\phi \to V_\psi \subseteq \mathbb{R}^m$ von M. Oder $\psi := (\phi^{-1})^*\colon C^\infty(U_\phi) \to C^\infty(V_\phi)$.]

(b) Ist $\phi\colon U_\phi \to V_\phi$ eine Karte für M und $Y \in \mathcal{V}(V_\phi)$, so gilt

$$(\mathcal{L}_Y)\tilde{} = \mathcal{L}_X$$

für das Vektorfeld $X := T\phi^{-1} \circ Y \circ \phi \in \mathcal{V}(M)$ auf U_ϕ und die Derivation $(\mathcal{L}_Y)\tilde{} := \phi^* \circ \mathcal{L}_X \circ (\phi^{-1})^*$ von $C^\infty(U_\phi)$. [Vergleiche Lemma 15.4 (b).]

(c) Sei $\delta \in \mathfrak{der}(C^\infty(M))$ und $\phi\colon U_\phi \to V_\phi$ eine Karte für M derart, dass V_ϕ ein offener Quader in $\mathbb{R}^m$ ist, wie nach Bemerkung 15.10. Bezeichnet δ_{U_ϕ} die auf $C^\infty(U_\phi)$ induzierte Derivation wie in Aufgabe P25, so gibt es nach der genannten Skriptstelle ein $Y_\phi \in \mathcal{V}(V_\phi)$ mit $(\phi^{-1})^* \circ \delta_{U_\phi} \circ \phi^* = \mathcal{L}_{Y_\phi}$. Folgern Sie, dass es ein $X_\phi \in \mathcal{V}(U_\phi)$ mit $\mathcal{L}_{X_\phi} = \delta_{U_\phi}$ gibt.

(d) Ist $X\colon M \to TM$ ein glattes Vektorfeld und U eine offene Teilmenge von M, so ist $(\mathcal{L}_X)_U = \mathcal{L}_{X|_U}$.

(e) Für $\delta \in \mathfrak{der}(C^\infty(M))$ und offene Teilmengen $U, V \subseteq M$ mit $V \subseteq U$ gilt $(\delta_U)_V = \delta_V$.

(f) Sind $\delta \in \mathfrak{der}(C^\infty(M))$, $(U_j)_{j\in J}$ eine offene Überdeckung von M und $X_j \in \mathcal{V}(U_j)$ mit $\delta_{U_j} = \mathcal{L}_{X_j}$ für $j \in J$, so gilt $(\mathcal{L}_{X_i})_{U_i\cap U_j} = (\mathcal{L}_{X_j})_{U_i\cap U_j}$ für alle $i, j \in J$. Weiter gilt $X_i|_{U_i\cap U_j} = X_j|_{U_i\cap U_j}$, es gibt also ein $X \in \mathcal{V}(M)$ mit $X|_{U_j} = X_j$ für alle $j \in J$.

(g) In (f) ist $\delta = \mathcal{L}_X$.

(h) $\mathcal{L}\colon \mathcal{V}(M) \to \mathfrak{der}(C^\infty(M))$ ist surjektiv.

[Gegeben $\delta \in \mathfrak{der}(C^\infty(M))$ wenden Sie (f) an mit der Menge J aller Karten ϕ wie in (c) und den $X_\phi \in \mathcal{V}(U_\phi)$ aus (c).]

Aufgabe P28 (Flüsse zeitunabhängiger Vektorfelder).

Wir betrachten auf einer C^k-Mannigfaltigkeit M mit $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ ein C^{k-1}-Vektorfeld $X\colon M \to TM$. Ist $k = 1$, erfülle $f\colon \mathbb{R} \times M \to TM$, $(t, p) \mapsto X(p)$ eine lokale Lipschitzbedingung. Sei $\mathrm{Fl}\colon \Omega \to M$, $(t, t_0, y_0) \mapsto \mathrm{Fl}_{t,t_0}(y_0)$ der zugehörige Fluss auf $\Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times M$.

(a) Zeigen Sie: Ist X vollständig, so hat die Abbildung

$$\Phi\colon \mathbb{R} \times M \to M, \quad (t, y_0) \mapsto \Phi_t(y_0) := \mathrm{Fl}_{t,0}(y_0)$$

folgende Eigenschaften: Es ist $\Phi_0 = \mathrm{id}_M$, $\Phi_t \circ \Phi_s = \Phi_{t+s}$ für alle $s, t \in \mathbb{R}$ und für jedes $t \in \mathbb{R}$ ist $\Phi_t\colon M \to M$ ein C^{k-1}-Diffeomorphismus mit $(\Phi_t)^{-1} = \Phi_{-t}$. Weiter ist $\mathrm{Fl}_{t,t_0} = \Phi_{t-t_0}$ für alle $t, t_0 \in \mathbb{R}$.

[Vergleiche Bemerkung 17.19.]

(b) Zeigen Sie: Ist X nicht notwendig vollständig, so ist $\Omega^X := \{(t, y_0) \in \mathbb{R} \times M\colon (t, 0, y_0) \in \Omega\}$ offen in $\mathbb{R} \times M$ und

$$\Phi\colon \Omega^X \to M, \quad (t, y_0) \mapsto \Phi_t(y_0) := \mathrm{Fl}_{t,0}(y_0)$$

ist C^{k-1}. Für jedes $t \in \mathbb{R}$ ist $\Phi_t(\Omega_{t,0}) = \Omega_{0,t} = \Omega_{-t,0}$ mit Notation wie in Definition 17.5; die Abbildung $\Phi_t\colon \Omega_{t,0} \to \Omega_{-t,0}$ ist ein C^{k-1}-Diffeomorphismus mit $(\Phi_t)^{-1} = \Phi_{-t}$.

Aufgabe P29 (Matrix-Exponentialfunktion).

Es sei $\|\cdot\|$ eine Norm auf $\mathbb{R}^m$ und $\|\cdot\|_{\mathrm{op}}$ die zugehörige Operator-Norm auf dem Vektorraum $\mathbb{R}^{m\times m} \cong \mathbb{R}^{m^2}$ aller reellen $(m \times m)$-Matrizen. Weiter sei $\exp\colon \mathbb{R}^{m\times m} \to \mathbb{R}^{m\times m}$, $A \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n$ die Matrix-Exponentialfunktion. Die Reihe konvergiert für jedes $A \in \mathbb{R}^{m\times m}$ absolut, da

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|(1/n!)A^n\|_{\mathrm{op}} \leq \sum_{n=0}^{\infty} (1/n!)(\|A\|_{\mathrm{op}})^n = e^{\|A\|_{\mathrm{op}}} < \infty.$$

Offenbar ist $\exp(0)$ die Einheitsmatrix. Für eine Matrix $A = (a_{ij})_{i,j=1}^m$ schreiben wir auch $A_{ij} := a_{ij}$ für dem jeweiligen Matrixeintrag. Zeigen Sie:

(a) Für jede Matrix $A \in \mathbb{R}^{m\times m}$ und $i, j \in \{1, \ldots, m\}$ ist der Matrix-Eintrag $(\exp(tA))_{ij}$ für $t \in \mathbb{R}$ durch eine auf $\mathbb{R}$ konvergente Potenzreihe gegeben. Diese darf gliedweise abgeleitet werden; folgern Sie:

$$\frac{d}{dt} \exp(tA) = A \exp(tA) = \exp(tA) A.$$

(b) Mit der Cauchyschen Produktformel (angewandt mit der Matrixmultiplikation statt der Multiplikation reeller Zahlen) ist

$$\exp(tA) \exp(sA) = \exp((t+s)A) \quad \text{für alle } A \in \mathbb{R}^{m\times m} \text{ und } s, t \in \mathbb{R}.$$

Folgern Sie, dass $\exp(A)$ invertierbar ist und $\exp(A)^{-1} = \exp(-A)$.

(c) Betrachten wir $G := \mathrm{GL}_m(\mathbb{R})$ als offene Teilmenge von $\mathbb{R}^{m\times m}$, so identifizieren wir T_eG mit $\{e\}\times\mathbb{R}^{m\times m} \subseteq G\times\mathbb{R}^{m\times m} = TG$; Durch Vergessen der ersten Komponente, e, kann dieser Vektorraum weiter mit $\mathbb{R}^{m\times m}$ identifiziert werden. Zeigen Sie, dass mit dieser Identifizierung für jedes $A \in L(G) = \mathbb{R}^{m\times m}$ und $t \in \mathbb{R}$

$$\gamma_A(t) = \exp(tA)$$

ist und somit $\exp_G(A) = \gamma_A(1) = \exp(A)$.

(d) Folgern Sie, dass die Matrixexponentialfunktion $\exp\colon \mathbb{R}^{m\times m} \to \mathrm{GL}_m(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}^{m\times m}$ eine glatte Abbildung ist.

Aufgabe P30 (Eliminieren der Anfangszeit t_0). Setzen Sie voraus:

Fakt. *Seien $P \subseteq \mathbb{R}^\ell$ und $U \subseteq \mathbb{R}^m$ offen, $k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$, $\delta > 0$ und*

$$h\colon (P\times\,]{-\delta},\delta[) \times U \to \mathbb{R}^m$$

eine C^k-Funktion, die im Fall $k = 0$ eine lokale Lipschitzbedingung erfülle. Sei $\overline{p} \in P$ und $\overline{y} \in U$. Dann existieren ein $\varepsilon \in\,]0,\delta]$, eine offene $\overline{p}$-Umgebung $P_0 \subseteq P$ und eine offene $\overline{y}$-Umgebung $U_0 \subseteq U$ derart, dass für alle $p \in P_0$ und $y_0 \in U_0$ eine Lösung $\phi^p_{0,y_0}\colon\,]{-\varepsilon},\varepsilon[\,\to U$ des Anfangswertproblems

$$y'(t) = h(p,t,y(t)), \quad y(0) = y_0$$

existiert und die folgende Abbildung C^k ist:

$$\Psi\colon P_0\times\,]{-\varepsilon},\varepsilon[\,\times U_0 \to U,\ (p,t,y_0) \mapsto \phi^p_{0,y_0}(t).$$

Folgern Sie, dass Satz 17.27 gilt.

[Hinweis: In der Situation von Satz 17.27 gibt es ein $\delta > 0$ mit $]\overline{t}-2\delta,\overline{t}+2\delta[\,\subseteq J$. Sei $P := W\times\,]\overline{t}-\delta,\overline{t}+\delta[$, $\overline{p} := (\overline{x},\overline{t})$ und $h\colon P\times\,]{-\delta},\delta[\,\times U \to \mathbb{R}^m$ definiert als $h((x,\tau),t,y) := f(x,\tau+t,y)$. Seien P_0, ε und U_0 wie oben. Nach Verkleinern von $\varepsilon > 0$ dürfen wir annehmen, dass $W_0\times\,]{-\varepsilon},\varepsilon[\,\subseteq P_0$ für eine offene $\overline{x}$-Umgebung $W_0 \subseteq W$. Für $t_0 \in J_0 := \,]\overline{t}-\varepsilon/2,\overline{t}+\varepsilon/2[$, $x \in W_0$ und $y_0 \in U_0$ ist dann $J_0 \to U$, $t \mapsto \phi^{(x,t_0)}_{0,y_0}(t-t_0)$ eine Lösung für $y'(t) = f(x,t,y(t))$, $y(t_0) = y_0$.]

Aufgabe P31 (Ein nicht vollständiges Vektorfeld).

Wir betrachten die glatte Funktion $f\colon \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(t,y) \mapsto y^2$.

(a) Belegen Sie, dass die DGL $y'(t) = f(t, y(t))$ lokale Existenz und lokale Eindeutigkeit von Lösungen erfüllt.

(b) Zeigen Sie, dass die Funktion $\gamma\colon\ ]0,\infty[\to \mathbb{R}$, $t \mapsto -\frac{1}{t}$ das Anfangswertproblem $y'(t) = f(t, y(t))$, $y(1) = -1$ löst.

(c) Zeigen Sie, dass γ die maximale Lösung des genannten Anfangswertproblems ist und somit $I_{1,-1} =]0,\infty[\neq \mathbb{R}$.

Aufgabe P32 (Eine Differentialgleichung).

Auf der Sphäre $\mathbb{S}_2 := \{x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \colon x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$ definieren wir unter Benutzung des Vektorprodukts das Vektorfeld

$$X\colon \mathbb{S}_2 \to T\mathbb{S}_2, \quad x \mapsto (x, e_3 \times x)$$

mit $e_3 = (0,0,1)$. Hierbei betrachten wir $T_x\mathbb{S}_2$ als Teilmenge von $T_x\mathbb{R}^3 = \{x\} \times \mathbb{R}^3 \subseteq T\mathbb{R}^3$, so dass also $T_x\mathbb{S}_2 = \{x\} \times x^{\perp}$.

(a) Skizzieren Sie grob die Sphäre und das Vektorfeld (also an jeder Stelle x den Vektor $e_3 \times x$). Ist X glatt ?

(b) Was ist $X(e_3)$? Finden Sie die maximale Lösung des Anfangswertproblems $\dot{y}(t) = X(y(t))$, $y(0) = e_3$.

(c) Ebenso für $y(0) = e_1$.

[Hinweis: Das durch $Y(z) := (z, iz) \in T_z\mathbb{S}_1 \subseteq T\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ auf $\mathbb{S}_1 \subseteq \mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ gegebene Vektorfeld aus Aufgabe P26 (c), $Y(x_1, x_2) = ((x_1, x_2), (-x_2, x_1))$, ist über $j\colon \mathbb{S}_1 \to \mathbb{S}_2$, $(x_1, x_2) \mapsto (x_1, x_2, 0)$ mit X verknüpft.]

Aufgabe P33 (Das Möbiusband – eingebettet in $\mathbb{R}^3$). Benutzen Sie ohne Beweis, dass die Abbildung $\psi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $(s,t) \mapsto R(s)h(s,t)$ mit

$$R(s) := \begin{pmatrix} \cos(s) & -\sin(s) & 0 \\ \sin(s) & \cos(s) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad h(s,t) := \begin{pmatrix} 1 + t\sin(s/2) \\ 0 \\ t\cos(s/2) \end{pmatrix}$$

eine Immersion ist.

(a) Skizzieren Sie $E := \psi(\mathbb{R}\times\ ]-1/2, 1/2[)$.

(b) Zeigen Sie, dass für jedes $s_0 \in \mathbb{R}$ die Einschränkung $\psi|_{[s_0-\pi/2, s_0+\pi/2]\times[-1/2,1/2]}$ injektiv ist und eine topologische Einbettung.

(c) Zeigen Sie, dass $\psi|_{]s_0-\pi/2, s_0+\pi/2[\times]-1/2,1/2[}$ für jedes $s_0 \in \mathbb{R}$ eine Einbettung von glatten Mannigfaltigkeiten ist und das Bild relativ offen in E.

Das Bild aus (c), also auch E, ist somit eine Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^3$.

(d) Zeigen Sie, dass $E \setminus (\mathbb{S}_1 \times \{0\})$ wegzusammenhängend ist.

[Hinweis: $\mathbb{R}\times\,]0,1/2[$ ist wegzusammenhängend.]

Aufgabe P34 (Das Möbiusband – via Kozykel).

Wir betrachten die offenen Teilmengen $U_1 := \mathbb{S}_1 \setminus \{(-1,0)\}$ und $U_2 := \mathbb{S}_1 \setminus \{(1,0)\}$ des Einheitskreises. Für $i,j \in \{1,2\}$ setzen wir $U_{ij} := U_i \cap U_j$ und betrachten die durch $g_{11}(x) = \mathrm{id}_\mathbb{R}$, $g_{22}(x) = \mathrm{id}_\mathbb{R}$,

$$g_{12}(x) = g_{21}(x) = \begin{cases} \mathrm{id}_\mathbb{R} & \text{wenn } x_2 < 0; \\ -\mathrm{id}_\mathbb{R} & \text{wenn } x_2 > 0 \end{cases}$$

für $x = (x_1, x_2) \in U_{ij}$ gegebenen Abbildungen $g_{ij} \colon U_{ij} \to \mathrm{GL}(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^\times$.

(a) Zeigen Sie, dass die g_{ij} einen glatten $\mathrm{GL}(\mathbb{R})$-wertigen Kozykel bilden zur offenen Überdeckung $(U_j)_{j\in\{1,2\}}$ von $\mathbb{S}_1$.

(b) Seien $\pi \colon E \to \mathbb{S}_1$ das zugehörige Vektorbündel und $\theta_j \colon E|_{U_j} \to U_j \times \mathbb{R}$ für $j \in \{1,2\}$ lokale Trivialisierungen, die zum obigen Kozyklus führen. Zeigen Sie, dass $E\setminus O_{\mathbb{S}_1}(\mathbb{S}_1)$ wegzusammenhängend ist, wobei $O_{\mathbb{S}_1} : \mathbb{S}_1 \to E$ der Nullschnitt ist.

Aufgabe P35 (Abbildungen nach $\mathrm{Hom}_\mathbb{R}(E,F)$)

Zur Erinnerung: Ist E ein endlich-dimensionaler Vektorraum und $\phi \colon E \to \mathbb{R}^n$ ein Vektorraum-Isomorphismus, so geben wir E die glatte Mannigfaltigkeitsstruktur, die ϕ zu einer globalen Karte macht (siehe 13.33). Diese ist von der Wahl von ϕ unabhängig.

Sei nun E ein endlich-dimensionaler Vektorraum mit Basis $b_1, \ldots, b_n$, F ein endlich-dimensionaler Vektorraum, $U \subseteq \mathbb{R}^m$ eine offene Teilmenge und $f\colon U \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(E,F)$ eine Abbildung in den Vektorraum aller linearen Abbildungen von E nach F. Dann ist

$$\phi\colon\ \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(E,F) \to F^n, \quad \alpha \mapsto (\alpha(b_1),\ldots,\alpha(b_n))$$

ein Isomorphismus endlich-dimensionaler Vektorräume, also ein C^∞-Diffeomorphismus. Zeigen Sie, dass die folgenden Bedingungen äquivalent sind:

(a) f ist C^k,

(b) $\phi \circ f\colon U \to F^n$ ist C^k;

(c) $f^\wedge\colon U \times E \to F$, $(x,y) \mapsto f(x)(y)$ ist C^k.

Aufgabe P36 (Konstruktion von Kozyklen)

Es seien M eine C^k-Mannigfaltigkeit mit $k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ und (E_1,π_1) sowie (E_2,π_2) C^k-Vektorbündel über M, mit typischer Faser F_1 bzw. F_2. Es seien $(U_j)_{j\in J}$ eine offene Überdeckung von M und $(\theta_j^\ell)_{j\in J}$ Atlanten von lokalen Trivialisierungen $\theta^\ell\colon E_\ell|_{U_j} \to U_j \times F_\ell$ von E_ℓ für $\ell \in \{1,2\}$; sei $(g_{ij}^\ell)_{i,j\in J}$ der jeweilige durch den Atlas induzierte $\mathrm{GL}(F_\ell)$-wertige C^k-Kozyklus. Wir konstruieren einen Kozyklus $(g_{ij})_{i,j\in J}$, der (wie man zeigen könnte) das Vektorbündel $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(E_1,E_2) = \bigcup_{x\in M} \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}((E_1)_x,(E_2)_x)$ beschreibt.

(a) Für eine lineare Abbildung $\alpha\colon F_1 \to F_1$ betrachten wir die lineare Abbildung

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\alpha,F_2)\colon\ \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(F_1,F_2) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(F_1,F_2),\ \ \beta \mapsto \beta\circ\alpha.$$

Für eine lineare Abbildung $\alpha\colon F_2 \to F_2$ betrachten wir die lineare Abbildung

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(F_1,\alpha)\colon\ \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(F_1,F_2) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(F_1,F_2),\ \ \beta \mapsto \alpha\circ\beta.$$

Zeigen Sie, dass die Abbildungen

$$\Phi_1\colon\ \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(F_1) \to \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathrm{Hom}(F_1,F_2)),\ \ \alpha \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\alpha,F_2)$$

und

$$\Phi_2\colon\ \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(F_2) \to \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathrm{Hom}(F_1,F_2)),\ \ \alpha \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(F_1,\alpha)$$

linear (und somit glatt) sind. Weiter ist Φ_2 ein Ring-Homomorphismus. Welche Struktur hat Φ_1?

(b) Zeigen Sie, dass $g_{ij}(x) := \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(F_1, g_{ij}^2(x)) \circ \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(g_{ji}^1(x), F_2)$ einen $\mathrm{GL}(\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(F_1, F_2))$-wertigen C^k-Kozyklus $(g_{ij})_{i,j\in J}$ definiert.

Aufgabe P37 (Integrable Vektordistributionen).
Wir betrachten die offene Teilmenge $V := \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ von $\mathbb{R}^2$ und die Teilmenge

$$D := \{(x,y) \in V \times \mathbb{R}^2 \colon \langle x, y\rangle = 0\}$$

von $TV = V \times \mathbb{R}^2$; hierbei sei $\langle \cdot, \cdot \rangle \colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ das Standard-Skalarprodukt.

(a) Zeigen Sie, dass $X_1 \colon V \to V \times \mathbb{R}^2$, $(x,y) \mapsto ((x,y),(-y,x))$ ein Rahmen für D ist.

(b) Folgern Sie, dass D ein Untervektorbündel von TV und somit eine reguläre Vektordistribution ist.

(c) Zeigen Sie, dass die konzentrischen Kreise um den Urspung Integralmannigfaltigkeiten für D sind.

Aufgabe P38 (Lokale Additionen).

(a) Zeigen Sie, dass $\Sigma \colon \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$, $(x,y) \mapsto x+y$ eine lokale Addition auf $\mathbb{R}^m$ ist.

Sei $V \subseteq \mathbb{R}^m$ eine offene Teilmenge und $Q := \{(x,y) \in V \times \mathbb{R}^m \colon x + y \in V\}$.

(b) Zeigen Sie, dass $\Sigma|_Q \colon Q \to V$ eine lokale Addition für V ist.

Aufgabe P39 (Tensorprodukte). Es seien E_1 und E_2 (reelle) Vektorräume. Ein Vektorraum T, zusammen mit einer bilinearen Abbildung $\tau \colon E_1 \times E_2 \to T$, wird ein *Tensorprodukt* von E_1 und E_2 genannt, wenn für jede bilineare Abbildung $\beta \colon E_1 \times E_2 \to E$ in einen Vektorraum E eine eindeutige lineare Abbildung $\bar\beta \colon T \to E$ existiert mit $\bar\beta \circ \tau = \beta$. Tensorprodukte sind eindeutig bis auf Isomorphie; zeigen Sie:

(a) Sind (T, τ) und (S, σ) Tensorprodukte von E_1 und E_2, so gibt es einen Vektorraum-Isomorphismus $\bar\sigma \colon T \to S$ derart, dass $\bar\sigma \circ \tau = \sigma$.

Man schreibt auch $E_1 \otimes E_2 := T$ und $x \otimes y$ statt $\tau(x,y)$.

Seien nun E_1 und E_2 endlich-dimensional mit Basen $a_1, \ldots, a_n$ bzw. $b_1, \ldots, b_m$. Sei T ein Vektorraum der Dimension nm mit Basis c_{ij}, $(i,j) \in \{1, \ldots, n\} \times \{1, \ldots, m\}$. Sei $\tau \colon E_1 \times E_2 \to T$ die durch $\tau(a_i, b_j) = c_{ij}$ eindeutig festgelegte bilineare Abbildung.

(b) Zeigen Sie, dass (T, τ) ein Tensorprodukt von E_1 und E_2 ist.

Seien nun $\alpha_1 \colon E_1 \to F_1$ und $\alpha_2 \colon E_2 \to F_2$ lineare Abbildungen zwischen Vektorräumen. Seien $(E_1 \otimes E_2, \otimes)$ und $(F_1 \otimes F_2, \otimes)$ Tensorprodukte.

(c) Zeigen Sie, dass es genau eine lineare Abbildung $\alpha \colon E_1 \otimes E_2 \to F_1 \otimes F_2$ gibt mit der Eigenschaft, dass $\alpha(x \otimes y) = \alpha_1(x) \otimes \alpha_2(y)$ für alle $(x, y) \in E_1 \times E_2$.

Man schreibt $\alpha_1 \otimes \alpha_2 := \alpha$.

(d) Zeigen Sie, dass $\mathrm{id}_{E_1} \otimes \mathrm{id}_{E_2} = \mathrm{id}_{E_1 \otimes E_2}$. Sind weiter $\beta_1 \colon F_1 \to Y_1$ und $\beta_2 \colon F_2 \to Y_2$ lineare Abbildungen, so ist

$$(\beta_1 \otimes \beta_2) \circ (\alpha_1 \otimes \alpha_2) = (\beta_1 \circ \alpha_1) \otimes (\beta_2 \circ \alpha_2).$$

(e) Passen Sie (b) geeignet an, wenn E_1 und E_2 nicht notwendig endlichdimensional sind.

Aufgabe P40 (Integrable Vektordistributionen).

(a) Zeigen Sie: Ist $D \subseteq TM$ eine reguläre Vektordistribution auf einer glatten Mannigfaltigkeit M mit 1-dimensionaler typischer Faser, so ist D integrabel.

[Gegeben $x \in M$ wählen Sie einen lokalen Rahmen $X \colon U \to D$ mit $x \in U$. Gilt $[X, X](U) \subseteq D$?]

Nun sei $J \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, $U \subseteq \mathbb{R}^m$ eine offene Teilmenge und $f \colon J \times U \to \mathbb{R}^m$ eine glatte Funktion. Für $x = (t, y) \in J \times U$ sei

$$D_x := \mathbb{R}(x, (1, f(x))) = \{x\} \times \mathbb{R}(1, f(x)) \in \{x\} \times \mathbb{R}^{m+1} = T_x(J \times U) = (J \times U) \times \mathbb{R}^{m+1}.$$

(b) Zeigen Sie, dass es für D einen Rahmen $X \colon J \times U \to D$ gibt und folgern Sie, dass D eine reguläre Vektordistribution ist.

(c) Nach (a) ist D integrabel. Zeigen Sie, dass für ein offenes Intervall $I \subseteq J$ eine glatte Funktion $\gamma \colon I \to U$ genau dann eine Lösung der Differentialgleichung

$$y'(t) = f(t, y(t))$$

ist, wenn $\operatorname{graph}(\gamma) := \{(t, \gamma(t)) \colon t \in I\}$ eine Integralmannigfaltigkeit für D ist.

Aufgabe P41 (Tubulare Umgebungen: Details für Beispiel 23.2). Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\phi\colon \mathbb{S}_2\backslash\{e_3,-e_3\} \to \mathbb{S}_1\times\,]{-1},1[\,\subseteq \mathbb{S}_1\times\mathbb{R},\ (x,y,z)\mapsto \Big(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},z\Big)$$

ein C^∞-Diffeomorphismus ist mit Umkehrfunktion

$$\psi\colon \mathbb{S}_1\times\,]{-1},1[\,\to \mathbb{S}_2\setminus\{e_3,-e_3\},\ \ (x,y,z)\mapsto (x\sqrt{1-z^2},y\sqrt{1-z^2},z).$$

Aufgabe P42 (Alternierende Abbildungen). Es seien E und F reelle Vektorräume. Zeigen Sie, dass für eine bilineare Abbildung $\beta\colon E\times E\to F$ folgende Eigenschaften äquivalent sind:

(a) Für alle $x,y\in E$ ist $\beta(y,x)=-\beta(x,y)$;

(b) Für alle $x\in E$ ist $\beta(x,x)=0$.

Aufgabe P43 (Tensorprodukte von Vektorbündeln)
Es seien M eine C^k-Mannigfaltigkeit mit $k\in\mathbb{N}_0\cup\{\infty\}$ und (E_1,π_1) sowie (E_2,π_2) C^k-Vektorbündel über M mit typischen Fasern F_1 bzw. F_2. Für eine offene Überdeckung $(U_j)_{j\in J}$ von M gibt es lokale Trivialisierungen

$$\theta_j^\ell\colon E_\ell|_{U_j}\to U_j\times F_\ell$$

für $\ell\in\{1,2\}$. Diese induzieren $\mathrm{GL}(F_\ell)$-wertige C^k-Kozykel $(g_{ij}^\ell)_{i,j\in J}$. Sei $F_1\otimes F_2$ ein Tensorprodukt von F_1 und F_2, mit der bilinearen Abbildung $\tau\colon F_1\times F_2\to F_1\otimes F_2$, $(v,w)\mapsto v\otimes w$. Für $i,j\in J$ und $x\in U_{ij}:=U_i\cap U_j$ definieren wir $h_{ij}(x)\in\mathrm{GL}(F_1\otimes F_2)$ via

$$h_{ij}(x):=g_{ij}^1(x)\otimes g_{ij}^2(x),$$

mit Notation wie in Aufgabe P39.

(a) Zeigen Sie, dass $h_{ij}\colon U_{ij}\to\mathrm{GL}(F_1\otimes F_2)$ eine C^k-Abbildung ist.

[Wählen Sie eine Basis $v_1,\ldots,v_n$ für F_1 und eine Basis $w_1,\ldots,w_m$ für F_2. Nach Aufgabe P35 genügt es, zu zeigen, dass für alle $a\in\{1,\ldots,n\}$ und $b\in\{1,\ldots,m\}$

$$U_{ij}\to F_1\otimes F_2,\quad x\mapsto h_{ij}(x)(v_a\otimes w_b)=\tau(g_{ij}^1(x)(v_a),g_{ij}^2(x)(w_b))$$

eine C^k-Abbildung ist.]

(b) Zeigen Sie, dass $(h_{ij})_{i,j\in J}$ ein $\mathrm{GL}(F_1 \otimes F_2)$-wertiger C^k-Kozyklus ist.

Wir wählen nun eine Familie $((E_1)_x \otimes (E_2)_x)_{x\in M}$ von Tensorprodukten $(E_1)_x \otimes (E_2)_x$ der Fasern, welche paarweise disjunkt sind; wir setzen

$$E_1 \otimes E_2 := \bigcup_{x\in M} (E_1)_x \otimes (E_2)_x$$

und definieren $\pi\colon E_1 \otimes E_2 \to M$ via $v \mapsto x$ für alle $x \in M$ und alle $v \in (E_1)_x \otimes (E_2)_x$. Für $\ell \in \{1,2\}$ und $j \in J$ sei $\theta^\ell_{j,2}\colon E_\ell|_{U_j} \to F_\ell$ die zweite Komponente von θ^ℓ_j. Für $j \in J$ setzen wir $(E_1 \otimes E_2)|_U := \pi^{-1}(U)$ und definieren

$$\theta_j\colon (E_1 \otimes E_2)|_U \to U \times (F_1 \otimes F_2), \quad v \mapsto \big(x, (\theta^1_{j,2}|_{(E_1)_x} \otimes \theta^2_{j,2}|_{(E_2)_x})(v)\big),$$

mit $x := \pi(v)$.

(c) Zeigen Sie mit Lemma 21.17: $(E_1 \otimes E_2, \pi)$ kann derart zu einem C^k-Vektorbündel über M gemacht werden mit typischer Faser $F_1 \otimes F_2$, dass $(\theta_j)_{j\in J}$ ein Vektorbündel-Atlas ist und den Kozykel $(h_{ij})_{i,j\in J}$ induziert.

Aufgabe P44 (Wirkungen von symmetrischen Gruppen). Für $k \in \mathbb{N}$ sei S_k die Gruppe aller Permutationen der Menge $\{1, \ldots, k\}$.

(a) Zeigen Sie, dass $\sigma\colon S_k \times X \to X$, $(\pi, j) \mapsto \pi(j)$ eine Wirkung von S_k auf $X := \{1, \ldots, k\}$ ist.

(b) Sei E ein reeller Vektorraum und E^X die Menge aller Funktionen $f\colon X \to E$. Zeigen Sie, dass

$$\tau\colon S_k \times E^X \to E^X, \quad (\pi, f) \mapsto f \circ \pi^{-1}$$

eine Wirkung von S_k auf E^X ist. Es ist $E^X = E^k$.

(c) Nun seien E und F reelle Vektorräume und $\mathrm{Lin}^k(E,F) \subseteq F^{E^k}$ der Vektorraum aller k-linearen Abbildungen $\omega\colon E^k \to F$. Zeigen Sie, dass

$$\kappa\colon S_k \times \mathrm{Lin}^k(E,F) \to \mathrm{Lin}^k(E,F), \quad (\pi, \omega) \mapsto \omega \circ \tau(\pi^{-1}, \cdot)$$

eine Wirkung von S_k auf $\mathrm{Lin}^k(E,F)$ ist. Es ist $\kappa(\pi, \cdot)\colon \mathrm{Lin}^k(E,F) \to \mathrm{Lin}^k(E,F)$ linear für alle $\pi \in S_k$ und $\kappa(\pi,\omega)(y_1, \ldots, y_k) = \omega(y_{\pi(1)}, \ldots, y_{\pi(k)})$.

Aufgabe P45 (Dachprodukt vektorwertiger Differentialformen). Ist M eine glatte Mannigfaltigkeit und F ein endlich-dimensionaler reeller Vektorraum, so nennt man eine Abbildung $\omega\colon (TM)^{\oplus k} \to F$ eine *F-wertige k-Form auf M*, wenn ω glatt ist und $\omega_p := \omega|_{(T_pM)^k} \in \mathrm{Alt}^k(T_pM, F)$ für alle $p \in M$. Sei $\Omega^k(M,F) \subseteq F^{TM^{\oplus k}}$ der Vektorraum aller F-wertigen k-Formen auf M. Seien nun F_1, F_2 und F endlich-dimensionale reelle Vektorräume und $\beta\colon F_1 \times F_2 \to F$ bilinear. Für $\omega \in \Omega^k(M,F_1)$ und $\eta \in \Omega^\ell(M,F_2)$ mit $k, \ell \in \mathbb{N}$ sei $\omega \wedge_\beta \eta\colon (TM)^{\oplus(k+\ell)} \to F$ definiert via

$$(\omega\wedge_\beta\eta)(y_1,\ldots,y_{k+\ell}) := \frac{1}{k!\ell!}\sum_{\sigma\in S_{k+\ell}} \mathrm{sgn}(\sigma)\,\beta(\omega_p(y_{\sigma(1)},\ldots,y_{\sigma(k)}),\eta_p(y_{\sigma(k+1)},\ldots,y_{\sigma(k+\ell)}))$$

für $p \in M$ und $(y_1,\ldots,y_{k+\ell}) \in (T_pM)^{k+\ell}$, so dass also

$$(\omega \wedge_\beta \eta)_p = \frac{1}{k!\ell!}\sum_{\sigma\in S_{k+\ell}} \mathrm{sgn}(\sigma)\,\sigma.(\beta\circ(\omega_p \times \eta_p)).$$

(a) Zeigen Sie, dass $\omega \wedge_\beta \eta \in \Omega^{k+\ell}(M,F)$.

(b) Ist $(\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot])$ eine endlich-dimensionale Liealgebra, $F := F_1 := F_2 := \mathfrak{g}$ und $\beta := [\cdot,\cdot]$, so schreibt man

$$[\omega,\eta] := \omega \wedge_\beta \eta.$$

Berechnen Sie $[\omega,\eta](y_1,y_2)$ für $p \in M$ und $y_1, y_2 \in T_pM$. Zeigen Sie, dass die $\mathbb{R}$-bilineare Abbildung $\Omega^1(M,\mathfrak{g}) \times \Omega^1(M,\mathfrak{g}) \to \Omega^2(M,\mathfrak{g})$, $(\omega,\eta) \mapsto [\omega,\eta]$ *symmetrisch* ist, also $[\eta,\omega] = [\omega,\eta]$.

Aufgabe P46 (Zusammensetzen von Abbildungen). Es sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine Funktion derart, dass für jedes $x \in \mathbb{R}$ eine offene x-Umgebung $V_x \subseteq \mathbb{C}$ existiert und eine holomorphe Funktion $f_x\colon V_x \to \mathbb{C}$ derart, dass $f_x|_{V_x\cap\mathbb{R}} = f|_{V_x\cap\mathbb{R}}$. Zeigen Sie mit Lemma C.2, dass es eine offene Teilmenge $V \subseteq \mathbb{C}$ mit $\mathbb{R} \subseteq V$ gibt und eine holomorphe Funktion $g\colon V \to \mathbb{C}$ derart, dass $g|_{\mathbb{R}} = f$.

[Analoges gilt für eine reell-analytische Funktion $f\colon M \to \mathbb{C}$ auf einer reell-analytischen Mannigfaltigkeit M (statt $\mathbb{R}$) und eine parakompakte Komplexifizierung $M_{\mathbb{C}} \supseteq M$.]

Aufgabe P47 (Beweis von Lemma B.5). Seien M eine glatte Mannigfaltigkeit und $X, Y \in \mathcal{V}(M)$. Weiter sei $\Phi\colon \Omega^X \to M$, $(t, y) \mapsto \Phi(t, y)$ der Fluss des zeitunabhängigen Vektorfelds X mit $\Omega^X \subseteq \mathbb{R} \times M$ und $\Phi_t(y) := \Phi(t, y)$, wie in Aufgabe P28 (b). In der Aufgabe soll gezeigt werden, dass für alle $p \in M$

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} T\Phi_{-t}(Y(\Phi_t(p))) = [X, Y](p). \tag{1}$$

(a) Machen Sie sich klar, dass $\Phi_0(y) = y$ für alle $y \in M$ und $\frac{d}{dt}\Phi_t(y) = X(\Phi_t(y))$ für alle $(t, y) \in \Omega$.

(b) Sei zunächst $V := M$ eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^m$; wir schreiben $X = (\mathrm{id}_V, a)$ und $Y = (\mathrm{id}_V, b)$ mit $a, b \in C^\infty(V, \mathbb{R}^m)$. Zeigen Sie, dass

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} d\Phi_{-t}(\Phi_t(p), b(\Phi_t(p))) = [a, b] = a.b - b.a. \tag{2}$$

[Hinweis: Es ist $d\Phi_{-t}(\Phi_t(p), b(\Phi_t(p))) = d\Phi(-t, \Phi_t(p), 0, b(\Phi_t(p)))$, die linke Seite von (2) also gleich

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} d\Phi(-t, \Phi_0(p), 0, b(\Phi_0(p))) + \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} d\Phi(0, \Phi_t(p), 0, b(\Phi_0(p))) + d\Phi\Big(0, \Phi_0(p), 0, \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} b(\Phi_t(p))\Big);$$

hierbei können Sie $d\Phi(...)$ als Richtungsableitung $\frac{\partial}{\partial s}\big|_{s=0}\Phi(... + s...)$ umschreiben und (falls hilfreich) die Reihenfolge der partiellen Ableitungen nach t und s vertauschen.]

(c) Folgern Sie aus (b), dass (1) allgemein gilt.

Weitere Aufgaben (Hausaufgaben für Lehramtsstudierende)

Aufgabe H1 (Mannigfaltigkeiten und glatte Abbildungen)
Wir betrachten die Homöomorphismen $\phi := \mathrm{id}|_{]-\infty,0[}\colon\ ]-\infty,0[\to]-\infty,0[$, $x \mapsto x$ und $\psi\colon\ ]0,\infty[\to]0,\infty[$, $x \mapsto x^3$.

(a) Zeigen Sie, dass $\{\phi,\psi\}$ ein C^∞-Atlas für die eindimensionale topologische Mannigfaltigkeit $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ ist.

Wir versehen nun $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ mit dem (unüblichen!) maximalen C^∞-Atlas $\mathcal{A}$, der den Atlas aus (a) enthält.

(b) Ist die Abbildung $f\colon \mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}\setminus\{0\}$, $x\mapsto -x$ eine C^∞-Abbildung von $(\mathbb{R}\setminus\{0\},\mathcal{A})$ nach $(\mathbb{R}\setminus\{0\},\mathcal{A})$?

Aufgabe H2 (Immersionen und Submersionen)
Welche der Abbildungen sind Immersionen, Submersionen bzw. étale?

(a) $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$, $t\mapsto(t^2,\sin(t))$;

(b) $g\colon \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $(x,y)\mapsto x^2+y$;

(c) $h\colon \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, $(x,y)\mapsto(x+(1/2)\sin(x), y+(1/2)\cos(x+y))$.

Aufgabe H3 (Untermannigfaltigkeiten)
Zeigen Sie, dass die folgenden Mengen Untermannigfaltigkeiten von $\mathbb{R}^3$ sind und finden Sie ihre Dimension. Beschreiben Sie die Mengen auch in Worten oder skizzieren Sie diese.

(a) $E := \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\colon x^2+y^2+2z^2<1\}$;

(b) $Z = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\colon x^2+y^2=1\}$;

(c) $H := \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\colon x^2+y^2-z^2=1\}$;

(d) $G := \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\colon x^2+y^2-z^2=-1\}$;

(e) $S := \{(\cos(t),\sin(t),t)\colon t\in\mathbb{R}\}$.

Aufgabe H4 (Unitäre Gruppen)
Sei $n \in \mathbb{N}$; gegeben $A = (a_{jk})_{j,k\in\{1,\dots,n\}} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ sei $A^* = (\overline{a_{kj}})_{j,k\in\{1,\dots,n\}}$ die adjungierte Matrix. Berechnen Sie $f'(\mathbf{1})$ (oder die Richtungsableitung $f'(\mathbf{1})(B)$ für $B \in \mathbb{C}^{n\times n}$) für die glatte Abbildung

$$f\colon \mathbb{C}^{n\times n} \to \mathrm{Herm}_n(\mathbb{C}), \quad A \mapsto A^*A$$

in den Vektorraum $\mathrm{Herm}_n(\mathbb{C}) \subseteq \mathbb{C}^{n\times n} \cong \mathbb{R}^{2n^2}$ aller hermiteschen komplexen $(n\times n)$-Matrizen. Folgern Sie, dass die unitäre Gruppe

$$\mathrm{U}(n) := \{A \in \mathbb{C}^{n\times n} \colon A^*A = \mathbf{1}\}$$

eine Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{C}^{n\times n}$ ist, der Dimension n^2.

Aufgabe H5 (Immersionen)

(a) Sei $m \in \mathbb{N}$, $r \in \{1,\dots,m\}$ und $S \subseteq \mathbb{R}^{m\times r}$ die Menge aller reellen $(m\times r)$-Matrizen A derart, dass A den vollen Rang r besitzt, also die lineare Abbildung

$$\mathbb{R}^r \to \mathbb{R}^m, \quad x \mapsto Ax$$

injektiv ist. Zeigen Sie, dass S offen in $\mathbb{R}^{m\times r}$ ist.

[Hinweis: Für $A \in S$ können Sie Spaltenvektoren $w_{r+1},\dots,w_m$ finden, welche die Spalten von A zu einer Basis von $\mathbb{R}^m$ ergänzen, so dass also $(A, w_{r+1},\dots,w_m)$ in $\mathrm{GL}_m(\mathbb{R})$ ist, einer offenen Teilmenge von $\mathbb{R}^{m\times m}$].

(b) Sei $k \in \mathbb{N}\cup\{\infty\}$. Zeigen Sie: Ist $f\colon M \to N$ eine C^k-Abbildung zwischen C^k-Mannigfaltigkeiten und T_xf injektiv für ein $x \in M$, so ist $f|_W$ eine Immersion für eine offene x-Umgebung W in M.

Aufgabe H6 (Verknüpfte Vektorfelder)
Auf $U := \mathbb{R}^2$ betrachten wir die C^∞-Funktion $\phi\colon U \to U$, $(x,y) \mapsto (x+e^y, y)$.

(a) Berechnen Sie die Jacobi-Matrix $J_{(x,y)}(\phi)$, das Differential $d\phi\colon U\times\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ und die Tangentialabbildung $T\phi\colon U\times\mathbb{R}^2 \to U\times\mathbb{R}^2$.

(b) Wir betrachten die glatten Funktionen $a, b\colon U \to \mathbb{R}^2$,

$$a(x,y) := (1,x) \quad \text{bzw.} \quad b(x,y) := (1+(x-e^y)e^y, x-e^y).$$

Sind die Vektorfelder (id_U, a) und (id_U, b) auf U über ϕ verknüpft?

Aufgabe H7 (Lieklammer zweier Vektorfelder).
Sei $U := \mathbb{R}^2$. Berechnen Sie $[a,b] := a.b - b.a$ für die glatten Funktionen $a, b\colon U \to \mathbb{R}^2$, die durch $a(x,y) := (y,x)$ bzw. $b(x,y) := (1,y)$ gegeben sind.

Aufgabe H8 (Lieklammer auf $\mathcal{V}(\mathbb{R})$)
Für zwei C^∞-Funktionen $a, b\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei

$$[a,b] := ab' - ba'. \tag{3}$$

Zeigen Sie durch Rechnen mit (3), dass $(C^\infty(\mathbb{R}), [\cdot,\cdot])$ eine Liealgebra ist.

Aufgabe H9 (Vollständigkeit eines zeitabhängigen Vektorfelds).
Wir betrachten eine C^1-Funktion $f\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, welche beschränkt ist; es gibt also ein $C \in [0, \infty[$ mit

$$|f(t,y)| \leq C \quad \text{für alle } (t,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}.$$

(a) Belegen Sie, dass die DGL $y'(t) = f(t, y(t))$ auf $\mathbb{R}$ lokale Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen erfüllt.

(b) Für $(t_0, y_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ sei $\phi_{t_0,y_0}\colon I_{t_0,y_0} \to \mathbb{R}$ die maximale Lösung des Anfangswertproblems $y'(t) = f(t, y(t))$, $y(t_0) = y_0$. Zeigen Sie, dass $\sup I_{t_0,y_0} = \infty$, so dass also $[t_0, \infty[\subseteq I_{t_0,y_0}$.

(Analog sieht man $]-\infty, t_0] \subseteq I_{t_0,y_0}$; somit ist $I_{t_0,y_0} = \mathbb{R}$).

Folgern Sie hierzu aus einem der Ergebnise der Vorlesung: Wäre $\tau := \sup I_{t_0,y_0} < \infty$, so müsste $|\phi_{t_0,y_0}(t)| \to \infty$ gelten für $t \to \tau$. Führen Sie dies zum Widerspruch.

Aufgabe H10 (Eine Differentialgleichung)
Auf dem Zylinder $M := \{x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \colon x_1^2 + x_2^2 = 1\}$ definieren wir das Vektorfeld

$$X\colon M \to TM, \quad x \mapsto (x, e_3)$$

mit $e_3 = (0,0,1)$. Hierbei betrachten wir T_xM als Teilmenge von $T_x\mathbb{R}^3 = \{x\} \times \mathbb{R}^3 \subseteq \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 = T(\mathbb{R}^3)$.

(a) Skizzieren Sie den Zylinder und das Vektorfeld. Ist X glatt?

(b) Zeigen Sie, dass für alle $(t_0, y_0) \in \mathbb{R} \times M$ die maximale Lösung des Anfangswertproblems $\dot{y}(t) = X(y(t))$, $y(0) = y_0$ innerhalb der Geraden $y_0 + \mathbb{R}e_3$ verlaufen muss.

(c) Bestimmen Sie die maximale Lösung aus (b).

(d) Finden Sie den Definitionsbereich $\Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times M$ des zugehörigen Flusses und eine Formel für $\mathrm{Fl}_{t,t_0}(y_0)$.

Aufgabe H11 (Maximale Lösungen) Es sei J ein offenes Intervall, M eine C^1-Mannigfaltigkeit und $f\colon J \times M \to TM$ ein zeitabhängiges stetiges Vektorfeld derart, dass die Differentialgleichung $\dot{y}(t) = f(t, y(t))$ lokale Existenz und lokale Eindeutigkeit von Lösungen erfüllt. Für $(t_1, y_1), (t_2, y_2) \in J \times M$ schreiben wir $(t_1, y_1) \sim (t_2, y_2)$, wenn eine Lösung $\gamma\colon I \to M$ der DGL $\dot{y}(t) = f(t, y(t))$ existiert mit $t_1, t_2 \in I$, $\gamma(t_1) = y_1$ und $\gamma(t_2) = y_2$.

(a) Zeigen Sie, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf $J \times M$ ist.

(b) Zeigen Sie, dass für alle $(t_0, y_0) \in J \times M$ die Äquivalenzklasse $[(t_0, y_0)]$ gleich dem Graphen der maximalen Lösung $\phi_{t_0,y_0}\colon I_{t_0,y_0} \to M$ des Anfangswertproblems $\dot{y}(t) = f(t, y(t))$, $y(t_0) = y_0$ ist.

Aufgabe H12 (Lieklammer von Vektorfeldern).
Sind $a, b\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ glatte Funktionen, so hatten wir die Lieklammer $[a, b] := a.b - b.a \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ definiert mit

$$a.b := db \circ (\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}, a).$$

(a) Zeigen Sie: Ist $U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge mit $a|_U = 0$, so ist auch $[a, b]|_U = 0$.

Wir definieren $C_c^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ als die Menge der glatten Funktionen $a\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ derart, dass eine kompakte Teilmenge $K \subseteq \mathbb{R}^n$ existiert mit $a|_{\mathbb{R}^n \setminus K} = 0$.

(b) Zeigen Sie, dass $C_c^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ ein Untervektorraum von $C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ ist und eine Unter-Liealgebra von $(C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n), [\cdot, \cdot])$.

(c) Eine Teilmenge $\mathfrak{a}$ einer Liealgebra $\mathfrak{g}$ wird ein *Ideal* genannt, wenn $[x, y] \in \mathfrak{a}$ für alle $x \in \mathfrak{g}$ und $y \in \mathfrak{a}$. Ist $C_c^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ ein Ideal von $(C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n), [\cdot, \cdot])$?