Unendlichdimensionale Topologie (SS 2023, Glöckner)

1. Übungsblatt

Aufgabe 1 (Induzierte Topologie). Es sei $(X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum und $Y \subseteq X$ eine Teilmenge, versehen mit der induzierten Topologie $\mathcal{O}_Y = \{Y \cap U : U \in \mathcal{O}\}$. Zeigen Sie:

(a) Ist $(X, \mathcal{O})$ Hausdorffsch, so auch $(Y, \mathcal{O}_Y)$.

(b) Eine Teilmenge $A \subseteq Y$ ist genau dann relativ abgeschlossen, wenn eine abgeschlossene Teilmenge B von X existiert mit $A = Y \cap B$.

Aufgabe 2 (Kompaktheit).

(a) Zeigen Sie, dass für jede Menge X die Menge $\mathcal{O} := \{\emptyset, X\}$ eine Topologie auf X ist.

(Man nennt diese die *indiskrete Topologie*).

(b) Zeigen Sie, dass X kompakt ist. Berechnen Sie im Spezialfall $X := \{0, 1\}$ die auf $Y := \{0\}$ induzierte Topologie.

(c) Zeigen Sie, dass Y kompakt ist aber nicht abgeschlossen in X.

Aufgabe 3 (Homöomorphismen). Es seien X und Y topologische Räume und $f\colon X \to Y$ ein Homöomorphismus. Zeigen Sie:

(a) Eine Teilmenge $U \subseteq X$ ist genau dann offen in X, wenn $f(U)$ in Y offen ist.

(b) Eine Teilmenge $A \subseteq X$ ist genau dann abgeschlossen in X, wenn $f(A)$ in Y abgeschlossen ist.

(c) Für jede Teilmenge M von X ist $f|_M^{f(M)}\colon M \to f(M)$, $x \mapsto f(x)$ ein Homöomorphismus, wenn wir M mit der von X induzierten Topologie versehen und $f(M)$ mit der von Y induzierten Topologie.

Aufgabe 4 (Wegzusammenhang und Homöomorphismen). Ein topologischer Raum X heißt wegzusammenhängend, wenn für alle $x, y \in X$ ein *Weg von x nach y* existiert, also eine stetige Funktion $\gamma\colon [0,1] \to X$ mit $\gamma(0) = x$ und $\gamma(1) = y$.

(a) Seien X und Y homöomorphe topologische Räume. Zeigen Sie, dass X genau dann wegzusammenhängend ist, wenn Y es ist.

(b) Sind $[0,1]$ und der Einheitskreis $\mathbb{S}_1$ homöomorph? Sind $\mathbb{S}_1$ und $\mathbb{S}_2$ homöomorph?

Aufgabe 5 (Kompakte konvexe Mengen). Es sei $K \subseteq \mathbb{R}^n$ (mit $n \geq 1$) eine konvexe Menge, also $tx + (1-t)y \in K$ für alle $x, y \in K$ und $t \in [0,1]$. Weiter sei das Innere K^0 von K nicht leer. Zeigen Sie:

(a) Für alle $x \in K$ und $t \in [0,1[$ ist die Menge

$$tx + (1-t)K^0$$

offen, somit $tx + (1-t)K^0 \subseteq K^0$.

(b) Für alle $x \in K$ und $y \in K^0$ ist $tx + (1-t)y \in K^0$ für alle $t \in [0,1[$.

Sei nun K zudem kompakt und $0 \in K^0$. Zeigen Sie:

(c) Für alle $x \in K$ ist $tx \in K^0$ für alle $t \in [0,1[$.

(d) Für alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ist

$$I := \{t \geq 0\colon tx \in K\}$$

ein abgeschlossenes beschränktes Intervall mit mehr als einem Punkt. Für $t^* := \max(I)$ ist $t^*x \in \partial K$. Für alle $t \in [0, t^*[$ ist $tx \in K^0$, also $tx \notin \partial K$.

(e) Die Abbildung

$$f\colon \partial K \to \mathbb{S}_{n-1}, \quad x \mapsto \frac{1}{\|x\|_2} x$$

ist surjektiv und injektiv.

Unendlichdimensionale Topologie (SS 2023, Glöckner)
2. Übungsblatt

Aufgabe 6. Wir betrachten den Zylinder

$$Z := \mathbb{S}_1 \times [0,1]$$

mit der von $\mathbb{R}^3$ induzierten Topologie.

(a) Zeigen Sie, dass

$$q\colon [0,1]^2 \to Z, \quad (s,t) \mapsto (\cos(2\pi s), \sin(2\pi s), t)$$

eine Quotientenabbildung ist.

(b) Für welche $(s_1,t_1) \in [0,1]^2$ und $(s_2,t_2) \in [0,1]^2$ gilt $q(s_1,t_1) = q(s_2,t_2)$?

Wir betrachten weiter die Abbildung

$$f\colon [0,1]^2 \to \mathbb{R}^3, \quad (s,t) \mapsto (2+\cos(2\pi t)) \begin{pmatrix} \cos(2\pi s) \\ \sin(2\pi s) \\ 0 \end{pmatrix} + \sin(2\pi t) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(c) Skizzieren Sie das Bild $T := f([0,1]^2)$.

(d) Zeigen Sie, dass

$$p := f|^T\colon [0,1]^2 \to T, \quad (s,t) \mapsto f(s,t)$$

eine Quotientenabbildung ist.

(e) Für welche $(s_1,t_1) \in [0,1]^2$ und $(s_2,t_2) \in [0,1]^2$ gilt $p(s_1,t_1) = p(s_2,t_2)$?

Aufgabe 7. Es sei $X := \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$, $\mathcal{T}$ die von $\mathbb{R}$ auf $\mathbb{Q}$ induzierte Topologie und

$$\mathcal{O} := \{V \subseteq X \colon V \in \mathcal{T} \text{ oder } X \setminus V \text{ ist endlich}\}.$$

(a) Zeigen Sie, dass $\mathcal{O}$ eine Topologie auf X ist und $(X,\mathcal{O})$ kompakt ist.

(b) Zeigen Sie, dass $U := \mathbb{Q}$ eine offene 0-Umgebung in X ist.

(c) Zeigen Sie, dass U aus (b) keine kompakte 0-Umgebung enthält.

Also ist X kompakt, aber nicht lokalkompakt.

Aufgabe 8. Wir betrachten eine Gruppe G, versehen mit einer Topologie $\mathcal{O}$, welche für jedes $g \in G$ die Rechtstranslation

$$r_g \colon G \to G, \quad x \mapsto xg$$

stetig macht und somit zu einem Homöomorphismus, da $r_{g^{-1}} \circ r_g = \mathrm{id}_G = r_g \circ r_{g^{-1}}$. Für eine Untergruppe $H \subseteq G$ versehen wir den Raum

$$G/H := \{gH \colon g \in G\}$$

der Nebenklassen mit der Quotiententopologie bezüglich der kanonischen Abbildung

$$q \colon G \to G/H, \quad g \mapsto gH.$$

Zeigen Sie, dass q eine offene Abbildung ist, also $q(U)$ offen in G/H für alle offenen Teilmengen $U \subseteq G$.

[Hinweis: Es ist $q^{-1}(q(U)) = UH = \bigcup_{h \in H} Uh$.]

Aufgabe 9 (Produkttopologie). Es seien X_1 und X_2 topologische Räume; wir versehen $X := X_1 \times X_2$ mit der Produkttopologie $\mathcal{O}$.

(a) Zeigen Sie: Sind X_1 und X_2 Hausdorffsch, so auch $(X, \mathcal{O})$.

(b) Zeigen Sie: Ist Y ein topologischer Raum und $f \colon X \to Y$ stetig, so ist für jedes $x_1 \in X_1$ die Abbildung

$$f_{x_1} := f(x_1, \cdot) \colon X_2 \to Y, \quad x_2 \mapsto f(x_1, x_2)$$

stetig.

(c) Gegeben Teilmengen $Y_1 \subseteq X_1$ und $Y_2 \subseteq X_2$ sei $Y := Y_1 \times Y_2$. Es sei $\mathcal{O}_Y$ die von X auf Y induzierte Topologie. Schreiben wir $(\mathcal{O}_j)_{Y_j}$ für die von X_j auf Y_j induzierte Topologie für $j \in \{1, 2\}$, so können wir Y auch mit der Produkttopologie $\mathcal{T}$ versehen, als Produkt von $(Y_1, (\mathcal{O}_1)_{Y_1})$ und $(Y_2, (\mathcal{O}_2)_{Y_2})$. Zeigen Sie, dass die identische Abbildung

$$f := \mathrm{id}_Y \colon Y \to Y, \quad y \mapsto y$$

ein Homöomorphismus von $(Y, \mathcal{O})$ nach $(Y, \mathcal{T})$ ist. Folgern Sie, dass $\mathcal{O} = \mathcal{T}$.

Unendlichdimensionale Topologie (SS 2023, Glöckner)
3. Übungsblatt

Aufgabe 10. Für eine Teilmenge $X \subseteq \mathbb{R}^n$ sei

$$L := \{(t, tx) \colon (t, x) \in [0,1] \times X\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n+1} \,.$$

(a) Für $n = 1$: *Skizzieren Sie L in den Fällen $X = [0,1]$ sowie $X = \mathbb{N}$.*

(b) Für $n = 2$: *Skizzieren Sie L im Falle der abgeschlossenen Kreisscheibe $X = \mathbb{D}_2$ sowie im Fall $X = [0,1]^2$.*

Es sei weiter

$$\operatorname{cone}(X) := ([0,1] \times X)//(\{0\} \times X),$$

also $\operatorname{cone}(X) := ([0,1] \times X)/\!\sim$ mit $(t, x) \sim (s, y)$ genau dann, wenn $(t, x) = (s, y)$ oder $t = s = 0$. Wir geben $\operatorname{cone}(X)$ die Quotiententopologie bezüglich der kanonischen Abbildung

$$q \colon [0,1] \times X \to \operatorname{cone}(X), \quad (t, x) \mapsto [(t, x)] \,.$$

(c) *Zeigen Sie, dass die Abbildung*

$$\phi \colon \operatorname{cone}(X) \to L, \quad [(t, x)] \mapsto (t, tx)$$

wohldefiniert ist, stetig und bijektiv.

(d) *Folgern Sie, dass* $\operatorname{cone}(X)$ *Hausdorffsch ist.*

(e) Zeigen Sie: *Ist X kompakt, so ist ϕ ein Homöomorphismus.*

Nun sei $n = 1$ und $X := \mathbb{N}$.

(f) Für jede 0-Umgebung $V \subseteq L$ gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit

$$\{(t, y) \in L \colon \|(t, y)\|_\infty < \varepsilon\} \subseteq V \,,$$

mit der Maximumnorm $\|\cdot\|_\infty$ auf $\mathbb{R}^2$.
Folgern Sie, dass $[0, \varepsilon/n[\, \times \{n\} \subseteq (\phi \circ q)^{-1}(V)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(g) *Zeigen Sie, dass $W := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} ([0, 1/n^2[\, \times \{n\})$ in $[0,1] \times \mathbb{N}$ offen ist und bezüglich q saturiert.*

(h) *Zeigen Sie, dass $q(W)$ offen in* $\operatorname{cone}(\mathbb{N})$ *ist aber $\phi(q(W))$ keine 0-Umgebung in L.* (Also ist ϕ kein Homöomorphismus).

Aufgabe 11. Sei $n \in \mathbb{N}$. Für (t,x) und (s,y) in $[-1,1] \times \mathbb{S}_{n-1}$ schreiben wir $(s,x) \sim (s,y)$, wenn $(t,x) = (s,y)$ oder $t = s = -1$ oder $t = s = 1$. Wir versehen

$$S := ([-1,1] \times \mathbb{S}_{n-1})/\sim$$

mit der Quotiententopologie bzgl. der kanonischen Abbildung

$$q\colon [-1,1] \times \mathbb{S}_{n-1} \to S, \quad (t,x) \mapsto [(t,x)]\,.$$

(a) *Zeigen Sie, dass die Abbildung*

$$\phi\colon S \to \mathbb{S}_n, \quad [(t,x)] \mapsto \left(t, \sqrt{1-t^2}\, x\right)$$

wohldefiniert ist, stetig, bijektiv und ein Homöomorphismus.

(b) Nach (a) ist $([-1,1] \times \mathbb{S}_{n-1})/\sim$ homöomorph zu $\mathbb{S}_n$. *Gilt Entsprechendes, wenn Sie* $[-1,1]$ *durch* $[0,1]$ *ersetzen und* $\{-1,1\}$ *durch* $\{0,1\}$ *ersetzen in der Definition von* $\sim$*?*

Aufgabe 12. Zeigen Sie:

(a) *Ein topologischer Raum X ist genau dann Hausdorffsch, wenn die Diagonale*

$$\Delta_X := \{(x,x)\colon x \in X\}$$

in $X \times X$ abgeschlossen ist bezüglich der Produkttopologie.

(b) Es sei Y eine Menge, $(X_j, \mathcal{O}_j)_{j\in J}$ eine Familie topologischer Räume und $(f_j)_{j\in J}$ eine Familie von Abbildungen $f_j\colon X_j \to Y$. *Zeigen Sie, dass*

$$\mathcal{O} := \{V \subseteq Y\colon (\forall j \in J)\ f_j^{-1}(V) \in \mathcal{O}_j\}$$

eine Topologie auf Y ist.

(Diese Topologie haben wir die *finale Topologie* genannt).

Unendlichdimensionale Topologie (SS 2023, Glöckner)
4. Übungsblatt

Aufgabe 13. Für $n \in \mathbb{N}$ sei $K_n \subseteq \mathbb{R}^2$ der Kreis (Kreislinie) mit Radius $1/n$ um den Mittelpunkt $\left(\frac{1}{n}, 0\right)$. Dann ist also $0 := (0,0) \in K_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(a) *Skizzieren Sie K_1, K_2 und K_3.*

(b) *Zeigen Sie, dass $K := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n$ kompakt ist.*

(c) *Zeigen Sie, dass die Abbildung*

$$f\colon \bigvee_{n\in\mathbb{N}} (K_n, 0) \to K, \quad [(n,x)] \mapsto x$$

wohldefiniert ist, stetig und bijektiv.

(d) *Kann f ein Homöomorphismus sein* (und somit $\bigvee_{n\in\mathbb{N}}(K_n, 0)$ kompakt)?

Man nennt K den *hawaiianischen Ohrring.*

Aufgabe 14. Es sei X ein topologischer Raum und es seien $X_1 \subseteq X$ und $X_2 \subseteq X$ abgeschlossene Teilmengen mit $X = X_1 \cup X_2$. Wir betrachten auf der topologischen Summe

$$X_1 \sqcup X_2 \;:=\; \coprod_{j\in\{1,2\}} X_j \;=\; (\{1\} \times X_1) \cup (\{2\} \times X_2)$$

die Äquivalenzrelation $\sim$ mit $(i,x) \sim (j,y)$ genau dann, wenn $(i,x) = (j,y)$ oder $x = y \in X_1 \cap X_2$. Wir betrachten die kanonische Abbildung

$$q\colon X_1 \sqcup X_2 \to (X_1 \sqcup X_2)/{\sim}, \qquad (j,x) \mapsto [(j,x)]$$

und geben der Menge rechts die Quotiententopologie.

(a) *Machen Sie sich klar, dass $(X_1 \sqcup X_2)/\sim \;=\; X_1 \cup_\phi X_2$ mit der Inklusionsabbildung $\phi\colon X_1 \cap X_2 \to X_1$, $x \mapsto x$ als Anheftabbildung.*

(b) *Zeigen Sie, dass die Abbildung*

$$f\colon X_1 \cup_\phi X_2 \;\to\; X, \qquad [(j,x)] \mapsto x$$

wohldefiniert ist, stetig, bijektiv und ein Homöomorphismus.

Aufgabe 15. Zeigen Sie:

Ist ein topologischer Raum X Hausdorffsch und hat jeder Punkt $x \in X$ eine kompakte Umgebung, so ist X lokal kompakt.

Aufgabe 16. Es sei $(X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum, dessen Topologie final ist bezüglich einer Familie $(f_j)_{j \in J}$ von Abbildungen $f_j \colon X_j \to X$ mit topologischen Räumen $(X_j, \mathcal{O}_j)$. Sei $W \subseteq X$ offen in X. Für $j \in J$ versehen wir die offene Teilmenge $f_j^{-1}(W)$ mit der von X_j induzierten Topologie und definieren $\mathcal{T}$ als die finale Topologie auf W bezüglich den Abbildungen

$$g_j \colon f_j^{-1}(W) \to W, \quad x \mapsto f_j(x)\,.$$

(a) *Zeigen Sie, dass für jede Teilmenge $V \subseteq W$ die Urbilder $f_j^{-1}(V)$ und $g_j^{-1}(V)$ gleich sind.*

(b) *Folgern Sie, dass eine Teilmenge $V \subseteq W$ genau dann in* $(X, \mathcal{O})$ *offen ist, wenn V in* $(W, \mathcal{T})$ *offen ist.*

(c) *Folgern Sie, dass $\mathcal{T}$ übereinstimmt mit der von $\mathcal{O}$ auf W induzierten Topologie.*

(d) *Zeigen Sie, dass die Schlussfolgerung von* (c) *auch richtig bleibt, wenn wir die Teilmenge $W \subseteq X$ nicht offen, sondern abgeschlossen annehmen.*

Unendlichdimensionale Topologie (SS 2023, Glöckner)

5. Übungsblatt

Aufgabe 17. Für $n \in \mathbb{N}$ wollen wir sehen, dass die abgeschlossene Einheitskugel $\mathbb{D}_n := \{x \in \mathbb{R}^n \colon \|x\|_2 \leq 1\}$ eine n-dimensionale topologische Mannigfaltigkeit mit Rand ist, deren Rand als Mannigfaltigkeit gleich $\mathbb{S}_{n-1}$ ist. Sei zunächst $n = 2$. Zeigen Sie:

(a) *Die Abbildung* $h \colon \mathbb{R}\times\,]-1,1[\, \to \mathbb{R}\times\,]-1,1[$,

$$x = (x_1, x_2) \mapsto \left(x_1 + \sqrt{1 - x_2^2}, x_2\right)$$

ist ein Homöomorphismus.

(b) *Die Menge*

$$U \;:=\; \mathbb{D}_2^0 \cup \{(x_1, x_2) \in \mathbb{D}_2 \colon x_1 < 0\}$$

(Skizze!) *ist relativ offen in* $\mathbb{D}_2$.

(c) $V := h(U)$ *ist die Menge*

$$\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \colon x_2 \in\,]-1,1[,\;\; 0 \leq x_1 < 2\sqrt{1 - x_2^2}\}$$

(Skizze!); *diese ist relativ offen in* $H := [0, \infty[\, \times \mathbb{R}$.

(d) $\psi := h|_U^V \colon U \to V$ *ist ein Homöomorphismus. Weiter ist für* $x \in U$ *genau dann* $\psi(x) \in \partial H$, *wenn* $x \in \mathbb{S}_1$.

(e) *Für jeden Homöomorphismus* $\theta \colon \mathbb{D}_2 \to \mathbb{D}_2$ *ist* $\theta(U)$ *relativ offen in* $\mathbb{D}_2$ *und*

$$\psi \circ \theta^{-1}|_{\theta(U)} \colon \theta(U) \to V$$

ein Homöomorphismus.

(f) *Für ein* $m \in \mathbb{N}$ *gibt es Hömöomorphismen* $\theta_1, \ldots, \theta_m$ *wie in* (e) *mit*

$$\bigcup_{j=1}^{m} \theta_j(U)) \;=\; \mathbb{D}_2$$

und $\theta_j(\mathbb{S}_1) = \mathbb{S}_1$ *für alle* $j \in \{1, \ldots, m\}$.

(g) $\mathbb{D}_2$ *ist eine* 2*-dimensionale topologische Mannigfaltigkeit mit Rand.*

(h) *Als Rand einer Mannigfaltigkeit mit Rand ist* $\partial\mathbb{D}_2 = \mathbb{S}_1$.

(i) *Analoge Argumente funktionieren für beliebige natürliche Zahlen* $n \geq 2$.

Aufgabe 18. Die gelochte Kreisscheibe

$$M := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \colon 1 \leq \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \leq 3\}$$

ist eine 2-dimensionale topologische Mannigfaltigkeit mit Rand, welcher durch $\mathbb{S}_1 \cup 3\mathbb{S}_1$ gegeben ist (dies braucht nicht gezeigt zu werden). Es sei $D(M) = M \cup_\phi M$ der Doppel von M mit der Inklusionsabbildung $\phi\colon \partial M \to M$. Für $x \in M$ sei

$$m(h) \;:=\; \frac{2}{\|x\|_2}\, x$$

der entsprechende Punkt auf der Kreislinie $2\,\mathbb{S}_1$, also $2\,\mathbb{S}_1 \cap [0, \infty[\, x = \{m(h)\}$. Zeigen Sie:

(a) *Die Abbildung*

$$h\colon D(M) \to \mathbb{R}^3, \quad [(j, x)] \mapsto \begin{cases} \left(x, \sqrt{1 - \|x - m(x)\|_2^2}\right) & \text{wenn } j = 1; \\ \left(x, -\sqrt{1 - \|x - m(x)\|_2^2}\right) & \text{wenn } j = 2 \end{cases}$$

ist wohldefiniert, stetig und injektiv sowie eine topologische Einbettung.

(b) *Das Bild von h ist der Torus T aus Aufgabe* 6 (c)–(e) *auf Blatt* 2.

(c) *Die Abbildung $h|^T\colon D(M) \to T$ ist ein Homöomorphismus.*

Aufgabe 19. Für $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in [0,1]^2$ schreiben wir $(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2)$, wenn $(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$ oder $\{x_1, x_2\} = \{0, 1\}$ und $y_2 = 1 - y_1$. Wir versehen $\mathbb{M} := [0,1]^2/\sim$ mit der Quotiententopologie bezüglich der kanonischen Abbildung

$$q\colon [0,1]^2 \to \mathbb{M}, \quad (x, y) \mapsto [(x, y)];$$

es ist also $\mathbb{M}$ das aus der Vorlesung bekannte Möbiusband. Wir betrachten $e_3 := (0, 0, 1) \in \mathbb{R}^3$ und für $\alpha \in \mathbb{R}$ den Einheitsvektor

$$u_\alpha \;:=\; (\cos\alpha, \sin\alpha, 0) \in \mathbb{R}^3\,.$$

(a) *Zeigen Sie, dass die Abbildung*

$$h\colon \mathbb{M} \to \mathbb{R}^3, \quad [(x, y)] \mapsto 2\,u_{2\pi x} \;+\; (2y - 1)\,(\sin(\pi x)\,u_{2\pi x} + \cos(\pi x)\,e_3)$$

wohldefiniert, injektiv und stetig ist.

(b) *Folgern Sie, dass $\mathbb{M}$ zum Bild $h(\mathbb{M})$ homöomorph ist.*

(c) *Skizzieren Sie die Teilmenge $h(\mathbb{M})$ von $\mathbb{R}^3$.*

(d)* *Begründen Sie, dass $h(\mathbb{M})$ eine 2-dimensionale topologische Mannigfaltigkeit mit Rand ist, mit Rand $h([0,1] \times \{1\})$.*

Unendlichdimensionale Topologie (SS 2023, Glöckner)
6. Übungsblatt

Aufgabe 20. Seien X und Y topologische Räume, $A \subseteq Y$ eine abgeschlossene Teilmenge und $\phi\colon A \to X$ eine stetige Abbildung. Weiter sei

$$q\colon X \sqcup Y \to X \cup_\phi Y$$

die kanonische Quotientenabbildung und $\lambda_2\colon Y \to X \sqcup Y$, $y \mapsto (2, y)$ die kanonische Abbildung in $X \sqcup Y = (\{1\} \times X) \cup (\{2\} \times Y)$. Zeigen Sie:

Ist ϕ surjektiv und sind sowohl X als auch Y Hausdorffsch und kompakt, so ist $q \circ \lambda_2\colon Y \to X \cup_\phi Y$ eine Quotientenabbildung.

Aufgabe 21. Es seien X ein topologischer Raum, G eine Gruppe und

$$\sigma\colon G \times X \to X, \quad (g, x) \mapsto \sigma(g, x) =: g.x$$

eine Gruppenwirkung, so dass also $e.x = x$ für alle $x \in X$ und

$$g.(h.x) = (gh).x \quad \text{für alle } g, h \in G \text{ und } x \in X.$$

Für $x, y \in X$ schreiben wir $x \sim y$, wenn $y = g.x$ für ein $g \in G$. Dann ist $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf X und die Äquivalenzklasse von $x \in X$ ist seine G-Bahn,

$$[x] \;=\; G.x\,;$$

man nennt $X/G := X/\sim$ daher auch "Bahnenraum". Wir geben X/G die Quotiententopologie bezüglich der kanonischen Abbildung $q\colon X \to X/G$, $x \mapsto G.x$. Zeigen Sie:

Ist für jedes $g \in G$ die Abbildung $\sigma_g := \sigma(g, \cdot)\colon X \to X$ ein Homöomorphismus, so ist q eine offene Abbildung.

Aufgabe 22. Für $n \in \mathbb{N}$ wirkt die Gruppe $C_2 := \{1, -1\}$ auf $\mathbb{S}_n$ via $\sigma(1, x) = x$, $\sigma(-1, x) = -x$ für $x \in \mathbb{S}_n$.

(a) Für $x \in \mathbb{S}_n$ und $r > 0$ sei $B_r(x) := \{y \in \mathbb{S}_n\colon \|y - x\|_2 < r\}$. Zeigen Sie, dass für $r \in \,]0, \sqrt{2}[$ die Teilmengen $B_r(x)$ und $-B_r(x)$ von $\mathbb{R}^n$ disjunkt sind. Folgern Sie, dass $q|_{B_r(x)}$ injektiv ist. Nach Aufgabe 21 ist $q(B_r(x))$ offen in $\mathbb{S}_n/C_2$. Zeigen Sie, dass $q|_{B_r(x)}\colon B_r(x) \to q(B_r(x))$ ein Homöomorphismus ist.

(b) Sei $x \in \mathbb{S}_n$ und $y \in \mathbb{S}_n$ mit $y \notin \{x, -x\}$. Sei $r \in]0, \sqrt{2}[$ so klein, dass $r < \|x - y\|_2/2$ und $r < \|x + y\|_2/2$. Zeigen Sie, dass die Mengen

$$B_r(x), \quad B_r(-x), \quad B_r(y) \quad \text{und} \quad B_r(-y)$$

paarweise disjunkt sind. Folgern Sie, dass die Teilmengen $q(B_r(x))$ und $q(B_r(y))$ von $\mathbb{S}_n/C_2$ disjunkt sind.

(c) Folgern Sie aus (a) und (b), dass $\mathbb{S}_n/C_2$ eine n-dimensionale topologische Mannigfaltigkeit ist (für $\mathbb{S}_n$ dürfen Sie dies voraussetzen).

(d) Folgern Sie: $\mathbb{R}P_n$ ist eine n-dimensionale topologische Mannigfaltigkeit.

Aufgabe 23. Machen Sie $\mathbb{R}^3$ zu einem 3-dimensionalen Zellenkomplex, beginnend mit $X_0 := \mathbb{Z}^3$ und den 1-Zellen

$$m + [0, 1]e_k \subseteq \mathbb{R}^3$$

für $m = (m_1, m_2, m_3) \in \mathbb{Z}^3$ und $k \in \{1, 2, 3\}$ (wobei $e_k \in \mathbb{R}^3$ der $k$te Standard-Einheitsvektor ist).

Unendlichdimensionale Topologie (SS 2023, Glöckner)

7. Übungsblatt (freiwillige Hausübung für 18.05.2023)

Aufgabe 24. Für eine stetige Abbildung $f\colon X \to Y$ zwischen topologischen Räumen X und Y betrachten wir den sogenannten *Abbildungszylinder*

$$Z_f \;:=\; Y \cup_\phi ([0,1] \times X)$$

mit ϕ: $\{0\} \times X \to Y$, $(0,x) \mapsto f(x)$ (siehe Definition 2.45). Zeigen Sie:

Sind X und Y Hausdorffsch, so ist auch Z_f Hausdorffsch.

[Hinweis: Man kann ähnlich argumentieren wie bei $\operatorname{cone}(X)$ und $S(X)$.]

Aufgabe 25. Es sei $X_1 = \{0\}$ mit der eindeutig festgelegten Topologie, $X := \{0,1\}$ mit der finalen Topologie bezüglich der Inklusion $f_1\colon X_1 \to X$ und $Y := [0,1]$ mit der üblichen Topologie. Es sei $\mathcal{O}$ die Produkttopologie auf $X \times Y$ und $\mathcal{T}$ die finale Topologie auf $X \times Y$ bezüglich der Abbildung

$$f_1 \times \mathrm{id}_Y\colon X_1 \times Y \to X \times Y, \quad (x,y) \mapsto (f(x), y)\,.$$

Zeigen Sie:

(a) In X ist jede Teilmenge offen, also X diskret.

(b) In $(X \times Y, \mathcal{T})$ ist jede Teilmenge von $\{1\} \times [0,1]$ offen, also $\{1\} \times [0,1]$ diskret in der von $(X \times Y, \mathcal{T})$ induzierten Topologie.

(c) Die von $(X \times Y, \mathcal{O})$ auf $\{1\} \times [0,1]$ induzierte Topologie macht die Abbildung
$$h\colon [0,1] \to \{1\} \times [0,1], \quad y \mapsto (1,y)$$
zu einem Homöomorphismus; sie ist also nicht diskret.

(d) Es ist $\mathcal{O} \neq \mathcal{T}$.

Steht dies im Widerspruch zu Folgerung 1.122?

Aufgabe 26. Es seien X und Y topologische Räume. Für $y \in Y$ betrachten wir die konstante Abbildung $c_y\colon X \to Y$, $x \mapsto y$. Zeigen Sie, dass die Abbildung
$$\kappa\colon Y \to C(X,Y), \quad y \mapsto c_y$$
stetig ist, wenn $C(X,Y)$ mit der kompakt-offenen Topologie versehen wird. Ist κ eine topologische Einbettung?

Unendlichdimensionale Topologie (SS 2023, Glöckner)

8. Übungsblatt, für 25.05.2023

Aufgabe 27. Es sei $\mathcal{A}$ eine Kategorie. Zeigen Sie:

(a) (Eindeutigkeit von id_X). Es sei $X \in \mathrm{ob}(\mathcal{A})$. Für $j \in \{1,2\}$ seien $g_1, g_2 \in \mathrm{Hom}(X,X)$ derart, dass

$$f \circ g_j = g_j \circ f = f \quad \text{für alle } f \in \mathrm{Hom}(X,X).$$

Dann ist $g_1 = g_2$.

(b) (Eindeutigkeit von Inversen). Es seien $X, Y \in \mathrm{ob}(\mathcal{A})$ und $f \in \mathrm{Hom}(X,Y)$. Für $j \in \{1,2\}$ sei $g_j \in \mathrm{Hom}(Y,X)$ derart, dass

$$g_j \circ f = \mathrm{id}_X \quad \text{und} \quad f \circ g_j = \mathrm{id}_Y\ .$$

Zeigen Sie, dass $g_1 = g_2$.

(c) Es seien $X, Y \in \mathrm{ob}(\mathcal{A})$, $f \in \mathrm{Hom}(X,Y)$ und $g, h \in \mathrm{Hom}(Y,X)$ mit

$$g \circ f = \mathrm{id}_X \quad \text{und} \quad f \circ h = \mathrm{id}_Y\ .$$

Dann ist f ein Isomorphismus und $g = h = f^{-1}$.

Aufgabe 28. Zur Erinnerung: Eine Abbildung $f\colon E \to F$ zwischen reellen Vektorräumen heißt *affin-linear*, wenn $f(x) = \alpha(x) + b$ mit einer linearen Abbildung $\alpha\colon E \to E$ und einem Vektor $b \in F$ ($\Leftrightarrow f - f(0)$ ist linear).

(a) Zeigen Sie: Sind $A, B, C \in \mathbb{R}^2$ Punkte derart, dass $B - A$ und $C - A$ linear unabhängig sind, so gibt es für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und $A', B', C' \in \mathbb{R}^n$ genau eine affin-lineare Abbildung $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^n$ derart, dass

$$f(A) = A', \quad f(B) = B' \quad \text{und} \quad f(C) = C'\ .$$

(b) Es sei $\Delta := \{(s,t) \in [0,1]^2 \colon s + t \leq 1\}$ und

$$D := \{A + s(B - A) + t(C - A) \colon (s,t) \in \Delta\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

das (ausgefüllte) Dreieck mit den Ecken A, B und C. Zeigen Sie: Sind $B' - A'$ und $C' - A'$ linear unabhängig, so ist $f(D)$ gleich dem Dreieck D' mit den Ecken A', B' und C'. Weiter ist $f|_D^{D'}\colon D \to D'$ ein Homöomorphismus.

(c) Es ist $[0,1]^2$ die Vereinigung der Dreiecke D und D' mit den Ecken $(0,0)$, $(1,0)$ und $(1,1)$ bzw. $(0,0)$, $(1,1)$ und $(0,1)$. Es sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die durch

$$f(0,0) = (0,1), \quad f(1,0) = (0,0) \quad \text{und} \quad f(1,1) = (1,1)$$

festgelegte affin-lineare Abbildung und $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die durch

$$g(0,0) = (0,1), \quad g(0,1) = (0,2) \quad \text{und} \quad g(1,1) = (1,1)$$

festgelegte affin-lineare Abbildung. Zeigen Sie, dass $f(t,t) = g(t,t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Es sei $E \subseteq \mathbb{R}^2$ das Dreieck mit den Ecken $(0,0)$, $(1,1)$ und $(0,2)$. Zeigen sie, dass

$$\phi\colon [0,1]^2 \to E, \quad x \mapsto \begin{cases} f(x) & \text{wenn } x \in D; \\ g(x) & \text{wenn } x \in D' \end{cases}$$

wohldefiniert ist, stetig und ein Homöomorphismus.

(d) Es sei nun $M := [0,1]^2/\sim$ die Kleinsche Flasche (wie in 2.41) und $q\colon [0,1]^2 \to M$ die kanonische Quotientenabbildung. Es sei F das Dreieck mit den Ecken $(0,1)$, $(1,1)$ und $(0,2)$ und $h\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die eindeutige affin-lineare Abbildung mit

$$h(0,1) = (1,0), \quad h(1,1) = (0,0) \quad \text{und} \quad h(0,2) = (1,1).$$

Dann ist $h(F) = D$. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$p\colon E \to M, \quad x \mapsto \begin{cases} q(x) & \text{wenn } x \in D'; \\ q(h(x)) & \text{wenn } x \in F \end{cases}$$

wohldefiniert ist, stetig und eine Quotientenabbildung. Dann ist also auch $p \circ \phi\colon [0,1]^2 \to M$ eine Quotientenabbildung.

(e) Für welche $(x_1,y_1),(x_2,y_2) \in E$ ist $p(x_1,y_1) = p(x_2,y_2)$? Für welche $(x_1,y_1),(x_2,y_2) \in [0,1]^2$ ist $p(\phi(x_1,y_1)) = p(\phi(x_2,y_2))$? Folgern Sie, dass $M = p(\phi([0,1]^2)) \sim \mathbb{N}_2$ mit der nicht-orientierbaren Fläche $\mathbb{N}_g$ für $g = 2$.

Unendlichdimensionale Topologie (SS 2023, Glöckner)

9. Übungsblatt (freiwillige Hausübung für 01.06.2023)

Aufgabe 29. Wir betrachten zunächst drei Punkte P_1, P_2 und P_3 in der Ebene, die nicht auf einer Geraden liegen. Wir wissen, dass ihre konvexe Hülle K dann ein Dreieck ist und für

$$\Delta := \{(t_1, t_2) \in [0,1]^2 \colon t_1 + t_2 \leq 1\}$$

ist

$$\phi\colon \Delta \to K, \quad (t_1, t_2) \mapsto P_1 + t_1(P_2 - P_1) + t_2(P_3 - P_1)$$

eine stetige Bijektion. Es ist $\psi\colon [0,1]^2 \to \Delta$, $(t, s) \mapsto (t, (1-t)s)$ eine stetige surjektive Abbildung; also ist auch

$$\phi \circ \psi\colon [0,1]^2 \to K$$

stetig und surjektiv.

(a) Es sei X ein topologischer Raum und $g\colon K \to X$ eine stetige Abbildung. Wir betrachten die Wege

$$\alpha_j\colon [0,1] \to X, \quad t \mapsto g((1-t)P_j + tP_{j+1})$$

für $j \in \{1, 2, 3\}$ mit $P_4 := P_1$. Zeigen Sie, dass

$$[\alpha_1]\,[\alpha_2]\,[\alpha_3] = [c_{x_0}] = \mathrm{id}_{x_0}$$

im Fundamentalgruppoid $\pi_1(X)$, mit $x_0 := g(P_1)$.

Hinweis: Wenden Sie Lemma 5.46 auf $f := g \circ \phi \circ \psi\colon [0,1]^2 \to X$ an.

(b) Für eine natürliche Zahl $n \geq 4$ sei nun $N \subseteq \mathbb{R}^2$ ein regelmäßiges n-Eck mit Schwerpunkt 0 und den aufeinanderfolgenden Ecken $A_1, \ldots, A_n$ im Gegenuhrzeigersinn. Es sei $f\colon N \to X$ stetig und es sei $\alpha_j\colon [0,1] \to X$ für $j \in \{1, \ldots, n\}$ der Weg

$$t \mapsto f((1-t)A_j + tA_{j+1}),$$

mit $A_{n+1} := A_1$. Zeigen Sie, dass

$$h := [\alpha_1]\,[\alpha_2] \cdots [\alpha_n] \;=\; [c_{x_0}] = \mathrm{id}_{x_0}$$

in $\pi_1(X)$, mit $x_0 := f(A_1)$.

Hinweis: Es genügt, $[\gamma_1]\, h\, [\gamma_1]^{-1} = \mathrm{id}_{f(0)}$ zu zeigen für $\gamma_1\colon [0,1] \to X$, $t \mapsto f(tA_1)$ bzw. mit $\gamma_j(t) := f(tA_j)$

$$[\gamma_1]\,[\alpha_1]\,[\gamma_2]^{-1}[\gamma_2]\,[\alpha_2]\,[\gamma_3]^{-1} \cdots [\gamma_n]\,[\alpha_n]\,[\gamma_1]^{-1} \;=\; \mathrm{id}_{f(0)}\,.$$

Aufgabe 30. Wir betrachten eine Halbgruppe (M, μ); es ist also M eine Menge und es ist eine zweistellige Verknüpfung

$$\mu\colon M \times M \to M, \quad (x, y) \mapsto \mu(x, y) =: x * y$$

gegeben, für welche das Assoziativgesetz erfüllt ist, $(x * y) * z = x * (y * z)$ für alle $x, y, z \in M$. Gibt es zusätzlich ein Element $e \in M$ mit

$$e * x = x * e = x \quad \text{für alle } x \in M$$

(ein Neutralelement), so nennt man (M, μ) ein *Monoid.* Ist M mit einer Topologie versehen, welche die Multiplikation $\mu\colon M \times M \to M$ stetig macht, so sprechen wir von einem *topologischen Monoid.* Hat zudem jedes $x \in M$ ein Inverses und ist das Invertieren $M \to M$, $x \mapsto x^{-1}$ stetig, so nennt man M eine topologische Gruppe. Wir wollen das Hiltonsche Lemma beweisen:

Satz. *Für jedes topologische Monoid (M, μ) mit Neutralelement e ist die Fundamentalgruppe $\pi_1(M, e)$ abelsch. Für alle $[\gamma], [\eta] \in \pi_1(M, e)$ ist weiter*

$$[\gamma]\,[\eta] \;=\; [\gamma * \eta]$$

mit der durch punktweise Multiplikation erhaltenen Schleife

$$\gamma * \eta := \mu \circ (\gamma, \eta)\colon [0, 1] \to M, \quad t \mapsto \gamma(t) * \eta(t).$$

Gehen Sie wie folgt vor.

(a) Es seien γ_1, η_1, γ_2 und η_2 Schleifen in M an der Stelle e und $F_j\colon [0, 1] \times M \to M$ eine Homotopie relativ $\{0, 1\}$ von γ_j nach η_j für $j \in \{1, 2\}$. Zeigen Sie, dass

$$F := \mu \circ (F_1, F_2)\colon [0, 1] \times M \to M, \quad (t, x) \mapsto F_1(t, x) * F_2(t, x)$$

eine Homotopie relativ $\{0, 1\}$ von $\gamma_1 * \gamma_2$ nach $\eta_1 * \eta_2$ ist.

(b) Es seien γ und η Schleifen in M an der Stelle e und $c_e\colon [0, 1] \to M$ die konstante Schleife $x \mapsto e$. Rechnen Sie nach, dass

$$(\gamma \cdot c_e) * (c_e \cdot \eta) = \gamma \cdot \eta\,.$$

Folgern Sie mit (a), dass $\gamma * \eta \simeq \gamma \cdot \eta$ relativ $\{0, 1\}$.

(c) Zeigen Sie, dass $(c_e \cdot \gamma) * (\eta \cdot c_e) = \eta \cdot \gamma$ und $\gamma * \eta \simeq \eta \cdot \gamma$ relativ $\{0, 1\}$.

Nach (b) und (c) ist

$$[\eta]\,[\gamma] = [\eta \cdot \gamma] = [\gamma * \eta] = [\gamma \cdot \eta] = [\gamma]\,[\eta].$$

Unendlichdimensionale Topologie (SS 2023, Glöckner)
10. Übungsblatt (freiwillige Hausübung für 8.6.2023)

Aufgabe 31. Es sei $X \subseteq \mathbb{R}^n$ eine konvexe Teilmenge. Zeigen Sie, dass jeder Retrakt $A \subseteq X$ ein starker Deformationsretrakt von X ist.

Aufgabe 32. Zeigen Sie, dass ein topologischer Raum X genau dann kontrahierbar ist, wenn ein $x_0 \in X$ existiert für welches die einpunktige Menge $\{x_0\}$ ein Deformationsretrakt von X ist.

Aufgabe 33. Seien X ein topologischer Raum und $A \subseteq B \subseteq X$ Teilmengen. Zeigen Sie:

(a) Ist A ein Retrakt von B und B ein Retrakt von X, so ist A ein Retrakt von X.

(b) Ist A ein Deformationsretrakt von B und B ein Deformationsretrakt von X, so ist A ein Deformationsretrakt von X.

(c) Ist A ein starker Deformationsretrakt von B und B ein starker Deformationsretrakt von X, so ist A ein starker Deformationsretrakt von X.

Aufgabe 34. Es sei X ein topologischer Raum und $A \subseteq X$ eine Teilmenge. Zeigen Sie:

(a) Ist A ein Deformationsretrakt von X und A wegzusammenhängend, so ist X wegzusammenhängend.

(b) Ist A ein Deformationsretrakt von X und A zusammenhängend, so ist X zusammenhängend.

(c) Ist A ein Retrakt von X und X Hausdorffsch, so ist A eine abgeschlossene Teilmenge von X.

[Hinweis: Ist $r\colon X \to A$ eine Retraktion und $i\colon A \to X$ die Inklusionsabbildung, so ist $x \in A \Leftrightarrow (i \circ r)(x) = x$ für alle $x \in X$.]

Aufgabe 35. Wir betrachten die Quotientenabbildung $q\colon \mathbb{S}_n \to \mathbb{S}_n/\!\sim$ mit $x \sim x$ sowie $x \sim -x$. Folgern Sie aus Aufgabe 22 (a):

(a) Jedes $x \in \mathbb{S}_n$ hat eine offene Umgebung $V \subseteq \mathbb{S}_n$ mit $V \cap -V = \emptyset$.

(b) Die offene Teilmenge $U := q(V)$ von $\mathbb{S}_n/\!\sim$ wird durch q trivial überlagert.

(c) q ist eine Überlagerung.

Unendlichdimensionale Topologie (SS 2023, Glöckner)
11. Übungsblatt, für 15.6.2023

Aufgabe 36. Wir betrachten die surjektive stetige Abbildung $q\colon \mathbb{R} \to \mathbb{S}_1$, $t \mapsto e^{2\pi i t}$.

(a) Zeigen Sie, dass für jedes $t_0 \in \mathbb{R}$ die Einschränkung

$$p_{t_0} := q|_{[t_0-\frac{1}{2},t_0+\frac{1}{2}]}\colon \left[t_0 - \frac{1}{2}, t_0 + \frac{1}{2}\right] \to \mathbb{S}_1$$

eine Quotientenabbildung ist. Zeigen Sie auch: Jede offene Teilmenge

$$U \subseteq \left]t_0 - \frac{1}{2}, t_0 + \frac{1}{2}\right[$$

ist p_{t_0}-saturiert, somit $p_{t_0}(U) = q(U)$ offen in $\mathbb{S}_1$.

(b) Folgern Sie, dass q offen ist und eine Quotientenabbildung.

(c) Zeigen Sie, dass für $t_0 \in \mathbb{R}$ die nach (a) oder (b) offene Menge $U := q(]t_0-\frac{1}{2}, t_0+\frac{1}{2}[)$ durch q trivial überlagert ist. Also ist q eine Überlagerung.
Hinweis: Es ist $q^{-1}(U) = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}}]n + t_0 - \frac{1}{2}, n + t_0 + \frac{1}{2}[$.

Aufgabe 37. Es sei G eine topologische Gruppe mit Neutralelement e und $\Gamma \subseteq G$ eine Untergruppe, die in der induzierten Topologie diskret ist. Wir geben der Menge

$$\Gamma \setminus G := \{\Gamma g\colon g \in G\}$$

der Rechtsnebenklassen von Γ die Quotiententopologie bezüglich der kanonischen Abbildung $q\colon G \to \Gamma \setminus G$, $g \mapsto \Gamma g$.

(a) Zeigen Sie, dass $\Gamma \times G \to G$, $(\gamma, g) \mapsto \gamma g$ eine Gruppenwirkung ist und $G \to G$, $g \mapsto \gamma g$ ein Homöomorphismus für alle $\gamma \in \Gamma$. Nach Aufgabe 21 ist q also eine offene Abbildung.

(b) Da $\{e\}$ in Γ offen ist, gibt es eine offene e-Umgebung $P \subseteq G$ mit $\Gamma \cap P = \{e\}$. Zeigen Sie, dass es eine offene e-Umgebung $Q \subseteq G$ gibt mit $QQ^{-1} \subseteq P$.

(c) Zeigen Sie, dass

$$\gamma_1 Q g \cap \gamma_2 Q g = \emptyset$$

für alle $g \in G$ und $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$ mit $\gamma_1 \neq \gamma_2$.

(d) Zeigen Sie, dass für jedes $g \in G$ die Menge $q(Qg)$ in $\Gamma \setminus G$ offen ist und trivial durch q überlagert wird.

(e) Folgern Sie, dass q eine Überlagerung ist.

Aufgabe 38. In der Situation von Aufgabe 37 sei $x_0 := q(e) = \Gamma$. Zeigen Sie analog zum Beweis von Satz 7.1 die folgenden Behauptungen:

(a) Bezeichnet $\widetilde{\gamma}\colon [0,1] \to G$ für $[\gamma] \in \pi_1(\Gamma \setminus G, x_0)$ den in e startenden Lift von γ für die Überlagerung $q\colon G \to \Gamma \setminus G$, so ist

$$\phi([\gamma]) := \widetilde{\gamma}(1)$$

wohldefiniert, unabhängig von der Wahl des Vertreters γ der Homotopieklasse $[\gamma]$. Da $\Gamma\widetilde{\gamma}(1) = q(\widetilde{\gamma}(1)) = \gamma(1) = x_0 = \Gamma$, ist $\widetilde{\gamma}(1) \in \Gamma$.

(b) Es ist $\phi\colon \pi_1(\Gamma \setminus G, x_0) \to \Gamma$ ein Gruppen-Homomorphismus.

(c) Ist G wegzusammenhängend, so ist ϕ surjektiv.

(d) Ist G einfach zusammenhängend, so ist $\phi\colon \pi_1(\Gamma \setminus G, x_0) \to \Gamma$ zudem injektiv und folglich ein Isomorphismus von Gruppen.

Unendlichdimensionale Topologie (SS 2023, Glöckner)

12. Übungsblatt, für 22.6.2023

Aufgabe 39. Welche der Buchstaben

A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, O, P, Q, R, S, T, U, V, W, X, Y, Z,

betrachtet als Teilmengen der Ebene, sind zueinander homotopieäquivalent? [Hinweis: Sie dürfen benutzen, dass die Fundamentalgruppe $\pi_1(\mathbb{S}_1 \vee \mathbb{S}_1)$ einer 8 nicht abelsch ist (was wir später auch beweisen).]

Aufgabe 40. Es sei (X, x_0) ein punktierter topologischer Raum und $k \in \mathbb{N}$ mit $k \geq 2$. Seien $\gamma\colon (I^k, \partial I^k) \to (X, x_0)$ und $\eta\colon (I^k, \partial I^k) \to (X, x_0)$ Morphismen von Raumpaaren. Zeigen Sie, dass

$$\gamma \cdot \eta \simeq \gamma * \eta \quad \text{relativ } \partial I^k$$

für die Operation $*$ aus dem Beweis von Satz 9.8, so dass also auch

$$[\gamma]\,[\eta] = [\gamma * \eta]\,.$$

[Hinweis: Setzen Sie $\gamma_{21} = \gamma_{12} = c_{x_0}$ in Formel (28) im Beweis von Satz 9.8.]

Aufgabe 41.

(a) Es sei $f\colon (X, x_0) \to (Y, y_0)$ ein Morphismus punktierter topologischer Räume. Zeigen Sie, dass

$$[f \circ \gamma] \in \pi_0(Y, y_0)$$

nur von $[\gamma] \in \pi_0(X, x_0)$ abhängt. Wir erhalten also eine wohldefinierte Abbildung

$$f_*\colon \pi_0(X, x_0) \to \pi_0(Y, y_0), \quad [\gamma] \mapsto [f \circ \gamma].$$

(b) Ist auch $g\colon (Y, y_0) \to (Z, z_0)$ ein Morphismus, so ist $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$.

(c) Es ist $(\mathrm{id}_X)_*$ die identische Abbildung auf $\pi_0(X, x_0)$.

(d) Ist $f\colon X \to Y$ eine Homotopieäquivalenz und $g\colon Y \to X$ eine Homotopieinverse für f, so ist für alle $x_0 \in X$ und $y_0 := f(x_0)$ die Abbildung

$$f_*\colon \pi_0(X, x_0) \to \pi_0(Y, y_0)$$

eine Bijektion.

Aufgabe 42. Es seien X und Y topologische Räume, A und Y' abgeschlossene Teilmengen von Y und $\phi\colon A \to X$ stetig. Sei $A' := Y' \cap A$. Wir wollen sehen, dass die natürliche Abbildung

$$j\colon X \cup_{\phi|_{A'}} Y' \to X \cup_\phi Y$$

eine topologische Einbettung ist. Hierzu betrachten wir die offenen Einbettungen $\lambda_1\colon X \to X \sqcup Y = (\{1\} \times X) \cup (\{2\} \times Y)$, $x \mapsto (1, x)$ und $\lambda_2\colon Y \to X \sqcup Y$, $y \mapsto (2, y)$ und die Quotientenabbildung

$$q\colon X \sqcup Y \to X \cup_\phi Y\,.$$

Es ist dann $X \sqcup Y'$ eine abgeschlossene Teilmenge von $X \sqcup Y$. Es sei

$$p\colon X \sqcup Y' \to X \cup_{\phi|_{A'}} Y'$$

die kanonische Quotientenabbildung.

(a) Zeigen Sie, dass $q|_{X \sqcup Y'}$ über p faktorisiert zu einer stetigen Abbildung $j\colon X \cup_{\phi|_{A'}} Y' \to X \cup_\phi Y$.

(b) Zeigen Sie, dass j injektiv ist.

(c) Sei $B \subseteq X \cup_{\phi|_{A'}} Y'$ abgeschlossen, also $p^{-1}(B)$ abgeschlossen in $X \sqcup Y'$. Zeigen Sie, dass $j(B)$ abgeschlossen ist in $X \cup_\phi Y$.

Die injektive stetige Abbildung j ist somit eine abgeschlossene Abbildung und folglich eine topologische Einbettung.

Unendlichdimensionale Topologie (SS 2023, Glöckner)
13. Übungsblatt (freiwillig für 29.6.2023)

Es sei G eine topologische Gruppe mit Neutralelement e und H eine Untergruppe von G. Wir betrachten auf der Menge G/H der Linksnebenklassen die Quotiententopologie bezüglich der kanonischen Abbildung $q\colon G \to G/H$, $g \mapsto gH$. Wir wissen bereits, dass q eine offene Abbildung ist.

Aufgabe 43. Wir wollen sehen, dass G/H Hausdorffsch ist, wenn H in G abgeschlossen ist. Seien hierzu $x, y \in G$ mit $xH \neq yH$, also

$$y^{-1}x \in G \setminus H\,.$$

(a) Zeigen Sie: Es gibt eine offene e-Umgebung $V \subseteq G$ mit $y^{-1}Vx \subseteq G \setminus H$.

(b) Zeigen Sie, dass es eine offene e-Umgebung $W \subseteq G$ gibt mit $W^{-1}W \subseteq V$ (wobei die Menge links definiert ist als $\{w_1^{-1}w_2\colon w_1, w_2 \in W\}$).

(c) Zeigen Sie, dass $WxH \cap WyH = \emptyset$. Folgern Sie $q(Wx) \cap q(Wy) = \emptyset$.

Aufgabe 44. Es gebe eine Teilmenge $R \subseteq G$ mit $e \in R$ und eine offene e-Umgebung V in H derart, dass RV offen in G und

$$R \times V \to RV, \quad (r, v) \mapsto rv$$

ein Homöomorphismus ist. Wir wollen sehen, dass dann $q\colon G \to G/H$ ein Faserbündel mit Faser H ist.

(a) Es gibt eine offene e-Umgebung $U \subseteq G$ mit $V = U \cap H$. Zeigen Sie, dass es eine offene e-Umgebung $S \subseteq R$ gibt mit $S^{-1}S \subseteq U$. Dann ist also auch SV eine offene e-Umgebung in G.

(b) Man zeige für $s_1, s_2 \in S$ und $h_1, h_2 \in H$: Ist $s_1h_1 = s_2h_2$, so ist $s_1 = s_2$ und $h_1 = h_2$. [Es ist $s_2^{-1}s_1 = h_2h_1^{-1} \in (S^{-1}S) \cap H$ und $s_1 = s_2h_2h_1^{-1}$.]

(c) Für jedes $g \in G$ ist $U_g := q(gS) = q(gSV)$ eine offene Umgebung von gH in G/H. Folgern Sie aus (b), dass $\phi_g := q|_{gS}^{U_g}\colon gS \to U_g$ injektiv ist.

(d) Für jede offene Teilmenge $P \subseteq S$ ist $\phi_g(gP) = q(gP) = q(gPV)$ offen in G/H und somit in U_g. Also ist ϕ_g ein Homöomorphismus. Wir definieren $\sigma_g := \phi_g^{-1}\colon U_g \to G$.

(e) Zeigen Sie, dass $q \circ \sigma_g = \mathrm{id}_{U_g}$.

(f) Zeigen Sie, dass $\theta_g\colon q^{-1}(U_g) = gSH \to U_g \times H$, $x \mapsto (q(x), \sigma_g(q(x))^{-1}x)$ ein Homöomorphismus ist.

(g) Ist $V = H$, kann man $S := R$ nehmen und nach (c) springen.

Aufgabe 45. Es sei $\mathbb{H} := \mathbb{R}^4$ mit den Standard-Einheitsvektoren $1 := e_1$, $i := e_2$, $j := e_3$ und $k := e_4$. Weiter sei $\beta\colon \mathbb{H} \times \mathbb{H} \to \mathbb{H}$, $(z, w) \mapsto zw$ die reell bilineare Abbildung, die durch $1e_n = e_n 1 = e_n$ für alle $n \in \{1, 2, 3, 4\}$,

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1, \quad -ji = ij = k, \quad -kj = jk = i, \quad -ik = ki = j$$

festgelegt ist. Also ist $(\mathbb{H}, \beta)$ der Schiefkörper der Quaternionen. Man setzt

$$\overline{z} := x_1 - x_2 i - x_3 j - x_4 k \text{ für } z = x_1 + x_2 i + x_3 j + x_4 k \text{ mit } x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}.$$

Man hat $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$, $\overline{zw} = \overline{w}\,\overline{z}$ und $\overline{z}z \in \mathbb{R}1$. Mit $\mathrm{Re}(x_1 + x_2 i + x_3 j + x_4 k) := x_1$ ist

$$\mathbb{H} \times \mathbb{H} \to \mathbb{R}, \quad (z, w) \mapsto \mathrm{Re}(\overline{z}w)$$

das Standard-Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^4$ und insbesondere $|z| := \sqrt{\overline{z}z} = \|z\|_2$.

(a) Rechnen Sie nach, dass $z^{-1} = \overline{z}$ für alle $z \in \mathbb{S}_3 \subseteq \mathbb{H}$. Folgern Sie, dass die Untergruppe $\mathbb{S}_3 \subseteq \mathbb{H}^\times$ eine topologische Gruppe ist.

(b) Zeigen Sie, dass $\mathbb{S}_1 \subseteq \mathbb{C} = \mathbb{R} + i\mathbb{R} \subseteq \mathbb{H}$ eine Untergruppe von $\mathbb{S}_3$ ist und darin abgeschlossen. Nach Aufgabe 43 ist $\mathbb{S}_3/\mathbb{S}_1$ also Hausdorffsch.

(c) Zeigen Sie, dass $\mathbb{H}$ via $z \cdot w := wz$ für $z \in \mathbb{C}$ und $w \in \mathbb{H}$ ein $\mathbb{C}$-Vektorraum ist und 1, k eine $\mathbb{C}$-Basis. Jede Quaternion lässt sich also in der Form $z_1 + kz_2$ schreiben mit eindeutigen $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Durch Einschränken der Skalarmultiplikation wirkt $\mathbb{S}_1$ auf $\mathbb{H}$ und auf $\mathbb{S}_3$. Zeigen Sie, dass die $\mathbb{S}_1$-Bahnen $\mathbb{S}_1 \cdot w$ mit den Linksnebenklassen $w\,\mathbb{S}_1$ übereinstimmen.

(d) Wir setzen $R := \{s + k\sqrt{1 - |s|^2}\colon s \in \mathbb{D}_2^0\}$ mit der offenen Kreisscheibe $\mathbb{D}_2^0 \subseteq \mathbb{C}$. Zeigen Sie, dass $R\,\mathbb{S}_1$ die offene Teilmenge

$$Q := \{z_1 + kz_2 \in \mathbb{S}_3\colon z_2 \neq 0\}$$

von $\mathbb{S}_3$ ist und die Produktabbildung $p\colon R \times \mathbb{S}_1 \to Q$, $(w, z) \mapsto wz$ stetig und bijektiv ist mit stetiger Umkehrabbildung $Q \to R \times \mathbb{S}_1$,

$$z_1 + kz_2 \mapsto \left(z_1 \frac{|z_2|}{z_2} + k|z_2|, \frac{z_2}{|z_2|}\right) \qquad \text{(mit Brüchen in } \mathbb{C}\text{)}.$$

Nach Aufgabe 44 (g) ist $q\colon \mathbb{S}_3 \to \mathbb{S}_3/\mathbb{S}_1$ ein Faserbündel mit Faser $\mathbb{S}_1$.

Unendlichdimensionale Topologie (SS 2023, Glöckner)
14. Übungsblatt für 06.07.2023

Aufgabe 46. Beweisen Sie in der Situation von Aufgabe 45 Folgendes:

(a) Es ist $q(R) = \mathbb{S}_3/\mathbb{S}_1 \setminus \{q(1)\}$.

(b) Es ist $q(s) = q(1)$ für alle $s \in \mathbb{S}_1$.

(c) Die Abbildung $h\colon \mathbb{D}_2 \to \mathbb{S}_3/\mathbb{S}_1$, $s \mapsto q(s + k\sqrt{1-|s|^2})$ ist stetig und surjektiv und faktorisiert über $p\colon \mathbb{D}_2 \to \mathbb{D}_2/\!/\mathbb{S}_1$, $s \mapsto [s]$ zu einer stetigen Abbildung
$$\phi\colon \mathbb{D}_2/\!/\mathbb{S}_1 \to \mathbb{S}_3/\mathbb{S}_1$$
mit $\phi \circ p = h$.

(d) $h|_{\mathbb{D}_2^0}$ ist injektiv mit Bild $q(R)$.

(e) ϕ ist bijektiv, stetig und ein Homöomorphismus.

Also ist $\mathbb{S}_3/\mathbb{S}_1 \sim \mathbb{D}_2/\!/\mathbb{S}_1 \sim \mathbb{S}_2$.

Aufgabe 47. Sei $I := [0,1]$. Gegeben $k \in \mathbb{N}$ betrachten wir I^k als Zellenkomplex mit den Zellen $e_k :=]0,1[^k$, $e_{k-1} := (\partial I^k) \setminus \{z_0\}$ mit einem $z_0 \in \partial I^k$ und $e_0 := \{z_0\}$. Betrachte I als Zellenkomplex mit den Zellen $e_{0,0} := \{0\}$, $e_{0,1} := \{1\}$ und $e_1 :=]0,1[$. Betrachte $I \times I^k$ als Zellenkomplex mit den kartesischen Produkten der obigen Zellen als Zellen von $I \times I^k$.

(a) Berechnen Sie die Zellen von $I \times I^k$ und geben sie deren Dimension an.

(b) Zeigen Sie, dass $\partial(I^{k+1}) = \partial I \times I^k \,\cup\, I \times (\partial I^k)$ ein Unterkomplex von $I \times I^k$ ist; welche der Zellen sind darin enthalten?

Nun sei X ein Zellenkomplex mit dem n-Gerüst X_n für $n \in \mathbb{N}_0$. Es sei $x_0 \in X_0$ und es seien $\gamma\colon (I^k, \partial I^k) \to (X_k, x_0)$ und $\eta\colon (I^k, \partial I^k) \to (X_k, x_0)$ Morphismen von Raumpaaren. Weiter sei $F\colon I \times I^k \to X$ eine Homotopie relativ ∂I^k von γ nach η.

(c) Zeigen Sie, dass die Abbildung $F|_{\partial I^{k+1}}$ zellulär ist.

(d) Es sei $G\colon I \times I^k \to X$ eine stetige Abbildung derart, dass $F \simeq G$ relativ ∂I^{k+1}. Zeigen Sie, dass G eine Homotopie relativ ∂I^k von γ nach η ist. Zeigen Sie auch: Ist G zellulär, so ist $G(I \times I^k) \subseteq X_{k+1}$.

Eine *punktierte Menge* ist ein Paar (X, x_0) aus einer Menge X und einem Element $x_0 \in X$. Ein Morphismus $f\colon (X, x_0) \to (Y, y_0)$ punktierter Mengen ist eine Abbildung $f\colon X \to Y$ mit $f(x_0) = y_0$. Morphismen punktierter Mengen

$$(X, x_0) \xrightarrow{f} (Y, y_0) \xrightarrow{g} (Z, z_0)$$

heißen *exakt* an (Y, y_0), wenn $f(X) = g^{-1}(\{z_0\})$. Im folgenden betrachten wir ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccccccccc} \{0\} & \to & (A, a_0) & \xrightarrow{f} & (B, b_0) & \xrightarrow{g} & (C, c_0) & \to & \{0\} \\ & & \alpha \downarrow & & \beta \downarrow & & \gamma \downarrow & & \\ \{0\} & \to & (A', a'_0) & \xrightarrow{f'} & (B', b'_0) & \xrightarrow{g'} & (C', c'_0) & \to & \{0\} \end{array}$$

von Morphismen punktierter Mengen derart, dass beide Zeilen überall exakt sind. Insbesondere sind die Abbildungen g und g' surjektiv und es gilt $f^{-1}(\{b_0\}) = \{a_0\}$ sowie $(f')^{-1}(\{b'_0\}) = \{a'_0\}$. Nennen wir eine punktierte Menge (X, x_0) eine Gruppe, so ist gemeint, dass wir auf X eine Gruppenstruktur festhalten und x_0 das Neutralelement ist.

Aufgabe 48. Zeigen Sie:

(a) Sind α und γ injektiv, B und B' Gruppen und ist β ein Gruppen-Homomorphismus, so ist β injektiv.

(b) Sind α und γ surjektiv, B und B' sowie C' Gruppen und β sowie g' Gruppen-Homomorphismen, so ist β surjektiv.

(c) Sind B und B' Gruppen, β ein Gruppen-Homomorphismus, α und γ surjektiv und gibt es für alle $b', b'' \in B'$ mit $g'(b') = g'(b'')$ ein $k \in (g')^{-1}(\{c'_0\})$ mit $\beta'' = \beta' k$ oder $\beta'' = k\beta'$, so ist β surjektiv.