Funktionentheorie

Prof. Dr. Helge Glöckner

9. März 2021

Vorwort

Dieser Text besteht aus den 14 Präsentationen zur Vorlesung "Funktionentheorie" von Prof. Glöckner, die im Wintersemester 2020/21 digital an der Universität Paderborn gehalten wurde (im Format 2 SWS Vorlesung + 1 SWS Übung). Die Präsentationen wurden in ZOOM vorgestellt und dort mündlich durch Kommentare und Kontext ergänzt. Zielgruppe waren Bachelorstudierende der Mathematik und Technomathematik im dritten Semester sowie Studierende in Lehramtsstudiengängen.

Einige Literaturhinweise finden Sie auf Seite 254. Neben den genannten Quellen habe ich sicher bewusst oder unbewusst profitiert von Vorlesungen, die ich selbst zum Thema gehört oder als Assistent betreut habe, von Prof. Dr. H. Mäurer† und Prof. Dr. S. Roch an der TH Darmstadt bzw. TU Darmstadt. Zentrale Quelle für Kapitel 18–21 ist Rudins "Real and Complex Analysis".

Inhaltsverzeichnis

Abbildungen:

Gegenstand der Vorlesung

Für offene Teilmengen $U \subseteq \mathbb{C}$ betrachten wir Funktionen $f: U \to \mathbb{C}$, die an jeder Stelle $z \in U$ **komplex** differenzierbar sind in dem Sinne, dass

$$f'(z) := \lim_{w \to z} \frac{f(w) - f(z)}{w - z} \in \mathbb{C}$$

existiert, für $w \to z$ mit $w \in U \setminus \{z\} \subseteq \mathbb{C}$.

Warum sind komplex differenzierbare Funktionen interessant? u.a.

* Besondere Eigenschaften: z.B. f automatisch beliebig oft diff'bar
* Hilfsmittel zum Studium von Funktionen im Reellen
* Hilfsmittel für Integralberechnungen
* Hilfsmittel für Spektral- und Operatortheorie

Zudem einfacher Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra (für jedes nicht konstante Polynom existiert eine Nullstelle in $\mathbb{C}$)

Es sei $U \subseteq \mathbb{C}$ eine offene Teilmenge.

Definition 1.1

Eine Funktion $f\colon U \to \mathbb{C}$ wird an einer Stelle $z \in U$ **komplex differenzierbar** genannt, wenn der Grenzwert

$$f'(z) := \lim_{w \to z} \frac{f(w) - f(z)}{w - z}$$

in $\mathbb{C}$ existiert, für $w \to z$ mit $w \in U \setminus \{z\} \subseteq \mathbb{C}$. Ist f an jeder Stelle $z \in U$ komplex differenzierbar, so wird die Funktion f **holomorph** genannt. Auf ganz $\mathbb{C}$ definierte holomorphe Funktionen $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ werden **ganze Funktionen** genannt.

Obiger Limes meint: Es soll ein $f'(z) \in \mathbb{C}$ existieren derart, dass

$$\lim_{n \to \infty} \frac{f(z_n) - f(z)}{z_n - z} = f'(z)$$

für jede Folge $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $U \setminus \{z\}$ mit $\lim_{n \to \infty} z_n = z$.

Beispiel 1.2

(a) Jede konstante Funktion $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto c$ ist holomorph (und ganz), mit

$$f'(z) = \lim_{w \to z} \frac{\overbrace{f(w) - f(z)}^{=0}}{w - z} = 0.$$

(b) Die Funktion $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto z$ ist holomorph (und ganz), mit

$$f'(z) = \lim_{w \to z} \frac{\overbrace{f(w) - f(z)}^{w-z}}{w - z} = 1.$$

(c) Da $\frac{1}{w} - \frac{1}{z} = \frac{z-w}{wz}$ (Hauptnenner!), ist die Funktion $f\colon \mathbb{C}^\times \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \frac{1}{z}$ auf $\mathbb{C}^\times := \mathbb{C} \setminus \{0\}$ holomorph mit

$$f'(z) = \lim_{w \to z} \frac{f(w) - f(z)}{w - z} = \lim_{w \to z} -\frac{1}{wz} = -\frac{1}{z^2}.$$

Statt $f'(z)$ schreibt man auch $\frac{df}{dz}(z)$. Nach dem Obigen gilt also

$$\frac{d}{dz}c = 0, \qquad \frac{d}{dz}z = 1 \qquad \text{und} \qquad \frac{d}{dz}\frac{1}{z} = -\frac{1}{z^2}.$$

Lemma 1.3

Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen. Ist $f\colon U \to \mathbb{C}$ an einer Stelle $z \in U$ komplex differenzierbar, so ist f an der Stelle z stetig.

Beweis. Für $w \to z$ gilt

$$f(w) = f(z) + (w - z)\frac{f(w) - f(z)}{w - z} \to f(z) + 0f'(z) = f(z). \quad \square$$

Es gelten Rechenregeln analog zum Reellen:

Satz 1.4

Es seien $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, $z \in U$ und $f\colon U \to \mathbb{C}$ sowie $g\colon U \to \mathbb{C}$ Funktionen, die an der Stelle $z \in U$ komplex differenzierbar sind. Seien zudem $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$. Dann sind auch die folgenden auf U definierten komplexwertigen Funktionen an der Stelle z komplex differenzierbar und habe die gezeigte Ableitung:

(a) $(\lambda f + \mu g)'(z) = \lambda f'(z) + \mu g'(z)$;

(b) $(fg)'(z) = f'(z)g(z) + f(z)g'(z)$ (Produktregel).

Auch Analoga der Quotientenregel und Kettenregel gelten (s.u.)

Beweis. (a) Ergibt sich aus den Rechenregeln für Funktionengrenzwerte (Übung).

(b) Für $w \to z$ gilt

$$\begin{aligned}
\frac{f(w)g(w) - f(z)g(z)}{w - z} \\
&= \frac{f(w)g(w) - f(z)g(w)}{w - z} + \frac{f(z)g(w) - f(z)g(z)}{w - z} \\
&= \frac{f(w) - f(z)}{w - z}\, g(w) + f(z)\, \frac{g(w) - g(z)}{w - z} \\
&\to f'(z)g(z) + f(z)g'(z);
\end{aligned}$$

wir haben benutzt, dass $g(w) \to g(z)$ wegen der Stetigkeit von g an der Stelle z. $\square$

Wendet man die Produktregel auf $z^{n+1} = z^n z$ an, so liefert eine einfache Induktion (Übung):

Beispiel 1.5

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist die Funktion $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto z^n$ ganz mit

$$\frac{d}{dz} z^n = n\, z^{n-1}.$$

In Verbindung mit Beispiel 1.2 (a) und Satz 1.4 (a) folgern wir:

Beispiel 1.6

Jede Polynomfunktion $p\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ist eine ganze Funktion. Sind $n \in \mathbb{N}_0$ und $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$ mit $p(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ für $z \in \mathbb{C}$, so ist

$$p'(z) = \sum_{k=1}^{n} k\, a_k z^{k-1}.$$

Lemma 1.7

Es sei $f\colon U \to \mathbb{C}$ eine Funktion auf einer offenen Menge $U \subseteq \mathbb{C}$. Genau dann ist f an einer Stelle $z \in U$ komplex differenzierbar, wenn für ein $a \in \mathbb{C}$ das "Restglied"

$$R(w) := f(w) - f(z) - a(w - z)$$

in

$$f(w) = f(z) + a(w - z) + R(w) \tag{1}$$

die Bedingung

$$\lim_{w \to z} \frac{R(w)}{w - z} = 0 \tag{2}$$

erfüllt. In diesem Fall ist $a = f'(z)$.

Beweis. Existiert $f'(z)$, so gilt mit $a := f'(z)$

$$\frac{R(w)}{w - z} = \frac{f(w) - f(z)}{w - z} - f'(z) \to 0 \quad \text{für } w \to z.$$

Existiert a mit (2), so stellen wir $f(w) = f(z) + a(w - z) + R(w)$ um zu $f(w) - f(z) = a(w - z) + R(w)$ und erhalten

$$\frac{f(w) - f(z)}{w - z} = a + \frac{R(w)}{w - z} \to a,$$

d.h. f ist an der Stelle z komplex differenzierbar mit $f'(z) = a$. $\square$

Bemerkung 1.8

(a) In (1) wird f durch die komplex affin-lineare Funktion $w \mapsto f(z) + a(w - z)$ approximiert.

(b) Offenbar gilt (2) genau dann, wenn

$$\frac{|R(w)|}{|w - z|} = \left| \frac{R(w)}{w - z} \right| \to 0 \quad \text{für } w \to z. \tag{3}$$

Erinnerung an Analysis 2:

Reelle Differenzierbarkeit

Ist $U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Menge, so wird eine Funktion $f\colon U \to \mathbb{R}^m$ an einer Stelle $z \in U$ **differenzierbar** genannt, wenn eine reell lineare Abbildung $\alpha\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ existiert derart, dass das Restglied

$$R(w) := f(w) - f(z) - \alpha(w - z)$$

in $f(w) = f(z) + \alpha(w - z) + R(w)$ folgende Bedingung erfüllt:

$$\lim_{w \to z} \frac{\|R(w)\|_F}{\|w - z\|_E} = 0. \tag{4}$$

Hierbei sind $\|\cdot\|_E$ und $\|\cdot\|_F$ gegebene Normen auf $\mathbb{R}^n$ bzw. $\mathbb{R}^m$. Die lineare Abbildung $Df(z) := \alpha$ ist eindeutig, denn für $v \in \mathbb{R}^n$ ist $Df(z)(v) = D_v f(z)$ die Richtungsableitung

$$D_v f(z) := \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}(f(z + tv) - f(z)) \in \mathbb{R}^m.$$

Insbesondere ist $Df(z)(e_j) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(z)$ die $j$te partielle Ableitung für $j \in \{1, \ldots, n\}$, mit der Standard-Basis $e_1, \ldots, e_n$ von $\mathbb{R}^n$.

Aus der Analysis 2 ist bekannt:

Kettenregel

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f\colon U \to \mathbb{R}^m$ an der Stelle $z \in U$ differenzierbar. Ist $f(U) \subseteq V$ für eine offene Menge $V \subseteq \mathbb{R}^m$ und $g\colon V \to \mathbb{R}^k$ an der Stelle $f(z)$ differenzierbar, so ist

$$g \circ f\colon U \to \mathbb{R}^k$$

an der Stelle z differenzierbar mit

$$D(g \circ f)(z) = Dg(f(z)) \circ Df(z). \tag{5}$$

Für $v \in \mathbb{R}^n$ erhalten wir also die Richtungsableitung

$$D_v(g \circ f)(z) = Dg(f(z))(D_v f(z)). \tag{6}$$

Man beachte, dass $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$; nehmen wir $n := m := 2$ und $\|(x,y)\|_E := \|(x,y)\|_F := |x+iy|$ für $(x,y) = x+iy \in \mathbb{C} = \mathbb{R}^2$, so können wir von reeller Differenzierbarkeit einer Funktion $f\colon \mathbb{C} \supseteq U \to \mathbb{C}$ an einer Stelle $z \in U$ sprechen.

Beziehung zwischen reeller und komplexer Differenzierbarkeit:

Satz 1.9

Es sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen und $z \in U$. Für $f\colon U \to \mathbb{C}$ sind äquivalent:

(a) f ist an der Stelle z komplex differenzierbar.

(b) f ist an der Stelle z im reellen Sinne differenzierbar und $Df(z)\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ist komplex linear.

(c) f ist an der Stelle z im reellen Sinne differenzierbar und $u(x,y) := \mathrm{Re}(f(x+iy))$, $v(x,y) := \mathrm{Im}(f(x+iy))$ erfüllen an der Stelle z die sogenannten “Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen”

$$\frac{\partial u}{\partial x}(z) = \frac{\partial v}{\partial y}(z) \quad \text{und} \quad \frac{\partial u}{\partial y}(z) = -\frac{\partial v}{\partial x}(z).$$

Es ist dann $Df(z)(w) = f'(z)w$ für alle $w \in \mathbb{C}$.

Beweis. (a)⇒(b): Die Abbildung $\alpha\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $w \mapsto zw$ ist komplex linear und es gilt (1) sowie (3). Also ist f reell differenzierbar an der Stelle z mit $Df(z) = \alpha$.

(b)⇒(a): Sei $f\colon U \to \mathbb{C}$ an der Stelle z reell differenzierbar und $Df(z)$ komplex linear. Dann ist also

$$Df(z)(w) = Df(z)(w1) = wDf(z)(1) = az$$

mit $a := Df(z)(1) \in \mathbb{C}$ und das Restglied $R(w)$ in

$$f(w) = f(z) + Df(z)(w) + R(w) = f(z) + a(w-z) + R(w)$$

erfüllt

$$\lim_{w\to z} \frac{|R(w)|}{|w-z|} = 0.$$

Nach Lemma 1.7 ist f somit an der Stelle z komplex differenzierbar mit $f'(z) = a = Df(z)(1)$.

(b)$\Leftrightarrow$(c): Sei $f=(u,v)$ an der Stelle z reell differenzierbar. Die darstellende Matrix für die $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $Df(z)$ bezüglich der durch $1=(1,0)$ und $i=(0,1)$ gegebenen $\mathbb{R}$-Basis von $\mathbb{C}$ ist

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(z) & \frac{\partial u}{\partial y}(z) \\ \frac{\partial v}{\partial x}(z) & \frac{\partial v}{\partial y}(z) \end{pmatrix}. \tag{7}$$

Nun ist eine reell-lineare Abbildung $\alpha\colon \mathbb{C}\to\mathbb{C}$ genau dann komplex linear, wenn ihre darstellende Matrix bzgl. $1, i$ von der Form

$$\begin{pmatrix} a & -c \\ c & a \end{pmatrix}$$

ist mit geeigneten $a, c\in\mathbb{R}$ (Übung). Vergleich mit (7) zeigt, dass $Df(z)$ genau dann $\mathbb{C}$-linear ist, wenn die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen erfüllt sind an der Stelle z. $\square$

Beispiel 1.10

Die Funktion $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto |z|^2$ ist im reellen Sinne überall differenzierbar (und sogar C^∞), denn es ist $f(x, y) = f(x + iy) = |x + iy|^2 = x^2 + y^2$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$. Jedoch ist f an keiner Stelle $z \neq 0$ komplex differenzierbar, denn

$$u(x, y) := \operatorname{Re} f(x + iy) = x^2 + y^2$$

und

$$v(x, y) := \operatorname{Im} f(x + iy) = 0$$

erfüllen

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}(x, y), \frac{\partial u}{\partial y}(x, y)\right) = (2x, 2y) \neq (0, 0) = \left(\frac{\partial v}{\partial y}(x, y), -\frac{\partial v}{\partial x}(x, y)\right).$$

Satz 1.12 (Kettenregel für komplex differenzierbare Funktionen)

Es seien $f\colon U \to \mathbb{C}$ und $g\colon V \to \mathbb{C}$ Funktionen auf offenen Teilmengen von $\mathbb{C}$. Ist f an der Stelle $z \in U$ komplex differenzierbar, $f(U) \subseteq V$ und ist g an der Stelle $f(z)$ komplex differenzierbar, so ist $g \circ f\colon U \to \mathbb{C}$ an der Stelle z komplex differenzierbar und

$$(g \circ f)'(z) = g'(f(z))f'(z).$$

Beweis. Nach Satz 1.9 sind f und g an der Stelle z bzw. $f(z)$ reell differenzierbar und $Df(z)(w) = f'(z)w$ sowie $Dg(f(z))(w) = g'(f(z))w$ sind komplex linear in $w \in \mathbb{C}$. Nach der Kettenregel ist $g \circ f$ an der Stelle z reell differenzierbar und es ist $D(g \circ f)(z) = Dg(f(z)) \circ Dg(z)$, folglich

$$\begin{aligned} D(g \circ f)(z)(w) &= Dg(f(z))(Df(z)(w)) = g'(f(z))Df(z)(w) \\ &= g'(f(z))f'(z)w \end{aligned}$$

komplex linear in w. Nach Satz 1.9 ist $g \circ f$ also an der Stelle z komplex differenzierbar mit Ableitung $g'(f(z))f'(z)$. $\square$

Ist $U \subseteq \mathbb{C}$ offen und $g\colon U \to \mathbb{C}^\times$ an einer Stelle $z \in U$ komplex differenzierbar, so können wir die Kettenregel auf $1/g = h \circ g$ anwenden mit $h\colon \mathbb{C}^\times \to \mathbb{C}$, $w \mapsto 1/w$ wie in Beispiel 1.2 (c). Ist zudem $f\colon U \to \mathbb{C}$ an der Stelle z komplex differenzierbar, so können wir die Produktregel auf $f/g = f \cdot (1/g)$ anwenden. Dies liefert (Übung):

Satz 1.13 (Quotientenregel)

f/g ist an der Stelle $z \in U$ komplex differenzierbar und

$$(f/g)'(z) = \frac{f'(z)g(z) - f(z)g'(z)}{g(z)^2}.$$

Definition 1.14

Es sei $f\colon U \to \mathbb{C}$ eine Funktion auf einer offenen Teilmenge $U \subseteq \mathbb{C}$. Eine holomorphe Funktion $F\colon U \to \mathbb{C}$ wird **Stammfunktion** für f genannt, wenn $F'(z) = f(z)$ für alle $z \in U$.

Komplexwertige Integrale:

Das Integral einer stetigen Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{C}$, $t \mapsto u(t) + iv(t)$ mit Realteil u und Imaginärteil v ist definiert als

$$\int_a^b f(t)\,dt := \int_a^b u(t)\,dt + i\int_a^b v(t)\,dt;$$

es ist $\mathbb{C}$-linear in f (Übung). Wir benutzen folgende Abschätzung:

Lemma 2.1

Für jede stetige Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ gilt

$$\left|\int_a^b f(t)\,dt\right| \le \int_a^b |f(t)|\,dt.$$

Beweis: Es existiert eine komplexe Zahl z mit $|z| = 1$ derart, dass

$$z\int_a^b f(t)\,dt = \left|\int_a^b f(t)\,dt\right|.$$

Dann ist also

$$\left|\int_a^b f(t)\,dt\right| = z\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b zf(t)\,dt = \int_a^b \mathrm{Re}(zf(t))\,dt$$
$$\leq \int_a^b |zf(t)|\,dt = \int_a^b |f(t)|\,dt.$$

Definition 2.2

Ein **Weg** in einer Teilmenge $U \subseteq \mathbb{C}$ ist eine stetige Funktion $\gamma\colon [a,b] \to U$ mit reellen Zahlen $a < b$. Man nennt $\gamma(a)$ den **Anfangspunkt** des Weges, $\gamma(b)$ seinen **Endpunkt.** Ist $\gamma(a) = \gamma(b)$, wird der Weg **geschlossen** genannt.

Man nennt γ einen C^1**-Weg**, wenn γ stetig differenzierbar ist.

Definition 2.3 (Komplexe Kurvenintegrale)

Es sei $U \subseteq \mathbb{C}$ eine Teilmenge, $f\colon U \to \mathbb{C}$ stetig und $\gamma\colon [a,b] \to U$ ein C^1-Weg in U. Wir definieren das Integral von f längs des Weges γ als

$$\int_\gamma f(\zeta)\,d\zeta := \int_a^b f(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,dt.$$

Beispiel 2.4

Gegeben $z \in \mathbb{C}$, $r > 0$ und eine mindestens auf der Kreislinie $\{\zeta \in \mathbb{C}\colon |\zeta - z| = r\}$ definierte stetige Funktion f schreiben wir

$$\int_{|\zeta - z| = r} f(\zeta)\,d\zeta := \int_\gamma f(\zeta)\,d\zeta$$

mit dem Weg $\gamma\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, $t \mapsto z + re^{it}$, wobei

$$e^{it} = \cos t + i \sin t \quad \text{für } t \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

(Falls Sie $e^z := \sum_{k=0}^{\infty} z^k/k!$ für $z \in \mathbb{C}$ in der Analysis noch nicht gesehen haben, nehmen Sie (1) als Definition von e^{it} !)

Da $\frac{d}{dt} e^{it} = -\sin t + i \cos t = ie^{it}$, ist dann also

$$\int_{|\zeta - z| = r} f(\zeta)\, d\zeta = \int_0^{2\pi} f(\gamma(t))\, \gamma'(t)\, dt = \int_0^{2\pi} f(z + re^{it})\, rie^{it}\, dt.$$

Beispiel 2.5

Es ist

$$\int_{|\zeta - z| = r} \frac{1}{\zeta - z}\, d\zeta = 2\pi i.$$

Nach dem Vorigen ist nämlich

$$\int_{|\zeta - z| = r} \frac{1}{\zeta - z}\, d\zeta = \int_0^{2\pi} \frac{1}{(z + re^{it}) - z}\, rie^{it}\, dt = \int_0^{2\pi} \underbrace{\frac{1}{re^{it}}\, rie^{it}}_{=i}\, dt = 2\pi i.$$

Satz 2.6

Es sei $U \subseteq \mathbb{C}$ eine offene Menge und $f\colon U \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion. Hat f eine Stammfunktion $F\colon U \to \mathbb{C}$, so gilt

$$\int_\gamma f(\zeta)\,d\zeta = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)) \tag{2}$$

für jeden C^1-Weg $\gamma\colon [a,b] \to U$ in U. Insbesondere gilt

$$\int_\gamma f(\zeta)\,d\zeta = 0$$

für jeden geschlossenen C^1-Weg γ in U.

Beweis. Es ist $F'(z) = f(z)$, also $DF(z)(w) = F'(z)w = f(z)w$ für alle $z \in U$ und $w \in \mathbb{C}$. Die Kettenregel der Analysis 2 liefert[1]

$$(F \circ \gamma)'(t) = DF(\gamma(t))(\gamma'(t)) = f(\gamma(t))\gamma'(t).$$

[1] Man kann γ via $\gamma(t) := \gamma(a) + \gamma'(a)(t-a)$ für $t \leq a$, $\gamma(t) := \gamma(b) + \gamma'(b)(t-b)$ für $t \geq b$ zu einer C^1-Funktion auf einem offenen Intervall $]a-\varepsilon, b+\varepsilon[$ fortsetzen.

Mit dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung erhalten wir nun wie gewünscht

$$\begin{aligned}\int_\gamma f(\zeta)\,d\zeta &= \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt = \int_a^b (F\circ\gamma)'(t)\,dt \\ &= [F(\gamma(t))]_a^b = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)).\end{aligned}$$

Beispiel 2.7

Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ und jeden geschlossenen C^1-Weg γ in $\mathbb{C}$ ist

$$\int_\gamma \zeta^n\,d\zeta = 0,$$

denn $z \mapsto \frac{1}{n+1} z^{n+1}$ ist eine Stammfunktion für $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto z^n$.

Beispiel 2.8

Für jede natürliche Zahl $n \geq 2$ und jeden geschlossenen C^1-Weg γ in $\mathbb{C}^\times := \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ist

$$\int_\gamma \frac{1}{\zeta^n}\, d\zeta = 0,$$

denn $z \mapsto -\frac{1}{n-1}\frac{1}{z^{n-1}}$ ist eine Stammfunktion für $\mathbb{C}^\times \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \frac{1}{z^n}$.

Beispiel 2.9

Vorsicht: Die holomorphe Funktion $\mathbb{C}^\times \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \frac{1}{z}$ hat keine auf ganz $\mathbb{C}^\times$ definierte Stammfunktion! Denn wir haben gesehen, dass

$$\int_{|\zeta|=1} \frac{1}{\zeta}\, d\zeta = 2\pi i \neq 0.$$

Auf kleineren offenen Teilmengen $U \subseteq \mathbb{C}^\times$ kann es aber immer noch Stammfunktionen geben (später mehr!)

Die euklidische Norm auf $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ ist gegeben durch

$$\|(x,y)\|_2 = \sqrt{x^2+y^2} = |x+iy|.$$

Die **Weglänge** eines C^1-Wegs $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ ist daher

$$L(\gamma) := \int_a^b \|\gamma'(t)\|_2 \, dt = \int_a^b |\gamma'(t)| \, dt.$$

Kurvenintegrale haben u.a. folgende Eigenschaften:

Lemma 2.10 (Integralabschätzung)

Für jeden C^1-Weg $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ und jede stetige Funktion $f\colon \gamma([a,b]) \to \mathbb{C}$ gilt

$$\left| \int_\gamma f(\zeta) \, d\zeta \right| \leq L(\gamma) \sup_{t \in [a,b]} |f(\gamma(t))| = L(\gamma) \|f\|_\infty .$$

Beweis. Unter Benutzung von Lemma 2.1 erhalten wir

$$\left| \int_\gamma f(\zeta) \, d\zeta \right| = \left| \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t) \, dt \right| \leq \int_a^b |f(\gamma(t))| \, |\gamma'(t)| \, dt$$

$$\leq \|f\|_\infty \int_a^b |\gamma'(t)|\,dt = \|f\|_\infty L(\gamma).$$

Umparametrisieren von Wegen

Wir nennen eine Abbildung $\phi\colon [\alpha,\beta] \to [a,b]$ einen **C^1-Diffeomorphismus**, wenn ϕ eine stetig differenzierbare bijektive Abbildung mit stetig differenzierbarer Umkehrfunktion ist. Dann ist $\phi'(t) \neq 0$ für alle $t \in [\alpha,\beta]$ und somit (da man sonst mit dem Zwischenwertsatz einen Widerspruch bekäme)

$$\begin{aligned} &(\forall t \in [\alpha,\beta]) \qquad \phi'(t) > 0 \quad \textit{oder} \\ &(\forall t \in [\alpha,\beta]) \qquad \phi'(t) < 0. \end{aligned}$$

Im ersten Fall nennt man ϕ **orientierungserhaltend**, im zweiten Fall **orientierungsumkehrend**.

Lemma 2.11 (Umparametrisieren in Wegintegralen)

Es sei $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ ein C^1-Weg, $f\colon \gamma([a,b]) \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion und $\phi\colon [\alpha,\beta] \to [a,b]$ ein C^1-Diffeomorphismus. Ist ϕ orientierungserhaltend, so gilt

$$\int_{\gamma\circ\phi} f(\zeta)\,d\zeta = \int_\gamma f(\zeta)\,d\zeta.$$

Ist ϕ orientierungsumkehrend, so ist

$$\int_{\gamma\circ\phi} f(\zeta)\,d\zeta = -\int_\gamma f(\zeta)\,d\zeta.$$

Beweis. Ist ϕ orientierungserhaltend, so ist $\phi(\alpha) = a$ und $\phi(\beta) = b$. Die Substitution $s = \phi(t)$, $ds = \phi'(t)\,dt$ liefert

$$\begin{aligned}\int_{\gamma\circ\phi} f(\zeta)\,d\zeta &= \int_\alpha^\beta f(\gamma(\phi(t)))\,\gamma'(\phi(t))\phi'(t)\,dt \\ &= \int_a^b f(\gamma(s))\,\gamma'(s)\,ds = \int_\gamma f(\zeta)\,d\zeta.\end{aligned}$$

Ist ϕ orientierungsumkehrend, so ist $\phi(\alpha) = b$ und $\phi(\beta) = a$, also analog zum Vorigen

$$\int_{\gamma\circ\phi} f(\zeta)\, d\zeta = \int_b^a f(\gamma(s))\,\gamma'(s)\, ds = -\int_a^b f(\gamma(s))\,\gamma'(s)\, ds = -\int_\gamma f(\zeta)\, d\zeta.$$

Beispiel 2.12

Ist $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ ein Weg, so definieren wir den **umgekehrten Weg** als

$$\gamma^- : [a,b] \to \mathbb{C}, \quad t \mapsto \gamma(b-(t-a)).$$

Für jeden C^1-Weg $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ und jede stetige Funktion $f : \gamma([a,b]) \to \mathbb{C}$ gilt nach Lemma 2.11

$$\int_{\gamma^-} f(\zeta)\, d\zeta = -\int_\gamma f(\zeta)\, d\zeta.$$

Lemma 2.13 (Zerlegen in Teilintegrale)

Es sei $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ ein C^1-Weg und $f\colon \gamma([a,b]) \to \mathbb{C}$ stetig. Für jedes $x \in]a,b[$ gilt dann

$$\int_\gamma f(\zeta)\,d\zeta = \int_{\gamma|_{[a,x]}} f(\zeta)\,d\zeta + \int_{\gamma|_{[x,b]}} f(\zeta)\,d\zeta. \tag{3}$$

Beweis. Es ist

$$\begin{aligned}\int_\gamma f(\zeta)\,d\zeta &= \int_a^b f(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,dt \\ &= \int_a^x f(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,dt + \int_x^b f(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,dt\end{aligned}$$

gleich der rechten Seite von (3). □

Lemma 2.14 (Linearität)

Für jeden C^1-Weg $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C}$, alle stetigen Funktionen $f, g\colon \gamma([a,b]) \to \mathbb{C}$ und alle $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ ist

$$\int_\gamma (\lambda f(\zeta) + \mu g(\zeta))\, d\zeta = \lambda \int_\gamma f(\zeta)\, d\zeta + \mu \int_\gamma g(\zeta)\, d\zeta.$$

Beweis. Für jedes $t \in [a,b]$ ist
$\big(\lambda f(\gamma(t)) + \mu g(\gamma(t))\big)\gamma'(t) = \lambda f(\gamma(t))\gamma'(t) + \mu g(\gamma(t))\gamma'(t)$.
Integrieren über $t \in [a,b]$ liefert die Behauptung. $\square$

Definition 2.15

Ein Weg $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ heißt **stückweise C^1**, wenn es eine Zerlegung $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ derart gibt, dass $\gamma|_{[t_{j-1},t_j]}$ für alle $j \in \{1,\ldots,n\}$ ein C^1-Weg ist.

Für eine stetige Funktion $f\colon \gamma([a,b]) \to \mathbb{C}$ setzt man dann

$$\int_\gamma f(\zeta)\, d\zeta := \sum_{j=1}^{n} \int_{\gamma|_{[t_{j-1},t_j]}} f(\zeta)\, d\zeta.$$

Das Kurvenintegral ist wohldefiniert, da es nach Lemma 2.13 bei Verfeinerungen der Zerlegung unverändert bleibt; zu je zwei Zerlegungen gibt es stets eine gemeinsame Verfeinerung.

Die Weglänge eines stückweisen C^1-Wegs wie zuvor ist definiert als

$$L(\gamma) := \sum_{j=1}^{n} \int_{t_{j-1}}^{t_j} |\gamma'(t)| \, dt,$$

unter Benutzung von $\gamma|_{[t_{j-1},t_j]}$ im $j$ten Summanden.

Die heute diskutierten Ergebnisse (Satz 2.6, Beispiele 2.7, 2.8 und 2.12 sowie die Lemmata 2.10, 2.11, 2.12, 2.13 und 2.14) bleiben gültig, wenn man C^1-Wege durch stückweise C^1-Wege ersetzt.

Ist beispielsweise $f\colon U \to \mathbb{C}$ stetig und hat eine Stammfunktion F auf der offenen Menge $U \subseteq \mathbb{C}$, so gilt für jeden stückweise stetig differenzierbaren Weg $\gamma\colon [a,b] \to U$ wie zuvor

$$\int_\gamma f(\zeta)\,d\zeta = \sum_{j=1}^n \int_{\gamma|_{[t_{j-1},t_j]}} f(\zeta)\,d\zeta = \sum_{j=1}^n (F(\gamma(t_j)) - F(\gamma(t_{j-1})))$$
$$= F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)).$$

Hintereinanderhängen von Wegen

Sind $\gamma\colon [a,b] \to U$ und $\eta\colon [c,d] \to U$ stückweise C^1-Wege in einer Teilmenge $U \subseteq \mathbb{C}$ mit

$$\gamma(b) = \eta(c),$$

so ist auch $\gamma \oplus \eta\colon [a, b+(d-c)] \to U$,

$$t \mapsto \begin{cases} \gamma(t) & \text{wenn } t \in [a,b]; \\ \eta(c+(t-b)) & \text{wenn } t \in [b, b+(d-c)] \end{cases}$$

ein stückweiser C^1-Weg. Man nennt $\gamma \oplus \eta$ den **zusammengesetzten Weg**. Stimmt der Endpunkt $\gamma(b)$ mit dem Anfangspunkt $\eta(c)$ überein, so nennt man die Wege γ und η auch **komponierbar**.

Lemma 1.16 (Integrale über zusammengesetzte Wege)

Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ eine Teilmenge. Sind γ und η stückweise C^1-Wege in U, die komponierbar sind, so ist auch der Weg $\gamma \oplus \eta$ stückweise C^1 und es gilt

$$\int_{\gamma\oplus\eta} f(\zeta)\, d\zeta = \int_\gamma f(\zeta)\, d\zeta + \int_\eta f(\zeta)\, d\zeta \tag{4}$$

für jede stetige Funktion $f\colon U \to \mathbb{C}$.

Beweis. Nach Lemma 2.13 ist

$$\int_{\gamma\oplus\eta} f(\zeta)\, d\zeta = \int_{(\gamma\oplus\eta)|_{[a,b]}} f(\zeta)\, d\zeta + \int_{(\gamma\oplus\eta)|_{[b,b+d-c]}} f(\zeta)\, d\zeta. \tag{5}$$

Hierbei ist $(\gamma \oplus \eta)|_{[a,b]} = \gamma$ und das Integral über $(\gamma \oplus \eta)|_{[b,b+(d-c)]} = \eta(\cdot + c - b)$ stimmt nach Lemma 2.11 mit dem entsprechenden Integral über η überein. Die rechten Seiten von (4) und (5) sind also gleich. $\square$

Beispiel 2.17

Ein stückweise stetig differenzierbarer Weg γ und der umgekehrte Weg γ^- sind immer komponierbar und es gilt

$$\int_{\gamma\oplus\gamma^-} f(\zeta)\,d\zeta = \int_\gamma f(\zeta)\,d\zeta + \underbrace{\int_{\gamma^-} f(\zeta)\,d\zeta}_{=-\int_\gamma f(\zeta)\,d\zeta} = 0$$

für jede stetige Funktion $f\colon \gamma([a,b]) \to \mathbb{C}$.

Notationen. Gegeben $z, w \in \mathbb{C}$ ist

$$\gamma_{z,w}\colon [0,1] \to \mathbb{C}, \quad t \mapsto z + t(w-z)$$

ein C^1-Weg mit $\gamma_{z,w}(0) = z$ und $\gamma_{z,w}(1) = w$. Gegeben nicht kollineare Punkte $a, b, c \in \mathbb{C}$ schreiben wir

$$\Delta(a,b,c) := \{a + t(b-a) + s(c-a)\colon s,t \in [0,1], s+t \leq 1\} \quad (1)$$

für das von a, b, c aufgespannte Dreieck. Dann ist

$$\gamma_{a,b,c} := \gamma_{a,b} \oplus \gamma_{b,c} \oplus \gamma_{c,a} \quad (2)$$

ein stückweise stetig differenzierbarer, geschlossener Weg, der den Rand $\partial\Delta(a,b,c)$ durchläuft. Für eine stetige Funktion $f\colon \partial\Delta(a,b,c) \to \mathbb{C}$ ist

$$\int_{\gamma_{a,b,c}} f(\zeta)\,d\zeta = \int_{\gamma_{a,b}} f(\zeta)\,d\zeta + \int_{\gamma_{b,c}} f(\zeta)\,d\zeta + \int_{\gamma_{c,a}} f(\zeta)\,d\zeta; \quad (3)$$

dieses Integral bleibt unverändert bei zyklischen Vertauschungen von (a,b,c); Vorzeichenwechsel bei Vertauschen zweier Ecken (Ü).

Wir definieren $\Delta(a, b, c)$ und $\gamma_{a,b,c}$ ebenso durch (1) und (2), wenn a, b, c kollinear sind; dann gilt wieder (3) und es ist

$$\int_{\gamma_{a,b,c}} f(\zeta)\, d\zeta = 0. \tag{4}$$

Im Falle $a = b = c$ ist nämlich $L(\gamma_{a,b,c}) = 0$ und somit der Betrag des Integrals 0. Sind a, b, c nicht alle verschieden, so dürfen wir notfalls nach Vertauschen annehmen, dass entweder $a = b$ ist (sodass das Integral über $\gamma_{a,b}$ verschwindet und $\gamma_{b,c} = \gamma_{c,a}^{-}$ ist) oder a, b, c alle verschieden sind und b auf der Verbindungsstrecke von a und c liegt. Im letzteren Fall ist $b = a + t(c - a)$ für ein $t \in]0, 1[$, somit entstehen $\gamma_{a,b}$ und $\gamma_{b,c}$ durch orientierungserhaltendes Umparametrisieren aus $\gamma_{a,c}|_{[0,t]}$ und $\gamma_{a,c}|_{[t,1]}$ und können als Integrationswege durch diese ersetzt werden; die drei Integrale in (3) heben sich daher weg (Details: Übung).

Satz 3.1 (Lemma von Goursat)

Es sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, $z_0 \in U$ und $f\colon U \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion derart, dass $f|_{U\setminus\{z_0\}}$ holomorph ist. Dann gilt

$$\int_{\gamma_{a,b,c}} f(\zeta)\, d\zeta = 0 \tag{5}$$

für alle $a, b, c \in U$ mit $\Delta(a, b, c) \subseteq U$.

Kurvenintegrale über Ränder von in U gelegenen Dreiecken verschwinden also.

Beweis. Sind a, b, c kollinear, gilt die Aussage wegen (4). Seien nun a, b, c nicht kollinear.

Fall 1. Sei zunächst $U = \mathbb{C}$ und $f(z) = mz + w$ eine affin-lineare Funktion mit $m, w \in \mathbb{C}$. Dann definiert $F(z) := \frac{m}{2}z^2 + wz$ eine Stammfunktion für f und folglich gilt (5) für den geschlossenen Weg $\gamma_{a,b,c}$.

Fall 2. Sei $z_0 \notin \Delta(a, b, c)$. Für einen Widerspruchsbeweis nehmen wir an, es sei

$$K := \left| \int_{\gamma_{a,b,c}} f(\zeta)\, d\zeta \right| > 0.$$

Es sei a', b' und c' der Mittelpunkt der Verbindungsstrecke von b und c, bzw. a und c, bzw. a und b. Dann sind die Dreiecke $\Delta(a, c', b')$, $\Delta(c', b, a')$, $\Delta(b', c', a')$ und $\Delta(b', a', c)$ ähnlich zu $\Delta_0 := \Delta(a, b, c)$ und entstehen (von Verschiebungen und Drehungen abgesehen) aus $\Delta(a, b, c)$ durch Schrumpfen mit dem Streckfaktor 1/2; ihre Randkuren haben also Länge $\frac{1}{2} L(\gamma_{a,b,c})$ und ihr Durchmesser ist $\frac{1}{2} \operatorname{diam}(\Delta(a, b, c))$ (siehe Abbildung 1). Da sich die Kurvenintegrale über die Teilwege im Inneren wegheben, ist

$$\int_{\gamma_{a,b,c}} f(\zeta)\, d\zeta$$

gleich der Summe der vier Integrale von f längs $\gamma_{a,c',b'}$, $\gamma_{c',b,a'}$, $\gamma_{b',c',a'}$ und $\gamma_{b',a',c}$. Für einen dieser Wege, γ_1, ist somit

$$\left|\int_{\gamma_1} f(\zeta)\, d\zeta\right| \geq K/4.$$

Sei $\gamma_0 := \gamma_{a,b,c}$ und Δ_1 das von γ_1 umlaufende Dreieck. Induktiv findet wir zu Δ_0 ähnliche Dreiecke

$$\Delta_0 \supseteq \Delta_1 \supseteq \Delta_2 \supseteq$$

mit $\operatorname{diam}(\Delta_n) = 2^{-n} \operatorname{diam}(\Delta_0)$, $L(\gamma_n) = 2^{-n} L(\gamma_0)$ und

$$\left|\int_{\gamma_n} f(\zeta)\, d\zeta\right| \geq K/4^n, \qquad (6)$$

wobei γ_n wie zuvor den Rand $\partial\Delta_n$ umläuft. Nach dem Schachtelungsprinzip ist

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}_0} \Delta_n = \{z\}$$

eine einpunktige Menge. Nun gilt

$$f(w) = f(z) + f'(z)(w - z) + R(w)$$

mit $\lim_{w \to z} \frac{R(w)}{w-z} = 0$. Es existiert ein $\varepsilon > 0$ derart, dass die offene Kreisscheibe

$$B_\varepsilon(z) := \{w \in \mathbb{C} \colon |w - z| < \varepsilon\}$$

in U enthalten ist. Nach Verkleinern von ε gilt zudem

$$|R(w)| \leq \frac{K}{2L(\gamma_0)\operatorname{diam}(\Delta_0)}|w - z| \quad \text{für alle } w \in B_\varepsilon(z).$$

Sei n so groß, dass $\operatorname{diam}(\Delta_n) < \varepsilon$. Da $z \in \Delta_n$, ist dann $\Delta_n \subseteq B_\varepsilon(z)$, folglich

$$\begin{aligned}
\left|\int_{\gamma_n} f(\zeta)\, d\zeta\right| &\leq \underbrace{\left|\int_{\gamma_n} f(z) + f'(z)(\zeta - z)\, d\zeta\right|}_{=0} + \left|\int_{\gamma_n} R(\zeta)\, d\zeta\right| \\
&\leq L(\gamma_n)\|R|_{\partial\Delta_n}\|_\infty \\
&\leq 2^{-n}L(\gamma_0)\frac{K}{2L(\gamma_0)\operatorname{diam}(\Delta_0)}\operatorname{diam}(\Delta_n)
\end{aligned}$$

$$= 2^{-n}L(\gamma_0)\frac{K}{2L(\gamma_0)\,\mathrm{diam}(\Delta_0)}2^{-n}\,\mathrm{diam}(\Delta_0) = \frac{1}{2}4^{-n}K < 4^{-n}K,$$

im Widerspruch zu (6). Das zweite Integral verschwindet hierbei nach Fall 1.

Fall 3. Sei $z_0 \in \Delta(a,b,c)$. Ist $z_0 \notin \{a,b,c\}$, also z_0 keine Ecke des Dreiecks, so liegt z_0 im Inneren des Dreiecks oder auf einer Seite. Im ersten Fall kann man das Dreieck als Vereinigung dreier Teildreiecke mit Ecke z_0 schreiben derart, dass Kurvenintegrale längs $\partial\Delta(a,b,c)$ gleich der Summe der Kurvenintegrale längs deren drei Ränder sind (siehe Abbildung 2). Im zweiten Fall gilt Analoges mit zwei Teildreiecken (siehe Abbildung 3). Es genügt daher, anzunehmen, dass $z_0 \in \{a,b,c\}$. Da sich bei Vertauschungen höchstens ein Faktor -1 ergibt, dürfen wir annehmen, dass $z_0 = c$. Setzen wir

$$c_s := b + s(c-b) \;\text{ für } s \in [0,1],$$

so ist $z_0 = c \notin \Delta(a,b,c_s)$ für alle $s \in [0,1[$ (vgl. Abbildung 4), also

$$\int_{\gamma_{a,b,c_s}} f(\zeta)\, d\zeta = 0 \quad \text{für alle } s \in [0,1[$$

nach Fall 2. Nun ist für alle $s \in [0,1]$

$$\int_{\gamma_{a,b,c_s}} f(\zeta)\, d\zeta = \int_{\gamma_{a,b}} f(\zeta)\, d\zeta + \int_{\gamma_{b,c_s}} f(\zeta)\, d\zeta + \int_{\gamma_{c_s,a}} f(\zeta)\, d\zeta,$$

wobei das zweite Integral auf der rechten Seite gleich

$$\int_0^1 f(b + t(c_s - b))(c_s - b)\, dt = \int_0^1 f(b + ts(c-b))s(c-b)\, dt$$

ist und das dritte gleich

$$\int_0^1 f(c_s + t(a - c_s))(a - c_s)\, dt$$

$$= \int_0^1 f(b + s(c-b) + t(a - b - s(c-b)))(a - b - s(c-b))\, dt;$$

beides sind stetige Funktionen von $s \in [0,1]$, nach dem Satz über die Stetigkeit parameterabhängiger Integrale (da der Integrand eine stetige Funktion von $(s,t) \in [0,1] \times [0,1]$ ist).

Also ist

$$\int_{\gamma_{a,b,c}} f(\zeta)\, d\zeta = \int_{\gamma_{a,b,c_1}} f(\zeta)\, d\zeta = \lim_{s\to 1} \int_{\gamma_{a,b,c_s}} f(\zeta)\, d\zeta = 0. \quad \square$$

Definition 4.1

Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ eine Teilmenge. Wir nennen U **sternförmig** bezüglich einem Punkt $z \in U$, wenn für jedes $w \in U$ die Verbindungsstrecke von z und w ganz in U liegt, also

$$z + t(w - z) \in U \quad \text{für alle } t \in [0, 1].$$

Existiert ein $z \in U$ derart, dass U bezüglich z sternförmig ist, so nennen wir U **sternförmig**. Ist U sternförmig und offen, so nennt man U ein **Sterngebiet** (vgl. Abbildung 5).

4.2 Beispiele. (a) Eine Teilmenge $U \subseteq \mathbb{C}$ heißt **konvex**, wenn sie mit je zwei Punkten auch deren Verbindungsstrecke enthält. Jede nicht-leere konvexe Teilmenge $U \subseteq \mathbb{C}$ ist sternförmig. Jede offene Kreisscheibe $B_\varepsilon(z) \subseteq \mathbb{C}$ ist konvex, also auch sternförmig.

(b) Die "geschlitzte Ebene" $\mathbb{C}\setminus]-\infty,0]$ ist sternförmig bezüglich des Punkts 1 (also ein Sterngebiet). Allgemeiner:

(c) Entfernen eines Halbstrahls: Sind $a \neq z$ zwei komplexe Zahlen, so ist die Menge

$$\mathbb{C} \setminus \{a + t(w - a) \colon t \geq 1\}$$

sternförmig bezüglich a, also ein Sterngebiet (siehe Abbildung 6).

Satz 4.3 (Stammfunktionen auf Sterngebieten)

Ist $U \subseteq \mathbb{C}$ ein Sterngebiet und $f\colon U \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion, so existiert eine holomorphe Funktion $F\colon U \to \mathbb{C}$ derart, dass $F' = f$. Die Schlussfolgerung gilt ebenso, wenn $f\colon U \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion ist und

$$\int_{\gamma_{a,b,c}} f(\zeta)\, d\zeta = 0$$

für alle $a, b, c \in U$ mit $\Delta(a, b, c) \subseteq U$.

Nach dem Lemma von Goursat erfüllt jede holomorphe Funktion die zweite Bedingung, so dass es genügt, diesen Fall zu beweisen.

Beweis. Sei U sternförmig bezüglich $a \in U$. Wir definieren

$$F(z) := \int_{\gamma_{a,z}} f(\zeta)\, d\zeta \quad \text{für } z \in U.$$

Gegeben $z \in U$ ist $B_\varepsilon(z) \subseteq U$ für ein $\varepsilon > 0$. Für $w \in B_\varepsilon(z)$ ist wegen $\gamma_{w,a} = \gamma_{a,w}^-$

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\gamma_{a,z,w}} f(\zeta)\, d\zeta = \int_{\gamma_{a,z}} f(\zeta)\, d\zeta + \int_{\gamma_{z,w}} f(\zeta)\, d\zeta + \int_{\gamma_{w,a}} f(\zeta)\, d\zeta \\ &= F(z) - F(w) + \int_{\gamma_{z,w}} f(\zeta)\, d\zeta, \end{aligned}$$

somit im Falle $w \neq z$

$$\begin{aligned} \frac{F(w) - F(z)}{w - z} &= \frac{1}{w - z} \int_{\gamma_{z,w}} f(\zeta)\, d\zeta \\ &= \frac{1}{w - z} \int_0^1 f(z + t(w - z))(w - z)\, dt \\ &= \int_0^1 f(z + t(w - z))\, dt = h(w) \ \text{mit} \end{aligned}$$

$$h\colon B_\varepsilon(z) \to \mathbb{C}, \quad w \mapsto \int_0^1 f(z + t(w-z))\, dt.$$

Da der Integrand in $(w, t) \in B_\varepsilon(z) \times [0, 1]$ stetig ist, ist h stetig nach dem Satz über die Stetigkeit parameterabhängiger Integrale. Für $w \to z$ folgt somit

$$\begin{aligned} \frac{F(w) - F(z)}{z - w} &= h(w) \to h(z) = \int_0^1 f(z + t(z-z))\, dt \\ &= \int_0^1 f(z)\, dt = f(z). \end{aligned}$$

Also ist $F'(z) = f(z)$. $\square$.

Folgerung 4.4 (Cauchyscher Integralsatz für Sterngebiete)

Ist $U \subseteq \mathbb{C}$ ein Sterngebiet und $f\colon U \to \mathbb{C}$ holomorph, so gilt

$$\int_\gamma f(\zeta)\, d\zeta = 0$$

für jeden geschlossenen, stückweise stetig differenzierbaren Weg γ in U.

Beweis. Dies gilt nach Satz 2.6, da f nach Satz 4.3 eine Stammfunktion besitzt. $\square$

Beispiel 4.5

Für alle $a \in \mathbb{C}$, $r > 0$ und $z \in B_r(a)$ ist

$$\int_{|\zeta-a|=r} \frac{1}{\zeta - z}\, d\zeta = 2\pi i.$$

Ist $z = a$, so wissen wir dies aus Beispiel 2.5. Ist $z \neq a$, so wählen wir ein $s > 0$ so klein, dass die abgeschlossene Kreisscheibe

$$\overline{B}_s(z) = \{w \in \mathbb{C} \colon |w - z| \leq s\}$$

in $B_r(a)$ enthalten ist. Dann ist

$$\begin{aligned} &\int_{|\zeta-a|=r} \frac{1}{\zeta - z}\, d\zeta - \int_{|\zeta-z|=s} \frac{1}{\zeta - z}\, d\zeta \\ &\qquad = \int_{\gamma_1} \frac{1}{\zeta - z}\, d\zeta + \int_{\gamma_2} \frac{1}{\zeta - z}\, d\zeta \qquad (7) \end{aligned}$$

mit stückweise stetig differenzierbaren Wegen γ_1 und γ_2 wie in Abbildung 7 gezeigt (da sich die Integrale über die zusätzlichen Teilwege aufheben). Nun liegt γ_1 ganz im Sterngebiet

$$\mathbb{C} \setminus \{z + t(a - z) \colon t \geq 1\}$$

und γ_2 liegt im Sterngebiet $\mathbb{C} \setminus \{a + t(z - a) \colon t \geq 1\}$. Die Integrale längs γ_1 und γ_2 in (7) verschwinden daher und somit ist die rechte Seite 0, folglich

$$\int_{|\zeta - a| = r} \frac{1}{\zeta - z} \, d\zeta = \int_{|\zeta - z| = s} \frac{1}{\zeta - z} \, d\zeta = 2\pi i.$$

Satz 5.1 (Cauchysche Integralformel für Kreisscheiben)

Es seien $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f\colon U \to \mathbb{C}$ holomorph und $z_0 \in U$ sowie $r > 0$ derart, dass $\overline{B}_r(z_0) \subseteq U$. Dann gilt

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - z_0| = r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta \quad \text{für alle } z \in B_r(z_0).$$

Beweis. Es existiert ein $\varepsilon > 0$ derart, dass $\overline{B}_r(z_0) + B_\varepsilon(0) \subseteq U$, wobei $\overline{B}_r(z_0) + B_\varepsilon(0) = B_{r+\varepsilon}(z_0)$ (Übung). Nach Ersetzen von U durch letztere Menge dürfen wir also annnehmen, dass U konvex und somit ein Sterngebiet ist. Sei $z \in B_r(z_0)$. Die Funktion

$$g\colon U \to \mathbb{C}, \quad w \mapsto \begin{cases} \frac{f(w)-f(z)}{w-z} & \text{wenn } w \neq z; \\ f'(z) & \text{wenn } w = z \end{cases}$$

ist holomorph (also auch stetig) auf $U \setminus \{z\}$. Zudem ist sie stetig an der Stelle z (und somit überall stetig), da $g(w) = \frac{f(w)-f(z)}{w-z} \to f'(z) = g(z)$ für $w \to z$ mit $w \in U \setminus \{z\}$.

Nach dem Lemma von Goursat gilt also

$$\int_{\gamma_{a,b,c}} g(\zeta)\,d\zeta = 0$$

für alle $a, b, c \in U$ mit $\Delta(a, b, c) \subseteq U$ und somit hat g eine Stammfunktion $G\colon U \to \mathbb{C}$ nach Satz 4.3. Folglich ist

$$0 = \int_{|\zeta - z_0| = r} g(\zeta)\,d\zeta = \int_{|\zeta - z_0| = r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta - \underbrace{\int_{|\zeta - z_0| = r} \frac{f(z)}{\zeta - z}\,d\zeta}_{= 2\pi i f(z)},$$

unter Benutzung von Beispiel 4.5. Auflösen nach $f(z)$ liefert die Cauchysche Integralformel. □

Wir zeigen, dass für jede holomorphe Funktion f auch f' holomorph und somit f beliebig oft komplex differenzierbar ist. Dies ermöglicht die Cauchysche Integralformel und das folgende Hilfsresultat.

Lemma 6.1

Es sei $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ ein C^1-Weg, $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, $\phi\colon U \to \mathbb{C}$ holomorph, $\psi\colon \gamma([a,b]) \to \mathbb{C}$ stetig und $V \subseteq \mathbb{C}$ eine offene Teilmenge mit $\gamma([a,b]) - V \subseteq U$, also

$$\gamma(t) - z \in U \quad \text{für alle } t \in [a,b] \text{ und } z \in V.$$

Dann ist $g\colon V \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \int_\gamma \phi(\zeta - z)\psi(\zeta)\, d\zeta$ holomorph mit $g'(z) = -\int_\gamma \phi'(\zeta - z)\psi(\zeta)\, d\zeta$.

Beweis. Es ist $g(z) = \int_a^b f(z,t)\,dt$ mit der stetigen Funktion

$$f\colon V \times [a,b] \to \mathbb{C},\ \ (z,t) \mapsto \phi(\gamma(t)-z)\psi(\gamma(t))\gamma'(t).$$

Für festes t ist $f(z,t)$ komplex differenzierbar in z mit Ableitung $-\phi'(\gamma(t)-z)\psi(\gamma(t))\gamma'(t)$; die Richtungsableitung in Richtung $w \in \mathbb{C}$ ist also

$$-\phi'(\gamma(t)-z)\psi(\gamma(t))\gamma'(t)w.$$

Schreiben wir $z = x + iy$, so sind die partiellen Ableitungen nach x bzw. y gleich den Richtungsableitungen in den Richtungen $(1,0) = 1$ und $(0,1) = i$, also gegeben durch

$$-\phi'(\gamma(t)-z)\psi(\gamma(t))\gamma'(t) \ \text{ bzw. } \ -\phi'(\gamma(t)-z)\psi(\gamma(t))\gamma'(t)i$$

und somit stetig in (z,t). Nach dem Satz über Differenzierbarkeit parameter-abhängiger Integrale ist g überall im reellen Sinn differenzierbar mit Richtungsableitung

$$\begin{aligned} Dg(z)(w) &= \int_a^b (D_{(w,0)}f)(z,t)\,dt = -\int_a^b \phi'(\gamma(t)-z)\psi(\gamma(t))\gamma'(t)w\,dt \\ &= -w\int_\gamma \phi'(\zeta - z)\psi(\zeta)\,d\zeta. \end{aligned}$$

Da diese $\mathbb{C}$-linear in w ist, ist g an der Stelle z komplex differenzierbar mit $g'(z) = Dg(z)(1)$ von der behaupteten Form. $\square$

Satz 6.2

Für jede holomorphe Funktion $f\colon U \to \mathbb{C}$ auf einer offenen Teilmenge $U \subseteq \mathbb{C}$ ist auch die Ableitung $f'\colon U \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion.

Beweis. Gegeben $z_0 \in U$ sei $r > 0$ mit $\overline{B}_r(z_0) \subseteq U$. Nach der Cauchyschen Integralformel ist

$$f(z) = \int_{|\zeta - z_0| = r} \frac{1}{\zeta - z} \underbrace{\frac{f(\zeta)}{2\pi i}}_{=:\psi(\zeta)} \, d\zeta = \int_{|\zeta - z_0| = r} \phi(\zeta - z)\psi(\zeta)\, d\zeta$$

für alle $z \in B_r(z_0) =: V$, wobei $\phi\colon \mathbb{C}^\times \to \mathbb{C}$, $z \mapsto 1/z$ holomorph ist mit Ableitung $-1/z^2$. Nach Lemma 6.1 ist also

$$f'(z) = \int_{|\zeta - z_0| = r} \frac{1}{(\zeta - z)^2} \frac{f(\zeta)}{2\pi i}\, d\zeta \quad \text{für alle } z \in B_r(z_0).$$

Anwendung von Lemma 6.1, nun mit $\phi(z) = \frac{1}{z^2}$, zeigt, dass f' auf $B_r(z_0)$ holomorph ist. $\square$

Sei $f\colon U \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion. Da $f^{(1)} := f'$ holomorph ist, können wir die komplexe Ableitung

$$f^{(2)} := f'' := (f')'$$

bilden und diese ist (als Ableitung von f') wieder eine holomorphe Funktion. Induktiv können wir für jedes $k \in \mathbb{N}$ die $k$te komplexe Ableitung

$$f^{(k)} := (f^{(k-1)})'$$

bilden, die wieder eine holomorphe Funktion ist (wobei $f^{(0)} := f$). Statt $f^{(k)}$ schreibt man auch $\frac{d^k f}{dz^k}$.

Beispiel 6.3 (Ableitungen von Monomen)

Für $n \in \mathbb{N}_0$ ist

$$\frac{d^k}{dz^k}(z^n) = \begin{cases} n(n-1)\cdots(n-k+1)z^{n-k} & \text{wenn } k \leq n; \\ 0 & \text{wenn } k > n. \end{cases}$$

Insbesondere ist $\frac{d^n}{dz^n}(z^n) = n!$ und $\frac{d^{n+1}}{dz^{n+1}}(z^n) = 0$.

Beispiel 6.4 (Höhere Ableitungen von $1/z$)

Es gilt

$$\frac{d^k}{dz^k}(1/z) = k!(-1)^k \frac{1}{z^{k+1}}$$

für alle $k \in \mathbb{N}_0$ und $z \in \mathbb{C}^\times$.

Dies ist trivial für $k = 0$. Gilt die Formel für k, so ist auch

$$\begin{aligned} \frac{d^{k+1}}{dz^{k+1}}(1/z) &= \frac{d}{dz}\left(\frac{d^k}{dz^k}(1/z)\right) = \frac{d}{dz}\left(k!(-1)^k \frac{1}{z^{k+1}}\right) \\ &= -(k+1)k!(-1)^k \frac{1}{z^{k+2}} = (k+1)!(-1)^{k+1} \frac{1}{z^{(k+1)+1}}. \end{aligned}$$

Lemma 6.5 (Cauchysche Integralformel für $k$te Ableitung)

Es sei $f\colon U \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion auf einer offenen Teilmenge $U \subseteq \mathbb{C}$. Für jedes $z_0 \in U$ und $r > 0$ mit $\overline{B}_r(z_0) \subseteq U$ gilt dann für jedes $k \in \mathbb{N}_0$

$$f^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{|\zeta - z_0| = r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}}\, d\zeta \quad \text{für alle } z \in B_r(z_0).$$

Beweis. Für $k = 0$ ist dies die Cauchysche Integralformel. Gelte nun für ein $k \in \mathbb{N}_0$

$$f^{(k)}(z) = \int_{|\zeta - z_0| = r} \frac{1}{(\zeta - z)^{k+1}} \underbrace{\frac{k! f(\zeta)}{2\pi i}}_{=:\psi(\zeta)}\, d\zeta = \int_{|\zeta - z_0| = r} \phi(\zeta - z)\psi(\zeta)\, d\zeta$$

für alle $z \in B_r(z_0) =: V$, wobei $\phi\colon \mathbb{C}^\times \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \frac{1}{z^{k+1}}$ holomorph ist mit Ableitung $-\frac{k+1}{z^{k+2}}$. Nach Lemma 6.1 ist dann

$$f^{(k+1)}(z) = \int_{|\zeta - z_0| = r} \frac{k+1}{(\zeta - z)^{k+2}} \frac{k! f(\zeta)}{2\pi i} \, d\zeta \quad \text{für alle } z \in B_r(z_0)$$

von der Form $\frac{(k+1)!}{2\pi i} \int_{|\zeta - z_0| = r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{(k+1)+1}} \, d\zeta$. $\square$

Die folgenden Abschätzungen werden auch "Cauchysche Ungleichungen" genannt.

Folgerung 6.6 (Cauchysche Abschätzungen)

Es sei $f \colon U \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion auf einer offenen Teilmenge $U \subseteq \mathbb{C}$. Für jedes $z \in U$ und $r > 0$ mit $\overline{B}_r(z) \subseteq U$ gilt dann für jedes $k \in \mathbb{N}_0$

$$|f^{(k)}(z)| \leq \frac{k!}{r^k} \sup\{|f(\zeta)| \colon \zeta \in \mathbb{C} \text{ mit } |\zeta - z| = r\}.$$

Beweis. Der Weg $\gamma\colon [0,2\pi] \to \mathbb{C}$, $t \mapsto z + re^{it}$ hat Weglänge $L(\gamma) = 2\pi r$. Wenden wir die Integralabschätzung für komplexe Kurvenintegrale auf die Cauchysche Integralformel für $f^{(k)}(z)$ (mit $z_0 = z$) an, erhalten wir

$$\begin{aligned}
|f^{(k)}(z)| &= \left|\frac{k!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}}\,d\zeta\right| \\
&\leq L(\gamma) \sup_{\zeta\in\gamma([0,2\pi])} \frac{k!}{|2\pi i|}\frac{|f(\zeta)|}{|\zeta - z|^{k+1}} \\
&= 2\pi r\frac{k!}{2\pi}\frac{1}{r^{k+1}} \sup_{\zeta\in\gamma([0,2\pi])} |f(\zeta)|.
\end{aligned}$$

Satz 7.1 (Satz von Liouville)

Jede beschränkte ganze Funktion $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ist konstant.

Beweis. Da f beschränkt ist, ist $f(\mathbb{C})$ eine beschränkte Teilmenge von $\mathbb{C}$, somit

$$M := \sup\{|f(\zeta)|\colon \zeta \in \mathbb{C}\} < \infty.$$

Sei $z \in \mathbb{C}$. Für jedes $r > 0$ ist $\overline{B}_r(z) \subseteq \mathbb{C}$. Die Cauchy-Abschätzung für die erste Ableitung liefert also

$$|f'(z)| \leq \frac{1}{r} \sup\{|f(\zeta)|\colon \zeta \in \mathbb{C} \text{ mit } |\zeta - z| = r\} \leq \frac{M}{r}.$$

Mit $r \to \infty$ folgt $|f'(z)| \leq 0$, also $f'(z) = 0$. Für jedes $z \in \mathbb{C}$ existiert ein C^1-Weg γ von 0 nach z; da f eine Stammfunktion von $f' = 0$ ist, erhalten wir

$$f(z) - f(0) = \int_\gamma f'(\zeta)\, d\zeta = \int_\gamma 0\, d\zeta = 0.$$

Also ist $f(z) = f(0)$ für alle $z \in \mathbb{C}$ und somit f konstant. □

Satz 7.2 (Fundamentalsatz der Algebra)

Jede nicht konstante Polynomfunktion $p\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ hat eine komplexe Nullstelle.

Beweis. Angenommen, es gäbe eine nicht konstante Polynomfunktion $p\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, welche keine Nullstelle besitzt. Da p holomorph ist, wäre dann auch

$$f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto \frac{1}{p(z)}$$

holomorph und somit eine ganze Funktion. Wir zeigen nun, dass f beschränkt ist; nach dem Satz von Liouville ist dann f konstant und somit auch $p = 1/f$ konstant, im Widerspruch zur Annahme. Es gibt ein $n \in \mathbb{N}_0$ und $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$ derart, dass $a_n \neq 0$ und

$$p(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C};$$

da p nicht konstant ist, ist $n \geq 1$. Die Polynomfunktion $q \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$,

$$z \mapsto \sum_{k=0}^{n-1} a_k z^{n-k}$$

hat die Nullstelle 0; es gibt daher ein $\varepsilon > 0$ derart, dass

$$|q(z)| < \frac{|a_n|}{2} \quad \text{für alle } z \in B_\varepsilon(0)$$

und somit

$$|a_n - q(z)| \geq |a_n| - |q(z)| > |a_n|/2.$$

Für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| > 1/\varepsilon$ ist

$$p(z) = z^n \left(a_n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k z^{k-n} \right) = z^n (a_n + q(1/z)),$$

also

$$|p(z)| = |z|^n |a_n + q(1/z)| \geq \frac{1}{\varepsilon^n} \frac{|a_n|}{2}$$

und somit

$$|f(z)| = \frac{1}{|p(z)|} \leq 2\varepsilon^n / |a_n|.$$

Da $\overline{B}_{1/\varepsilon}(0)$ kompakt ist, ist nach dem Satz vom Maximum die stetige Funktion $|f|$ auf dieser Menge beschränkt, also

$$M := \sup\{|f(z)| \colon z \in \overline{B}_{1/\varepsilon}(0)\} < \infty.$$

Nach dem Vorigen ist

$$|f(z)| \leq \max\{M, 2\varepsilon^n/|a_n|\} \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C},$$

also f eine beschränkte Funktion. $\square$

Wir verwenden Notationen wie in §3: Gegeben $z, w \in \mathbb{C}$ betrachten wir den Weg

$$\gamma_{z,w} \colon [0,1] \to \mathbb{C}, \quad t \mapsto z + t(w-z)$$

von z nach w. Gegeben $a, b, c \in \mathbb{C}$ sei

$$\gamma_{a,b,c} := \gamma_{a,b} \oplus \gamma_{b,c} \oplus \gamma_{c,a} \colon [0,3] \to \mathbb{C};$$

dies ist ein geschlossener Weg, der den Rand des Dreiecks $\Delta(a,b,c)$ durchläuft.

Satz 8.1 (Satz von Morera)

Es sei $U \subseteq \mathbb{C}$ eine offene Teilmenge und $f \colon U \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion. Gilt

$$\int_{\gamma_{a,b,c}} f(\zeta)\, d\zeta = 0$$

für alle $a, b, c \in U$ mit $\Delta(a,b,c) \subseteq U$, so ist f holomorph.

Beweis. Gegeben $z_0 \in U$ gibt es ein $\varepsilon > 0$ derart, dass $B_\varepsilon(z_0) \subseteq U$. Nach Ersetzen von U durch $B_\varepsilon(z_0)$ dürfen wir annehmen, dass U konvex (und somit sternförmig) ist. Nach Satz 4.3 hat f eine Stammfunktion $F\colon U \to \mathbb{C}$. Nach Satz 6.2 ist $f = F'$ holomorph. $\square$

Definition 8.2

Es sei $U \subseteq \mathbb{C}$ eine offene Menge und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge stetiger Funktionen $f_n\colon U \to \mathbb{C}$. Sei $f\colon U \to \mathbb{C}$ eine Funktion. Wir sagen, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **konvergiert gleichmäßig auf kompakten Mengen** gegen f, wenn für jede kompakte Teilmenge $K \subseteq U$ die Einschränkungen $f_n|_K$ für $n \to \infty$ gleichmäßig gegen $f|_K$ konvergieren, also $\|f|_K - f_n|_K\|_\infty \to 0$.

Dann ist f stetig: Gegeben $z \in U$ gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit $K := \overline{B}_\varepsilon(z) \subseteq U$. Da $f_n|_K \to f|_K$ gleichmäßig, ist $f|_K$ stetig, also $f|_{B_\varepsilon(z)}$ stetig, also f stetig an der Stelle z.

Satz 8.3

Es sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge holomorpher Funktionen $f_n \colon U \to \mathbb{C}$, die gleichmäßig auf kompakten Mengen gegen eine Funktion $f \colon U \to \mathbb{C}$ konvergiert. Dann ist f holomorph.

Beweis. Seien $a, b, c \in U$ mit $\Delta(a, b, c) \subseteq U$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist f_n holomorph; nach dem Lemma von Goursat gilt also

$$\int_{\gamma_{a,b,c}} f_n(\zeta)\, d\zeta = 0.$$

Nach Lemma 8.5 (einst Lemma 9.18) gilt

$$\int_{\gamma_{a,b,c}} f(\zeta)\, d\zeta = \lim_{n\to\infty} \int_{\gamma_{a,b,c}} f_n(\zeta)\, d\zeta = 0.$$

Nach dem Satz von Morera ist f holomorph. $\square$

Ergänzung 8.4

In der Situation des vorigen Satzes gilt für $n \to \infty$

$$f_n^{(k)} \to f^{(k)}$$

gleichmäßig auf kompakten Mengen, für jedes $k \in \mathbb{N}$.

Beweis. Für jede kompakte Teilmenge $K \subseteq U$ gibt es ein $r > 0$ derart, dass $K + B_{2r}(0) \subseteq U$ (siehe Übung) und somit $L := K + \overline{B}_r(0) \subseteq U$. Die Menge L ist kompakt, gegeben $\varepsilon > 0$ gibt es also ein $N \in \mathbb{N}$ derart, dass

$$\|f|_L - f_n|_L\|_\infty \leq \varepsilon \quad \text{für alle } n \geq N.$$

Für jedes $z \in K$ ist $\overline{B}_r(z) = z + \overline{B}_r(0) \subseteq K + \overline{B}_r(0) = L \subseteq U$, also gilt aufgrund der Cauchyschen Abschätzung für die $k$te Ableitung

$$|f^{(k)}(z) - f_n^{(k)}(z)| \leq \frac{k!}{r^k} \sup\{|f(\zeta) - f_n(\zeta)| \colon |\zeta - z| = r\} \leq \frac{k!}{r^k}\varepsilon.$$

Somit gilt $\|f^{(k)}|_K - f_n^{(k)}|_K\|_\infty \leq \frac{k!}{r^k}\varepsilon$ für alle $n \geq N$, wobei die rechte Seite beliebig klein gemacht werden kann. $\square$

Statt von "gleichmäßiger Konvergenz auf kompakten Mengen" spricht man kurz auch von "kompakter Konvergenz."

Lemma 8.5

Sei $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ ein stetig differenzierbarer Weg und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge stetiger Funktionen $f_n\colon \gamma([a,b]) \to \mathbb{C}$, die gleichmäßig gegen eine stetige Funktion $f\colon \gamma([a,b]) \to \mathbb{C}$ konvergiert. Dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} \int_\gamma f_n(\zeta)\,d\zeta = \int_\gamma f(z)\,d\zeta.$$

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned}\left|\int_\gamma f(\zeta)\,d\zeta - \int_\gamma f_n(\zeta)\,d\zeta\right| \\ &= \left|\int_\gamma (f(\zeta) - f_n(\zeta))\,d\zeta\right| \leq L(\gamma)\|f - f_n\|_\infty \to 0\end{aligned}$$

für $n \to \infty$. □

Wir werden sehen, dass konvergente Potenzreihen auf ihrem Konvergenzkreis holomorphe Funktionen definieren. Umgekehrt lässt sich jede holomorphe Funktion lokal in eine Potenzreihe entwickeln (sogar auf jeder im Definitionsbereich gelegenen Kreisscheibe).

Definition 9.1

Eine Reihe der Form

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

mit Koeffizienten $a_n \in \mathbb{C}$ und $z \in \mathbb{C}$ heißt (komplexe) **Potenzreihe** (mit Entwicklungspunkt 0)

Bemerkung 9.2

(a) Für ein festes $z \in \mathbb{C}$ liefert eine Potenzreihe eine gewöhnliche Zahlenreihe in $\mathbb{C}$.

(b) Für z in einer gegebenen Teilmenge $D \subseteq \mathbb{C}$ können wir eine Potenzreihe auch als eine Funktionenreihe auf D auffassen,

$$\left(D \ni z \mapsto \sum_{k=0}^{n} a_k z^k\right)_{n \in \mathbb{N}_0}$$

und somit z.B. von punktweiser oder gleichmäßiger Konvergenz der Funktionenreihe sprechen.

(c) Potenzreihen mit anderen Entwicklungspunkten lernen wir in Definition 9.12 kennen; sie erfordern keine eigene Theorie.

Lemma 9.3

Konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} a_n w^n$ für eine komplexe Zahl $w \neq 0$, so ist die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^m$ für jedes $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < |w|$ absolut konvergent. Für jede reelle Zahl $0 < r < |w|$ ist die Konvergenz gleichmäßig auf der abgeschlossenen Kreisscheibe $\overline{B}_r(0) \subseteq \mathbb{C}$.

Beweis. Da die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n w^n$ konvergiert, bilden die Summanden $a_n w^n$ eine Nullfolge und somit eine beschränkte Folge; es existiert also ein $M \in [0, \infty[$ derart, dass

$$|a_n|\,|w|^n = |a_n w^n| \leq M \ \text{ für alle } n \in \mathbb{N}_0.$$

Gegeben $r \in]0, |w|[$ betrachten wir

$$f_n \colon \overline{B}_r(0) \to \mathbb{C}, \ \ z \mapsto a_n z^n$$

und die Funktionenreihe $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$. Für $z \in B_r(0)$ hat f_n wegen

$$|f_n(z)| = |a_n|\,|z|^n \leq |a_n| r^n = |a_n|\,|w|^n (r/|w|)^n \leq M(r/|w|)^n$$

Supremumsnorm $\|f_n\|_\infty \leq M(r/|w|)^n$. Da $r/|w| < 1$, ist die geometrische Reihe mit $q = r/|w|$ konvergent und

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|f_n\|_\infty \leq \sum_{n=0}^{\infty} M(r/|w|)^n = \frac{M}{1-(r/|w|)} < \infty.$$

Nach dem Weierstraßschen Konvergenzsatz (siehe Anhang) ist die Funktionenreihe $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ gleichmäßig konvergent und an jeder Stelle z absolut konvergent.

Satz 9.4

Für jede Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ existiert ein $R \in [0,\infty[\cup \{\infty\}$ mit:

- die Potenzreihe konvergiert absolut für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < R$;
- die Potenzreihe divergiert für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| > R$.

Beweis. Sei $R := \sup\{r \in [0,\infty[\colon \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n < \infty\} \in [0,\infty]$. Konvergiert die Potenzreihe an einer Stelle z, so ist $|z| \leq R$ trivial wenn $z = 0$. Ist $z \neq 0$, so ist nach Lemma 9.3 $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n < \infty$ für alle $r \in [0,|z|[$, somit $R \geq \sup[0,|z|[= |z|$. Somit divergiert die Reihe, wenn $|z| > R$. Ist $|z| < R$, so existiert ein $r \in]|z|, R[$ mit $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n < \infty$, so dass also $\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n$ absolut konvergiert. Nach Lemma 9.3 konvergiert auch $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ absolut. $\square$

Bemerkung 9.5

(a) Offenbar ist R eindeutig festgelegt; man nennt R den **Konvergenzradius** der Potenzreihe. Diese ist dann also auf der offenen Kreisscheibe $B_R(0)$ (dem sogenannten **Konvergenzkreis**) konvergent; hierbei setzt man auch im Falle $R = 0$ oder $R = \infty$ $B_R(0) := \{z \in \mathbb{C} \colon |z| < R\}$; es ist also $B_\infty(0) = \mathbb{C}$ und $B_0(0) = \emptyset$.

(b) Nach Lemma 9.3 ist die Potenzreihe auf $\overline{B}_r(0)$ gleichmäßig konvergent für jede reelle Zahl $r > 0$ mit $r < R$. Sie konvergiert daher auch auf jeder kompakten Teilmenge $K \subseteq B_R(0)$ gleichmäßig (ist $K \neq \emptyset$, so ist $r := \max\{|z| \colon z \in K\} < R$ und $K \subseteq \overline{B}_r(0)$).

(c) Jede Potenzreihe mit Entwicklungspunkt 0 ist an der Stelle $z = 0$ konvergent.

(d) Satz 9.4 macht keine Aussage über das Konvergenzverhalten auf dem Rand des Konvergenzkreises. Im Falle $0 < R < \infty$ konvergieren Beispiele von Potenzreihen auf keinen, manchen oder allen Punkten des Randes $\partial B_R(0) = \{z \in \mathbb{C} \colon |z| = R\}$.

Beispiel 9.6

Für alle $a_0, \ldots, a_n$ ist die Polynomfunktion

$$\mathbb{C} \to \mathbb{C}, \;\; z \mapsto \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$$

durch die auf ganz $\mathbb{C}$ konvergente Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ gegeben mit $a_k := 0$ für alle $k > n$.

Die folgenden Potenzreihen sind besonders wichtig für uns.

Beispiel 9.7 (Geometrische Reihe)

Aus der Analysis 1 wissen wir, dass die geometrische Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

für alle $z \in]-1, 1[$ konvergiert (gegen $1/(1-z)$) und für $z = 1$ divergiert; ihr Konvergenzradius ist also 1 und sie konvergiert für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$.

Beispiel 9.8 (Exponentialreihe)

Aus der Analysis 1 wissen wir, dass die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

für alle $z \in \mathbb{R}$ konvergiert. Sie konvergiert also auch für alle $z \in \mathbb{C}$ und wir schreiben

$$e^z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

Die Funktion $\exp\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto e^z$ heißt **komplexe Exponentialfunktion**.

Beispiel 9.9 (Sinus- und Cosinusreihe)

Aus der Analysis 1 wissen wir, dass die Reihen

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n} \quad \text{und} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}$$

für alle $z \in \mathbb{R}$ konvergieren. Sie konvergieren also auch für alle $z \in \mathbb{C}$. Wir nennen

$$\sin\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \;\; z \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}$$

die komplexe Sinusfunktion,

$$\cos\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \;\; z \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}$$

die komplexe Cosinusfunktion.

Satz 9.10

Hat eine Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ einen Konvergenzradius $R > 0$, so ist die Grenzfunktion

$$f\colon B_R(0) \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$$

auf dem Konvergenzkreis holomorph. Weiter gilt für alle $k \in \mathbb{N}_0$

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{d^k}{dz^k}(z^n),$$

d.h. es kann gliedweise differenziert werden. Insbesondere gilt

$$f^{(k)}(0) = k! a_k \text{ für alle } k \in \mathbb{N}_0.$$

Beweis. Die Funktionen $f_n\colon B_R(0) \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \sum_{j=0}^{n} a_j z^j$ sind holomorph und konvergieren für $n \to \infty$ gleichmäßig auf kompakten Mengen gegen f (siehe Bemerkung 9.5 (b)). Die ersten zwei Behauptungen gelten daher nach Satz 8.3 und Ergänzung 8.4.

Da

$$\frac{d^k}{dz^k}\bigg|_{z=0}(z^n) = 0$$

für alle $n \neq k$ und $\frac{d^k}{dz^k}(z^k) = k!$ (siehe Beispiel 6.3), folgt die letzte Behauptung. $\square$

Beispiel 9.11

Nach Satz 9.10 sind insbesondere

$$\exp\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad \sin\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C} \quad \text{und} \quad \cos\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$$

auf ganz $\mathbb{C}$ definierte holomorphe Funktionen, also ganze Funktionen.

Im Gegensatz zur reellen Sinus- und Cosinusfunktion sind die komplexen Sinus- und Cosinusfunktionen **nicht** beschränkte Funktionen (denn wären sie beschränkt, so wären sie als beschränkte ganze Funktionen nach dem Satz von Liouville konstant, was nicht der Fall ist).

Definition 9.12

Eine Reihe der Form $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ mit $a_n \in \mathbb{N}$ und $z, z_0 \in \mathbb{C}$ heißt **Potenzreihe mit Entwicklungspunkt** z_0.

Bemerkung 9.13

Für ein gegebenes $z \in \mathbb{C}$ konvergiert

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n \tag{1}$$

genau dann (bzw. genau dann absolut), wenn dies für

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n w^n$$

der Fall ist mit $w := z - z_0$. Ist R der Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n w^n$, so ist also $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ für alle $z \in B_R(z_0) := \{z \in \mathbb{C} \colon |z-z_0| < R\}$ konvergent und für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z-z_0| > R$ divergent.

Ist $R > 0$ und $g(w) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n w^n$, so konvergiert (1) für $n \to \infty$ auf jeder Kugel $\overline{B}_r(z_0)$ mit $0 < r < R$ gleichmäßig gegen

$$f \colon B_R(z_0) \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = g(z - z_0),$$

also auch gleichmäßig auf kompakten Teilmengen von $B_R(z_0)$. Folglich ist $f = g(\cdot - z_0)$ holomorph, kann gliedweise differenziert werden, und für alle $k \in \mathbb{N}_0$ gilt für alle $z \in B_R(z_0)$ $f^{(k)}(z) = g^{(k)}(z - z_0)$ (per Induktion, unter Benutzung der Kettenregel). Somit gilt:

Satz 9.14

Hat $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ Konvergenzradius $R > 0$, so ist $f \colon B_R(z_0) \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ holomorph und es gilt $f^{(k)}(z_0) = k! a_k$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$.

Beispiel 9.15 (Logarithmusreihe)

Aus der Analysis 1 wissen wir, dass die Potenzreihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}(z-1)^n$$

mit Entwicklungspunkt 1 für alle $z \in]0,2[$ konvergiert (gegen $\ln(z)$); für $z=0$ erhält man die divergierte harmonische Reihe. Der Konvergenzradius ist also 1. Wir definieren die **komplexe Logarithmusfunktion** auf der Kreisscheibe $B_1(1) \subseteq \mathbb{C}$ via

$$\ln\colon B_1(1) \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}(z-1)^n.$$

Bemerkung 9.16

(a) Logarithmusfunktionen auf anderen Definitionsbereichen werden später diskutiert.

(b) Es wird immer aus dem Zusammenhang klar sein, ob mit exp, sin, cos und ln die reellen Exponential-, Sinus-, Cosinus- bzw. Logarithmusfunktionen der Analysis 1 gemeint sind oder die gerade definierten holomorphen Funktionen. In der Literatur werden zur Unterscheidung für die komplexen Funktionen z.T. andere Notationen benutzt (etwa Großbuchstaben, geschwungene Buchstaben).

Satz 9.17

Es sei $f\colon U \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion auf einer offenen Teilmenge $U \subseteq \mathbb{C}$. Ist $z_0 \in U$ und $r \in \,]0, \infty]$ derart, dass $B_r(z_0) \subseteq U$, so hat die Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n$$

Konvergenzradius $R \geq r$ und es gilt

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n \;\text{ für alle } z \in B_r(z_0).$$

Lemma 9.18

Es sei X eine Menge und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Funktionen $f_n\colon X \to \mathbb{C}$, die gleichmäßig gegen eine Funktion $f\colon X \to \mathbb{C}$ konvergiert. Ist $g\colon X \to \mathbb{C}$ eine beschränkte Funktion, so konvergiert gf_n gleichmäßig gegen gf.

Beweis. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$|g(x)f(x) - g(x)f_n(x)| = |g(x)|\,|f(x) - f_n(x)| \le \|g\|_\infty \|f - f_n\|_\infty$$

für alle $x \in X$, somit $\|gf - gf_n\|_\infty \le \|g\|_\infty \|f - f_n\|_\infty \to 0$ für $n \to \infty$. $\square$

Beweis von Satz 9.17. Gegeben $0 < \rho < r$ gilt $\overline{B}_\rho(z_0) \subseteq U$; nach der Cauchyschen Integralformel gilt somit

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - z_0| = \rho} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} \, d\zeta$$

für alle $z \in B_\rho(z_0)$. Für festes $z \in B_\rho(z_0)$ ist

$$\theta := \frac{|z - z_0|}{\rho} < 1$$

und es gilt

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - z_0 - (z - z_0)} = \frac{1}{\zeta - z_0} \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}}$$

für alle $\zeta \in \partial B_\rho(z_0)$, wobei

$$\left|\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right| = \frac{|z-z_0|}{\rho} = \theta < 1.$$

Da die geometrische Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} w^n$ auf $\overline{B}_\theta(0)$ gleichmäßig konvergiert, konvergiert die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right)^n$$

gleichmäßig für $\zeta \in \partial B_\rho(z_0)$, gegen $\frac{1}{1-\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}}$. Nach Lemma 9.18 konvergiert auch die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(\zeta)}{\zeta-z_0} \left(\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right)^n$$

gleichmäßig in $\zeta \in \partial B_\rho(z_0)$, mit Grenzwert

$$\frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} \frac{1}{1 - \frac{z-z_0}{\zeta-z_0}} = \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}.$$

Nach Lemma 8.5 gilt also

$$\begin{aligned}
f(\zeta) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta-z_0|=\rho} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta-z_0|=\rho} \sum_{k=0}^{n} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} \left(\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right)^k d\zeta \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k (z-z_0)^k = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n
\end{aligned}$$

mit $a_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta-z_0|=\rho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{k+1}}\, d\zeta = f^{(k)}(z_0)/k!$, unter Benutzung der Cauchyschen Integralformel für die höheren Ableitungen. □

Die folgenden Begriffe benötigen wir für Teilmengen von $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$.

Definition 10.1

Ein metrischer (oder topologischer) Raum X heißt **wegzusammenhängend**, wenn für alle $z, w \in X$ eine stetige Funktion $\gamma\colon [a, b] \to X$ (mit reellen Zahlen $a < b$) existiert mit $\gamma(a) = z$ und $\gamma(b) = w$.

Nach Umparametrisieren kann man immer $a = 0$, $b = 1$ wählen.

Beispiel 10.2

Jede sternförmige Teilmenge U von $\mathbb{C}$ (oder $\mathbb{R}^n$) ist wegzusammenhängend, denn es gibt ein $z \in U$ derart, dass für jedes $w \in U$ die Verbindungsstrecke von z und w in U liegt, also

$$\gamma_{z,w}\colon [0,1] \to U, \quad t \mapsto z + t(w - z)$$

ein Weg in U ist. Dann ist $\gamma_{z,w}^- \oplus \gamma_{z,w_1}$ ein Weg von $w \in U$ nach $w_1 \in U$.

Wir nennen hierbei eine Teilmenge $U \subseteq X$ eines metrischen (oder topologischen) Raums X wegzusammenhängend, wenn sie mit der induzierten Metrik (bzw. der induzierten Topologie) wegzusammenhängend ist.

Satz 10.3

Ist eine offene Teilmenge U von $\mathbb{C}$ (oder $\mathbb{R}^n$) wegzusammenhängend, so gibt es für alle $z, w \in U$ einen stückweise stetig differenzierbaren Weg $\gamma\colon [a,b] \to U$ mit $\gamma(a) = z$ und $\gamma(b) = w$.

Beweis. Sei $\eta\colon [a,b] \to U$ ein Weg von z nach w. Nach Aufgabe H4 auf Übungsblatt 2 enthält die offene Menge U eine gleichmäßige Umgebung der kompakte Teilmenge $\eta([a,b])$, es gibt also ein $\varepsilon > 0$ derart, dass

$$\bigcup_{x \in \eta([a,b])} B_\varepsilon(x) = \eta([a,b]) + B_\varepsilon(0) \subseteq U.$$

Als stetige Funktion auf einer kompakten Menge ist η gleichmäßig stetig, es existiert also ein $\delta > 0$ derart, dass

$$(\forall s,t\in[a,b])\ \ |s-t|<\delta\ \Rightarrow\ |\eta(s)-\eta(t)|<\varepsilon.$$

Wir wählen m so groß, dass $(b-a)/m<\delta$ und betrachten die äquidistante Unterteilung $a=t_0<t_1<\cdots<t_m=b$ von $[a,b]$ mit

$$t_k:=a+k\frac{b-a}{m}\ \text{ für } k\in\{0,1,\ldots,m\}.$$

Definieren wir $\gamma\colon[a,b]\to\mathbb{C}$ (bzw. $\mathbb{R}^n$) stückweise via

$$\gamma(t):=\eta(t_{k-1})+\frac{t-t_{k-1}}{t_k-t_{k-1}}(\eta(t_k)-\eta(t_{k-1}))$$

für $k\in\{1,\ldots,m\}$ und $t\in[t_{k-1},t_k]$, so erhalten wir einen wohldefinierten, stückweise stetig differenzierbaren Weg von $\gamma(a)=\eta(a)=z$ nach $\gamma(b)=\eta(b)=w$, der den Polygonzug durch die Punkte $\eta(t_0),\ldots,\eta(t_m)$ durchläuft. Für k und t wie zuvor ist wegen $|t_k-t_{k-1}|=(b-a)/m<\delta$

$$\eta(t_k)\in B_\varepsilon(\eta(t_{k-1}));$$

da die Kugel konvex ist, liegt die Verbindungsstrecke von $\eta(t_{k-1})$ und $\eta(t_k)$ in der Kugel; insb. ist $\gamma(t)\in B_\varepsilon(\eta(t_{k-1}))$ $\subseteq\eta([a,b])+B_\varepsilon(0)\subseteq U$. Also ist γ ein Weg in U. $\square$

Definition 10.4

Ein metrischer (oder topologischer) Raum X heißt **unzusammenhängend**, wenn es offene, nicht leere Teilmengen $A, B \subseteq X$ gibt mit $X = A \cup B$ und $A \cap B = \emptyset$. Wenn X nicht unzusammenhängend ist, wird X **zusammenhängend** genannt.

Es ist X also genau dann zusammenhängend, wenn für alle disjunkten offenen Mengen $A, B \subseteq X$ mit $X = A \cup B$ folgt, dass $A = \emptyset$ oder $B = \emptyset$.

Mit der von $\mathbb{R}$ induzierten Metrik/Topologie haben wir:

Beispiel 10.5

Alle Intervalle $I \subseteq \mathbb{R}$ sind zusammenhängend.

Wäre nämlich $I = A \cup B$ mit nicht-leeren, (relativ) offenen Teilmengen $A, B \subseteq I$ mit $A \cap B = \emptyset$, so wäre

$$f \colon I \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{wenn } x \in A; \\ 1 & \text{wenn } x \in B \end{cases}$$

eine stetige Funktion mit $f(I) = \{0, 1\}$.

Nach dem Zwischenwertsatz der Analysis 1 muss $f(I)$ jedoch ein Intervall sein, Widerspruch.[2]

Satz 10.6

Es sei $f\colon X \to Y$ eine stetige Abbildung zwischen metrischen (oder topologischen) Räumen. Ist X zusammenhängend, so ist auch $f(X)$ zusammenhängend.

Beweis. Nach Ersetzen von f durch $f|^{f(X)}\colon X \to f(X)$, $x \mapsto f(x)$ dürfen wir annehmen, dass f surjektiv ist. Wäre Y unzusammenhängend, so gäbe es offene, nicht leere, disjunkte Teilmengen $A, B \subseteq Y$ mit $Y = A \cup B$. Dann wären $f^{-1}(A)$ und $f^{-1}(B)$ offene, nicht leere, disjunkte Teilmengen von X mit $X = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$, im Widerspruch zum Zusammenhang von X. □

[2] Umgekehrt kann man per Hand den Zusammenhang von Intervallen beweisen und daraus den Zwischenwertsatz folgern.

Satz 10.7

Für jede offene Teilmenge U von $\mathbb{C}$ (oder $\mathbb{R}^n$) existiert eine Familie $(U_j)_{j\in J}$ von paarweise disjunkten, nicht leeren, offenen, wegzusammenhängenden Teilmengen $U_j \subseteq U$ mit $U = \bigcup_{j\in J} U_j$.

Beweis. Gegeben $z, w \in U$ schreiben wir $z \sim w$, wenn es einen Weg $\gamma\colon [a, b] \to U$ von z nach w gibt (für gewisse $a < b$). Dann ist $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf U:

Es ist $z \sim z$, da der konstante Weg $[0, 1] \to U$, $t \mapsto z$ Anfangs- und Endpunkt z hat;

Ist $z \sim w$ und γ ein Weg von z nach w, so ist der umgekehrte Weg γ^- ein Weg von w nach z, also $w \sim z$;

Ist $z \sim w$ und $w \sim v$, so gibt es einen Weg γ von z nach w und einen Weg η von w nach v in U. Dann ist der zusammengesetzte Weg $\gamma \oplus \eta$ ein Weg in U von z nach v, also $w \sim v$.

Es sei $J := U/\sim$ die Menge der Äquivalenzklassen $[z] := \{w \in U \colon z \sim w\}$ für $z \in U$. Da J eine Partition von U ist, ist $(C)_{C \in J}$ eine Familie paarweise disjunkter, nicht leerer Teilmengen von U mit $\bigcup_{C \in J} C = U$. Weiter ist jedes $C = [z] \in J$ offen in U. Für jedes $w \in [z]$ gibt es nämlich ein $\varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon(w) \subseteq U$. Da die Kugel $B_\varepsilon(w)$ konvex ist, kann w mit jedem Punkt $v \in B_\varepsilon(w)$ durch einen Weg in der Kugel verbunden werden, so dass insbesondere $w \sim v$. Also ist $B_\varepsilon(w) \subseteq [z]$ und somit $[z]$ offen. $\square$

Die Mengen $C \in U/\sim$ heißen **Wegkomponenten** von U oder auch **Zusammenhangskomponenten**.

Die zweite Sprechweise ist motiviert durch den folgenden Satz.

Satz 10.10

Jeder wegzusammenhängende metrische (oder topologische) Raum ist zusammenhängend. Eine offene Teilmenge U von $\mathbb{C}$ (oder $\mathbb{R}^n$) ist genau dann zusammenhängend, wenn sie wegzusammenhängend ist.

Beweis. Sei X wegzusammenhängend und $X = A \cup B$ mit offenen Teilmengen A und B derart, dass $A \cap B = \emptyset$. Sei $A \neq \emptyset$ und $z \in A$. Für jedes $w \in X$ gibt es einen Weg $\gamma\colon [a, b] \to X$ von z nach w. Dann ist $\gamma([a, b])$ die Vereinigung der Mengen $\gamma([a, b]) \cap A$ und $\gamma([a, b]) \cap B$, welche in $\gamma([a, b])$ relativ offen sind (also offen in der induzierten Topologie). Die zwei Mengen sind zudem disjunkt und es ist $\gamma([a, b]) \cap A \neq \emptyset$, da diese Menge den Punkt z enthält. Nach Beispiel 10.5 und Satz 10.6 ist $\gamma([a, b])$ zusammenhängend. Also muss $\gamma([a, b]) \cap B = \emptyset$ sein und folglich ist $w = \gamma(b) \in A$. Wir haben gezeigt, dass $A = X$, folglich $B = \emptyset$.

Ist eine offene Teilmenge U von $\mathbb{C}$ (oder $\mathbb{R}^n$) nicht wegzusammenhängend, so ist $U \neq \emptyset$. Wir schreiben $U = \bigcup_{C \in U/\sim} C$ als disjunkte Vereinigung von Wegkomponenten, die nach dem vorigen Satz offene Teilmengen von U sind. Da $U \neq \emptyset$, gibt es eine Wegkomponente A. Wegkomponenten sind per Definition wegzusammenhängend. Da U nicht wegzusammenhängend ist, ist $A \neq U$, somit ist

$$B := \bigcup_{C \in U/\sim,\, C \neq A} C \neq \emptyset.$$

Als Vereinigung offener Mengen ist B offen. Weiter ist $U = A \cup B$ und $A \cap B = \emptyset$. Also ist U unzusammenhängend. $\square$

Definition 10.11

Eine Teilmenge $U \subseteq \mathbb{C}$ wird ein **Gebiet** in $\mathbb{C}$ genannt, wenn sie offen, zusammenhängend und nicht leer ist.

Nach Satz 10.10 sind Gebiete also genau die offenen, wegzusammenhängenden, nicht leeren Teilmengen von $\mathbb{C}$ und nach Satz 10.3 können wir je zwei Punkte in einem Gebiet immer innerhalb des Gebiets durch einen stückweise stetig differenzierbaren Weg verbinden.

Beispiel 10.12

Jedes Sterngebiet $U \subseteq \mathbb{C}$ ist nach Beispiel 10.2 wegzusammenhängend, also ein Gebiet. Insbesondere ist jede konvexe, offene, nicht leere Teilmenge von $\mathbb{C}$ ein Gebiet.

Auf Gebieten sind Stammfunktionen von holomorphen Funktionen eindeutig bis auf eine additive Konstante.

Satz 11.1

Es sei $U \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet.

(a) Ist $f: U \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion mit $f' = 0$, so ist f konstant.

(b) Sind $f, g: U \to \mathbb{C}$ holomorphe Funktionen mit $f' = g'$, so gibt es ein $C \in \mathbb{C}$ derart, dass $f(z) = g(z) + C$ für alle $z \in U$.

Beweis. (a) Für alle $z, w \in U$ gibt es einen stückweise stetig differenzierbaren Weg $\gamma: [0,1] \to U$ mit $\gamma(0) = z$ und $\gamma(1) = w$. Dann f eine Stammfunktion der Funktion $f' = 0$ ist, folgt

$$f(w) - f(z) = \int_\gamma f'(\zeta)\, d\zeta = \int_\gamma 0\, d\zeta = 0, \quad \text{also } f(w) = f(z).$$

(b) Da $(f-g)' = f' - g' = 0$, ist die Funktion $f - g$ nach (a) konstant. $\square$

Ist X ein metrischer (oder topologischer) Raum, so nennt man ein Element $x \in X$ einen **isolierten Punkt**, wenn die einpunktige Menge $\{x\}$ in X offen ist. Ist x kein isolierter Punkt von X, so wird x ein **Häufungspunkt** von X genannt, wenn also $U \setminus \{x\} \neq \emptyset$ für jede offene Umgebung U von x. Ist X ein metrischer Raum, so ist ein Element $x \in X$ genau dann ein Häufungspunkt von X, wenn eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $X \setminus \{x\}$ existiert mit

$$\lim_{n \to \infty} x_n = x$$

(Übung). Die Menge W aller isolierten Punkte ist offen in X, da

$$W = \bigcup_{x \in W} \{x\}.$$

Die Menge aller Häufungspunkte von X ist das Komplement $X \setminus W$, also immer abgeschlossen in X.

Versieht man eine Teilmenge $Y \subseteq X$ mit der induzierten Metrik (bzw. Topologie) und ist $x \in Y$ ein Häufungspunkt von Y, so ist x auch ein Häufungspunkt von X, denn für jede offene Umgebung U von x in X ist $U \cap Y$ eine offene Umgebung von x in Y, somit

$$\emptyset \neq (U \cap Y) \setminus \{x\} \subseteq U \setminus \{x\}.$$

In $\mathbb{C}$ (oder $\mathbb{R}^n$) ist jeder Punkt ein Häufungspunkt. Weiter besteht dort jede offene Kugel $B_\varepsilon(x)$ nur aus Häufungspunkten, denn für $y \in B_\varepsilon(x)$ können wir $r > 0$ so klein wählen, dass $|y - x| + r < \varepsilon$ (bzw. $\|y - x\| + r < \varepsilon$) und haben dann $y + r/m \in B_\varepsilon(x) \setminus \{y\}$ für alle $m \in \mathbb{N}$, und $y + r/m \to y$ für $m \to \infty$.

Satz 11.2 (Identitätssatz)

Ist $U \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet, so sind für eine holomorphe Funktion $f\colon U \to \mathbb{C}$ äquivalent:

(a) Es gibt ein $z_0 \in U$ derart, dass $f^{(k)}(z_0) = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$;

(b) Die Nullstellenmenge $f^{-1}(\{0\})$ hat einen Häufungspunkt z_0;

(c) $f = 0$.

Beweis. (a)⇒(b): Sei $r > 0$ mit $B_r(z_0) \subseteq U$. Dann gilt

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}(z - z_0)^k = 0$$

für alle $z \in B_r(z_0)$, somit $f|_{B_r(z_0)} = 0$. Die Nullstellenmenge enthält also die Kreisscheibe $B_r(z_0)$ und hat somit z_0 als Häufungspunkt.

(b)⇒(a): Sei $z_0 \in f^{-1}(\{0\})$ ein Häufungspunkt von $f^{-1}(\{0\})$. Wir zeigen, dass $f^{(k)}(z_0) = 0$ auch für alle $k \in \mathbb{N}$. Wäre dies falsch, so wählen wir $k_0 \in \mathbb{N}$ minimal mit $f^{(k_0)}(z_0) \neq 0$. Sei $r > 0$ mit $B_r(z_0) \subseteq U$. Dann ist

$$f(z) = \sum_{k=k_0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}(z - z_0)^k = (z - z_0)^{k_0} h(z)$$

mit $h\colon B_r(z_0) \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \sum_{k=k_0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}(z - z_0)^{k-k_0}$. Die Reihe für $h(z)$ konvergiert, da sie im Falle $z \neq z_0$ durch Multiplikation mit $1/(z - z_0)^{k_0}$ aus der konvergenten Potenzreihe für $f(z)$ hervorgeht; für $z = z_0$ ist die Konvergenz trivial. Nun ist h stetig und $h(z_0) = f^{(k_0)}(z_0)/(k_0)! \neq 0$; nach Verkleinern von r gilt also

$h(z) \neq 0$ für alle $z \in B_r(z_0)$. Somit ist für alle $z \in B_r(z_0)$ mit $z \neq z_0$

$$f(z) = (z - z_0)^{k_0} h(z_0) \neq 0,$$

folglich z_0 kein Häufungspunkt von $f^{-1}(\{0\})$, Widerspruch.

(c)$\Rightarrow$(b) ist trivial.

(b)$\Rightarrow$(c): Gilt (b), so betrachten wir die Menge $A \subseteq f^{-1}(\{0\})$ aller Häufungspunkte von $f^{-1}(\{0\})$. Diese ist abgeschlossen in $f^{-1}(\{0\}$ und somit abgeschlossen in U, da $f^{-1}(\{0\})$ in U abgeschlossen ist als Urbild der abgeschlossenen Teilmenge $\{0\} \subseteq \mathbb{C}$ unter der stetigen Abbildung f. Also ist $B := U \setminus A$ offen in U. Nach (b) ist $A \neq \emptyset$. Der Beweis von (b)$\Rightarrow$(a) zeigt, dass für jedes $z_0 \in A$ die Menge $f^{-1}(\{0\})$ die offene Kreisscheibe $B_r(z_0)$ um z_0 enthält, für jedes $r > 0$ mit $B_r(z_0) \subseteq U$. Also ist jedes $z \in B_r(z_0)$ ein Häufungspunkt der Nullstellenmenge, somit $B_r(z_0) \subseteq A$. Folglich ist A offen in U. Da $A \neq \emptyset$ und U zusammenhängend ist, folgt $B = 0$ und somit $A = U$. Also ist $f = 0$. $\square$

Folgerung 11.3

Es seien U ein Gebiet und $f, g\colon U \to \mathbb{C}$ holomorphe Funktionen. Dann sind äquivalent:

(a) Es existiert ein $z_0 \in U$ derart, dass $f^{(k)}(z_0) = g^{(k)}(z_0)$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$.

(b) Die Menge $\{z \in U\colon f(z) = g(z)\}$ hat einen Häufungspunkt z_0.

(c) $f = g$.

Beweis. Man wende Satz 11.2 auf $f - g$ an. $\square$

Bemerkung 11.4

Bedingung (b) ist insbesondere dann erfüllt, wenn $f|_W = g|_W$ für eine nicht-leere offene Teilmenge W von U.

Beispiel 11.5

Es gilt

$$e^{iz} = \cos(z) + i\sin(z)$$

für alle $z \in \mathbb{C}$.

Da $(ix)^{2k} = (-1)^k x^{2k}$ und $(ix)^{2k+1} = i(-1)^k x^{2k+1}$, ist für $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} e^{ix} &= \operatorname{Re}(e^{ix}) + i\operatorname{Im}(e^{ix}) = \sum_{k=0} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} + i\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} \\ &= \cos(x) + i\sin(x), \end{aligned}$$

unter Benutzung der Reihe $e^{ix} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(ix)^n$. Die holomorphen Funktionen $f, g \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) := e^{iz}$, $g(z) := \cos(z) + i\sin(z)$ stimmen also auf $\mathbb{R}$ überein. Da in $\mathbb{R}$ jeder Punkt ein Häufungspunkt ist, ist er auch ein solcher in $\mathbb{C}$ und somit gilt $f = g$ nach Folgerung 11.3.

Wir geben weitere Anwendungen des Identitätssatzes.

Beispiel 11.6 (Funktionalgleichung der Exponentialfunktion)

Aus der Analysis 1 wissen wir, dass

$$e^{x+y} = e^x e^y \quad \text{für alle } x, y \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Unter Benutzung des Identitätssatzes sieht man, dass auch

$$e^{z+w} = e^z e^w \quad \text{für alle } z, w \in \mathbb{C},$$

siehe Aufgabe P10 auf Übungsblatt 4. Insbesondere ist e^z invertierbar (also $\neq 0$) mit $(e^z)^{-1} = e^{-z}$ (siehe Aufgabe P10).

Alternativ könnte man die Cauchysche Produktformel der Analysis 1 auch für komplexe Reihen beweisen und dann den damaligen Beweis für (1) auf den komplexen Fall übertragen.

Bemerkung 11.7

(a) Es ist $\exp(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

(b) Für $z, w \in \mathbb{C}$ gilt genau dann $e^z = e^w$, wenn $w - z \in 2\pi i\mathbb{Z}$.

Ist $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, so ist $|z| > 0$ und $z/|z|$ eine komplexe Zahl vom Betrag 1, also auf dem Einheitskreis. Es gibt genau ein $y \in [0, 2\pi[$ derart, dass $z/|z| = \cos(y) + i\sin(y)$. Setzen wir $x := \ln|z|$, so ist

$$e^{x+iy} = e^x e^{iy} = |z|(\cos y + i\sin y) = |z| \cdot \frac{z}{|z|} = z.$$

Beachten Sie, dass stets $e^{w+2\pi ik} = e^w e^{2\pi ik} = e^w$. Ist $z = e^{x+iy} = e^{a+ib}$ mit $x, y, a, b \in \mathbb{R}$, so ist

$$|z| = e^x = e^a,$$

also $x = a = \ln|z|$. Es folgt $e^{iy} = e^{ib}$, also

$$1 = e^{iy}(e^{ib})^{-1} = e^{iy}e^{-ib} = e^{i(y-b)} = \cos(y-b) + i\sin(y-b)$$

und somit $y - b \in 2\pi\mathbb{Z}$.

Satz 12.1

Ist $U \subseteq \mathbb{C}$ ein Sterngebiet und $f\colon U \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion derart, dass $0 \notin f(U)$, so existiert eine holomorphe Funktion $g\colon U \to \mathbb{C}$ derart, dass

$$e^{g(z)} = f(z) \quad \text{für alle } z \in U;$$

man nennt g einen **Logarithmus** von f. Sind $g_1, g_2\colon U \to \mathbb{C}$ Logarithmen von f, so gibt es ein $k \in \mathbb{Z}$ derart, dass $g_1 - g_2 = 2\pi i k$.

Beweis. Sei $z_0 \in U$ und $w_0 \in \mathbb{C}$ mit $e^{w_0} = f(z_0)$. Nach Satz 4.3 hat die holomorphe Funktion f'/f eine Stammfunktion $g\colon U \to \mathbb{C}$; nach Ersetzen von g durch $g - g(z_0) + w_0$ dürfen wir annehmen, dass $g(z_0) = w_0$ gilt. Die Quotientenregel liefert

$$\frac{d}{dz}\,\frac{e^{g(z)}}{f(z)} = \frac{e^{g(z)}g'(z)f(z) - e^{g(z)}f'(z)}{f(z)^2} = 0,$$

wobei benutzt wurde, dass $g' = f'/f$, also $g'f = f'$. Die Funktion

$$U \to \mathbb{C}, \ \ z \mapsto e^{g(z)}/f(z)$$

ist also konstant (vgl. Satz 11.1). Ihr Funktionswert an der Stelle z_0 ist $e^{w_0}/f(z_0) = 1$, so dass also $e^{g(z)}/f(z) = 1$ für alle $z \in U$ gilt und somit $e^{g(z)} = f(z)$.

Sind g_1 und g_2 Logarithmen von f, so ist

$$e^{g_1(z)-g_2(z)} = e^{g_1(z)}e^{-g_2(z)} = f(z)/f(z) = 1$$

für alle $z \in U$ und somit

$$0 = \frac{d}{dz}e^{g_1(z)-g_2(z)} = \underbrace{e^{g_1(z)-g_2(z)}}_{=1}(g_1 - g_2)'(z) = (g_1 - g_2)'(z),$$

also $g_1 - g_2$ eine konstante Funktion. Ist $c \in \mathbb{C}$ der Funktionswert, so ist $1 = e^{g_1(z)-g_2(z)} = e^c$ und somit $c \in 2\pi i\mathbb{Z}$. $\square$

Folgerung 12.2

Ist $U \subseteq \mathbb{C}$ ein Sterngebiet mit $0 \notin U$, so existiert eine holomorphe Funktion $g\colon U \to \mathbb{C}$ derart, dass

$$(\forall z \in U) \;\; e^{g(z)} = z.$$

Man nennt g eine **komplexe Logarithmusfunktion auf U**.
Sind $g_1, g_2\colon U \to \mathbb{C}$ komplexe Logarithmusfunktionen, so existiert ein $k \in \mathbb{Z}$ derart, dass $g_1 - g_2 = 2\pi i k$.

Beweis. Man wende Satz 12.1 auf $f := \mathrm{id}_U$ an. $\square$

Definition 12.3

Nach dem Vorigen existiert genau eine komplexe Logarithmusfunktion $g\colon \mathbb{C}\setminus\,]{-\infty}, 0] \to \mathbb{C}$ derart, dass $g(1) = 0$ (die "geschlitze Ebene" $\mathbb{C}\setminus\,]{-\infty}, 0]$ ist nämlich ein Sterngebiet).
Man nennt g den **Hauptzweig** des Logarithmus.

Zur Erinnerung:

Gegeben $n \in \mathbb{N}$ hat eine komplexe Zahl $z \neq 0$ der Form $z = re^{i\phi}$ mit $r > 0$ und $\phi \in \mathbb{R}$ genau n verschiedene $n$te Wurzeln w (also $w \in \mathbb{C}$ mit $w^n = z$), nämlich

$$\sqrt[n]{r}\, e^{i\phi/n} e^{2\pi ik/n} \quad \text{mit } k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}.$$

Satz 12.4

Ist $f\colon U \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion auf einem Sterngebiet $U \subseteq \mathbb{C}$ derart, dass $0 \notin f(U)$, so existiert für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine holomorphe Funktion $h\colon U \to \mathbb{C}$ derart, dass

$$(h(z))^n = f(z) \quad \text{für alle } z \in U.$$

Man nennt h eine ***n*te Wurzel** von f. Sind $h_1, h_2\colon U \to \mathbb{C}$ $n$te Wurzeln aus f, so existiert ein $w \in \mathbb{C}$ mit $w^n = 1$ derart, dass $h_2 = wh_1$.

Beweis. Nach Satz 12.1 gibt es einen Logarithmus $g\colon U \to \mathbb{C}$ von f; es ist also $e^{g(z)} = f(z)$ für alle $z \in U$. Dann ist

$$h\colon U \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto e^{g(z)/n}$$

holomorph und $h(z)^n = (e^{g(z)/n})^n = e^{ng(z)/n} = e^{g(z)} = f(z)$ für alle $z \in U$. Sind $h_1, h_2 \colon U \to \mathbb{C}$ $n$te Wurzeln von f, so ist für jedes $z \in U$

$$(h_1(z))^n = f(z) = (h_2(z))^n,$$

somit $h_2(z) = h_1(z)e^{2\pi i k(z)/z}$ für ein eindeutiges $k(z) \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$. Die Mengen

$$A_k := \{z \in U \colon k(z) = k\}$$

sind für $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ also paarweise disjunkt und es ist

$$U = A_0 \cup \cdots \cup A_{n-1}.$$

Die Mengen A_k sind in U abgeschlossen, denn sind $z_j \in A_k$ mit $\lim_{j\to\infty} z_j = z$ für ein $z \in U$, so ist

$$h_2(z) = \lim_{j\to\infty} \underbrace{h_2(z_j)}_{=h_1(z)e^{2\pi i k/n}} = \Big(\lim_{j\to\infty} h_1(z_j)\Big)e^{2\pi i k/n} = h_1(z)e^{2\pi i k/n},$$

also $z \in A_k$. Ist $A := A_{k_0} \neq \emptyset$ und B die Vereinigung der A_k mit $k \neq k_0$, so sind A und B disjunkte abgeschlossene Teilmengen von U mit $A \cup B = U$. Wegen $A = U \setminus B$ und $B = U \setminus A$ sind A

und B auch offen in U und somit $B = \emptyset$, da U zusammenhängend ist. Folglich ist $U = A = A_{k_0}$, also $h_2 = wh_1$ mit $w := e^{2\pi i k_0/n}$. $\square$

Mit $f := \mathrm{id}_U$ folgt:

Folgerung 12.5

Ist $U \subseteq \mathbb{C}$ ein Sterngebiet mit $0 \notin U$, so existiert für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine holomorphe Funktion $h\colon U \to \mathbb{C}$ derart, dass

$$(h(z))^n = z \quad \text{für alle } z \in U.$$

Man nennt h eine **komplexe *n*te Wurzel**(funktion) auf U. Sind $h_1, h_2\colon U \to \mathbb{C}$ komplexe $n$te Wurzeln auf U, so existiert ein $w \in \mathbb{C}$ mit $w^n = 1$ derart, dass $h_2 = wh_1$. $\square$

Definition 12.6

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gibt es auf der geschlitzten Ebene $\mathbb{C} \setminus\,]-\infty, 0]$ genau eine komplexe Wurzelfunktion $h\colon \mathbb{C} \setminus\,]-\infty, 0] \to \mathbb{C}$ derart, dass $h(1) = 1$. Man nennt h den **Hauptzweig** der $n$ten Wurzel.

Definition 13.1

Es seien $U \subseteq \mathbb{C}$ und $V \subseteq \mathbb{C}$ offene Mengen. Eine Funktion $f\colon U \to V$ heißt **biholomorph**, wenn f bijektiv und holomorph ist und auch die Umkehrfunktion $f^{-1}\colon V \to U$ holomorph ist.

Bemerkung 13.2

Ist $f\colon U \to V$ biholomorph, so liefert Anwendung der Kettenregel auf $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_U$, dass $(f^{-1})'(f(z))f'(z) = 1$ für alle $z \in U$, d.h. es ist $f'(z) \neq 0$ und

$$(f'(z))^{-1} = (f^{-1})'(f(z)) \quad \text{für alle } z \in U.$$

Satz 13.3 (Satz über die Umkehrfunktion)

Es sei $U \subseteq \mathbb{C}$ eine offene Menge, $z_0 \in U$ und $f\colon U \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion derart, dass $f'(z_0) \neq 0$. Dann gibt es eine offene z_0-Umgebung $V \subseteq U$ derart, dass $f(V)$ offen in $\mathbb{C}$ ist und $f|_V\colon V \to f(V)$ eine biholomorphe Abbildung.

Beweis. Als Abbildung von $U \subseteq \mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ ist f stetig differenzierbar und es ist

$$Df(z_0)\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad w \mapsto D_w f(z_0) = f'(z_0)w$$

eine bijektive $\mathbb{C}$-lineare Abbildung (siehe Satz 1.9), insb. also eine bijektive $\mathbb{R}$-lineare Abbildung. Nach dem Satz über die Umkehrfunktion der Analysis 2 gibt es eine offene z_0-Umgebung $V \subseteq U$ derart, dass $f(V)$ offen in $\mathbb{C}$ und $f|_V\colon V \to f(V)$ ein C^1-Diffeomorphismus ist; also ist $f|_V\colon V \to f(V)$ bijektiv und $(f|_V)^{-1}$ ist im reellen Sinne stetig differenzierbar. Weiter ist die $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $Df(z)\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ invertierbar für alle $z \in V$ und

$$D((f|_V)^{-1})(f(z)) = (Df(z))^{-1}$$

für alle $z \in V$. Nun ist aber $Df(z)(w) = f'(z)w$ $\mathbb{C}$-linear in $w \in \mathbb{C}$, also auch $D((f|_V)^{-1})(f(z)) = (Df(z))^{-1}\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ $\mathbb{C}$-linear. Nach Satz 1.9 ist $(f|_V)^{-1}$ holomorph. $\square$

Satz 14.1 (Lokale Struktur holomorpher Funktionen)

Ist $U \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f\colon U \to \mathbb{C}$ eine holomorphe, nicht konstante Funktion, so gibt es für jedes $z_0 \in U$ ein kleinstes $n \in \mathbb{N}$ derart, dass $f^{(n)}(z_0) \neq 0$. Es existieren eine offene z_0-Umgebung $V \subseteq U$, offene 0-Umgebungen $P, Q \subseteq \mathbb{C}$ mit $\{z^n : z \in P\} \subseteq Q$ und biholomorphe Abbildungen $\phi\colon V \to P$, $\psi\colon Q \to W$ für eine offene $f(z_0)$-Umgebung $W \subseteq \mathbb{C}$ derart, dass $\phi(z_0) = 0$ und

$$f(z) = \psi((\phi(z))^n) \quad \text{für alle } z \in V.$$

Bemerkung 14.2

Mit $g\colon P \to Q$, $z \mapsto z^n$ ist also $f|_V = \psi \circ g \circ \phi$.

Beweis. Da $f - f(z_0)$ nicht konstant 0 ist und $f(z_0) - f(z_0) = 0$, gibt es nach dem Identitätssatz ein $n \in \mathbb{N}$ mit $0 \neq (f - f(z_0))^{(n)}(z_0) = f^{(n)}(z_0)$. Wir wählen n minimal. Es gibt ein $\varepsilon > 0$ derart, dass $B_\varepsilon(z_0) \subseteq U$. Für alle $z \in B_\varepsilon(z_0)$ ist dann

$$f(z)-f(z_0)=\sum_{k=n}^{\infty}\frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}(z-z_0)^k=(z-z_0)^n g(z-z_0)$$

mit der holomorphen Funktion $g\colon B_\varepsilon(0)\to\mathbb{C}$, $z\mapsto\sum_{j=0}^\infty \frac{f^{(n+j)}(z_0)}{(n+j)!}(z-z_0)^j$ (siehe Satz 9.17). Es ist $g(0)=f^{(n)}(z_0)/n!\neq 0$; nachdem wir gegebenenfalls $\varepsilon>0$ Verkleinern, dürfen wir also annehmen, dass $g(z)\neq 0$ für alle $z\in B_\varepsilon(0)$. Nach Satz 12.4 hat g eine komplexe $n$te Wurzel $h\colon B_\varepsilon(0)\to\mathbb{C}$; es ist also h eine holomorphe Funktion mit $h(z)^n=g(z)$ für alle $z\in B_\varepsilon(0)$. Somit ist

$$f(z)-f(z_0)=((z-z_0)h(z-z_0))^n$$

für alle $z\in B_\varepsilon(0)$. Sei $\phi(z):=(z-z_0)h(z-z_0)$ für $z\in B_\varepsilon(z_0)$. Da $\phi'(z_0)=h(0)+(z_0-z_0)h'(0)=h(0)\neq 0$, dürfen wir nach Verkleinern von $\varepsilon>0$ annehmen, dass $P:=\phi(B_\varepsilon(0))$ eine offene Nullumgebung in $\mathbb{C}$ ist und ϕ eine biholomorphe Abbildung von $V:=B_\varepsilon(z_0)$ nach P (Satz 13.3). Wir können nun $Q:=\mathbb{C}$ nehmen und $\psi\colon\mathbb{C}\to\mathbb{C}$, $z\mapsto z+f(z_0)$. $\square$

Definition 14.3

Eine Abbildung $f\colon X \to Y$ zwischen metrischen (oder topologischen) Räumen heißt **offene Abbildung**, wenn das Bild $f(U)$ in Y offen ist für jede offene Teilmenge $U \subseteq X$.

Bemerkung 14.4

Ist $U \subseteq X$ eine offene Teilmenge und hat jedes $z \in U$ eine offene Umgebung $V_z \subseteq U$ derart, dass $f(V_z)$ in Y offen ist, so ist

$$f(U) = f\left(\bigcup_{z\in U} V_z\right) = \bigcup_{z\in U} f(V_z)$$

offen in Y.

Beispiel 14.5

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto z^n$ eine offene Abbildung.

Um dies nachzurechnen, sei $U \subseteq \mathbb{C}$ eine offene Menge. Ist $0 \in U$, so existiert ein $\varepsilon > 0$ mit $V_0 := B_\varepsilon(0) \subseteq U$ und es ist

$$f(V_0) = f(B_\varepsilon(0)) = B_{\varepsilon^n}(0)$$

offen in $\mathbb{C}$. Für $0 \neq z \in U$ ist $f'(z) = nz^{n-1} \neq 0$; nach dem Satz über die Umkehrfunktion gibt es folglich eine offene z-Umgebung $V_z \subseteq U$ derart, dass $f(V_z) \subseteq \mathbb{C}$ offen ist. Nach Bemerkung 14.4 ist $f(U)$ in $\mathbb{C}$ offen.

Bemerkung 14.6

Da $Q' := \{z^n \colon z \in P\}$ in Satz 14.1 nach Beispiel 14.5 offen ist, können wir dort Q durch Q' ersetzen und W durch $\psi(Q')$. Man kann daher immer erreichen, dass $\{z^n \colon z \in P\} = Q$.

Bemerkung 14.7

(a) Ist $f \colon X \to Y$ eine offene Abbildung und $W \subseteq X$ eine offene Teilmenge, so ist auch $f|_W$ eine offene Abbildung.

(b) Sind $f \colon X \to Y$ und $g \colon Y \to Z$ offene Abbildungen, so ist auch $g \circ f \colon X \to Z$ offen.

Für jede offene Teilmenge $U \subseteq X$ ist nämlich $f(U)$ offen in Y und somit $(g \circ f)(U) = g(f(u))$ offen in Z.

Satz 14.8 (Offenheitssatz)

Ist $U \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet, so ist jede holomorphe, nicht konstante Abbildung $f\colon U \to \mathbb{C}$ eine offene Abbildung.

Beweis. Sei $O \subseteq U$ eine offene Teilmenge. Gegeben $z_0 \in O$ seien V, P, Q, W, n, ϕ und ψ wie in Satz 14.1. Als biholomorphe Abbildungen sind ϕ und ψ offene Abbildungen. Weiter ist $g\colon P \to Q$, $z \mapsto z^n$ eine offene Abbildung, nach Beispiel 14.5 und Bemerkung 14.7 (a). Als Komposition offener Abbildungen ist nun

$$f|_V = \psi \circ g \circ \phi$$

eine offene Abbildung (siehe Bemerkung 14.7 (b)). Somit ist $f(V_{z_0}) = f(V \cap O) = f|_V(V \cap O) \subseteq \mathbb{C}$ offen mit $V_{z_0} := V \cap O$. Nach Bemerkung 14.4 ist $f(O)$ offen in $\mathbb{C}$, also f eine offene Abbildung.

Satz 14.9 (Biholomorphie-Kriterium)

Es sei $U \subseteq \mathbb{C}$ eine offene Teilmenge und $f\colon U \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion. Ist f injektiv, so ist $f(U)$ offen in $\mathbb{C}$ und $f\colon U \to f(U)$ biholomorph.

Beweis. Es sei $(U_j)_{j\in J}$ die Familie der Zusammenhangskomponenten von U. Da $f|_{U_j}$ injektiv ist, ist $f|_{U_j}$ nicht konstant und somit $f|_{U_j}$ eine offene Abbildung (nach dem Offenheitssatz), für jedes $j \in J$. Also ist $f(U) = \bigcup_{j\in J} f(U_j)$ offen in $\mathbb{C}$. Es genügt zu zeigen, dass f^{-1} auf jeder der offenen Mengen $f(U_j)$ holomorph ist, also $(f|_{U_j})^{-1}$ holomorph ist. Sei also o.B.d.A. U ein Gebiet. Gegeben $w \in f(U)$ ist $w = f(z_0)$ für ein $z_0 \in U$. Da f injektiv ist, muss in Satz 14.1 $n = 1$ sein; somit ist

$$f|_V = \psi \circ \phi$$

für eine offene z_0-Umgebung $V \subseteq U$ und bihomomorphe Abbildungen $\phi\colon V \to P = Q$ sowie $\psi\colon Q \to W$. Also ist $f|_V\colon V \to W$ biholomorph, somit $f^{-1}|_W = (f|_V)^{-1} = \phi^{-1} \circ \psi^{-1}$ holomorph. Also ist $f^{-1}\colon f(U) \to U$ holomorph. $\square$

Satz 14.10 (Maximumprinzip auf Gebieten)

Ist $U \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f\colon U \to \mathbb{C}$ eine holomorphe, nicht konstante Funktion, so nimmt die Funktion

$$U \mapsto [0, \infty[, \quad z \mapsto |f(z)|$$

auf U kein Maximum an.

Beweis. Die Betragsfunktion $|\cdot|\colon \mathbb{C} \to [0, \infty[$ ist eine offene Abbildung, denn es ist $|B_\varepsilon(0)| = [0, \varepsilon[$ relativ offen in $[0, \infty[$ und für $0 \neq z \in \mathbb{C}$ ist für jedes $\varepsilon \in]0, |z|]$

$$|B_\varepsilon(z)| =]|z| - \varepsilon, |z| + \varepsilon[$$

offen in $[0, \infty[$. Da f nach dem Offenheitssatz eine offene Abbildung ist, ist auch $|\cdot| \circ f$ offen, also $V := \{|f(z)|\colon z \in U\}$ offen in $[0, \infty[$. Somit kann V kein Maximum enthalten, für jedes $r \in V$ existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $r + 1/n \in V$. $\square$

Satz 14.11 (Maximumprinzip auf kompakten Mengen).

Es sei $U \subseteq \mathbb{C}$ ein beschränktes Gebiet, $\overline{U}$ sein Abschluss in $\mathbb{C}$ und $f\colon \overline{U} \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion derart, dass $f|_U$ holomorph und nicht konstant ist. Dann wird das Maximum von $|f|$ ausschließlich auf $\overline{U} \setminus U$ angenommen.

Beweis. Da die Teilmenge $\overline{U}$ von $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ abgeschlossen und beschränkt ist, ist $\overline{U}$ kompakt (nach dem Satz von Heine-Borel). Also nimmt die stetige Funktion $|f|$ auf $\overline{U}$ ein Maximum an. Sei $z_0 \in \overline{U}$ mit

$$|f(z_0)| = \max\{|f(z)| : z \in \overline{U}\}.$$

Wäre $z_0 \in U$, so wäre auch $|f(z_0)| = \max\{|f(z)| : z \in U\}$. Nach Satz 14.10 ist dies nicht möglich, Widerspruch. □

Die Voraussetzungen des folgenden Satzes werden später noch abgeschwächt. Wir benötigen ihn momentan als ein Hilfsmittel für den Beweis von Satz 14.13.

Satz 14.12 (Riemannscher Hebbarkeitssatz)

Es sei $U \subseteq \mathbb{C}$ eine offene Teilmenge, $z_0 \in U$ und $f\colon U \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion derart, dass $f|_{U\setminus\{z_0\}}$ holomorph ist. Dann ist f holomorph.

Beweis. Nach dem Lemma von Goursat ist

$$\int_{\gamma_{a,b,c}} f(\zeta)\, d\zeta = 0$$

für alle $a, b, c \in U$ mit $\Delta(a, b, c) \subseteq U$. Nach dem Satz von Morera ist f somit holomorph. $\square$

Satz 14.13 (Schwarzsches Lemma)

Es sei $f\colon B_1(0) \to B_1(0)$ holomorph mit $f(0) = 0$. Dann gilt:

(a) Entweder f eine Drehung um den Ursprung; oder:

(b) Es ist $|f'(0)| < 1$ und $|f(z)| < |z|$ für alle $z \in B_1(0) \setminus \{0\}$.

Beweis. Wir betrachten die stückweise definierte Funktion

$$g\colon B_1(0) \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto \begin{cases} \frac{f(z)}{z} = \frac{f(z)-f(0)}{z-0} & \text{wenn } z \neq 0; \\ f'(0) & \text{wenn } z = 0. \end{cases}$$

Dann ist g stetig und auf $B_1(0) \setminus \{0\}$ holomorph. Nach dem Riemannschen Hebbarkeitssatz ist g somit holomorph. Für jedes $r \in]0,1[$ gibt es nach Satz 14.11 ein $z_r \in \overline{B}_r(0) \setminus B_r(0) = \{z \in \mathbb{C}\colon |z| = r\}$ derart, dass

$$\max\{|g(z)|\colon z \in \overline{B}_r(0)\} = |g(z_r)| = \frac{|f(z_r)|}{|z_r|} = \frac{|f(z_r)|}{r} \leq \frac{1}{r}.$$

Da jedes $z \in B_1(0)$ in jedem $B_r(0)$ mit $r \in]|z|,1[$ enthalten ist, ist $|g(z)| \leq 1/r$ für jedes solche r und mit $r \to 1$ folgt $|g(z)| \leq 1$. Insbesondere ist

$$|f'(0)| = |g(0)| \leq 1 \tag{1}$$

und

$$|f(z)| \leq |z| \quad \text{für alle } z \in B_1(0) \setminus \{0\}. \tag{2}$$

Gilt sogar die strikte Ungleichung "$<$" sowohl in (1) als auch in (2), so gilt (b). Andernfalls ist (1) oder (2) verletzt, also

$$|g(0)| = 1 = \max\{|g(z)|\colon z \in B_1(0)\}$$

oder es existiert ein $w \in B_1(0) \setminus \{0\}$ derart, dass

$$|f(w)| = |w|$$

und somit $|g(w)| = 1 = \max\{|g(z)|\colon z \in B_1(0)\}$. Nach Satz 14.10 muss dann g konstant sein, es ist also $|g(z)| = 1$ für alle $z \in B_1(0)$ und

$$f(z)/z = g(z) = g(0)$$

für alle $z \in B_1(0) \setminus \{0\}$ und folglich $f(z) = zg(0)$. Wegen $1 = |g(0)|$ liegt $g(0)$ auf dem Einheitskreis, ist also von der Form $g(0) = e^{i\phi}$ für ein $\phi \in \mathbb{R}$. Es ist nun

$$f(z) = ze^{i\phi}$$

für alle $z \in B_1(0) \setminus \{0\}$ (wegen Stetigkeit also auch für $z = 0$) und folglich ist f eine Drehung um den Winkel ϕ. $\square$

§15 Holomorphe Funktionen auf Kreisringen

In diesem Kapitel untersuchen wir holomorphe Funktionen auf Kreisringen. Wir haben gesehen, dass sich jede holomorphe Funktion auf einer Kreisscheibe in eine Potenzreihe entwickeln lässt. Ähnlich kann jede holomorphe Funktion auf einem Kreisring in eine sogenannte Laurent-Reihe entwickelt werden.

Definition 15.1

Gegeben $z_0 \in \mathbb{C}$ und $0 \leq r < R \leq \infty$ nennen wir die offene Menge

$$K_{r,R}(z_0) := \{z \in \mathbb{C}\colon r < |z - z_0| < R\}$$

den **Kreisring** um z_0 mit Innenradius r und Außenradius R.

Besonders wichtig ist der Fall $r = 0$, d.h. die gelochte Kreisscheibe

$$K_{0,R}(z_0) = B_R(z_0) \setminus \{z_0\};$$

im Falle $R = \infty$ ist dies die gelochte Ebene $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$.

Definition 15.2

Sind $0 < r < R < \infty$, $z_0 \in \mathbb{C}$ und $f\colon \partial K_{r,R}(z_0) \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion, so definieren wir

$$\int_{\partial K_{r,R}(z_0)} f(\zeta)\, d\zeta := \int_{|\zeta - z_0| = R} f(\zeta)\, d\zeta - \int_{|\zeta - z_0| = r} f(\zeta)\, d\zeta.$$

Wir durchlaufen die Kreislinie $\{\zeta \in \mathbb{C}\colon |\zeta - z_0| = R\}$ also im Gegenuhrzeigersinn, die Kreislinie $\{\zeta \in \mathbb{C}\colon |\zeta - z_0| = r\}$ in Uhrzeigersinn (so dass der Kreisring an jeder Stelle des Randes "links von der Randkurve" liegt).

Satz 15.3 (Cauchyscher Integralsatz für Kreisringe)

Es seien $0 < r < a < b < R < \infty$ und $z_0 \in \mathbb{C}$. Dann gilt für jede holomorphe Funktion $f\colon K_{r,R}(z_0) \to \mathbb{C}$

$$\int_{\partial K_{a,b}(z_0)} f(\zeta)\, d\zeta = 0,$$

also

$$\int_{|\zeta - z_0| = a} f(\zeta)\, d\zeta = \int_{|\zeta - z_0| = b} f(\zeta)\, d\zeta.$$

Wir betrachten nun einen Sektor in der Kreisscheibe $B_R(z_0)$ mit einem Öffnungswinkel $\alpha \in]0, \pi[$. Der Rand des Sektors trifft die Kreislinie $|\zeta - z_0| = a$ in zwei Punkten A und B. Die Winkelhalbierende des Sektors trifft den Kreis $|\zeta - z_0| = b$ in einem Punkt H; die durch H verlaufende orthogonale Gerade trifft den Rand des Sektors in zwei Punkten C und D (siehe Skizze). Es sei L das von A, B, C, D aufgespannte Viereck (also die konvexe Hülle)

Lemma 15.4

Ist $\cos(\alpha/2) > \frac{r}{a}$ und $\cos(\alpha/2) > \frac{b}{R}$, so ist $L \subseteq K_{r,R}(z_0)$. Weiter gibt es eine offene konvexe Teilmenge V von $K_{r,R}(z_0)$ mit $L \subseteq V$. Zudem liegt der Durchschnitt S des Kreissektors mit dem abgeschlossenen Kreisring $\overline{K_{a,b}(z_0)}$ in L und somit in V.

Beweis. Der Punkt M auf der Strecke AB mit kleinstem Abstand von z_0 liegt auf der Winkelhalbierenden und hat Abstand

$a\cos(\pi/2)$ von z_0 (siehe Skizze); hierzu betrachtet man das rechtwinklige Dreieck mit den Ecken z_0, M, A. Die Punkte auf CD mit größtem Abstand m von z_0 sind C und D. Betrachtung des rechtwinkligen Dreiecks mit den Ecken z_0, H und D zeigt, dass $m\cos(\alpha/2) = b$ (siehe Skizze). Also gilt die erste Aussage. Da L kompakt und $K_{r,R}(z_0)$ offen ist, gibt es nach Aufgabe H4 auf Übungsblatt 2 ein $\varepsilon > 0$ mit $V := L + B_\varepsilon(0) \subseteq K_{r,R}(z_0)$. Da L und $B_\varepsilon(0)$ konvex sind, ist V konvex. Per Konstruktion ist $S \subseteq L$. $\square$

Beweis von Satz 15.3. Sei $\alpha \in]0, \pi[$ so klein, dass in der Situation von Lemma 15.4 $L \subseteq K_{r,R}(z_0)$ gilt. Nach Verkleinern von α dürfen wir annehmen, dass $\alpha = 2\pi/n$ mit einem $n \geq 3$. Drehen von S (wie im Lemma) um z_0 in Schritten von α liefert n Stück Mengen $S_1 := S$, $S_2, \ldots, S_n$, die alle in $K_{r,R}(z_0)$ liegen und deren Vereinigung der abgeschlossene Kreisring $\overline{K_{a,b}(z_0)}$ ist. Weiter ist jedes S_j in einer konvexen offenen Teilmenge V_j von $K_{r,R}(z_0)$ enthalten. Sei nun γ_j ein stückweiser C^1-Weg, der den Rand von S_j im Gegenuhrzeigersinn durchläuft. Nun heben sich Beiträge zu Wegintegralen von Teilwegen der γ_j auf Geraden durch z_0 jeweils auf und die übrigen Teilwege lassen sich zu zwei Wegen zusammensetzen, von denen einer den Kreis $|\zeta - z_0| = b$ im Gegenuhrzeigersinn durchläuft, der andere den Kreis $|\zeta - z_0| = a$ im Uhrzeigersinn. Da die Integrale über γ_j nach Folgerung 4.4 (dem Cauchyschen Integralsatz für Sterngebiete) verschwinden, folgt

$$0 = \sum_{j=1}^{n} \int_{\gamma_j} f(\zeta)\, d\zeta = \int_{|\zeta - z_0| = b} f(\zeta)\, d\zeta - \int_{|\zeta - z_0| = a} f(\zeta)\, d\zeta$$

und somit die Behauptung. □

Satz 15.5 (Cauchysche Integralformel für Kreisringe)

Es seien $0 \leq r < a < b < R \leq \infty$, $z_0 \in \mathbb{C}$ und $f\colon K_{r,R}(z_0) \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion. Dann gilt für alle $z \in K_{a,b}(z_0)$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K_{a,b}(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta.$$

Beweis. Nachdem wir r notfalls vergrößern und R verkleinern, dürfen wir $0 < r < a < b < R < \infty$ annehmen. Gegeben

$z \in K_{a,b}(z_0)$ ist die stückweise definierte Funktion

$$g\colon K_{r,R}(z_0) \to \mathbb{C}, \quad \zeta \mapsto \begin{cases} \frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta - z} & \text{wenn } \zeta \neq z; \\ f'(z) & \text{wenn } \zeta = z. \end{cases}$$

stetig und auf $K_{r,R}(z_0) \setminus \{z\}$ holomorph. Nach dem Riemannschen Hebbarkeitssatz ist g also holomorph. Der Cauchysche Integralsatz für Kreisringe liefert

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\partial K_{a,b}(z_0)} g(\zeta)\, d\zeta \\ &= \int_{|\zeta - z_0| = b} g(\zeta)\, d\zeta - \int_{|\zeta - z_0| = a} g(\zeta)\, d\zeta \\ &= \int_{|\zeta - z_0| = b} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta - \int_{|\zeta - z_0| = a} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta \\ &\quad - f(z) \underbrace{\int_{|\zeta - z_0| = b} \frac{1}{\zeta - z}\, d\zeta}_{=2\pi i} + f(z) \underbrace{\int_{|\zeta - z_0| = a} \frac{1}{\zeta - z}\, d\zeta}_{=0}. \end{aligned}$$

Division durch $2\pi i$ und Auflösen nach $f(z)$ liefert die Behauptung.

Satz 15.6

Es seien $0 \leq r < R \leq \infty$, $z_0 \in \mathbb{C}$ und $f\colon K_{r,R}(z_0) \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion. Dann existiert eine eindeutige holomorphe Funktion $g\colon B_R(z_0) \to \mathbb{C}$ und eine eindeutige holomorphe Funktion $h\colon B_{r,\infty}(z_0) \to \mathbb{C}$ derart, dass

$$f = g|_{K_{r,R}(z_0)} + h|_{K_{r,R}(z_0)}$$

und

$$\lim_{|z|\to\infty} h(z) = 0,$$

also $h(z_n) \to 0$ für jede Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $K_{r,\infty}(z_0)$ mit $|z_n| \to \infty$.

Man nennt h den **Hauptteil** von f; die Funktion g heißt **Nebenteil** von f.

Bevor wir Satz 15.6 beweisen, machen wir uns seinen Nutzen klar.

Da der Nebenteil g eine holomorphe Funktion auf $B_R(z_0)$ ist, lässt er sich durch eine Potenzreihe beschreiben: Es gibt $a_n \in \mathbb{C}$ für $n \in \mathbb{N}_0$ derart, dass

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad \text{für alle } z \in B_R(z_0).$$

Beachten Sie, dass die Abbildung

$$K_{r,\infty}(z_0) \to B_{1/r}(0) \setminus \{0\}, \quad z \mapsto \frac{1}{z - z_0}$$

biholomorph ist mit Umkehrfunktion $w \mapsto z_0 + \frac{1}{w}$. Nun ist aber die Hilfsfunktion

$$k \colon B_{1/r}(0) \to \mathbb{C}, \quad w \mapsto \begin{cases} h(z_0 + \frac{1}{w}) & \text{wenn } w \neq 0; \\ 0 & \text{wenn } w = 0 \end{cases}$$

stetig und auf $B_{1/r}(0) \setminus \{0\}$ holomorph. Nach dem Riemannschen Hebbarkeitssatz ist k holomorph. Es gibt also $b_n \in \mathbb{C}$ für $n \in \mathbb{N}_0$ derart, dass

$$k(w) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n w^n \quad \text{für alle } w \in B_{1/r}(0).$$

Da $k(0) = 0$, ist $b_0 = 0$, also $k(w) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n w^n$. Folglich ist für alle $z \in K_{r,\infty}(z_0)$

$$h(z) = k\left(\frac{1}{z - z_0}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n (z - z_0)^{-n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z - z_0)^n}$$

mit $a_{-n} := b_n$. Wir haben gezeigt:

Satz 15.7

Es seien $0 \leq r < R \leq \infty$, $z_0 \in \mathbb{C}$ und $f \colon K_{r,R}(z_0) \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann gibt es $a_n \in \mathbb{C}$ für $n \in \mathbb{Z}$ derart, dass

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z - z_0)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

für alle $z \in K_{r,R}(z_0)$ und insbesondere beide Reihen dort konvergieren.

Satz 15.8

In Satz 15.7 sind die Koeffizienten a_n für alle $n \in \mathbb{Z}$ eindeutig festgelegt.

Beweis. Es definiert $g(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ eine holomorphe Funktion $g\colon B_R(z_0) \to \mathbb{C}$ und

$$h\colon K_{r,\infty}(z_0) \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}(1/(z - z_0))^n$$

eine holomorphe Funktion mit $\lim_{|z|\to\infty} h(z) = 0$ derart, dass $f = g|_{K_{r,R}(z_0)} + h|_{K_{r,R}(z_0)}$. Dann ist h der eindeutige Hauptteil von f und g der eindeutige Nebenteil. Für $n \in \mathbb{N}_0$ ist der Koeffizient a_n der Potenzreihe von g mit Entwicklungspunkt z_0 eindeutig festgelegt. Ebenso ist für $n \in \mathbb{N}$ die Zahl $b_n := a_{-n}$ ein Koeffizient der Potenzreihe der obigen durch h festgelegten Hilfsfunktion k und somit ebenfalls eindeutig. $\square$

Also

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z-z_0)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n =: \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$$

“Laurent-Reihe für f”

Beweis von Satz 15.6. Für $a \in]r, R[$ ist

$$g_a\colon B_a(z_0) \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - z_0| = a} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta$$

nach Lemma 6.1 eine holomorphe Funktion. Sind $a < b$ in $]r, R[$, so können wir für jedes $z \in B_a(z_0)$ ein $\rho \in]|z|, a[$ mit $\rho > r$ wählen; dann ist $\rho < a < b < R$ und die Funktion

$$K_{\rho,R}(z_0) \to \mathbb{C}, \;\; \zeta \mapsto \frac{1}{2\pi i} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}$$

ist holomorph. Nach dem Cauchyschen Integralsatz für Kreisringe gilt somit

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - z_0| = a} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - z_0| = b} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta,$$

also $g_a(z) = g_b(z)$. Die Funktion

$$g\colon B_R(z_0) \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto g_a(z) \text{ für } a \in]|z|, R[\text{ mit } a > r$$

ist also wohldefiniert und wegen $g|_{B_a(z_0)} = g_a$ holomorph. Ebenso ist für $a \in]r, R[$

$$h_a\colon K_{a,\infty}(z_0) \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto -\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta-z_0|=a} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta$$

nach Lemma 6.1 eine holomorphe Funktion. Sind $a < b$ in $]r, R[$, so können wir für jedes $z \in K_{b,\infty}(z_0)$ ein $\rho \in]b, |z|[$ mit $\rho < R$ wählen; dann ist $r < a < b < \rho$ und die Funktion

$$K_{r,\rho}(z_0) \to \mathbb{C}, \;\; \zeta \mapsto \frac{1}{2\pi i}\, \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}$$

ist holomorph. Nach dem Cauchyschen Integralsatz für Kreisringe gilt somit

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta-z_0|=a} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta-z_0|=b} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta,$$

also $h_a(z) = h_b(z)$. Die Funktion

$$h\colon K_{r,\infty}(z_0) \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto h_a(z) \text{ für } a \in]r, |z|[\text{ mit } a < R$$

ist also wohldefiniert und wegen $h|_{K_{a,\infty}(z_0)} = h_a$ holomorph. Für jedes $z \in K_{r,R}(z_0)$ existiert ein $a \in]r, |z|[$ und ein $b \in]|z|, R[$. Nach der Cauchyschen Integralformel für Kreisringe (Satz 15.5) gilt

$$
\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta-z_0|=b}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta-\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta-z_0|=a}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta\\
&= g_b(z)+h_a(z)=g(z)+h(z).
\end{aligned}
$$

Sind $z_n \in K_{r,\infty}(z_0)$ für $n \in \mathbb{N}$ mit $|z_n| \to \infty$, so gilt $|z_n - z_0| \geq |z_n| - |z_0| \to \infty$ für $n \to \infty$. Wir wählen $a \in \,]r,R[$ und setzen

$$M := \max\{|f(\zeta)| \colon \zeta \in \mathbb{C} \text{ mit } |\zeta - z_0| = a\}.$$

Gegeben $\varepsilon > 0$ gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ derart, dass

$$|z_n - z_0| > a + \frac{aM}{\varepsilon} \quad \text{für alle } n \geq N$$

und somit insb. $|z_n - z_0| > a$. Für diese n gilt für jedes $\zeta \in \mathbb{C}$ mit $|\zeta - z_0| = a$

$$|\zeta - z_n| = |(z_0 - z_n) - (z_0 - \zeta)| \geq |z_0 - z_n| - |z_0 - \zeta| = |z_0 - z_n| - a > \frac{aM}{\varepsilon}$$

und folglich $$\frac{|f(\zeta)|}{|\zeta - z_n|} \leq \frac{M}{|\zeta - z_n|} < \frac{\varepsilon}{a}.$$

Also ist

$$\begin{aligned} |h(z_n)| &= |h_a(z_n)| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - z_0| = a} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_n}\, d\zeta \right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} 2\pi a \sup_{|\zeta - z_0| = a} \frac{|f(\zeta)|}{|\zeta - z_n|} \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Somit gilt $h(z_n) \to 0$, also $h(z) \to 0$ für $|z| \to \infty$. Die Existenz von g und h mit den gewünschten Eigenschaften ist somit gezeigt.

Eindeutigkeit: Sei auch $f = G|_{K_{r,R}(z_0)} + H|_{K_{r,R}(z_0)}$ mit holomorphen Funktionen $G\colon B_R(z_0) \to \mathbb{C}$ und $H\colon K_{r,\infty}(z_0) \to \mathbb{C}$ derart, dass $H(z) \to 0$ für $|z| \to \infty$. Dann gilt für all $z \in K_{r,R}(z)$

$$g(z) + h(z) = f(z) = G(z) + H(z),$$

folglich

$$G(z) - g(z) = h(z) - H(z).$$

Somit ist

$$k\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto \begin{cases} G(z) - g(z) & \text{wenn } z \in B_R(z_0); \\ h(z) - H(z) & \text{wenn } z \in K_{r,\infty}(z_0) \end{cases}$$

eine wohldefinierte Funktion und holomorph, also eine ganze Funktion. Nun gilt $k(z) = h(z) - H(z) \to 0$ für $|z| \to \infty$, weswegen k eine beschränkte Funktion ist (vgl. Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra). Als beschränkte ganze Funktion ist k nach dem Satz von Liouville konstant; wegen $k(z) \to 0$ für $|z| \to \infty$ muss der konstante Wert 0 sein, es ist also $k = 0$. Somit ist $g = G$ und $h = H$. $\square$

Beispiel 15.9

Die holomorphe Funktion

$$f\colon K_{1,2}(0) \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto \frac{1}{(z-1)(z-2)}$$

lässt sich via Partialbruchzerlegung schreiben als

$$f(z) = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1}.$$

Es ist

$$g\colon B_2(0) \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto \frac{1}{z-2}$$

der Nebenteil von f und $h\colon K_{1,\infty}(0) \to \mathbb{C}$, $z \mapsto -\frac{1}{z-1}$ Hauptteil.

Beispiel 15.10

Die holomorphe Funktion

$$f\colon \mathbb{C}\setminus\{0\}\to\mathbb{C},\quad z\mapsto \frac{\sin(z)}{z^2}$$

auf der gelochten Ebene $K_{0,\infty}(0)$ lässt sich durch Einsetzen der Potenzreihenentwicklung der komplexen Sinusfunktion mit Entwicklungspunkt 0 schreiben als

$$f(z)=\frac{1}{z^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}z^{2k+1}=\frac{1}{z}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}z^{2k-1}.$$

Der Nebenteil von f ist

$$g\colon \mathbb{C}\to\mathbb{C},\quad z\mapsto \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}z^{2k-1},$$

der Hauptteil von f ist $h\colon \mathbb{C}\setminus\{0\}\to\mathbb{C}$, $z\mapsto\frac{1}{z}$.

Definition 15.11

Eine **Laurent-Reihe** mit Entwicklungspunkt $z_0 \in \mathbb{C}$ ist ein Paar

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z-z_0)^n}, \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n \right)$$

einer Potenzreihe in $1/(z-z_0)$ und einer Potenzreihe in $z-z_0$, wobei $a_n \in \mathbb{C}$ für $n \in \mathbb{Z}$. Wir nennen die Laurent-Reihe **konvergent** an einer Stelle $z \in \mathbb{C} \setminus \{z_0\}$, wenn die Reihen

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z-z_0)^n} \quad \text{und} \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$$

(der Haupt- und Nebenteil der Laurent-Reihe) beide konvergieren und nennen

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z-z_0)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$$

den Grenzwert der Laurent-Reihe.

Lemma 15.12

Es seien $g\colon X \to Y$ eine Abbildung und $f_n\colon Y \to \mathbb{C}$ Funktionen für $n \in \mathbb{N}$, die für $n \to \infty$ gleichmäßig gegen eine Funktion $f\colon Y \to \mathbb{C}$ konvergieren. Dann konvergieren die Funktionen $f_n \circ g\colon X \to \mathbb{C}$ für $n \to \infty$ gleichmäßig gegen $f \circ g$.

Beweis. Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ derart, dass für alle $n \geq N$

$$(\forall y \in Y) \quad |f(y) - f_n(y)| < \varepsilon.$$

Da wir $y = g(x)$ nehmen können, gilt für alle $n \geq N$ also auch

$$(\forall x \in X) \quad |f(g(x)) - f_n(g(x))| < \varepsilon. \qquad \square$$

Satz 15.13 (Entwicklungssatz von Laurent)

Sind $0 \leq r < R \leq \infty$, $z_0 \in \mathbb{C}$ und $f\colon K_{r,R}(z_0) \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion, so gilt:

(a) f lässt sich auf ganz $K_{r,R}(z_0)$ in eine konvergente Laurent-Reihe entwickeln: Es existieren $a_n \in \mathbb{C}$ für $n \in \mathbb{Z}$ derart, dass

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad \text{für alle } z \in K_{r,R}(z_0).$$

(b) Die Laurent-Koeffizienten a_n in (a) sind eindeutig festgelegt.

(c) Haupt- und Nebenteil der Laurent-Reihe in (a) konvergieren gleichmäßig auf kompakten Teilmengen von $K_{r,R}(z_0)$.

(d) Für jedes $n \in \mathbb{Z}$ gilt für jedes $\rho \in \,]r, R[$

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - z_0| = \rho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\, d\zeta.$$

Beweis. (a) ist Satz 15.7; (b) ist Satz 15.8.

(c) Der Nebenteil der Laurent-Reihe ist eine auf $B_R(z_0)$ konvergente Potenzreihe, also auf kompakten Teilmengen von $B_R(z_0)$ gleichmäßig konvergent und insbesondere auf kompakten Teilmengen von $K_{r,R}(z_0) \subseteq B_R(z_0)$.

Nach dem Beweis von Satz 15.7 ist die Potenzreihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} w^n$$

auf $B_{1/r}(0)$ konvergent, dort also gleichmäßig konvergent auf kompakten Mengen. Da die Abbildung

$$\phi\colon K_{r,\infty}(z_0) \to B_{1/r}(0), \quad z \mapsto \frac{1}{z - z_0}$$

stetig ist, ist für jede kompakte Teilmenge $L \subseteq K_{r,\infty}(z_0)$ die Teilmenge $\phi(L)$ von $B_{1/r}(0)$ kompakt. Nach Lemma 15.12 konvergiert also

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}\,\phi(z)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z-z_0)^n}$$

gleichmäßig für $z \in L$.

(d) Wegen der gleichmäßigen Konvergenz des Haupt- und Nebenteils der Laurent-Reihe auf kompakten Mengen ist

$$\begin{aligned}\int_{|\zeta-z_0|=\rho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}\,d\zeta &= \sum_{m=1}^{\infty} a_{-m} \int_{|\zeta-z_0|=\rho} \frac{1}{(\zeta-z_0)^{n+1+m}}\,d\zeta \\ &\quad + \sum_{m=0}^{\infty} a_m \int_{|\zeta-z_0|=\rho} \frac{1}{(\zeta-z_0)^{n+1-m}}\,d\zeta.\end{aligned}$$

Auf der rechten Seite verschwinden alle Integrale bis auf eines, nämlich das mit $n+1+m=1$ (also $m=-n$, wenn $n<0$) bzw. $n+1-m=1$ (also $n=m$, wenn $n \geq 0$); der Wert des nicht-verschwindenden Integrals ist dann $2\pi i$ (siehe Beispiele 2.5, 2.7 und 2.8). Division beider Seiten durch $2\pi i$ liefert die Behauptung. $\square$

Beispiele. In Beispiel 15.10 haben wir den Nebenteil von f bereits als Potenzreihe mit Entwicklungspunkt 0 dargestellt; diese ist der Nebenteil der Laurent-Reihe. Der Hauptteil von f ist $\frac{1}{z}$; dies ist der Hauptteil der Laurent-Reihe.

In Beispiel 15.9 liefert

$$g(z) = \frac{1}{z-2} = -\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{z}{2}} = -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(z/2)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)(1/2)^{n+1}z^n$$

den Nebenteil der Laurent-Reihe um $z_0 = 0$ und

$$h(z) = -\frac{1}{z-1} = -\frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{1}{z}} = -\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}(1/z)^n = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)\frac{1}{z^n}$$

den Hauptteil der Laurent-Reihe.

Besonders interessant sind Laurent-Entwicklungen im Fall eines Innenradius $r = 0$.

Definition 16.1

Es sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f\colon U \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion. Man nennt $z_0 \in \mathbb{C} \setminus U$ eine **isolierte Singularität** von f, wenn ein $R > 0$ mit

$$B_R(z_0) \setminus \{z_0\} \subseteq U$$

existiert, also $K_{0,R}(z_0) \subseteq U$. Die isolierte Singularität z_0 heißt

(a) **hebbare Singularität**, wenn der Hauptteil der Laurent-Reihe $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ von f auf $B_R(z_0) \setminus \{0\}$ verschwindet, also $a_n = 0$ für alle $n < 0$;

(b) **Pol der Ordnung** $\boldsymbol{m} \in \mathbb{N}$, wenn $a_{-m} \neq 0$ und $a_n = 0$ für alle $n < -m$;

(c) **wesentliche Singularität**, wenn $a_n \neq 0$ für unendlich viele $n < 0$.

Hier ist $U \cup \{z_0\} = U \cup B_R(z_0)$ offen in $\mathbb{C}$. Ist U ein Gebiet, so auch $U \cup \{z_0\}$, da $B_R(z_0)$ wegzusammenhängend & $U \cap B_R(z_0) \neq \emptyset$.

16.2 Beispiele. (a) Die Funktion $\mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \frac{\sin(z)}{z}$ hat an der Stelle 0 eine hebbare Singularität, denn

$$\frac{\sin(z)}{z} = \frac{1}{z} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{2k+1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{2k}$$

ist die Laurent-Reihe der Funktion; der Hauptteil verschwindet.

(b) Die Funktion

$$\mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto \frac{e^z}{z}$$

hat an der Stelle 0 einen Pol erster Ordnung, da

$$\frac{e^z}{z} = \frac{1}{z} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} z^k = \frac{1}{z} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} z^{k-1} = \frac{1}{z} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!} z^n.$$

(c) Die Funktion $\mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto e^{1/z}$ hat an der Stelle 0 eine wesentliche Singularität, denn

$$e^{1/z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (1/z)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} (1/z)^n \ + 1$$

hat Laurentkoeffizient $a_{-n} = \frac{1}{n!} \neq 0$ für alle (und somit unendlich viele) $n \in \mathbb{N}$.

Es ist nützlich, Satz 14.12 noch zu verschärfen (vgl. auch Satz 16.4 (a)).

Satz 16.3 (Riemannscher Hebbarkeitssatz)

Es sei $U \subseteq \mathbb{C}$ eine offene Menge, $f\colon U \to \mathbb{C}$ holomorph und $z_0 \in \mathbb{C} \setminus U$ eine isolierte Singularität von f. Ist f auf $B_R(z_0) \setminus \{z_0\}$ beschränkt für ein $R > 0$ mit $B_R(z_0) \setminus \{z_0\} \subseteq U$, so ist z_0 eine hebbare Singularität von f.

Beweis. Sei $M \in [0, \infty[$ das Supremum von $|f(z)|$ für $z \in B_R(z_0) \setminus \{z_0\}$. Es sei $g\colon B_R(z_0) \to \mathbb{C}$ der Nebenteil von $f|_{B_R(z_0)\setminus\{z_0\}}$ und $h\colon \mathbb{C} \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ der Hauptteil. Gegeben $z \in B_R(z_0) \setminus \{z_0\}$ gilt für alle $a \in]0, |z - z_0|/2]$

$$h(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - z_0| = a} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \, d\zeta$$

(siehe Beweis von Satz 15.6). Für $\zeta \in \mathbb{C}$ mit $|\zeta - z_0| = a$ ist

$|\zeta - z| = |(z_0 - z) - (z_0 - \zeta)| \geq |z_0 - z| - |z_0 - \zeta| =$
$|z - z_0| - a \geq |z_0 - z| - \frac{1}{2}|z_0 - z| = \frac{1}{2}|z - z_0|$, somit

$$\frac{|f(\zeta)|}{|\zeta - z|} \leq \frac{M}{\frac{1}{2}|z - z_0|} =: C$$

für alle $a \in \,]0, |z - z_0|/2]$ und $\zeta \in \mathbb{C}$ mit $|\zeta - z_0| = a$. Da der Kreis $\partial B_a(z_0)$ Weglänge $2\pi a$ hat, folgt

$$|h(z)| \leq \frac{1}{2\pi}\, 2\pi a \sup\left\{ \frac{|f(\zeta)|}{|\zeta - z|} \colon \zeta \in \partial B_a(z_0) \right\} \leq aC.$$

Mit $a \to 0$ ergibt sich $|h(z)| = 0$, also $h(z) = 0$. Der auf dem Gebiet $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ definierte Hauptteil h verschwindet also auf der nicht-leeren offenen Menge $B_R(z_0) \setminus \{z_0\}$. Nach dem Identitätssatz ist $h = 0$, die isolierte Singularität z_0 also hebbar. $\square$

Wir charakterisieren nun die isolierten Singularitäten der Typen (a)–(c) anhand des Verhaltens von f nahe z_0.

Satz 16.4

Es sei $U \subseteq \mathbb{C}$ eine offene Menge, $f\colon U \to \mathbb{C}$ holomorph und $z_0 \in \mathbb{C} \setminus U$ eine isolierte Singularität von f. Dann gilt:

(a) z_0 ist genau dann eine hebbare Singularität von f, wenn f zu einer holomorphen Funktion auf $U \cup \{z_0\}$ fortsetzbar ist.

(b) z_0 ist genau dann ein Pol von f, wenn

$$|f(z)| \to \infty \quad \text{für } z \to z_0.$$

(c) z_0 ist genau dann eine wesentliche Singularität von f, wenn $f(B_r(z_0) \setminus \{z_0\})$ eine dichte Teilmenge von $\mathbb{C}$ ist für jedes $r > 0$ mit $B_r(z_0) \setminus \{z_0\} \subseteq U$ (Satz von Casorati-Weierstraß).

Ausführlicher bedeutet (a): Es existiert eine holomorphe Funktion $\tilde{f}\colon U \cup \{z_0\} \to \mathbb{C}$ mit $\tilde{f}|_U = f$.

Beweis. Sei $R > 0$ derart, dass $K_{0,R}(z_0) = B_R(z_0) \setminus \{z_0\} \subseteq U$. Sei $g\colon B_R(z_0) \to \mathbb{C}$ der Nebenteil von $f|_{B_R(z_0)\setminus\{z_0\}}$ und $h\colon \mathbb{C} \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ der Hauptteil.

Es genügt, die Notwendigkeit der in (a), (b) und (c) beschriebenen Bedingungen zu zeigen, denn die Bedingungen schließen sich gegenseitig aus. Im Beweis der Notwendigkeit in (c) benutzen wir, dass die Bedingung in (b) auch hinreichend ist; diese Implikation muss daher zuvor bewiesen werden.

(a) Ist z_0 eine hebbare Singularität von f, so ist $h = 0$, also $f|_{B_R(z_0)\setminus\{z_0\}} = g|_{B_R(z_0)\setminus\{z_0\}}$. Folglich ist

$$\tilde{f}\colon U \cup \{z_0\} \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto \begin{cases} f(z) & \text{wenn } z \in U; \\ g(z) & \text{wenn } z \in B_R(z_0) \end{cases}$$

eine wohldefinierte holomorphe Fortsetzung für f.

(b) Ist z_0 ein Pol von f von der Ordnung $m \in \mathbb{N}$, so gilt

$$h(z) = \sum_{n=1}^{m} \frac{a_{-n}}{(z - z_0)^n} = \frac{1}{(z - z_0)^m} p(z)$$

mit der stetigen Polynomfunktion

$$p\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto \sum_{k=0}^{m-1} a_{-m+k}(z-z_0)^k.$$

Da $p(z_0) = a_{-m} \neq 0$, gibt es ein $r \in \,]0, R]$ derart, dass $|p(z)| \geq |p(z_0)|/2$ für alle $z \in B_r(z_0)$. Nach Verkleinern von r dürfen wir zudem annehmen, dass g auf $B_r(z_0)$ beschränkt ist. Sei

$$M := \sup\{|g(z)| \colon z \in B_r(z_0)\} \in [0, \infty[.$$

Dann gilt für alle $z \in B_r(z_0) \setminus \{z_0\}$

$$|f(z)| \geq |h(z)| - |g(z)| \geq \frac{1}{|z-z_0|^m}|p(z)| - M \geq \frac{|p(z_0)|}{2|z-z_0|^m} - M \to \infty$$

für $z \to z_0$.

Gilt umgekehrt $|f(z)| \to \infty$ für $z \to z_0$, so gibt es ein $r \in \,]0, R]$ mit $|f(z)| > 0$ für alle $z \in B_r(z_0) \setminus \{z_0\}$. Also ist z_0 eine isolierte Singularität der Funktion

$$k\colon U \setminus f^{-1}(\{0\}) \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto \frac{1}{f(z)}.$$

Da $k(z) \to 0$ für $z \to z_0$, ist z_0 nach Satz 16.3 eine hebbare Singularität von k, es gibt also eine holomorphe Fortsetzung $\tilde{k}$ von k auf $\{z_0\} \cup (U \setminus f^{-1}(\{0\}))$. Seien $b_0, b_1, \ldots$ in $\mathbb{C}$ mit

$$\tilde{k}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-z_0)^n \text{ für alle } z \in B_r(z_0).$$

Dann ist $b_0 = \tilde{k}(z_0) = \lim_{z \to z_0} k(z) = 0$. Da f auf $B_r(z_0) \setminus \{z_0\}$ nicht konstant ist, ist auch k dort nicht konstant und somit $\tilde{k}|_{B_r(z_0)}$ nicht konstant. Also gibt es ein $m \in \mathbb{N}$ derart, dass $b_m \neq 0$; wir wählen m minimal. Dann ist

$$k(z) = \sum_{n=m}^{\infty} b_n(z-z_0)^n = (z-z_0)^m \ell(z)$$

mit der holomorphen Funktion $\ell\colon B_r(z_0) \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} b_{m+n}(z-z_0)^n$ mit $\ell(z_0) = b_m \neq 0$. Nach Verkleinern von r ist $\ell(z) \neq 0$ für alle $z \in B_r(z_0)$, also $1/\ell$ holomorph. Es gibt also $c_n \in \mathbb{C}$ für $n \in \mathbb{N}$ derart, dass

$$\frac{1}{\ell(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n \text{ für alle } z \in B_r(z_0).$$

Dann ist $c_0 = 1/\ell(z_0) \neq 0$. Weiter gilt

$$f(z) = \frac{1}{k(z)} = \frac{1}{(z-z_0)^m \ell(z)} = \frac{1}{(z-z_0)^m} \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$$
$$= \underbrace{\sum_{n=1}^{m} \frac{c_{m-n}}{(z-z_0)^n}}_{=h(z)} + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} c_{n+m}(z-z_0)^n}_{=g(z)}$$

für alle $z \in B_r(z_0) \setminus \{z_0\}$. Es ist also z_0 ein Pol der Ordnung m von f.

(c) Sei z_0 eine wesentliche Singularität von f. Wäre für ein $r \in]0, R]$ das Bild $f(B_r(z_0) \setminus \{z_0\})$ in $\mathbb{C}$ nicht dicht, so gäbe es ein $y \in \mathbb{C}$ derart, dass y nicht im Abschluss des genannten Bildes liegt und somit

$$B_\varepsilon(y) \cap f(B_r(z_0) \setminus \{z_0\}) = \emptyset$$

für ein $\varepsilon > 0$ gilt. Dann aber wäre die holomorphe Funktion

$$b\colon B_r(z_0)\setminus\{z_0\}\to\mathbb{C},\quad z\mapsto\frac{1}{f(z)-y}$$

beschränkt mit $|b(z)|\leq\frac{1}{\varepsilon}$ für alle z im Definitionsbereich (da $|f(z)-y|\geq\varepsilon$). Nach Satz 16.3 wäre z_0 also eine hebbare Singularität von b, es gäbe also eine holomorphe Fortsetzung $\tilde{b}\colon B_r(z_0)\to\mathbb{C}$. Für $z\to z_0$ würde

$$f(z)=y+\frac{1}{b(z)}$$

im Falle $\tilde{b}(z_0)\neq 0$ gegen $y+1/\tilde{b}(z_0)$ konvergieren; nach Verkleinern von r wäre also $f(B_r(z_0)\setminus\{z_0\})$ in einer Kreisscheibe um den Grenzwert enthalten und somit z_0 eine hebbare Singularität von f nach Satz 16.3, Widerspruch. Im Falle $\tilde{b}(z_0)=0$ hätten wir $|f(z)|\to\infty$ für $z\to z_0$; wegen (b) wäre z_0 also ein Pol von f, Widerspruch. $\square$

Bemerkung 16.5

In der Situation von Satz 16.4 ist z_0 genau dann ein Pol von f von der Ordnung $m \in \mathbb{N}$, wenn der Grenzwert

$$\lim_{z \to z_0} (z - z_0)^m f(z)$$

existiert und von 0 verschieden ist.

Existiert der Grenzwert von $h(z) := (z - z_0)^m f(z)$ für $z \to z_0$, so ist z_0 nach Satz 16.4 eine hebbare Singularität von h, also h von der Form $h(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k (z - z_0)^k$ für $z \neq z_0$ nahe z_0; der Grenzwert ist genau dann von 0 verschieden, wenn $b_0 \neq 0$. Dann ist

$$f(z) = \frac{1}{(z - z_0)^m} h(z) = \sum_{n=-m}^{\infty} b_{n+m} (z - z_0)^n,$$

also z ein Pol der Ordnung m von f. Ist umgekehrt z_0 ein Pol der Ordnung m von f, so ist f für $z \neq z_0$ nahe z_0 von der Form $f(z) = \sum_{n=-m}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ mit $a_{-m} \neq 0$; folglich gilt

$$(z - z_0)^m f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{k-m} (z - z_0)^k \to a_{-m} \neq 0 \text{ für } z \to z_0. \quad (1)$$

Definition 16.6

Es sei $f\colon U \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktione auf einer offenen Teilmenge $U \subseteq \mathbb{C}$, $z_0 \in \mathbb{C} \setminus U$ eine isolierte Singularität von f und $r > 0$ mit $B_r(z_0) \setminus \{z_0\} \subseteq U$. Ist $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ die Laurententwicklung von f auf $B_r(z_0) \setminus \{z_0\}$, so nennt man a_{-1} das **Residuum** von f an der Stelle z_0 und schreibt

$$\operatorname{res}_{z_0}(f) := a_{-1}.$$

Satz 16.7 (Residuensatz – Baby Version)

Es sei $U \subseteq \mathbb{C}$ eine offene Teilmenge, $f\colon U \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion, $z_0 \in \mathbb{C} \setminus U$ eine isolierte Singularität von f und $r > 0$ derart, dass $\overline{B_r(z_0)} \setminus \{z_0\} \subseteq U$. Dann gilt

$$\int_{|\zeta - z_0| = r} f(\zeta)\, d\zeta = 2\pi i \operatorname{res}_{z_0}(f).$$

Beweis. Da $U \cup \{z_0\}$ offen ist und $\overline{B}_r(z_0) \subseteq U \cup \{z_0\}$, existiert nach Hausübung H4 auf Blatt 2 ein $R > r$ derart, dass

$B_R(z_0) \subseteq U \cup \{z_0\}$ und somit $B_R(z_0) \setminus \{z_0\} \subseteq U$. Nach Satz 15.3 (d) (angewandt mit Innenradius 0 und Außenradius R) ist dann

$$a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - z_0| = r} f(\zeta)\, d\zeta. \qquad \square$$

Beispiel 16.8

Was ist $\int_{|\zeta|=1} \frac{e^\zeta - 1}{\zeta^2}\, d\zeta$?

Die holomorphe Funktion $f\colon \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$,

$$z \mapsto \frac{e^z - 1}{z^2} = \frac{1}{z^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n = \frac{1}{z} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+2)!} z^n$$

hat Hauptteil $\frac{1}{z}$ und somit Residuum $\operatorname{res}_0(f) = 1$ an der Stelle 0. Nach dem Residuensatz ist also

$$\int_{|\zeta|=1} f(\zeta)\, d\zeta = 2\pi i \operatorname{res}_0(f) = 2\pi i.$$

Definition 17.1

Sind X und Y metrische (oder topologische) Räume und $f\colon X \to Y$ sowie $g\colon X \to Y$ stetige Abbildungen, so nennt man eine Abbildung

$$F\colon [0,1] \times X \to Y, \quad (s,x) \mapsto F(s,x)$$

eine **Homotopie** von f nach g (in Y), wenn F stetig ist, $F(0,x) = f(x)$ und $F(1,x) = g(x)$ für alle $x \in X$.

Für jedes $s \in [0,1]$ ist dann also $F_s := F(s,\cdot)\colon X \to Y$ eine stetige Funktion; es ist $F_0 = f$ und $F_1 = g$.

Definition 17.2

Es seien $U \subseteq \mathbb{C}$ eine offene Teilmenge, $a < b$ reelle Zahlen, $\gamma\colon [a,b] \to U$ sowie $\eta\colon [a,b] \to U$ Wege in U und $F\colon [0,1] \times [a,b] \to U$ eine Homotopie von γ nach η in U.

(a) Ist $F_s(a) = \gamma(a) = \eta(a)$ und $F_s(b) = \gamma(b) = \eta(b)$ für alle $s \in [0,1]$, so nennt man F eine **Homotopie relativ $\{a, b\}$** oder eine **Homotopie mit festen Endpunkten**.

(b) Ist $F_s(a) = F_s(b)$ für alle $s \in [0,1]$ (sodass jedes F_s und somit auch γ und η geschlossene Wege sind), so nennt man F eine **Homotopie geschlossener Wege**.

Satz 17.3 (Homotopieinvarianz komplexer Kurvenintegrale)

Es sei $f\colon U \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion auf einer offenen Teilmenge $U \subseteq \mathbb{C}$. Sind $a < b$ reelle Zahlen und $\gamma\colon [a,b] \to U$ sowie $\eta\colon [a,b] \to U$ stückweise stetig differenzierbare Wege derart, dass eine Homotopie in U mit festen Endpunkten von γ nach η existiert, so ist

$$\int_\gamma f(\zeta)\,d\zeta = \int_\eta f(\zeta)\,d\zeta. \tag{1}$$

Sind γ und η geschlossene Wege und existiert in U eine Homotopie geschlossener Wege von γ nach η, so gilt ebenso (1).

Beweis (der ersten Aussage). Sei $F\colon [0,1]\times[a,b]\to U$ eine Homotopie mit festen Endpunkten in U von γ nach η. Da die auf $[0,1]$ definierten Wege $t\mapsto \gamma(a+t(b-a))$ und $t\mapsto \eta(a+t(b-a))$ die gleichen Kurvenintegrale liefern wie γ bzw. η und via $(s,t)\mapsto F(s,a+t(b-a))$ homotop sind, dürfen wir o.B.d.A. annehmen, dass $a=0$ und $b=1$. Da $F([0,1]\times[0,1])$ eine kompakte Teilmenge von U ist, gibt es nach Hausaufgabe H4 auf Übungsblatt 2 ein $\varepsilon>0$ derart, dass

$$F([0,1]\times[0,1])+B_\varepsilon(0)\subseteq U.$$

Da F als stetige Funktion auf einer kompakten Menge gleichmäßig stetig ist, gibt es ein $\delta>0$ derart, dass

$$|F(s_2,t_2)-F(s_1,t_1)|<\varepsilon$$

für alle $(s_1,t_1),(s_2,t_2)\in[0,1]\times[0,1]$ mit $|s_2-s_1|,|t_2-t_1|<\delta$. Sei $2\leq n\in\mathbb{N}$ so groß, dass $1/n<\delta$. Für $j\in\{1,\ldots,n-2\}$ und $k\in\{0,\ldots,n-1\}$ betrachten wir nun den Weg $\gamma_{j,k}\colon [0,4/n]\to U$, der auf den Teilintervallen $[0,1/n]$, $[1/n,2/n]$, $[2/n,3/n]$ bzw. $[3/n,4/n]$ affin-linear von $F(j/n,k/n)$ nach $F((j+1)/n,k/n)$ läuft, von dort nach $F((j+1)/n,(k+1)/n)$, dann nach $F(j/n,(k+1)/n)$ und von dort zurück nach $F(j/n,k/n)$. Den Weg $\gamma_{0,k}\colon [0,4/n]\to U$ definieren wir auf $[0,3/n]$ analog mit $j=1$, setzen für $t\in[3/n,4/n]$ aber

$$\gamma_{0,k}(t) := \gamma((k+1)/n-(t-3/n)).$$

Den Weg $\gamma_{n-1,k}\colon [0,4/n]\to U$ definieren wir mit $j=n-1$ auf $[0,1/n]$ und $[2/n,4/n]$ analog, setzen für $t\in[1/n,2/n]$ jedoch

$$\gamma_{n-1,k}(t) := \eta(k/n+(t-1/n)).$$

Jeder Weg $\gamma_{j,k}$ ist geschlossen, stückweise stetig differenzierbar und benutzt als Funktionswerte nur solche von F an den Ecken des in der Skizze gezeigten Quadrats $Q_{j,k}$ (oder Verbindungsstrecken zwischen solchen Funktionswerten) bzw. am linken Rand die Funktionswerte von $\gamma=F(0,\cdot)$, am rechten Rand die Funktionswerte von $\eta=F(1,\cdot)$. Es ist

$$\gamma_{j,k}([0,4/n])\subseteq B_\varepsilon(\gamma_{j,k}(0)),$$

denn alle benutzten Funktionswerte von F liegen in der Kreisscheibe und somit auch die Verbindungsstrecken zwischen solchen. Da die Kreisscheibe konvex ist, liefert der Cauchysche

Integralsatz für Sterngebiete, dass

$$\int_{\gamma_{j,k}} f(\zeta)\, d\zeta = 0$$

für alle $j, k \in \{0, \ldots, n-1\}$. Sei $c_z\colon [0,1] \to U$, $t \mapsto z$ der konstante Weg mit Wert $z := \gamma(0) = \eta(0)$ und c_w der entsprechende konstante Weg mit Wert $w := \gamma(1) = \eta(1)$. Da sich Integrale über Teilwege im Inneren wegheben und Integrale längs konstanten Wegen verschwinden, folgt

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{j,k=1}^{n-1} \int_{\gamma_{j,k}} f(\zeta)\, d\zeta \\ &= \int_{c_z} f(\zeta)\, d\zeta + \int_{\eta} f(\zeta)\, d\zeta + \int_{(c_w)^-} f(\zeta)\, d\zeta + \int_{\gamma^-} f(\zeta)\, d\zeta \\ &= \int_{\eta} f(\zeta)\, d\zeta - \int_{\gamma} f(\zeta)\, d\zeta. \qquad \square \end{aligned}$$

Wir begnügen uns zunächst mit der erste Aussage von Satz 17.3 (über Homotopien mit festen Endpunkten) und arbeiten damit. Die zweite Aussage (über Homotopien geschlossener Wege) wird anschließend bewiesen und vorher nicht benutzt.

Lemma 17.4

Für jede offene Teilmenge $U \subseteq \mathbb{C}$ und jeden Weg $\gamma\colon [a, b] \to U$ existiert ein stückweise stetig differenzierbarer Weg $\eta\colon [a, b] \to U$, der bei festen Endpunkten homotop zu γ ist.

Beweis. Nach Aufgabe H4 des 2. Übungsblatts gibt es ein $\varepsilon > 0$ derart, dass $\gamma([a, b]) + B_\varepsilon(0) \subseteq U$. Da γ wegen der Kompaktheit von $[a, b]$ gleichmäßig stetig ist, existiert ein $\delta > 0$ derart, dass

$$(\forall x, y \in [a, b]) \;\; |x - y| < \delta \quad \Rightarrow \quad |\gamma(x) - \gamma(y)| < \varepsilon. \qquad (2)$$

Sei $n \in \mathbb{N}$ so groß, dass $\frac{1}{n} < \delta$. Wir betrachten die äquidistante Unterteilung $a = t_0 < \cdots < t_n = b$ von $[a, b]$ mit $t_k := a + \frac{k}{n}(b - a)$ für $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$. Der durch

$$\eta(t) := \gamma(t_{k-1}) + n(t - t_{k-1})(\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1}))$$

für $k \in \{1, \ldots, n\}$ und $t \in [t_{k-1}, t_k]$ gegebene Polygonzug $\eta\colon [a, b] \to \mathbb{C}$ ist stückweise stetig differenzierbar. Die Abbildung

$$F\colon [0,1] \times [a,b] \to \mathbb{C}, \quad (s,t) \mapsto \gamma(t) + s(\eta(t) - \gamma(t))$$

ist eine Homotopie von γ nach η in $\mathbb{C}$, da F stetig ist,

$$F(0, \cdot) = \gamma \quad \text{und} \quad F(1, \cdot) = \eta.$$

Für alle $k \in \{1, \ldots, n\}$ und $t \in [t_{k-1}, t_k]$ sind die Punkte $\gamma(t_{k-1})$ und $\gamma(t_k)$ in $B_\varepsilon(\gamma(t_{k-1}))$ enthalten, also auch der Punkt $\eta(t)$ auf ihrer Verbindungsstrecke (da die Kreisscheibe konvex ist); insb. ist $\eta(t) \in U$ und somit η ein Weg in U. Weiter ist $\gamma(t)$ in $B_\varepsilon(\gamma(t_{k-1}))$ nach (2), da $|t - t_{k-1}| < \delta$. Dann ist auch die Verbindungsstrecke von $\gamma(t)$ und $\eta(t)$ in der Kreisscheibe enthalten und somit $F(s,t) \in B_\varepsilon(\gamma(t_{k-1})) \subseteq U$ für alle $s \in [0,1]$. Also ist F eine Homotopie in U von γ nach η und zwar eine Homotopie bei festen Endpunkten, da wegen $\gamma(a) = \eta(a)$

$$F(s,a) = \gamma(a) + s(\eta(a) - \gamma(a)) = \gamma(a)$$

für alle $s \in [0,1]$ und analog $F(s,b) = \gamma(b)$ für alle $s \in [0,1]$. $\square$

Definition 17.5

Ist $f\colon U \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion auf einer offenen Teilmenge $U \subseteq \mathbb{C}$ und $\gamma\colon [a,b] \to U$ ein Weg, so wählen wir einen stückweise stetig differenzierbaren Weg $\eta\colon [a,b] \to U$, der zu γ bei festen Endpunkten homotop ist und setzen

$$\int_\gamma f(\zeta)\,d\zeta := \int_\eta f(\zeta)\,d\zeta.$$

Um zu sehen, dass $\int_\gamma f(\zeta)\,d\zeta$ wohldefiniert ist (in Lemma 17.8), benutzen wir zwei Hilfsmittel.

Lemma 17.6 (Klebelemma)

Es seien X und Y metrische (oder topologische) Räume und $f\colon X \to Y$ eine Abbildung. Gibt es endlich viele abgeschlossene Teilmengen $A_1, \ldots, A_n \subseteq X$ mit $A_1 \cup \cdots \cup A_n = X$ derart, dass $f|_{A_j}\colon A_j \to Y$ für jedes $j \in \{1, \ldots, n\}$ stetig ist bezüglich der induzierten Metrik (bzw. der induzierten Topologie) auf A_j, so ist f stetig.

Beweis. Sei $A \subseteq Y$ eine abgeschlossene Teilmenge. Für jedes $j \in \{1, \ldots, n\}$ ist $f|_{A_j}$ stetig, somit $(f|_{A_j})^{-1}(A) = A_j \cap f^{-1}(A)$ relativ abgeschlossen in A_j und somit abgeschlossen in X, da A_j abgeschlossen in X ist. Also ist

$$f^{-1}(A) = \bigcup_{j=1}^{n} (A_j \cap f^{-1}(A))$$

abgeschlossen in X als endliche Vereinigung abgeschlossener Mengen. Somit ist f stetig. □

Lemma 17.7

Es seien $U \subseteq \mathbb{C}$ eine offene Teilmenge und $\gamma, \eta, \theta \colon [a, b] \to U$ Wege.

(a) Ist $F \colon [0, 1] \times [a, b] \to U$ eine Homotopie in U von γ nach η bei festen Endpunkten, so ist

$$F^{-} \colon [0, 1] \times [a, b] \to U, \quad (s, t) \mapsto F(1 - s, t)$$

eine Homotopie von η nach γ in U bei festen Endpunkten.

(b) Ist F wie in (a) und $G\colon [0,1]\times[a,b]\to U$ eine Homotopie von η nach θ in U bei festen Endpunkten, so ist

$$F*G\colon [0,1]\times[a,b]\to U,\ (s,t)\mapsto \begin{cases} F(2s,t) & \text{für } s\in[0,\frac{1}{2}],\\ G(2s-1,t) & \text{für } s\in[\frac{1}{2},1]\end{cases}$$

eine Homotopie von γ nach θ in U bei festen Endpunkten.

In U bei festen Endpunkten homotop zu sein, ist also eine Äquivalenzrelation auf der Menge alle Wege in U mit festem Definitionsbereich $[a,b]$.

Beweis. (a) Offenbar ist F^- stetig und hat die beschriebenen Eigenschaften.

(b) Da $F*G$ auf den abgeschlossenen Teilmengen $[0,\frac{1}{2}]\times[a,b]$ und $[\frac{1}{2},1]\times[a,b]$ von $[0,1]\times[a,b]$ stetig ist, ist $F*G$ nach dem Klebelemma stetig. $\square$.

Lemma 17.8

Seien in der Situation von Definition 17.5 sowohl $\eta\colon [a,b] \to U$ als auch $\theta\colon [a,b] \to U$ stückweise stetig differenzierbare Wege, die bei festen Endpunkten in U zu γ homotop sind. Dann ist $\int_\eta f(\zeta)\,d\zeta = \int_\theta f(\zeta)\,d\zeta$.

Beweis. Es sei $F\colon [0,1] \times [a,b] \to U$ eine Homotopie γ nach η in U bei festen Endpunkten und $G\colon [0,1] \times [a,b] \to U$ eine Homotopie von γ nach θ in U bei festen Endpunkten. Dann ist $F^- * G$ eine Homotopie von η nach θ in U bei festen Endpunkten. Nach Satz 17.3 ist somit $\int_\eta f(\zeta)\,d\zeta = \int_\theta f(\zeta)\,d\zeta$. $\square$

Bemerkung 17.9

Die erste Aussage von Satz 17.3 bleibt auch gültig, wenn γ und η lediglich stetige Wege sind, nicht notwendig stückweise C^1.

Sind nämlich $\theta\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ und $\xi\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ stückweise stetig differenzierbare Wege derart, dass γ in U zu θ und η in U zu ξ homotop ist bei festen Endpunkten, so ist nach Lemma 17.7 auch

θ zu ξ homotop in U bei festen Endpunkten und somit

$$\int_\gamma f(\zeta)\,d\zeta \overset{def}{=} \int_\theta f(\zeta)\,d\zeta \overset{17.3}{=} \int_\xi f(\zeta)\,d\zeta \overset{def}{=} \int_\eta f(\zeta)\,d\zeta. \;\square$$

Beweis der zweiten Aussage von Satz 17.3. Es seien $\gamma\colon [a,b] \to U$ und $\eta\colon [a,b] \to U$ geschlossene (nicht notwendig stückweise stetig differenzierbare) Wege, so dass es eine Homotopie $F\colon [0,1] \times [a,b] \to U$ geschlossener Wege in U von γ nach η gibt. Nach Umparametrisieren dürfen wir annehmen, dass $[a,b] = [0,1]$. Sei $u := \eta(0) = \eta(1)$ und

$$c_u\colon [0,1] \to U, \quad t \mapsto u$$

der zugehörige konstante Weg. Weiter betrachten wir den Weg

$$\theta\colon [0,1] \to U, \quad s \mapsto F(s,0) = F(s,1).$$

Wir definieren

$$H\colon [0,1] \times [0,3] \to U$$

stückweise wie folgt: Für $(s,t) \in [0,1] \times [1,2]$ sei $H(s,t) := F(s,t-1)$. Für $(s,t) \in [0,1] \times [0,1]$ sei $H(s,t) := u$ wenn $t \leq s$,

$$H(s,t) := \theta(s+1-t)$$

wenn $t \geq s$, so dass also H auf der Verbindungsstrecke von $(0, 1-s)$ und $(s, 1)$ den konstanten Wert $\theta(s)$ hat. Für $(s,t) \in [0,1] \times [2,3]$ sei $H(s,t) := u$ wenn $t \geq 3-s$,

$$H(s,t) := \theta(s+t-2),$$

so dass also H auf der Verbindungsstrecke von $(s,2)$ und $(0,2+s)$ den konstanten Wert $\theta(s)$ hat. Nach dem Klebelemma ist H stetig und somit eine Homotopie in U von $\theta^- \oplus \gamma \oplus \theta$ nach $c_u \oplus \eta \oplus c_u$ (siehe Skizze). Nach Bemerkung 17.9 ist

$$\int_{\theta^- \oplus \gamma \oplus \theta} f(\zeta)\, d\zeta = \int_{c_u \oplus \eta \oplus c_u} f(\zeta)\, d\zeta,$$

wobei das Integral auf der linken Seite gleich

$$-\int_\theta f(\zeta)\, d\zeta + \int_\gamma f(\zeta)\, d\zeta + \int_\theta f(\zeta)\, d\zeta = \int_\gamma f(\zeta)\, d\zeta$$

ist, das auf der rechten Seite gleich

$$\int_{c_u} f(\zeta)\, d\zeta + \int_\eta f(\zeta)\, d\zeta + \int_{c_u} f(\zeta)\, d\zeta = \int_\eta f(\zeta)\, d\zeta. \quad \square$$

Definition 17.10

Ein Gebiet $U \subseteq \mathbb{C}$ heißt **einfach zusammenhängend**, wenn für alle Wege $\gamma\colon [a,b] \to U$ und $\eta\colon [a,b] \to U$ mit $\gamma(a) = \eta(a)$ und $\gamma(b) = \eta(b)$ eine Homotopie F in U von γ nach η existiert, mit festen Endpunkten.

Satz 17.11

Ist $U \subseteq \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet, so hat jede holomorphe Funktion $f\colon U \to \mathbb{C}$ auf U eine Stammfunktion.

Beweis. Sei $z_0 \in U$ fest. Für $z \in U$ wählen wir einen Weg γ in U von z_0 nach z und setzen

$$F(z) := \int_\gamma f(\zeta)\, d\zeta.$$

Man beachte, dass $F(z)$ unabhängig von der Wahl von γ ist, da wegen des einfachen Zusammenhangs von U alle Wege von z_0 nach z in U bei festen Endpunkten zueinander homotop sind und somit nach Bemerkung 17.9 die gleichen Integrale liefern. Für jedes

$w \in U$ existiert ein $\varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon(w) \subseteq U$. Ist γ ein Weg von z_0 nach w und $\gamma_{w,z}$ der geradlinige Weg von w nach z, so ist nach dem Beweis von Satz 4.3

$$B_\varepsilon(w) \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto \int_{\gamma_{w,z}} f(\zeta)\, d\zeta$$

eine Stammfunktion für $f|_{B_\varepsilon(w)}$, also auch

$$B_\varepsilon(w) \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto F(w) + \int_{\gamma_{w,z}} f(\zeta)\, d\zeta = \int_{\gamma \oplus \gamma_{w,z}} f(\zeta)\, d\zeta = F(z). \square$$

Satz 17.12

Es sei $U \subseteq \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet und $f\colon U \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion mit $0 \notin f(U)$. Dann gilt:

(a) Es existiert eine holomorphe Funktion $g\colon U \to \mathbb{C}$ derart, dass $f(z) = e^{g(z)}$ für alle $z \in U$ (ein **Logarithmus** von f). Für jeden Logarithmus G von f existiert ein $k \in \mathbb{Z}$ mit $G = g + 2\pi i k$.

(b) Für jedes $m \in \mathbb{N}$ existiert eine holomorphe Funktion $h\colon U \to \mathbb{C}$ mit $f = h^m$ (eine ***m*te Wurzel** von f). Für jede $m$te Wurzel H existiert ein $k \in \{0, 1, \ldots, m-1\}$ mit $H = e^{2\pi i k/m} h$.

Beweis. Man zeigt dies wie Satz 12.1 bzw. Satz 12.4. Dort wurde nur die Existenz von Stammfunktionen benutzt, die für einfach zusammenhängendes U nach Satz 17.11 ebenso gewährleistet ist. □

Definition 17.13

Eine Teilmenge $U \subseteq \mathbb{C}$ heißt **kontrahierbar**, wenn es für ein $w \in U$ eine Homotopie $F\colon [0,1] \times U \to U$ von id_U zur konstanten Funktion $c_w\colon U \to U$, $z \mapsto w$ gibt.

Es ist also F stetig, $F(0,z) = z$ und $F(1,z) = w$ für alle $z \in U$.

Beispiel 17.14

Jedes Sterngebiet $U \subseteq \mathbb{C}$ ist kontrahierbar.

Ist nämlich U sternförmig bezüglich $w \in U$, so ist

$$F\colon [0,1] \times U \to U, \quad F(s,z) := z + s(w-z)$$

eine Homotopie in U von id_U nach c_w.

Satz 17.15

Ist ein Gebiet $U \subseteq \mathbb{C}$ kontrahierbar (also z.B. sternförmig oder konvex), so ist U einfach zusammenhängend.

Lemma 17.16

Es sei $q\colon K \to L$ eine surjektive stetige Abbildung zwischen kompakten metrischen Räumen und $f\colon K \to X$ eine stetige Abbildung in einen weiteren metrischen Raum derart, dass

$$f(x) = f(y) \text{ für alle } x, y \in K \text{ mit } q(x) = q(y),$$

so dass also $g\colon L \to X$, $g(q(x)) := f(x)$ für $x \in K$ wohldefiniert ist. Dann ist g stetig.

Beweis. Ist $A \subseteq X$ abgeschlossen, so ist $f^{-1}(A)$ in K abgeschlossen und somit kompakt, also $q(f^{-1}(A))$ eine kompakte Teilmenge von L und somit abgeschlossen in L. Da q surjektiv ist, gilt

$$g^{-1}(A) = q(q^{-1}(g^{-1}(A))) = q((g \circ q)^{-1}(A)) = q(f^{-1}(A))$$

und nach dem Vorigen ist dieses Urbild abgeschlossen in L. Also ist g stetig. $\square$

Beweis von Satz 17.15. Es seien $\gamma\colon [a,b] \to U$ und $\eta\colon [a,b] \to U$ Wege mit $u := \gamma(a) = \eta(a)$ und $v := \gamma(b) = \eta(b)$. Nach Umparametrisieren sei o.B.d.A. $[a,b] = [0,1]$. Es sei weiter $F\colon [0,1] \times U \to U$ eine Homotopie von id_U nach c_w für ein $w \in U$. Wir erhalten Wege $\theta, \xi\colon [0,1] \to U$ via

$$\theta(s) := F(s, \gamma(a)) \quad \text{bzw.} \quad \xi(s) := F(s, \gamma(b)).$$

Sei $\Delta_1 \subseteq [0,1] \times [0,1]$ das Dreieck mit den Ecken $(0,0)$, $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ und $(0,1)$. Die Abbildung

$$q_1\colon [0,1] \times [0,1] \to \Delta_1, \quad (x,y) \mapsto (0,y) + x(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2} - y)$$

ist surjektiv und stetig mit $q_1(1,y) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ für alle $y \in [0,1]$. Weiter ist $f_1\colon [0,1] \times [0,1] \to U$,

$$(s,t) \mapsto F(s, \gamma(t))$$

stetig und $f_1(1,t) = w$ für alle $t \in [0,1]$. Nach Lemma 17.16 gibt es also eine stetige Funktion $g_1\colon \Delta_1 \to \mathbb{C}$ derart, dass

$$g_1 \circ q_1 = f_1.$$

Dann ist $g_1(0,t) = \gamma(t)$ für alle $t \in [0,1]$; weiter ist

$$g_1(s,s)=\theta(2s) \quad \text{und} \qquad g_1(s,1-s)=\xi(2s)$$

für alle $s \in [0,\frac{1}{2}]$. Analog erhalten wir auf dem Dreieck Δ_2 mit den Ecken $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$, $(1,0)$ und $(1,1)$ eine stetige Funktion $g_2\colon \Delta_2 \to U$ derart, dass $g_2(1,t)=\eta(t)$ für alle $t \in [0,1]$, $g_2(1-s,s)=\theta(2s)$ für alle $s \in [0,\frac{1}{2}]$ und $g_2(s,s)=\xi(2-2s)$ für alle $s \in [\frac{1}{2},1]$. Wir definieren $H\colon [0,1]\times[0,1] \to U$ durch $H|_{\Delta_1} := g_1$; $H|_{\Delta_2} := g_2$;

$$H(s,t) := \theta(2t)$$

für alle $(s,t) \in [0,1]\times[0,1]$ mit $t \leq s$ und $t \leq 1-s$; und

$$H(s,t) := \xi(2-2t)$$

für alle $(s,t) \in [0,1]\times[0,1]$ mit $t \geq s$ und $t \geq 1-s$ (s. Skizze). Dann ist H eine Homotopie von γ nach η bei festen Endpunkten. $\square$

Satz 17.17

Es sei $U \subseteq \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet. Ist ein Gebiet $V \subseteq \mathbb{C}$ zu U homöomorph, so ist auch V einfach zusammenhängend.

Beweis. Es sei $\phi\colon U \to V$ ein Homöomorphismus, also stetig und bijektiv mit stetiger Umkehrfunktion. Sind $\gamma\colon [a,b] \to V$ und $\eta\colon [a,b] \to V$ Wege mit $\gamma(a) = \eta(a)$ und $\gamma(b) = \eta(b)$, so sind $\tilde{\gamma} := \phi^{-1} \circ \gamma$ und $\tilde{\eta} := \phi^{-1} \circ \eta$ Wege in U mit $\tilde{\gamma}(a) = \tilde{\eta}(a)$ und $\tilde{\gamma}(b) = \tilde{\eta}(b)$. Da U einfach zusammenhängend ist, gibt es eine Homotopie $F\colon [0,1] \times [a,b] \to U$ in U von $\tilde{\gamma}$ nach $\tilde{\eta}$ mit festen Endpunkten. Dann ist $\phi \circ F$ eine Homotopie in V von γ nach η mit festen Endpunkten. $\square$

Beispiel 17.18

Es ist $U :=]1,2[\times]0,\infty[$ eine konvexe offene Menge und somit ein einfach zusammenhängendes Gebiet in $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$. Die Abbildung

$$\phi\colon U \to \mathbb{C}, \quad (r,t) \mapsto (r+t)e^{it} = (r+t)(\cos t, \sin t)$$

ist injektiv und stetig differenzierbar mit Jacobimatrix

$$J_\phi(r,t) = \begin{pmatrix} \cos t & \cos t - (r+t)\sin t \\ \sin t & \sin t + (r+t)\cos t \end{pmatrix}.$$

Da $\det J_\phi(r,t) = r + t \neq 0$ für alle $(r,t) \in U$, ist $V := \phi(U)$ offen in $\mathbb{C}$ nach dem Satz über die Umkehrfunktion und $\phi\colon U \to V$ ein C^1-Diffeomorphismus, insbesondere also ein Homöomorphismus. Nach Satz 17.17 ist somit V einfach zusammenhängend.

Eine Skizze von V finden Sie im Anhang; insbesondere ist V nicht sternförmig.

Lemma 18.1

Ist $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ ein C^1-Weg und $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \gamma([a,b])$, so gibt es für jedes $w \in \mathbb{C}$ mit $\gamma(a) - z_0 = e^w$ genau einen C^1-Weg $\theta\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ derart, dass $\theta(a) = w$ und

$$z_0 + e^{\theta(t)} = \gamma(t) \quad \text{für alle } \; t \in [a,b]. \tag{1}$$

Es ist

$$\theta(b) - \theta(a) = \int_\gamma \frac{1}{\zeta - z_0}\, d\zeta; \tag{2}$$

insbesondere ist $\theta(b) - \theta(a)$ unabhängig von der Wahl von w. Ist γ zudem ein geschlossener Weg, so ist $\theta(b) - \theta(a) \in 2\pi i \mathbb{Z}$.

Beweis. Erfüllt ein C^1-Weg $\theta\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ mit $\theta(a) = w$ die Bedingung (1), so gilt

$$\gamma'(t) = \frac{d}{dt} e^{\theta(t)} = e^{\theta(t)}\theta'(t) = (\gamma(t) - z_0)\theta'(t)$$

für alle $t \in [a,b]$, also $\theta'(t) = (\gamma(t) - z_0)^{-1}\gamma'(t)$ und somit

$$\theta(t) = w + \int_a^t \theta'(s)\, ds = w + \int_a^t \frac{1}{\gamma(s) - z_0} \gamma'(s)\, ds; \qquad (3)$$

es ist θ also eindeutig festgelegt. Definieren wir $\theta\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ durch die rechte Seite von (3), so ist $\theta(a) = w$ und $\theta'(t) = (\gamma(t) - z_0)^{-1}\gamma'(t)$. Die Hilfsfunktion

$$h\colon [a,b] \to \mathbb{C}, \quad t \mapsto (\gamma(t) - z_0)e^{-\theta(t)}$$

erfüllt also $h(a) = (\gamma(a) - z_0)e^{-\theta(a)} = 1$ und

$$h'(t) = \gamma'(t)e^{-\theta(t)} - (\gamma(t) - z_0)e^{-\theta(t)}\theta'(t) = 0.$$

Also ist $h(t) = 1$ für alle $t \in [a,b]$ und somit $\gamma(t) - z_0 = e^{\theta(t)}$. Nach (3) gilt insbesondere

$$\theta(b) - \theta(a) = \int_a^b \frac{1}{\gamma(s) - z_0} \gamma'(s)\, ds = \int_\gamma \frac{1}{\zeta - z_0}\, d\zeta,$$

also (2). Die Differenz ist unabhängig von der Wahl von w, da w in der rechten Seite nicht vorkommt. Ist γ geschlossenen, so ist

$$z_0 + e^{\theta(a)} = \gamma(a) = \gamma(b) = z_0 + e^{\theta(b)},$$

somit $e^{\theta(a)} = e^{\theta(b)}$ und folglich $\theta(b) - \theta(a) \in 2\pi i\mathbb{Z}$. $\square$

Sei nun $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ lediglich stückweise C^1 und $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \gamma([a,b])$. Sind $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ derart, dass $\gamma|_{[t_{j-1},t_j]}$ stetig differenzierbar ist für alle $j \in \{1,\ldots,n\}$, so definieren wir zu gegebenem $w \in \mathbb{C}$ mit $e^w = \gamma(a) - z_0$ einen Weg $\theta\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ durch die rechte Seite von (3). Der stückweise C^1-Weg θ ist dann durch $\theta(a) = w$ und $\gamma(t) - z_0 = e^{\theta(t)}$ eindeutig festgelegt, per Induktion nach n: Der Fall $n = 1$ ist in Lemma 18.1 erledigt. Per Induktion ist $\theta|_{[a,t_{n-1}]}$ festgelegt, insbesondere also $\theta(t_{n-1})$ und somit nach Lemma 18.1 auch $\theta|_{[t_{n-1},t_n]}$. Lemma 18.1 bleibt also gültig, wenn γ und θ lediglich stückweise C^1 angenommen werden.

Definition 18.2

Ist $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ ein Weg und $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \gamma([a,b])$, so definieren wir den **Index** von z_0 bezüglich γ als

$$\operatorname{ind}_{z_0}(\gamma) := \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{1}{\zeta - z_0}\, d\zeta.$$

Bemerkung 18.3

(a) Ist $\eta\colon [a,b] \to \mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ ein stückweise stetig differenzierbarer Weg, der in $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ zu γ homotop ist bei festen Endpunkten, so ist

$$\operatorname{ind}_{z_0}(\gamma) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{1}{\zeta - z_0}\, d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_\eta \frac{1}{\zeta - z_0}\, d\zeta = \operatorname{ind}_{z_0}(\eta); \quad (4)$$

nach Lemma 18.1 gilt somit $\operatorname{ind}_{z_0}(\gamma) \in \mathbb{Z}$, wenn γ (also auch η) ein geschlossener Weg ist.

(b) Sind $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ und $\eta\colon [a,b] \to \mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ Wege, die bei festen Endpunkten in $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ zueinander homotop sind, so gilt (4) wegen der Homotopieinvarianz komplexer Kurvenintegrale.

Der Index wird auch **Umlaufzahl** genannt; anschaulich bedeutet $\operatorname{ind}_{z_0}(\gamma)$ im Falle eines geschlossenen Wegs γ, wie oft dieser im z_0 herumläuft. Ist etwa $\operatorname{ind}_{z_0}(\gamma) = 3$, so läuft γ dreimal um z_0 im Gegenuhrzeigersinn; ist $\operatorname{ind}_{z_0}(\gamma) = -4$, so läuft γ viermal um z_0 im Uhrzeigersinn.

Beispiel 18.4

Für $z_0 \in \mathbb{C}$, $r > 0$ und $k \in \mathbb{Z}$ ist

$$\gamma\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{C} \setminus \{z_0\}, \quad t \mapsto z_0 + re^{ikt}$$

ein C^1-Weg. Mit $w := \ln(r)$ ist $e^w = r = \gamma(0) - z_0$. Weiter ist

$$\theta\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{C}, \quad t \mapsto \ln(r) + ikt$$

ein C^1-Weg mit $\theta(0) = \ln(r) = w$ und $e^{\theta(t)} = re^{ikt} = \gamma(t) - z_0$. Folglich ist

$$\operatorname{ind}_{z_0}(\gamma) = \frac{1}{2\pi i}(\theta(2\pi) - \theta(0)) = \frac{2\pi ik}{2\pi i} = k.$$

Beispiel 18.5

Gegeben $z_0 \in \mathbb{C}$ und $r > 0$ betrachten wir den geschlossenen C^1-Weg $\gamma\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, $t \mapsto z_0 + re^{it}$. Dann gilt

$$\operatorname{ind}_z(\gamma) = \begin{cases} 1 & \text{wenn } z \in B_r(z_0); \\ 0 & \text{wenn } z \in \mathbb{C} \setminus \overline{B}_r(z_0). \end{cases}$$

In der Tat ist $\operatorname{ind}_z(\gamma) = 1$ für alle $z \in B_r(z_0)$ nach Beispiel 4.5. Für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \overline{B}_r(z_0)$ ist $\operatorname{ind}_z(\gamma) = 0$, denn für $R := |z - z_0| > r$ ist die Funktion

$$B_R(z_0) \to \mathbb{C}, \quad \zeta \mapsto \frac{1}{\zeta - z}$$

holomorph, somit $\int_{|\zeta - z_0| = r} \frac{1}{\zeta - z}\, d\zeta = 0$ nach dem Cauchyschen Integralsatz für Sterngebiete (Folgerung 4.4).

Satz 18.6 (Cauchyscher Integralsatz für einfach zusammenhängende Gebiete)

Ist $U \subseteq \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet, so gilt

$$\int_\gamma f(\zeta)\, d\zeta = 0$$

für jede holomorphe Funktion $f : U \to \mathbb{C}$ und jeden geschlossenen Weg γ in U.

Beweis. Es sei η ein stückweise stetig differenzierbarer Weg, der in U zu γ homotop ist bei festen Endpunkten. Da f nach Satz 17.11 auf U eine Stammfunktion besitzt, gilt nach Satz 2.6 $\int_\gamma f(\zeta)\, d\zeta = \int_\eta f(\zeta)\, d\zeta = 0$. $\square$

Satz 18.7 (Cauchysche Integralformel für einfach zusammenhängende Gebiete)

Es sei $U \subseteq \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet, $f\colon U \to \mathbb{C}$ holomorph und $\gamma\colon [a,b] \to U$ ein geschlossener Weg. Dann gilt

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta = f(z)\,\mathrm{ind}_z(\gamma)$$

für alle $z \in U \setminus \gamma([a,b])$.

Beweis. Die Funktion

$$g\colon U \to \mathbb{C}, \quad \zeta \mapsto \begin{cases} \frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta - z} & \text{wenn } \zeta \neq z; \\ f'(z) & \text{wenn } \zeta = z \end{cases}$$

ist holomorph außer an der Stelle z und dort stetig, also auf ganz U holomorph (da an der Stelle z eine hebbare Singularität vorliegt). Nach Satz 18.6 ist also

$$0 = \int_\gamma g(\zeta)\,d\zeta = \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta - f(z)\overbrace{\int_\gamma \frac{1}{\zeta - z}\,d\zeta}^{=2\pi i\,\mathrm{ind}_z(\gamma)}.$$

Nun teile man durch $2\pi i$ und löse auf. □

Ist $\gamma\colon [a, b] \to \mathbb{C}$ ein Weg, so schreiben wir auch $\operatorname{im}(\gamma) := \gamma([a, b])$.

Satz 19.1 (Cauchyscher Integralsatz und Integralformel).

Es seien $U \subseteq \mathbb{C}$ eine offene Teilmenge, $f\colon U \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion und $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ geschlossene Wege in U derart, dass

$$\sum_{j=1}^{n} \operatorname{ind}_z(\gamma_j) = 0 \tag{1}$$

für alle $z \in \mathbb{C} \setminus U$. Dann gilt

$$\sum_{j=1}^{n} \int_{\gamma_j} f(\zeta)\, d\zeta = 0. \tag{2}$$

Weiter gilt für alle $z \in U \setminus \bigcup_{j=1}^{n} \operatorname{im}(\gamma_j)$

$$\frac{1}{2\pi i} \sum_{j=1}^{n} \int_{\gamma_j} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = f(z) \sum_{j=1}^{n} \operatorname{ind}_z(\gamma_j). \tag{3}$$

Beim Beweis nutzt ein Lemma, das wir danach beweisen:

Lemma 19.2

Es sei $U \subseteq \mathbb{C}$ eine offene Teilmenge und $f\colon U \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion. Dann ist die Funktion

$$g\colon U \times U \to \mathbb{C}, \quad (z,w) \mapsto \begin{cases} \frac{f(w)-f(z)}{w-z} & \text{wenn } \ z \neq w; \\ f'(z) & \text{wenn } \ z = w \end{cases}$$

stetig.

In der Situation von Satz 19.1 sei $K := \bigcup_{j=1}^n \operatorname{im}(\gamma_j)$.

Lemma 19.3

Die Funktion $h\colon U \to \mathbb{C}$,

$$z \mapsto \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=1}^{n} \int_{\gamma_j} g(z,\zeta)\, d\zeta$$

ist holomorph.

Beweis. Da g stetig ist, ist h nach dem Satz über parameterabhängige Integrale stetig. Für festes $w \in U$ ist $g(\cdot, w)$ holomorph. Nach dem Lemma von Goursat und Aufgabe P12 gilt für alle $a, b, c \in \mathbb{C}$ mit $\Delta(a,b,c) \subseteq U$

$$\int_{\gamma_{a,b,c}} h(\omega)\, d\omega = \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=1}^{n} \int_{\gamma_j} \underbrace{\int_{\gamma_{a,b,c}} g(\omega,\zeta)\, d\omega\; d\zeta}_{=0} = 0.$$

Nach dem Satz von Morera ist h somit holomorph. $\square$

Beweis von Satz 19.1. Wir behaupten, dass die Funktion h aus Lemma 19.3 $h = 0$ erfüllt. Ist dies richtig, so gilt für alle $z \in U \setminus K$

$$\begin{aligned}
0 &= h(z) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=1}^{n} \int_{\gamma_j} g(z,\zeta)\, d\zeta \\
&= \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=1}^{n} \int_{\gamma_j} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=1}^{n} \int_{\gamma_j} \frac{f(z)}{\zeta - z}\, d\zeta \\
&= \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=1}^{n} \int_{\gamma_j} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta - f(z) \sum_{j=1}^{n} \operatorname{ind}_z(\gamma_j).
\end{aligned}$$

Auflösen liefert (3).

Beweis der Behauptung: Wir definieren

$U_1 := \{z \in \mathbb{C} \setminus K \colon \sum_{j=1}^n \operatorname{ind}_z(\gamma_j) = 0\}$ und betrachten die nach Lemma 6.1 holomorphe Funktion

$$h_1 \colon U_1 \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=1}^n \int_{\gamma_j} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta.$$

Für $z \in U \cap U_1$ ist

$$h(z) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=1}^n \int_{\gamma_j} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta + f(z) \overbrace{\sum_{j=1}^n \operatorname{ind}_z(\gamma_j)}^{=0} = h_1(z),$$

da die zweite Summe per Definition von U_1 verschwindet. Somit ist

$$\psi \colon U \cup U_1 \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto \begin{cases} h(z) & \text{wenn } z \in U; \\ h_1(z) & \text{wenn } z \in U_1 \end{cases}$$

wohldefiniert und holomorph. Nach (1) ist $\mathbb{C} \setminus U \subseteq U_1$, somit $U \cup U_1 = \mathbb{C}$, also ψ eine ganze Funktion. Beachten Sie, dass $\mathbb{Z} \ni \operatorname{ind}_z(\gamma_j) \to 0$ für $|z| \to \infty$, somit $\operatorname{ind}_z(\gamma_j) = 0$ für $z \in \mathbb{C} \setminus K$ mit $|z|$ genügend groß. Dann ist also $z \in U_1$ und somit $\psi(z) = h_1(z) \to 0$ für $|z| \to \infty$. Also ist ψ eine beschränkte ganze Funktion und somit konstant nach dem Satz von Liouville. Da

$\psi(z) \to 0$ für $|z| \to \infty$, ist $\psi = 0$ und somit $h = 0$, wie behauptet.

Zum Beweis von (2) wende man (3) für $z \in U \setminus K$ an auf die Hilfsfunktion $F\colon U \to \mathbb{C}$, $w \mapsto (w - z)f(w)$. Wir erhalten

$$\frac{1}{2\pi i}\sum_{j=1}^{n}\int_{\gamma_j} f(\zeta)\,d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\sum_{j=1}^{n}\int_{\gamma_j}\frac{F(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta = F(z)\sum_{j=1}^{n}\mathrm{ind}_z(\gamma_j) = 0. \quad \square$$

Beispiel 19.4

Wir betrachten

$$f\colon \mathbb{C}\setminus\{1,2\} \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto \frac{1}{(z-1)(z-2)} = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1}$$

und wollen $\int_{|\zeta|=3} f(\zeta)\,d\zeta$ berechnen.

Hierzu sei $\gamma_1\colon [0,2\pi] \to \mathbb{C}\setminus\{1,2\}$, $t \mapsto 3e^{it}$ der obige Integrationsweg in $U := \mathbb{C}\setminus\{1,2\}$. Weiter seien $\gamma_2, \gamma_3\colon [0,2\pi] \to \mathbb{C}\setminus\{1,2\}$ die Wege, die durch

$$\gamma_2(t) = 1 + \frac{1}{2}e^{-it}, \quad \gamma_3(t) = 2 + \frac{1}{2}e^{-it}$$

gegeben sind. Für alle $z \in \mathbb{C} \setminus U = \{1, 2\}$ ist dann $\sum_{j=1}^{3} \operatorname{ind}_z(\gamma_j) = 0$ (vgl. Abbildung im Anhang), folglich

$$0 = \sum_{j=1}^{3} \int_{\gamma_j} f(\zeta)\, d\zeta,$$

also
$$\begin{aligned}
\int_{|\zeta|=3} f(\zeta)\, d\zeta &= \int_{\gamma_1} f(\zeta)\, d\zeta = -\int_{\gamma_2} f(\zeta)\, d\zeta - \int_{\gamma_3} f(\zeta)\, d\zeta \\
&= \int_{|\zeta-1|=\frac{1}{2}} f(\zeta)\, d\zeta + \int_{|\zeta-2|=\frac{1}{2}} f(\zeta)\, d\zeta \\
&= 2\pi i \operatorname{res}_1(f) + 2\pi i \operatorname{res}_2(f) = -2\pi i + 2\pi i = 0.
\end{aligned}$$

Bemerkung 19.5

Mit der gleichen Idee des “Hinzufügens von Hilfswegen” (wie hier γ_2 und γ_3) können wir in Bälde aus dem allgemeinen Cauchyschen Integralsatz eine allgemeine Form des Residuensatzes herleiten, die uns dann ermöglicht, viele komplexe Kurvenintegrale (und auch einige reelle Integrale) leicht zu berechnen.

Beweis von Lemma 19.2. Auf der offenen Menge aller $(z, w) \in U \times U$ mit $z \neq w$ (also $|z - w| > 0$) ist $g(z, w)$ ein Differenzenquotient der stetigen Funktion f, also stetig. Wir müssen noch zeigen, dass für $z_0 \in U$ die Funktion g an der Stelle (z_0, z_0) stetig ist. Es gibt ein $r > 0$ mit $B_r(z_0) \subseteq U$. Da $B_r(z_0)$ konvex ist, gilt nach dem Mittelwertsatz für alle $z, w \in B_r(z_0)$

$$\begin{aligned} f(w) - f(z) &= \int_0^1 Df(z + t(w - z))(w - z)\, dt \\ &= \int_0^1 f'(z + t(w - z))(w - z)\, dt. \end{aligned}$$

Ist $z \neq w$, so können wir durch $w - z$ teilen und sehen, dass $g(z,w) = h(z,w)$ mit

$$h\colon B_r(z_0) \times B_r(z_0) \to \mathbb{C}, \quad (z,w) \mapsto \int_0^1 f'(z + t(w-z))\,dt.$$

Da $(z,w,t) \mapsto f'(z + t(w-z))$ stetig ist, ist h stetig nach dem Satz über parameterabhängige Integrale. Man beachte, dass auch

$$h(z,z) = \int_0^1 f'(z)\,dt = f'(z) = g(z,z)$$

für alle $z \in B_r(z_0)$. Also ist $g = h$ und somit g stetig. $\square$

Satz 20.1 (Residuensatz)

Es seien $U \subseteq \mathbb{C}$ eine offene Teilmenge, $z_1, \ldots, z_m \in U$ paarweise verschiedene Elemente mit $m \in \mathbb{N}_0$ und

$$f\colon U \setminus \{z_1, \ldots, z_m\} \to \mathbb{C}$$

eine holomorphe Funktion. Sind $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ geschlossene Wege in $U \setminus \{z_1, \ldots, z_m\}$ derart, dass

$$\sum_{j=1}^{n} \operatorname{ind}_z(\gamma_j) = 0 \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C} \setminus U, \tag{1}$$

so gilt

$$\sum_{j=1}^{n} \int_{\gamma_j} f(\zeta)\, d\zeta = 2\pi i \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \operatorname{ind}_{z_k}(\gamma_j) \operatorname{res}_{z_k}(f). \tag{2}$$

Beispiel 20.2

$$\int_{|\zeta|=3} \frac{e^\zeta}{\zeta(\zeta-1)}\, d\zeta = 2\pi i \operatorname{res}_0(f) + 2\pi i \operatorname{res}_1(f) = 2\pi i(e-1)$$

mit $f\colon \mathbb{C}\setminus\{0,1\}\to\mathbb{C}$, $z\mapsto \frac{e^z}{z(z-1)}$.

Denn f ist holomorph und die Umlaufzahl des Weges $[0,2\pi]\to\mathbb{C}$, $t\mapsto 3e^{it}$ an den Stellen $0,1\in B_3(0)$ ist 1. Weiter sind 0 und 1 Pole der Ordnung 1 von f, da

$$f(z) = \frac{1}{z}\, g(z) \quad \text{bzw.} \quad f(z) = \frac{1}{z-1}\, h(z)$$

mit den holomorphen Funktionen $g\colon \mathbb{C}\setminus\{1\}\to\mathbb{C}$, $z\mapsto e^z/(z-1)$ und $h\colon \mathbb{C}\setminus\{0\}\to\mathbb{C}$, $z\mapsto e^z/z$, welche

$$g(0) = e^0/(-1) = -1 \neq 0 \quad \text{und} \quad h(1) = e/1 = e \neq 0$$

erfüllen (vgl. Bemerkung 16.5). Nach Aufgabe P17 (a) ist also $\operatorname{res}_0(f) = g(0) = -1$ und $\operatorname{res}_1(f) = h(1) = e$.

Beweis von Satz 20.1. Ist $m = 0$, so haben wir die leere Summe 0 auf der rechten Seite von (2) und auch die linke Seite verschwindet, nach dem Cauchyschen Integralsatz. Sei nun $m \geq 1$ und $r > 0$ so klein, dass $\overline{B}_r(z_k) \subseteq U$ für alle $k \in \{1, \ldots, m\}$ und $r < |z_k - z_\ell|$ für alle $k, \ell \in \{1, \ldots, m\}$ mit $k \neq \ell$. Für $k \in \{1, \ldots, m\}$ definieren wir

$$\nu_k := \sum_{j=1}^{n} \mathrm{ind}_{z_k}(\gamma_j)$$

und betrachten den Weg

$$\eta_k \colon [0, 2\pi] \to U \setminus \{z_1, \ldots, z_m\}, \quad t \mapsto z_k + re^{-i\nu_k t}.$$

Dann ist $\mathrm{ind}_{z_\ell}(\eta_k) = -\nu_k \delta_{\ell,k}$ für alle $k, \ell \in \{1, \ldots, m\}$ und somit erfüllt f mit den geschlossenen Wegen $\gamma_1, \ldots, \gamma_n, \eta_1, \ldots, \eta_m$ die Voraussetzungen des Cauchyschen Integralsatzes. Es ist also

$$0 = \sum_{j=1}^{n} \int_{\gamma_j} f(\zeta)\, d\zeta + \sum_{k=1}^{m} \int_{\eta_k} f(\zeta)\, d\zeta,$$

folglich

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n}\int_{\gamma_j} f(\zeta)\,d\zeta &= -\sum_{k=1}^{m}\int_{\eta_k} f(\zeta)\,d\zeta = \sum_{k=1}^{m}\nu_k\int_{|\zeta-z_k|=r} f(\zeta)\,d\zeta\\ &= 2\pi i\sum_{k=1}^{m}\nu_k\,\mathrm{res}_{z_k}(f),\end{aligned}$$

wobei für die zweite Gleichheit Lemma 2.11, Beispiel 2.12 und Lemma 2.13 benutzt wurden, für die letzte die "Baby-Fassung" des Residuensatzes (Satz 16.7). □

Der Residuensatz kann auch zur Berechnung von Integralen reellwertiger Funktionen benutzt werden. Exemplarisch diskutieren wir uneigentliche Integrale für geeignete rationale Funktionen. Für eine weitere Klasse von Beispielen vergleiche Aufgabe H21.

Satz 20.3

Es seien $2 \leq n \in \mathbb{N}$ und $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$ derart, dass $a_n \neq 0$ und die Polynomfunktion $q\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \sum_{j=0}^{n} a_j z^j$ keine Nullstellen in $\mathbb{R}$ besitzt. Seien $b_0, \ldots, b_m \in \mathbb{C}$ mit $m \in \mathbb{N}_0$ und $m \leq n-2$. Dann existiert das folgende uneigentliche Integral und es ist

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{b_m x^m + \cdots + b_0 x^0}{a_n x^n + \cdots + a_0 x^0}\, dx = 2\pi i \sum_{j\colon\ \mathrm{Im}(z_j)>0} \mathrm{res}_{z_j}(f) = -2\pi i \sum_{j\colon\ \mathrm{Im}(z_j)<0} \mathrm{res}_{z_j}(f),$$

wobei $z_1, \ldots, z_\ell$ die paarweise verschiedenen Nullstellen von q sind und $f\colon \mathbb{C} \setminus \{z_1, \ldots, z_\ell\} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \sum_{j=0}^{m} b_j z^j / q(z)$.

Das uneigentliche Integral ist zu verstehen als uneigentliches Integral des Realteils des Integranden plus i mal dem uneigentlichen Integral des Imaginärteils des Integranden.

Beispiel 20.4

Mit $f\colon \mathbb{C} \setminus \{i, -i\} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto (z+1)/(z^2+1)^2$ ist

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x+1}{(x^2+1)^2}\, dx = 2\pi i\, \mathrm{res}_i(f) = \frac{\pi}{2}.$$

Wegen $f(z) = \frac{1}{(z-i)^2} h(z)$ mit $h \colon \mathbb{C} \setminus \{-i\} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \frac{z+1}{(z+i)^2}$ mit $h(i) = (i+1)/(2i)^2 = -(i+1)/4 \neq 0$ ist i nach Bemerkung 16.5 ein Pol zweiter Ordnung von f. Nach der Quotientenregel ist

$$h'(z) = \frac{(z+i)^2 - (z+1)2(z+i)}{(z+i)^4} = \frac{z+i-2(z+1)}{(z+i)^3}$$

und somit $h'(i) = \frac{-2}{8(-1)i} = \frac{1}{4i}$. Nach Aufgabe P17 (a) ist

$$\operatorname{res}_i(f) = \frac{h'(i)}{1!} = \frac{1}{4i}.$$

Beweis von Satz 20.3. Das uneigentliche Integral existiert, da für ein $K > 0$ die uneigentlich Riemann-integrierbare Funktion

$$\frac{K}{1+x^2}$$

eine Majorante für den Real- bzw. Imaginärteil von $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $x \mapsto f(x)$ ist (vergleiche die folgenden Abschätzungen).

Für $|z| \to \infty$ gilt $h(z) := \sum_{k=0}^{n} a_k z^{k-n} \to a_n \neq 0$, es gibt somit ein $R > 0$ derart, dass $h(z) \neq 0$ für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| \geq R$. Da zudem $g(z) := \sum_{k=0}^{m} b_k z^{k-m} \to b_m$ für $|z| \to \infty$, folgt

$$\frac{g(z)}{h(z)} \to \frac{b_m}{a_n}.$$

Beachten Sie, dass

$$f(z) = z^{m-n}\frac{g(z)}{h(z)}$$

für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \{z_1, \ldots, z_\ell\}$, mit $m - n \leq -2$. Sei $C \in]0, \infty[$ mit $C > |b_m/a_n|$. Gegeben $\varepsilon > 0$ können wir nach Vergrößern von R erreichen, dass $|z_j| < R$ für alle $j \in \{1, \ldots, \ell\}$,

$$\left|\frac{g(z)}{h(z)}\right| \leq C \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C} \text{ mit } |z| \geq R$$

und

$$R^{m-n+1} \leq \frac{\varepsilon}{\pi C}.$$

Wir betrachten nun den geschlossenen Weg $\gamma_R\colon [0, 2R + \pi] \to \mathbb{C}$, der gegeben ist durch $\gamma_R(t) := -R + t$ wenn $t \in [0, 2R]$, $\gamma_R(t) = Re^{i(t-2R)}$ wenn $t \in [2R, 2R + \pi]$. Dann gilt $\mathrm{ind}_z(\gamma_R) = 1$ für alle z im offenen Halbkreis $S = \{w \in B_R(0)\colon \mathrm{Im}(w) > 0\}$, insbesondere also für alle $z = z_j$ mit $\mathrm{Im}(z_j) > 0$; für $z \in \mathbb{C}$ außerhalb $\overline{S}$ ist $\mathrm{ind}_z(\gamma_R) = 0$ (siehe Aufgabe P21). Mit dem

Residuensatz (angewandt z.B. mit $U := \mathbb{C} \setminus \{z_j : j \in \{1, \ldots, \ell\} \text{ mit } \mathrm{Im}(z_j) < 0\})$ erhalten wir

$$\int_{\gamma_R} f(\zeta)\, d\zeta = 2\pi i \sum_{j:\ \mathrm{Im}(z_j)>0} \mathrm{res}_{z_j}(f). \tag{3}$$

Das Integral auf der linken Seite ist hierbei gleich

$$\int_{-R}^{R} f(x)\, dx + \int_{\theta_R} f(\zeta)\, d\zeta$$

mit $\theta_R \colon [0, \pi] \to \mathbb{C}$, $t \mapsto Re^{it}$. Das erste dieser Integrale konvergiert gegen $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx$ für $R \to \infty$. Der Betrag des zweiten Integrals lässt sich nach oben abschätzen durch

$$L(\theta_R) \max\{|f(\zeta)| \colon \zeta \in \mathrm{im}(\theta_R)\} \leq \pi R \cdot R^{m-n} \cdot C \leq \pi \cdot \frac{\varepsilon}{\pi C} \cdot C \leq \varepsilon,$$

geht also gegen 0 für $R \to \infty$. Die linke Seite von (3) geht für $R \to \infty$ somit gegen $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx$. Für die zweite Formel arbeitet man mit unteren Halbkreisen statt oberen. $\square$

Lemma 20.5 (Index benachbarter Wege)

Es seien $\gamma_0\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ und $\gamma_1\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ stetig differenzierbare geschlossene Wege und $w \in \mathbb{C}$ derart, dass

$$(\forall t \in [a,b]) \quad |\gamma_1(t) - \gamma_0(t)| < |w - \gamma_0(t)|. \tag{4}$$

Dann ist $w \notin \gamma_0([a,b])$ und $w \notin \gamma_1([a,b])$; zudem gilt

$$\mathrm{ind}_w(\gamma_0) = \mathrm{ind}_w(\gamma_1).$$

Beweis. Da die rechte Seite in (4) positiv ist, ist $w \notin \gamma_0([a,b])$. Für jedes $t \in [a,b]$ gilt

$$|w - \gamma_1(t)| \geq |w - \gamma_0(t)| - |\gamma_0(t) - \gamma_1(t)|,$$

wobei die rechte Seite wegen (4) positiv ist; also ist $w \neq \gamma_1(t)$. Die im Lemma betrachteten Indizes sind also sinnvoll definiert und weiter ist somit

$$\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C}, \quad t \mapsto \frac{\gamma_1(t) - w}{\gamma_0(t) - w}$$

ein geschlossener C^1-Weg. Aus (4) folgt

$$|1-\gamma(t)| = \left|\frac{\gamma_0(t) - w - \gamma_1(t) + w}{\gamma_0(t) - w}\right| = \frac{|\gamma_0(t) - \gamma_1(t)|}{|\gamma_0(t) - w|} < 1$$

für alle $t \in [a, b]$, so dass also γ ein Weg in $B_1(1)$ ist und somit

$$\mathrm{ind}_0(\gamma) = 0,$$

da das Integral $\mathrm{ind}_0(\gamma)$ der holomorphen Funktion $B_1(1) \to \mathbb{C}$, $\zeta \mapsto \frac{1}{2\pi i}\frac{1}{\zeta}$ längs des geschlossenen Wegs γ verschwindet nach dem Cauchyschen Integralsatz für Sterngebiete. Nach der Quotientenregel ist nun

$$\gamma' = \frac{\gamma_1'(\gamma_0 - w) - (\gamma_1 - w)\gamma_0'}{(\gamma_0 - w)^2}$$

und somit

$$\frac{\gamma'}{\gamma} = \frac{\gamma_1'}{\gamma_1 - w} - \frac{\gamma_0'}{\gamma_0 - w}.$$

Es ist also

$$0 = \mathrm{ind}_0(\gamma) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{1}{\zeta}\, d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int_a^b \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)}\, dt$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_a^b \frac{\gamma_1'(t)}{\gamma_1(t)-w}\,dt - \frac{1}{2\pi i}\int_a^b \frac{\gamma_0'(t)}{\gamma_0(t)-w}\,dt$$
$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1} \frac{1}{\zeta-w}\,d\zeta - \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_0} \frac{1}{\zeta-w}\,d\zeta = \operatorname{ind}_w(\gamma_1) - \operatorname{ind}_w(\gamma_0). \ \square$$

Definition 20.6

Ist $U \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f\colon U \to \mathbb{C}$ eine nicht-konstante holomorphe Funktion, so gibt es für jede Nullstelle z_0 von f nach dem Identitätssatz ein kleinstes $m \in \mathbb{N}$ derart, dass $f^{(m)}(z_0) \neq 0$. Man nennt m die **Vielfachheit** der Nullstelle z_0. Ist $z_0 \in U$ beliebig und $w := f(z_0)$, so definiert man die **Vielfachheit der w-Stelle** z_0 als die Vielfachheit der Nullstelle z_0 von $f - w$. Ist $K \subseteq U$ eine kompakte Teilmenge, so enthält K nur endlich viele paarweise verschiedene Nullstellen $z_1, \ldots, z_n$ von f; sind $m_1, \ldots, m_n$ deren Vielfachheiten, so nennt man

$$m_1 + \cdots + m_n$$

die **Zahl der Nullstellen** von f in K.

In der Tat ist $K \cap f^{-1}(\{0\})$ kompakt und jede Nullstelle z ist nach dem Identitätssatz ein isolierter Punkt in $f^{-1}(\{0\})$, somit $\{z\}$ offen in $f^{-1}(\{0\})$ und somit in $f^{-1}(\{0\}) \cap K$; der kompakte Durchschnitt wird durch endlich viele solcher einpunktiger Mengen überdeckt.

Satz 20.7 (Satz von Rouché).

Es sei $U \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f \colon U \to \mathbb{C}$ eine nicht-konstante holomorphe Funktion, $z_0 \in U$ und $r > 0$ derart, dass $\overline{B}_r(z_0) \subseteq U$ ist und f auf $\partial \overline{B}_r(z_0)$ keine Nullstellen besitzt. Dann gilt:

(a) Die Zahl N_f der Nullstellen von f in $\overline{B}_r(z_0)$ ist gegeben durch

$$N_f = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - z_0| = r} \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)}\, d\zeta.$$

(b) Ist $g \colon U \to \mathbb{C}$ holomorph und $|g(\zeta) - f(\zeta)| < |f(\zeta)|$ für alle $\zeta \in \partial \overline{B}_r(z_0)$, so hat auch g keine Nullstellen auf $\partial \overline{B}_r(z_0)$ und g hat $N_g = N_f$ Nullstellen in $\overline{B}_r(z_0)$.

Beweis. (a) Sind $z_1, \ldots, z_n$ die paarweise verschiedenen Nullstellen von f in $B_r(z_0)$, ist nach Aufgabe P18 und deren Musterlösung sowie Aufgabe P17 jedes z_j ein Pol erster Ordnung von f'/f und die Vielfachheit m_j gleich $\operatorname{res}_{z_j}(f'/f)$. Nach dem Residuensatz ist

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta - z_0|=r}\frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)}\,d\zeta = \sum_{j=1}^{n}\operatorname{res}_{z_j}(f'/f) = \sum_{j=1}^{n} m_j = N_f.$$

Die linke Seite ist auch gleich $\operatorname{ind}_0(f\circ\gamma)$ mit $\gamma\colon [0,2\pi]\to\mathbb{C}$, $t\mapsto z_0+re^{it}$, da $(f\circ\gamma)'(t)=f'(\gamma(t))\gamma'(t)$; also ist

$$N_f = \operatorname{ind}_0(f\circ\gamma), \tag{5}$$

was gleich noch von Nutzen ist.

(b) Für $\zeta\in\mathbb{C}$ mit $|\zeta - z_0| = r$ ist
$|g(\zeta)|\geq |f(\zeta)| - |g(\zeta)-f(\zeta)| > 0$ per Voraussetzung, also ζ keine Nullstelle von g. Nun erfüllen $\gamma_0 := f\circ\gamma$ und $\gamma_1 := g\circ\gamma$ mit $w := 0$ die Voraussetzungen von Lemma 20.5. Benutzen wir (5) und die entsprechende Formel mit g an Stelle von f, folgt
$N_g = \operatorname{ind}_0(g\circ\gamma) = \operatorname{ind}_0(f\circ\gamma) = N_f$. $\square$

Satz 20.8

Es sei $U \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge holomorpher Funktionen, die gleichmäßig auf kompakten Mengen gegen eine Funktion $f\colon U \to \mathbb{C}$ konvergiert. Ist jedes f_n injektiv und f nicht konstant, so ist auch f injektiv.

Beweis. Andernfalls gäbe es $z_0 \neq z_1$ in U mit $f(z_0) = f(z_1)$; nach Ersetzen von f_n durch $f_n - f(z_0)$ und f durch $f - f(z_0)$ dürfen wir annehmen, dass $f(z_0) = f(z_1) = 0$. Da f nicht konstant und nach Satz 8.3 holomorph ist, können wir wegen des Identitätssatzes ein $r \in]0, |z_1 - z_0|/2]$ finden derart, dass $\overline{B}_r(z_0) \subseteq U$, $\overline{B}_r(z_1) \subseteq U$ und z_0 die einzige Nullstelle von f in $\overline{B}_r(z_0)$ ist, z_1 die einzige Nullstelle in $\overline{B}_r(z_1)$. Für $\zeta \in \partial\overline{B}_r(z_j)$ nimmt $|f(\zeta)|$ ein Minimum $\theta_j > 0$ an für $j \in \{0, 1\}$. Sei $\theta := \min\{\theta_1, \theta_2\}$. Ist n so groß, dass $|f_n(\zeta) - f(\zeta)| < \theta$ für alle $\zeta \in \partial\overline{B}_r(z_0) \cup \partial\overline{B}_r(z_1)$, so muss nach Satz 20.7 (b) auch f_n eine Nullstelle in $B_r(z_0)$ haben sowie eine in $B_r(z_1)$. Da $B_r(z_0) \cap B_r(z_1) = \emptyset$ per Wahl von r, hätte f_n also zwei Nullstellen, im Widerspruch zur Injektivität von f_n. $\square$

§21 Der Riemannsche Abbildungssatz

Sei $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} \colon |z| < 1\} = B_1(0)$ die offene Einheitskreisscheibe und

$$\mathbb{S} := \{z \in \mathbb{C} \colon |z| = 1\}$$

die komplexe Einheitskreislinie. Da $\mathbb{D}$ konvex ist, ist $\mathbb{D}$ scheibenförmig, also kontrahierbar und somit einfach zusammenhängend. Unser Ziel ist der folgende Satz:

Satz 21.1 (Riemannscher Abbildungssatz)

Für jedes einfach zusammenhängende Gebiet $U \subseteq \mathbb{C}$ mit $U \neq \mathbb{C}$ existiert eine biholomorphe Abbildung $f \colon U \to \mathbb{D}$, also ein bijektive holomorphe Funktionmit holomorpher Umkehrfunktion $f^{-1} \colon \mathbb{D} \to U$.

Hingegen ist $U := \mathbb{C}$ zwar ein einfach zusammenhängendes Gebiet, aber jede holomorphe Funktion $f \colon \mathbb{C} \to \mathbb{D}$ ist nach dem Satz von Liouville konstant und somit nicht biholomorph.

Die folgenden zwei Sätze nutzen beim Beweis des Riemannschen Abbildungssatzes.

Der folgende Satz wird uns ermöglichen, aus geeigneten Folgen holomorpher Funktionen eine kompakt konvergente Teilfolge auszuwählen. Der Beweis wird am Ende des Kapitels gegeben; er beruht auf dem Satz von Arzela-Ascoli, der in einem Spezialfall ebenfalls bereitgestellt und bewiesen wird.

Satz 21.2 (Satz von Montel)

Es sei $U \subseteq \mathbb{C}$ eine offene Menge und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge holomorpher Funktionen derart, dass für jede kompakte Teilmenge $K \subseteq U$ die Menge

$$\{f_n(z)\colon n \in \mathbb{N},\, z \in K\} \subseteq \mathbb{C}$$

beschränkt ist. Dann gibt es eine Teilfolge $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, die gleichmäßig auf kompakten Mengen gegen gegen eine holomorphe Funktion $f\colon U \to \mathbb{C}$ konvergiert.

Für $\alpha \in \mathbb{D}$ betrachten wir nun die holomorphe Funktion

$$\phi_\alpha\colon \{z \in \mathbb{C}\colon \overline{\alpha}z \neq 1\} \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto \frac{z-\alpha}{1-\overline{\alpha}z}. \tag{1}$$

Im Fall $\alpha = 0$ ist der Definitionsbereich ganz $\mathbb{C}$ und es ist $\phi_0 = \mathrm{id}_{\mathbb{C}}$; diese Abbildung bildet $\mathbb{D}$ auf sich selbst ab und ebenso $\mathbb{S}$. Im Fall $\alpha \neq 0$ hat ϕ_α den Definitionsbereich

$$\mathbb{C} \setminus \{1/\overline{\alpha}\},$$

wobei $|1/\overline{\alpha}| = 1/|\alpha| > 1$. Der Definitionsbereich ist also eine Obermenge von $\overline{\mathbb{D}} = \overline{B}_1(0)$.

Satz 21.3

Für $0 \neq \alpha \in \mathbb{D}$ ist ϕ_α injektiv, $\phi_\alpha(\mathbb{D}) = \mathbb{D}$ und $\phi_\alpha(\mathbb{S}) = \mathbb{S}$. Weiter ist $\phi_\alpha(\alpha) = 0$ und $\phi_\alpha(0) = -\alpha$. Es ist

$$\mathrm{im}(\phi_\alpha) = \mathbb{C} \setminus \{-1/\overline{\alpha}\}$$

und $(\phi_\alpha)^{-1} = \phi_{-\alpha}$. Weiter ist

$$\phi'_\alpha(0) = 1 - |\alpha|^2 \quad \text{und} \quad \phi'_\alpha(\alpha) = \frac{1}{1 - |\alpha|^2}.$$

Beweis. Wir zeigen zunächst, dass ϕ_α die Definitionslücke $-1/\overline{\alpha}$ von $\phi_{-\alpha}$ nicht als Funktionswert annimmt, so dass also die

Komposition $\phi_{-\alpha} \circ \phi_\alpha$ definiert werden kann. Für $z \in \mathbb{C} \setminus \{1/\overline{\alpha}\}$ ist

$$-\frac{1}{\overline{\alpha}} = \phi_\alpha(z) \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{1}{\overline{\alpha}} = \frac{z-\alpha}{1-\overline{\alpha}z} \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{1}{\overline{\alpha}}(1-\overline{\alpha}z) = z-\alpha$$
$$\Leftrightarrow \quad -\frac{1}{\overline{\alpha}} + z = z - \alpha \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{\overline{\alpha}} = \alpha.$$

Diese Bedingung ist nie erfüllt, da $|\alpha| < 1$ aber $|1/\overline{\alpha}| = 1/|\alpha| > 1$.

Für $z \in \mathbb{C} \setminus \{1/\overline{\alpha}\}$ berechnen wir nun durch Einsetzen und Erweitern mit $1 - \overline{\alpha}z$

$$\phi_{-\alpha}(\phi_\alpha(z)) = \frac{\frac{z-\alpha}{1-\overline{\alpha}z} + \alpha}{1 + \overline{\alpha}\frac{z-\alpha}{1-\overline{\alpha}z}} = \frac{z-\alpha+\alpha(1-\overline{\alpha}z)}{1-\overline{\alpha}z+\overline{\alpha}(z-\alpha)} = \frac{z(1-|\alpha|^2)}{1-|\alpha|^2} = z.$$

Also ist ϕ_α injektiv und das Bild von $\phi_{-\alpha}$ enthält ganz $\mathbb{C} \setminus \{1/\overline{\alpha}\}$. Da das Bild nach dem ersten Beweisschritt (mit $-\alpha$ an Stelle von α) auch eine Teilmenge von $\mathbb{C} \setminus \{1/\overline{\alpha}\}$ ist, folgt

$$\mathrm{im}(\phi_{-\alpha}) = \mathbb{C} \setminus \{1/\overline{\alpha}\}.$$

Ersetzen von α durch $-\alpha$ zeigt, dass auch $\mathrm{im}(\phi_\alpha) = \mathbb{C} \setminus \{-1/\overline{\alpha}\}$ ist; ϕ_α ist also bijektiv als Abbildung in diese Menge und wir schließen, dass $(\phi_\alpha)^{-1} = \phi_{-\alpha}$.

Nach der Quotientenregel ist

$$\phi'_\alpha(z) = \frac{(1-\overline{\alpha}z)-(z-\alpha)(-\overline{\alpha})}{(1-\overline{\alpha}z)^2}.$$

Also ist $\phi'_\alpha(0) = 1-|\alpha|^2$ und $\phi'_\alpha(\alpha) = \frac{1-|\alpha|^2}{(1-|\alpha|^2)^2} = \frac{1}{1-|\alpha|^2}$.

Ist $|z| = 1$, so ist $1 = zz^{-1} = z\overline{z}$ und somit

$$|\phi_\alpha(z)| = \frac{|z-\alpha|}{|1-\overline{\alpha}z|} = \frac{|z-\alpha|}{|z|\cdot|\overline{z}-\overline{\alpha}|} = \frac{|z-\alpha|}{|\overline{z-\alpha}|} = 1.$$

Also gilt $\phi_\alpha(\mathbb{S}) \subseteq \mathbb{S}$. Gegeben $z \in \mathbb{S}$ ist $\phi_{-\alpha}(z) \in \mathbb{S}$ und $z = \phi_\alpha(\phi_{-\alpha}(z)) \in \phi_\alpha(\mathbb{S})$, also $\mathbb{S} \subseteq \phi_\alpha(\mathbb{S})$ und somit $\phi_\alpha(\mathbb{S}) = \mathbb{S}$. Da ϕ_α injektiv ist und $\phi_\alpha(\mathbb{S}) = \mathbb{S}$, muss $\phi_\alpha(z) \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{S}$ sein für alle $z \in \mathbb{D}$. Gäbe es ein $z \in \mathbb{D}$ mit $|\phi_\alpha(z)| > 1$, so würde die stetige Funktion

$$h\colon [0,1] \to [0,\infty[, \quad t \mapsto |\phi_\alpha(tz)|$$

$h(1) > 1$ erfüllen und $|h(0)| = |\phi_\alpha(0)| = |-\alpha| < 1$, nach dem Zwischenwertsatz gäbe es also ein $\tau \in [0,1]$ mit $h(\tau) = 1$, im Widerspruch zu $\phi_\alpha(\tau z) \notin \mathbb{S}$. Also ist stets $|\phi_\alpha(z)| < 1$ und somit $\phi_\alpha(\mathbb{D}) \subseteq \mathbb{D}$. Da α beliebig war, ist auch $\phi_{-\alpha}(\mathbb{D}) \subseteq \mathbb{D}$ und somit $\phi_\alpha(\mathbb{D}) \supseteq \phi_\alpha(\phi_{-\alpha}(\mathbb{D})) = \mathrm{id}(\mathbb{D}) = \mathbb{D}$, also $\phi_\alpha(\mathbb{D}) = \mathbb{D}$. □

Beweis des Riemannschen Abbildungssatzes. Es sei $U \neq \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet. Weiter sei Σ die Menge aller holomorphen Funktionen $\psi\colon U \to \mathbb{D}$ derart, dass ψ injektiv ist. Die Strategie ist, ein $\psi \in \Sigma$ zu finden mit $\psi(U) = \mathbb{D}$. Nach dem Biholomorphie-Kriterium (Satz 14.9) ist $\psi\colon U \to \mathbb{D}$ dann biholomorph.

Schritt 1. Wir zeigen, dass $\Sigma \neq \emptyset$ ist. Sei $w_0 \in \mathbb{C} \setminus U$. Dann ist

$$f\colon U \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto z - w_0$$

holomorph und $0 \notin f(U)$. Nach Satz 17.12 existiert also eine holomorphe Funktion $g\colon U \to \mathbb{C}$ mit $g^2 = f$. Dann ist g injektiv, denn für alle $z_1 \neq z_2 \in U$ folgt aus

$$g(z_1)^2 = z_1 - w_0 \neq z_2 - w_0 = g(z_2)^2, \tag{2}$$

dass $g(z_1) \neq g(z_2)$. Aus (2) folgt zudem, dass $g(z_2) \neq -g(z_1)$. Auch im Falle $z_2 = z_1$ ist dies nicht möglich, da $g(z_1) \neq 0$. Da g nicht konstant und somit eine offene Abbildung ist, enthält $g(U)$ eine Kreisscheibe $\overline{B}_r(z_0)$. Dann ist $z_0 \neq 0$, also $z_0 \neq -z_0$ und nach Verkleinern von r dürfen wir annehmen, dass

$$\overline{B}_r(z_0) \cap \overline{B}_r(-z_0) = \emptyset.$$

Dann ist $g(U) \cap \overline{B}_r(-z_0) = \emptyset$. Gäbe es nämlich ein $z_2 \in U$ mit $g(z_2) \in \overline{B}_r(-z_0)$, so wäre $-g(z_2) \in -\overline{B}_r(-z_0) = \overline{B}_r(z_0) \subseteq g(U)$, es gäbe also ein $z_1 \in U$ mit $g(z_1) = -g(z_2)$, im Widerspruch zur Vorüberlegung. Definieren wir nun

$$\psi := \frac{r}{g + z_0},$$

so ist $|\psi(z)| = r/|g(z) + z_0| < 1$ weil $|g(z) + z_0| > r$ wegen $g(z) \notin \overline{B}_r(-z_0)$. Also ist $\psi(U) \subseteq \mathbb{D}$. Weiter ist ψ holomorph und wie g ist ψ injektiv (da $g(z) = \frac{r}{\psi(z)} - z_0$); also ist $\psi \in \Sigma$.

Schritt 2. Wir zeigen:

Ist $\psi \in \Sigma$ mit $\psi(U) \neq \mathbb{D}$ und $z_0 \in U$, so gibt es ein $\psi_1 \in \Sigma$ mit $|\psi_1'(z_0)| > |\psi'(z_0)|$.

Sei nämlich $\alpha \in \mathbb{D} \setminus \psi(U)$. Dann ist $\phi_\alpha \circ \psi \in \Sigma$, denn diese Komposition ist holomorph, injektiv und hat Bild in $\mathbb{D}$. Da $\phi_\alpha(\alpha) = 0$ gilt, ϕ_α injektiv ist und $\alpha \notin \psi(U)$, hat $\phi_\alpha \circ \psi \colon U \to \mathbb{C}$

keine Nullstelle. Also existiert eine holomorphe Funktion $g\colon U \to \mathbb{C}$ mit $g^2 = \phi_\alpha \circ \psi$. Da g^2 injektiv ist, ist auch g injektiv. Weiter ist wegen $|g(z)|^2 = |g(z)^2| = |\phi_\alpha(\psi(z))| < 1$ für jedes $z \in U$ auch $|g(z)| < 1$, also $g(U) \subseteq \mathbb{D}$ und somit $g \in \Sigma$. Insbesondere ist $\beta := g(z_0) \in \mathbb{D}$. Dann ist $\psi_1 := \phi_\beta \circ g \in \Sigma$. Wir benötigen auch das Element $\gamma := \psi(z_0) \in \mathbb{D}$. Mit der holomorphen Funktion

$$s\colon \mathbb{D} \to \mathbb{D}, \quad z \mapsto z^2$$

ist $s \circ g = \phi_\alpha \circ \psi$, also unter Benutzung von $g = \phi_{-\beta} \circ \psi_1$

$$\psi = \phi_{-\alpha} \circ s \circ g = \phi_{-\gamma} \circ \phi_\gamma \circ \phi_{-\alpha} \circ s \circ \phi_{-\beta} \circ \psi_1 = \phi_{-\gamma} \circ h \circ \psi_1$$

mit $h := \phi_\gamma \circ \phi_{-\alpha} \circ s \circ \phi_{-\beta}\colon \mathbb{D} \to \mathbb{D}$. Da $\psi_1(z_0) = \phi_\beta(\beta) = 0$ und $h(0) = 0$, liefert die Kettenregel

$$\psi'(z_0) = \phi'_{-\gamma}(0) h'(0) \psi'_1(z_0).$$

Nun ist h holomorph, $h(\mathbb{D}) \subseteq \mathbb{D}$ und h nicht injektiv (da $\phi_{-\beta}(\mathbb{D}) = \mathbb{D}$ und s auf $\mathbb{D}$ nicht injektiv ist). Nach dem Schwarzschen Lemma muss somit $|h'(0)| < 1$ sein und folglich ist

$$|\psi'(z_0)| = |\phi'_{-\gamma}(0)|\,|h'(0)|\,|\psi'_1(z_0)| < |\psi'_1(z_0)|;$$

benutzt wurde, dass $\psi_1'(z_0) \neq 0$ nach dem Biholomorphiekriterium und $|\phi'_{-\gamma}(0)| = 1 - |\gamma|^2 < 1$ nach Satz 21.3.

Schritt 3. Sei nun $z_0 \in U$ und

$$\theta := \sup\{|\psi'(z_0)| \colon \psi \in \Sigma\} \in [0, \infty].$$

Es existiert ein $r > 0$ mit $\overline{B}_r(z_0) \subseteq U$. Nach den Cauchyschen Abschätzungen (Folgerung 6.6) ist wegen $\psi(U) \subseteq \mathbb{D}$ dann

$$|\psi'(z_0)| \leq \frac{1}{r} \max\{|\psi(z)| \colon z \in \partial B_r(z_0)\} \leq \frac{1}{r}$$

für alle $\psi \in \Sigma$, also $\theta \leq \frac{1}{r} < \infty$. Es gibt eine Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in Σ mit

$$|f'(z_0)| \to \theta.$$

Da $\{f_n(z) \colon n \in \mathbb{N}, z \in U\} \subseteq \mathbb{D}$ beschränkt ist, gibt es nach dem Satz von Montel eine Teilfolge $(f_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$, die gleichmäßig auf kompakten Mengen gegen eine holomorphe Funktion $f \colon U \to \mathbb{C}$ konvergiert. Nach Ergänzung 8.4 gilt dann $f_{n_k}' \to f'$ gleichmäßig auf kompakten Mengen, somit insbesondere $f_{n_k}'(z_0) \to f'(z_0)$, woraus

$$|f'(z_0)| = \lim_{k \to \infty} |f_{n_k}'(z_0)| = \theta$$

folgt. Da $\theta \geq |\psi'(z_0)| > 0$ für jedes $\psi \in \Sigma$ (nach dem Biholomorphiekriterium), ist $\theta > 0$, somit $f'(z_0) \neq 0$ und folglich f nicht konstant. Nach Satz 20.8 ist also auch f injektiv. Für jedes $z \in U$ ist $|f(z)| = \lim_{k\to\infty} |f_{n_k}(z)| \leq 1$, also

$$f(U) \subseteq \overline{\mathbb{D}} = \overline{B}_1(0).$$

Mit dem Offenheitssatz folgt $f(U) \subseteq (\overline{\mathbb{D}})^o = \mathbb{D}$. Also ist $f \in \Sigma$. Da $|f'(z_0)| = \theta$ maximal ist, folgt mit Schritt 2, dass $f(U) = \mathbb{D}$ sein muss. $\square$

Wir folgern den Satz von Montel aus dem folgenden Spezialfall des Satzes von Arzela-Ascoli (allgemeinere Fassungen finden Sie später in der Literatur oder auch im Skript meiner aktuellen "Einführung in die Funktionalanalysis" in PANDA).

Satz 21.4 (Spezialfall des Satzes von Arzela-Ascoli)

Es sei $U \subseteq \mathbb{C}$ eine offene Menge und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Funktionen $f_n \colon U \to \mathbb{C}$ derart, dass gilt:

(a) Für jedes $z_0 \in U$ ist die Teilmenge $\{f_n(z_0) \colon n \in \mathbb{N}\}$ von $\mathbb{C}$ beschränkt;

(b) Für jedes $z_0 \in U$ gibt es eine offene z_0-Umgebung $U(z_0) \subseteq U$ und ein $L(z_0) \in [0, \infty[$ derart, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Funktion $f_n|_{U(z_0)} \colon U(z_0) \to \mathbb{C}$ Lipschitz-stetig ist mit Lipschitzkonstante $L(z_0)$.

Dann existiert eine Teilfolge $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, die gleichmäßig auf kompakten Mengen gegen eine stetige Funktion $f \colon U \to \mathbb{C}$ konvergiert.

Beweis des Satzes von Montel. Die Bedingung (a) des Satzes von Arzela-Ascoli ist per Voraussetzung erfüllt, da wir $K := \{z_0\}$ wählen können. Gegeben $z_0 \in U$ gibt es ein $r > 0$ derart, dass $K := \overline{B}_{2r}(z_0) \subseteq U$. Per Voraussetzung ist

$$M := \sup\{|f_n(z)| \colon n \in \mathbb{N},\, z \in K\} < \infty.$$

Sei $U(z_0) := B_r(z_0)$. Für alle $z \in U(z_0)$ ist $\overline{B}_r(z) \subseteq U$ und die Cauchysche Abschätzung liefert

$$|f_n'(z)| \leq \frac{1}{r} \sup\{|f_n(\zeta)| \colon \zeta \in \partial B_r(z)\} \leq \frac{M}{r} =: L(z_0)$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Für alle $n \in \mathbb{N}$ und $z, w \in U(z_0)$ gilt also

$$\begin{aligned} |f(w) - f(z)| &= \left| \int_0^1 f'(z + t(w-z))(w-z)\, dt \right| \\ &\leq \int_0^1 \underbrace{|f'(z + t(w-z))|}_{\leq L(z_0)} |w-z|\, dt \leq L(z_0)|w-z|. \end{aligned}$$

Nach dem Satz von Arzela-Ascoli hat $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ also eine Teilfolge, die gleichmäßig auf kompakten Mengen gegen eine stetige Funktion $f \colon U \to \mathbb{C}$ konvergiert. Nach Satz 8.3 ist f holomorph. $\square$

Beweis des Satzes von Arzela-Ascoli. Die Menge $A := U \cap (\mathbb{Q} + i\mathbb{Q})$ ist abzählbar, also von der Form $A = \{z_j \colon j \in \mathbb{N}\}$. Da $\{f_n(z_1) \colon n \in \mathbb{N}\}$ in $\mathbb{C}$ beschränkt ist, gibt es natürliche Zahlen

$$n(1,1) < n(1,2) < \cdots$$

derart, dass die Teilfolge $(f_{n(1,k)}(z_1))_{k \in \mathbb{N}}$ von $(f_n(z_1))_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathbb{C}$ konvergiert. Wir finden nun Teilfolgen $(f_{n(j,k)})_{k \in \mathbb{N}}$ von $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ für $j \in \mathbb{N}$ derart, dass gilt:

(i) Die Teilfolge $(f_{n(j,k)}(z_j))_{k\in\mathbb{N}}$ von $(f_n(z_j))_{n\in\mathbb{N}}$ ist in $\mathbb{C}$ konvergent.

(ii) Ist $j \geq 2$, so ist $(f_{n(j,k)})_{k\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge von $(f_{n(j-1,k)})_{k\in\mathbb{N}}$.

Ist nämlich $2 \leq j \in \mathbb{N}$ und haben wir schon $(n(\ell, k))_{k\in\mathbb{N}}$ für $\ell \in \{1, \ldots, j-1\}$, so ist $(f_{n(j-1,k)}(z_j))_{k\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge in $\mathbb{C}$ und hat somit eine konvergente Teilfolge $(f_{n(j-1,m_k)}(z_j))_{k\in\mathbb{N}}$; wir setzen $n(j,k) := n(j-1, m_k)$.

Nun ist $(f_{n(k,k)})_{k\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge von $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ derart, dass $(f_{n(k,k)}(z_j))_{k\in\mathbb{N}}$ für jedes $j \in \mathbb{N}$ konvergiert. Ist $K \subseteq U$ eine kompakte Teilmenge und $\varepsilon > 0$, so gibt es für jedes $w \in K$ ein $r(w) > 0$ derart, dass $B_{r(w)}(w) \subseteq U(w)$. Nach Verkleinern von $r(w)$ dürfen wir annehmen, dass

$$2r(w)L(w) < \varepsilon/3.$$

Es gibt eine endliche Teilmenge $\Phi \subseteq K$ derart, dass $K \subseteq \bigcup_{w\in\Phi} B_{r(w)}(w)$. Für jedes $w \in \Phi$ existiert ein $j(w) \in \mathbb{N}$ derart, dass $\zeta(w) := z_{j(w)} \in B_{r(w)}(w)$. Es existiert ein $\ell(w) \in \mathbb{N}$ derart, dass

$$|f_{n(k,k)}(\zeta(w)) - f_{n(j,j)}(\zeta(w))| < \varepsilon/3 \quad \text{für alle } j,k \geq \ell(w).$$

Sei $\ell \in \mathbb{N}$ so groß, dass $\ell \geq \ell(w)$ für alle $w \in \Phi$. Für alle $j,k \geq \ell$ existiert für jedes $z \in K$ ein $w \in \Phi$ mit $z \in B_{r(w)}(w)$. Also ist

$$\begin{aligned}
&|f_{n(k,k)}(z) - f_{n(j,j)}(z)| \\
&\quad = |f_{n(k,k)}(z) - f_{n(k,k)}(\zeta(w))| + |f_{n(k,k)}(\zeta(w)) - f_{n(j,j)}(\zeta(w))| \\
&\qquad + |f_{n(j,j)}(\zeta(w)) - f_{n(j,j)}(z)| \\
&\quad \leq 2L(w)r(w) + \varepsilon/3 + 2L(w)r(w) < \varepsilon
\end{aligned}$$

und folglich $\|f_{n(k,k)}|_K - f_{n(j,j)}|_K\|_\infty < \varepsilon$. Also ist $(f_{n(k,k)}|_K)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $(C(K,\mathbb{C}), \|\cdot\|_\infty)$ und somit gleichmäßig konvergent gegen eine stetige Funktion $f_K\colon K \to \mathbb{C}$. Da jedes $z \in U$ in einer kompakten Teilmenge von U (z.B. $\{z\}$) enthalten ist, ist $(f_{n(k,k)})_{k\in\mathbb{N}}$ insb. punktweise konvergent gegen eine Funktion $f\colon U \to \mathbb{C}$. Ist $z \in U$ und $r > 0$ so klein, dass $K := \overline{B}_r(z) \subseteq U$, so ist nach dem Vorigen $f|_K = f_K$ stetig, also $f|_{B_r(z)}$ stetig. Somit ist f stetig. Per Konstruktion konvergiert $(f_{n(k,k)}|_K)_{k\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen $f_K = f|_K$ für jede kompakte Teilmenge $K \subseteq U$. $\square$

Dieses Kapitel enthält ohne Beweis einige Fakten für die Allgemeinbildung, die später für Sie wichtig sein könnten.
Zunächst ergänzen wir zwei Fakten zu Wegen und Umlaufzahlen.

Satz 22.1 (Zyklen um K in U)

Ist $U \subseteq \mathbb{C}$ eine offene Teilmenge und $K \subseteq U$ kompakt, so existieren ein $n \in \mathbb{N}_0$ und stückweise stetig differenzierbare geschlossene Wege $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ in $U \setminus K$ derart, dass

$$\sum_{j=1}^{n} \mathrm{ind}_z(\gamma_j) = 0$$

für alle $z \in \mathbb{C} \setminus U$ und $\sum_{j=1}^{n} \mathrm{ind}_z(\gamma_j) = 1$ für alle $z \in K$.

Vgl. Satz 3.3 in Fischer-Lieb, Funktionentheorie, Kapitel IV.

Für jeden geschlossenen Weg $\gamma\colon [a, b] \to \mathbb{C}$ ist die Funktion

$$\mathbb{C} \setminus \gamma([a, b]) \to \mathbb{Z}, \quad z \mapsto \mathrm{ind}_z(\gamma)$$

stetig (also auf jeder Wegkomponente wie in Satz 10.7 konstant) und ist 0 auf der unbeschränkten Wegkomponente, da $\operatorname{ind}_z(\gamma) \to 0$ für $|z| \to \infty$. Im wesentlichen Fall eines stückweise C^1-Wegs folgt Ersteres aus dem Satz über parameterabhängige Integrale, Letzteres aus der Standard-Integralabschätzung.

Anschaulich gesprochen ändert sich die Umlaufzahl um $+1$, wenn man den Weg von rechts nach links überquert:

Satz 22.2

Es seien $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ ein Weg und $\alpha < \beta$ in $[a,b]$ derart, dass $v := \frac{1}{2}(\gamma(\beta) - \gamma(\alpha)) \neq 0$. Mit dem Mittelpunkt $z_0 := \frac{1}{2}(\gamma(\alpha) + \gamma(\beta))$ und $r := |v|$ seien (a)–(c) erfüllt:

(a) Es ist $\gamma(]\alpha,\beta[) \subseteq B_r(z_0)$;

(b) Es ist $\overline{B}_r(z_0) \cap \gamma([a,b]) = \gamma([\alpha,\beta])$;

(c) $\overline{B}_r(z_0) \setminus \gamma([\alpha,\beta])$ hat zwei Wegkomponenten. Die eine, W_L, enthält $L := z_0 + iv$. Die andere, W_R, enthält $R := z_0 - iv$.

Dann gilt $\operatorname{ind}_L(\gamma) = \operatorname{ind}_R(\gamma) + 1$.

Vergleiche Theorem 10.37 in Rudins “Real and Complex Analysis” (wo unnötig γ stückweise C^1 angenommen wird). Vergleiche auch Satz 3.1 in Fischer-Lieb, “Funktionentheorie”, Kapitel IV.

Die Riemannsche Zahlenkugel

Wir nehmen zu $\mathbb{C}$ ein weiteres Element $\infty \notin \mathbb{C}$ hinzu und erhalten so die erweiterte Zahlenebene

$$\hat{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}.$$

Diese wird auch **Riemannsche Zahlenkugel** genannt. Definieren wir $\mathbb{S}_2 := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2+y^2+z^2=1\}$, so ist die Abbildung

$$\Phi\colon \mathbb{S}_2 \to \hat{\mathbb{C}}, \quad (x,y,z) \mapsto \begin{cases} \left(\frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z}\right) & \text{wenn } z \neq 1; \\ \infty & \text{wenn } z = 1 \end{cases}$$

eine Bijektion (die stereographische Projektion von Nordpol $(0,0,1)$ aus). Man kann $\hat{\mathbb{C}}$ die Metrik geben, die Φ zu einer Isometrie macht (und die entsprechende Topologie, die Φ zu einem Homöomorphismus macht). Dann ist $\mathbb{C}$ offen in $\hat{\mathbb{C}}$ und $\hat{\mathbb{C}}$ induziert auf $\mathbb{C}$ die übliche Topologie. Die Mengen $\{\infty\} \cup \{z \in \mathbb{C} \colon |z| > R\}$ bilden für $R > 0$ eine Basis von ∞-Umgebungen in $\hat{\mathbb{C}}$.

Ist G eine Gruppe mit Neutralelement e und X eine Menge, so nennt man eine Abbildung

$$\sigma\colon G \times X \to X, \quad (g,x) \mapsto \sigma(g,x) =: g.x$$

eine **Wirkung** oder **Gruppenoperation** von G auf X, wenn $e.x = x$ und $g.(h.x) = (gh).x$ für alle $x \in X$ und $g, h \in G$. Die generelle lineare Gruppe $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ operiert auf der Menge $P_1(\mathbb{C})$ aller komplex 1-dimensionalen Untervektorräume von $\mathbb{C}^2$ via

$$g.\mathbb{C}v = \mathbb{C}gv \quad \text{für } 0 \neq v \in \mathbb{C}^2.$$

Die Abbildung

$$\Psi\colon \hat{\mathbb{C}} \to P_1(\mathbb{C}), \quad z \mapsto \begin{cases} \mathbb{C}(z,1) & \text{wenn } z \in \mathbb{C}; \\ \mathbb{C}(1,0) & \text{wenn } z = \infty \end{cases}$$

ist eine Bijektion. Somit wirkt $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ auf $\hat{\mathbb{C}}$ via $g.z := \Psi^{-1}(g.\Psi(z))$. Für $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ mit $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ und $\det(g) \neq 0$ kann man nachrechnen, dass

$$g.z = \frac{az+b}{cz+d}$$

für $z \in \mathbb{C}$ wenn $cz \neq -d$; im Falle $cz = -d$ ist $g.z = \infty$. Weiter gilt $g.\infty = \frac{a}{c}$ wenn $c \neq 0$; ist $c = 0$, so ist $g.\infty = \infty$. Die so erhaltenen bijektiven Abbildungen

$$\hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}, \quad z \mapsto g.z$$

nennt man **gebrochen lineare Abbildungen**. Auch ihre Einschränkungen auf offene Teilmengen von $\mathbb{C}$ sind sehr interessant, etwa die Abbildungen ϕ_α für $\alpha \in \mathbb{D}$, die im Beweis des Riemannschen Abbildungssatzes ganz wesentlich waren. Man kann zeigen (siehe Fischer-Lieb, Satz 3.2 in Kapitel IX):

Beispiel 22.3 (Biholomorphe Selbstabbildungen von $\mathbb{C}$)

Eine Abbildung $\phi\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ist genau dann biholomorph, wenn es $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ und $b \in \mathbb{C}$ gibt mit

$$(\forall z \in \mathbb{C}) \quad \phi(z) = az + b.$$

Man bekommt also genau die invertierbaren affin-linearen Selbstabbildungen von $\mathbb{C}$; traditionell wurden diese "lineare Transformationen" genannt. Für den offenen Einheitskreis erhält man (siehe Satz 4.2 in Fischer-Lieb, Kapitel IX):

Beispiel 22.4 (Biholomorphe Selbstabbildungen der Kreisscheibe)

Eine Abbildung $\psi\colon \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ ist genau dann biholomorph, wenn sie von der Form $\psi(z) = e^{i\lambda}\phi_\alpha(z)$ ist für ein $\lambda \in \mathbb{R}$ und ein $\alpha \in \mathbb{D}$, mit Notation wie in (1).

Sei $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) := \{g \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})\colon\ \det(g) = 1\}$ und $H := \{z \in \mathbb{C}\colon\ \mathrm{Im}(z) > 0\}$. Unter Benutzung einer geeigneten biholomorphen Abbildung $H \to \mathbb{D}$, die Einschränkung einer gebrochen rationalen Abbildung ist, folgt (vgl. Satz 4.3 in Fischer-Lieb, Kapitel IX).

Beispiel 22.5 (Biholomorphe Selbstabbildungen der Halbebene)

Für jedes $g \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ schränkt sich die zugehörige gebrochen lineare Abbildung ein zu einer biholomorphen Abbildung $H \to H$. Jede biholomorphe Abbildung $H \to H$ ist von dieser Form.

Wir betrachten nun die Abbildungen

$$\phi_1 := \mathrm{id}_{\mathbb{C}}\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$$

und

$$\phi_2\colon \hat{\mathbb{C}} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto \begin{cases} \frac{1}{z} & \text{wenn } z \neq \infty; \\ 0 & \text{wenn } z = \infty; \end{cases}$$

diese bilden einen Atlas für eine eindimensionale komplexe Mannigfaltigkeitsstruktur[3] auf $\hat{\mathbb{C}}$. Man nennt eine Abbildung $\psi\colon \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ **holomorph**, wenn sie stetig ist und die Kompositionen

$$\phi_j \circ \psi \circ \phi_k^{-1}$$

auf ihrem Definitionsbereich holomorph sind für alle $j, k \in \{1, 2\}$. Ist ψ bijektiv und sind ψ und ψ^{-1} holomorph, so nennt man ψ **biholomorph**. Nach Satz 3.1 in Fischer-Lieb, Kapitel IX gilt:

Beispiel 22.6 (Biholomorphe Selbstabbildungen der Zahlenkugel)

Jede gebrochen lineare Abbildung ist eine biholomorphe Selbstabbildung von $\hat{\mathbb{C}}$. Jede biholomorphe Selbstabbildung von $\hat{\mathbb{C}}$ ist eine gebrochen lineare Abbildung.

[3] Es ist also $\hat{\mathbb{C}}$ eine sogenannte **Riemannsche Fläche**; siehe z.B. O. Forster, "Lectures on Riemann Surfaces," Springer-Verlag.

Die folgenden Fakten, die aus der Analysis bekannt sein sollten, werden im Skript benutzt. Gegebenenfalls können auch die Beweise hier nachgelesen werden. Wir benötigen das erste Resultat nur im Fall einer Teilmenge $X \subseteq \mathbb{R}^n$, das dritte nur im Fall einer kompakten Teilmenge $K \subseteq \mathbb{R}^n$.

Stetigkeit parameter-abhängiger Integrale

Sei $f\colon X \times [a,b] \to \mathbb{R}^m$ eine stetige Funktion, wobei $a < b$ reelle Zahlen sind und X ein metrischer (oder topologischer) Raum. Dann ist die Funktion

$$g\colon X \to \mathbb{R}^m, \quad x \mapsto \int_a^b f(x,t)\,dt$$

stetig.

Beweis. Es sei $\|\cdot\|_\infty$ die Maximum-Norm auf $\mathbb{R}^m$ und $B_r(z) := \{y \in \mathbb{R}^m \colon \|y-z\|_\infty < r\}$ für $r > 0$ und $z \in \mathbb{R}^m$. Gegeben $\varepsilon > 0$ und $x \in X$ ist für jedes $s \in [a,b]$ die Menge

$$f^{-1}\big(B_{\varepsilon/2}(f(x,s))\big) = \{(y,t) \in X \times [a,b] \colon \|f(y,t) - f(x,s)\|_\infty < \varepsilon/2\}$$

eine offene Umgebung von (x,s) in $X \times [a,b]$. Es gibt daher eine offene x-Umgebung $V_s \subseteq X$ und eine offene s-Umgebung $W_s \subseteq [a,b]$ derart, dass

$$V_s \times W_s \subseteq f^{-1}\big(B_{\varepsilon/2}(f(x,s))\big).$$

Für alle (y,t), $(z,r) \in V_s \times W_s$ gilt dann

$$\begin{aligned} \|f(y,t) - f(z,r)\|_\infty &\leq \|f(y,t) - f(x,s)\|_\infty + \|f(x,s) - f(z,r)\|_\infty \\ &< \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon. \end{aligned} \tag{1}$$

Die Mengen W_s bilden für $s \in [a,b]$ eine offene Überdeckung von $[a,b]$. Da $[a,b]$ kompakt ist, finden wir $s_1, \ldots, s_k \in [a,b]$ mit

$$[a,b] = W_{s_1} \cup \cdots \cup W_{s_k}.$$

Dann ist $V := V_{s_1} \cap \cdots \cap V_{s_k}$ eine offene x-Umgebung in X.

Für alle $y \in V$ und $t \in [a, b]$ ist

$$\|f(y,t) - f(x,t)\|_\infty < \varepsilon, \tag{2}$$

denn es existiert ein $j \in \{1, \ldots, k\}$ mit $t \in W_{s_j}$; da $y, x \in V \subseteq V_{s_j}$, gilt (2) nach (1), angewandt mit $s := s_j$, $r := t$ und $z := x$. Für alle $y \in V$ folgt

$$\begin{aligned} \|g(y) - g(x)\|_\infty &= \left\| \int_a^b f(y,t) - f(x,t)\, dt \right\|_\infty \\ &\leq \int_a^b \|f(y,t) - f(x,t)\|_\infty \, dt \leq (b-a)\varepsilon. \end{aligned}$$

Also ist g stetig an der Stelle x. $\square$

Differenzierbarkeit parameter-abhängiger Integrale

Sei $f\colon U \times [a,b] \to \mathbb{R}^m$, $(x,t) \mapsto f(x,t)$ eine Funktion, wobei $a < b$ reelle Zahlen sind und $U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Menge. Wir nehmen an, dass f stetig ist und für alle $j \in \{1, \ldots, n\}$ die partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x,t)$$

existieren und in $(x,t) \in U \times [a,b]$ stetig sind. Dann ist die Funktion

$$g\colon U \to \mathbb{R}^m, \quad x \mapsto \int_a^b f(x,t)\,dt$$

stetig differenzierbar und

$$\frac{\partial g}{\partial x_j}(x) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x_j}(x,t)\,dt \tag{3}$$

für alle $x \in U$ und $j \in \{1, \ldots, n\}$, also

$$(D_w g)(x) = \int_a^b (D_{(w,0)} f)(x,t)\,dt \quad \text{für alle } x \in U \text{ und } w \in \mathbb{R}^n.$$

Beweis. Nach dem vorigen Satz ist g stetig. Sei $j \in \{1, \ldots, n\}$ und $x \in U$. Da U offen ist, gibt es ein $\varepsilon > 0$ derart, dass $x + se_j \in U$ für alle $s \in]-\varepsilon, \varepsilon[$. Für jedes $t \in [a, b]$ ist dann

$$]-\varepsilon, \varepsilon[\to \mathbb{R}^m, \quad s \mapsto f(x + se_j, t)$$

eine differenzierbare Funktion mit in s stetiger Ableitung $\frac{\partial f}{\partial x_j}(x + se_j, t)$. Nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung ist also

$$f(x + se_j, t) - f(x, t) = \int_0^s \frac{\partial f}{\partial x_j}(x + re_j, t)\, dr$$

für $s \in]-\varepsilon, \varepsilon[$ und somit im Fall $0 \neq s$

$$\begin{aligned} \frac{1}{s}(f(x + se_j, t) - f(x, t)) &= \int_0^s \frac{\partial f}{\partial x_j}(x + re_j, t)\, \frac{1}{s}\, dr \\ &= \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_j}(x + \tau s e_j, t)\, d\tau, \end{aligned}$$

wobei $r = s\tau$, $dr = sd\tau$ substituiert wurde. Folglich ist

$$\begin{aligned}\Delta(s) \;&:=\; \frac{1}{s}(g(x+se_j)-g(x)) = \int_a^b \frac{1}{s}(f(x+se_j,t)-f(x,t))\,dt\\ &=\; \int_a^b\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_j}(x+\tau se_j,t)\,d\tau\,dt = \int_a^b h(s,t)\,dt\end{aligned}$$

mit

$$h\colon\;]{-\varepsilon},\varepsilon[\,\times[a,b]\to\mathbb{R}^m,\quad (s,t)\mapsto \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_j}(x+\tau se_j,t)\,d\tau.$$

Beachten Sie, dass für jedes $t\in[a,b]$

$$h(0,t) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_j}(x,t)\,d\tau = \frac{\partial f}{\partial x_j}(x,t).$$

Da die Funktion

$$]-\varepsilon, \varepsilon[\, \times [a, b] \times [0, 1] \to \mathbb{R}^m, \quad (s, t, \tau) \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_j}(x + \tau s e_j, t)$$

stetig ist, ist h nach dem vorigen Satz stetig. Somit ist auch die Funktion

$$H\colon\,]-\varepsilon, \varepsilon[\, \to \mathbb{R}^m, \quad s \mapsto \int_a^b h(s, t)\, dt$$

stetig. Also gilt

$$\Delta(s) = H(s) \to H(0) = \int_a^b h(0, t)\, dt = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x_j}(x, t)\, dt$$

für $0 \neq s \to 0$, d.h. die partielle Ableitung

$\frac{\partial g}{\partial x_j}(x) = \lim_{s\to 0} \Delta(s)$ existiert und ist wie gewünscht durch (3) gegeben. Als parameter-abhängiges Integral ist die partielle Ableitung nach dem vorigen Satz stetig. Für jedes $w = \sum_{j=1}^n w_j e_j \in \mathbb{R}^n$ ist nun

$$\begin{aligned} D_w g(x) &= Dg(x)(w) = \sum_{j=1}^n w_j Dg(x)(e_j) = \sum_{j=1}^n w_j \frac{\partial g}{\partial x_j}(x) \\ &= \int_a^b \sum_{j=1}^n w_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(x,t)\, dt = \int_a^b (D_{(w,0)} f)(x,t)\, dt, \end{aligned}$$

was den Beweis beendet. $\square$

Ist K ein kompakter metrischer (oder topologischer) Raum, so versehen wir den Raum $C(K, \mathbb{C})$ der stetigen Funktionen $f: K \to \mathbb{C}$ mit der Supremumsnorm,

$$\|f\|_\infty := \sup\{|f(x)|: x \in K\}.$$

Mit dieser Norm ist $C(K, \mathbb{C})$ ein Banachraum.

Konvergenzsatz von Weierstraß

Sei K ein kompakter metrischer (oder topologischer) Raum und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge stetiger Funktionen $f_n: K \to \mathbb{C}$ derart, dass

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_\infty < \infty.$$

Für jedes $x \in K$ konvergiert dann die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ absolut. Schreiben wir $f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ für den Limes, so ist $f: K \to \mathbb{C}$ stetig und die Funktionenfolge

$$\left(\sum_{k=1}^{n} f_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

konvergiert für $n \to \infty$ gleichmäßig gegen f.

Beweis. Da die Folge der Anfangssummen $\sum_{k=1}^{n} \|f_k\|_\infty$ konvergiert, ist diese eine Cauchyfolge; gegeben $\varepsilon > 0$ existiert also ein $N \in \mathbb{N}$ derart, dass für alle $m \geq n \geq N$

$$\varepsilon > \left| \sum_{k=1}^{m} \|f_k\|_\infty - \sum_{k=1}^{n} \|f_k\|_\infty \right| = \left| \sum_{k=n+1}^{m} \|f_k\|_\infty \right| = \sum_{k=n+1}^{m} \|f_k\|_\infty .$$

Für alle $m \geq n \geq N$ ist dann

$$\left\| \sum_{k=1}^{m} f_k - \sum_{k=1}^{n} f_k \right\|_\infty = \left\| \sum_{k=n+1}^{m} f_k \right\|_\infty \leq \sum_{k=n+1}^{m} \|f_k\|_\infty < \varepsilon,$$

somit $(\sum_{k=1}^{n} f_k)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge im Banachraum $(C(K,\mathbb{C}), \|\cdot\|_\infty)$. Diese konvergiert gegen ein $f \in C(K,\mathbb{C})$ bzgl. der Supremumsnorm, d.h. es gilt

$$\sum_{k=1}^{n} f_k \to f$$

gleichmäßig. Insb. konvergiert $\sum_{k=1}^{n} f_k$ punktweise gegen f. Für jedes $x \in K$ ist $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_\infty < \infty$, somit $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ absolut konvergent. □

Wir wiederholen auch noch einmal, warum $(C(K,\mathbb{C}), \|\cdot\|_\infty)$ vollständig (und somit ein Banachraum) ist.

Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $C(K,\mathbb{C})$. Für jedes $\varepsilon > 0$ existiert also ein $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ mit $\|f_m - f_n\|_\infty \leq \varepsilon$ für alle $n, m \geq N$, d.h.

$$(\forall n, m \geq N_\varepsilon, \forall x \in K) \;\; |f_m(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon. \tag{4}$$

Insbesondere gilt für jedes $x \in K$

$$(\forall n, m \geq N_\varepsilon) \, |f_m(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon,$$

d.h. $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Cauchyfolge in $\mathbb{C}$ und somit konvergent gegen ein $f(x) \in \mathbb{C}$. Für jedes $\varepsilon > 0$ folgt aus (4) für $m \to \infty$

$$(\forall n \geq N_\varepsilon)(\forall x \in K) \, |f(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon,$$

d.h. $f_n \to f$ gleichmäßig. Als gleichmäßiger Grenzwert stetiger Funktionen ist f stetig. Weiter gilt für jedes $\varepsilon > 0$ nach dem Vorigen

$$(\forall n \geq N_\varepsilon) \, \|f - f_n\|_\infty \leq \varepsilon$$

und somit $f_n \to f$ in $(C(K,\mathbb{C}), \|\cdot\|_\infty)$.

Literatur

- Fischer, W. und I. Lieb, Funktionentheorie, Vieweg, 1992.
- Rudin, W., Real and Complex Analysis, McGraw-Hill, 1987.

Weitere klassische Werke sind u.a.

- Ahlfors, L. V., Complex Analysis, McGraw-Hill, 1979.
- Remmert, R. und G. Schumacher, Funktionentheorie 1+2

Für später sei erwähnt: Reell oder komplex analytische Funktionen in mehreren Variablen (die lokal durch Potenzreihen in mehreren Variablen gegeben sind) werde u.a diskutiert in

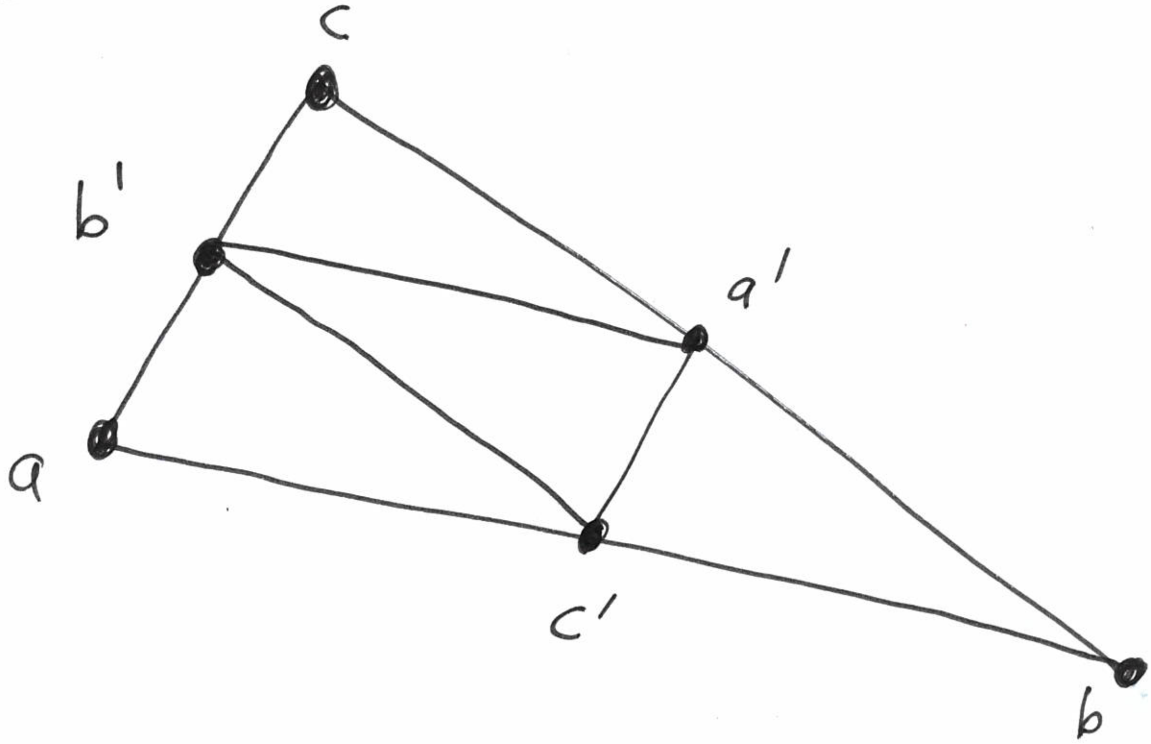
- Dieudonné, J., Foundations of Modern Analysis, Academic Press, 1969.

Für Funktionentheorie in mehreren Veränderlichen, siehe auch

- Grauert, H. und K. Fritzsche, Einführung in die Funktionentheorie mehrerer Veränderlicher, Springer, 1974.

Abbildungen zu Kapitel 3

Abb. 1



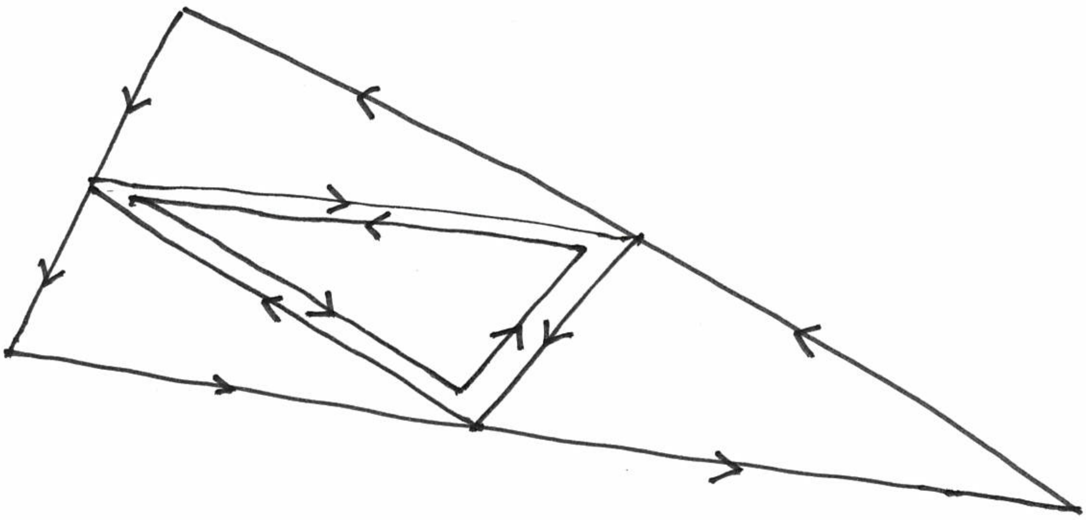


Abb. 2

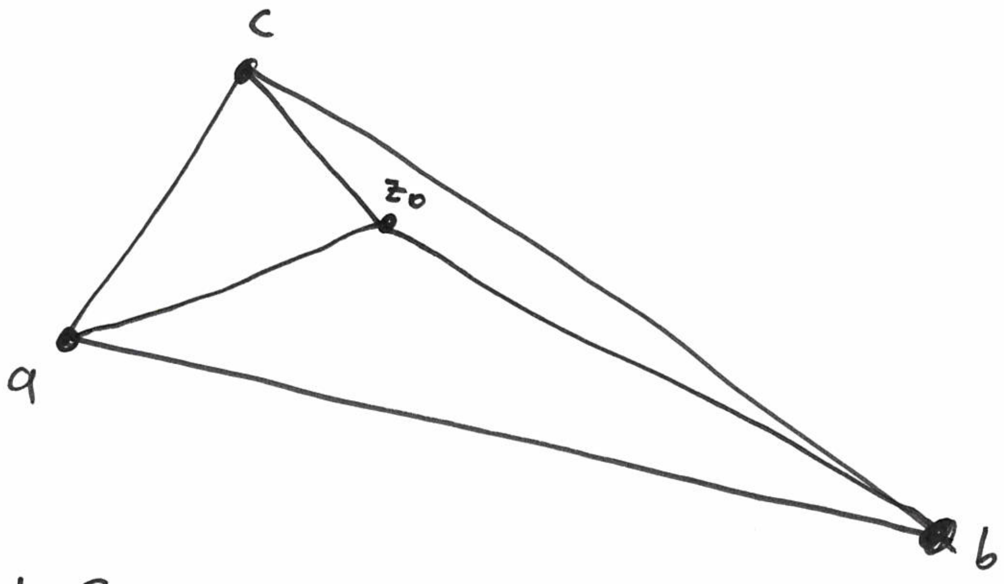


Abb. 3

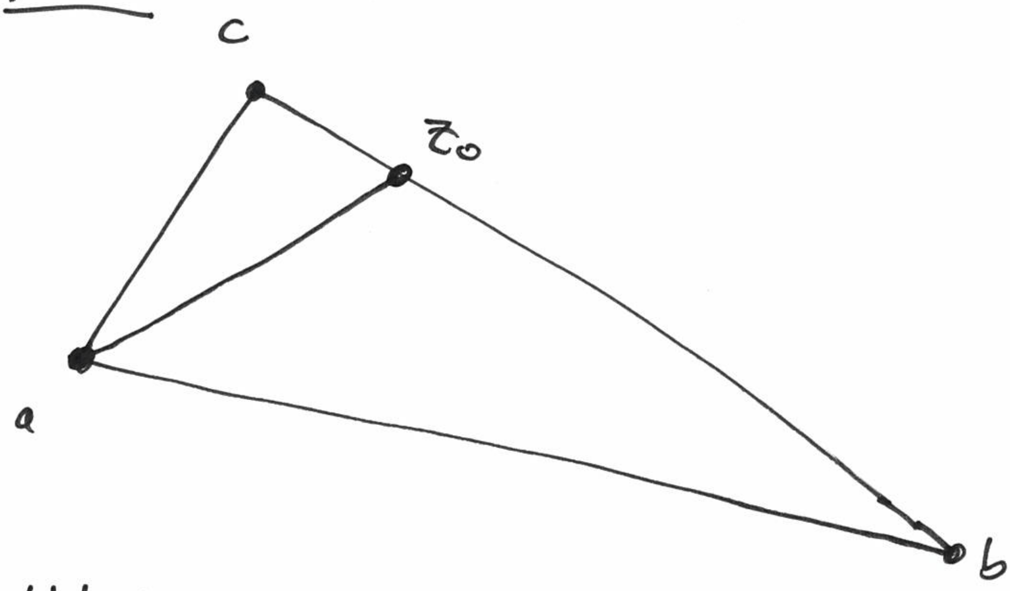
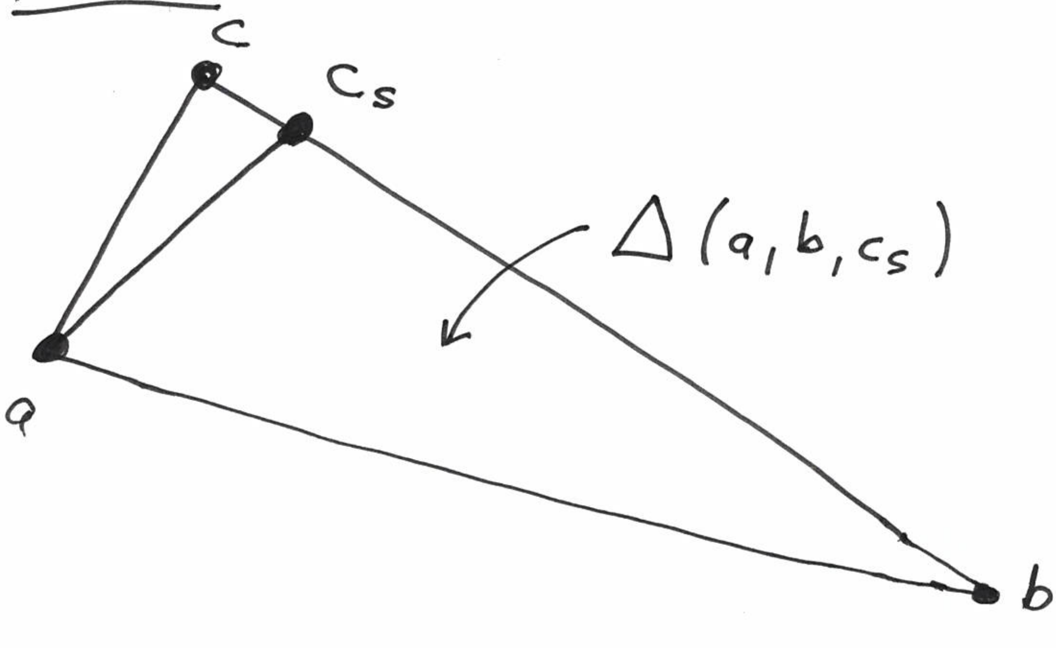
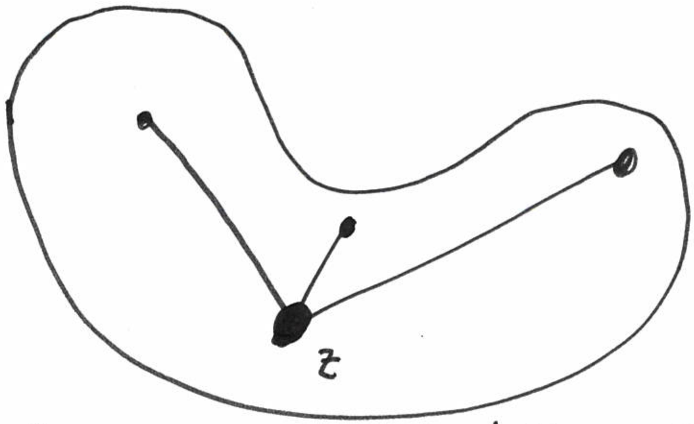


Abb. 4



Zu Kapitel 4

Abb. 5



eine sternförmige Menge bzgl. z.

Eine konvexe Menge:

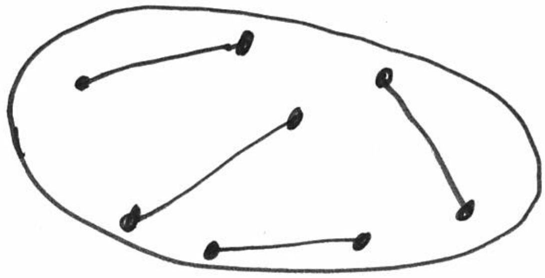
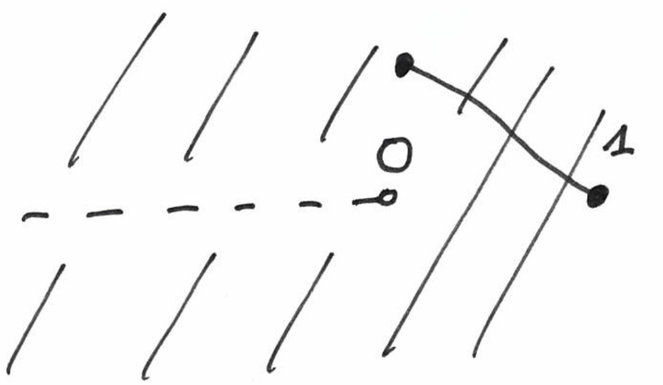


Abb. 6 geschlitzte Ebene



$\mathbb{C}$ ohne Halbstrahl:

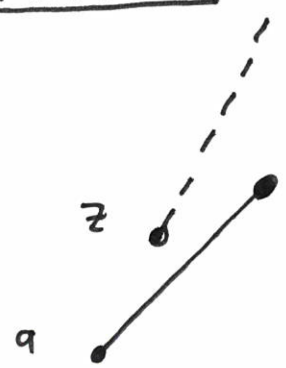
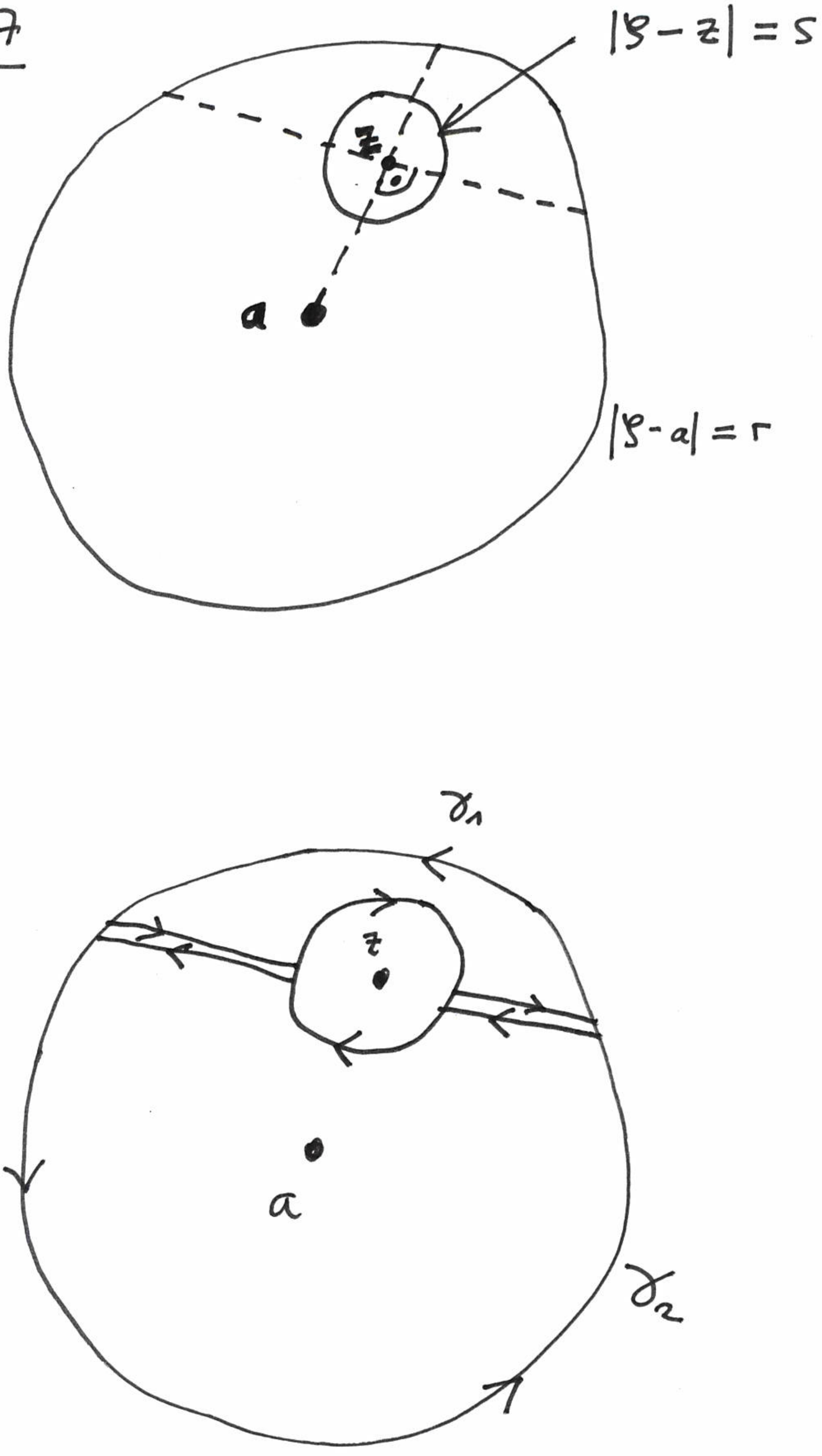
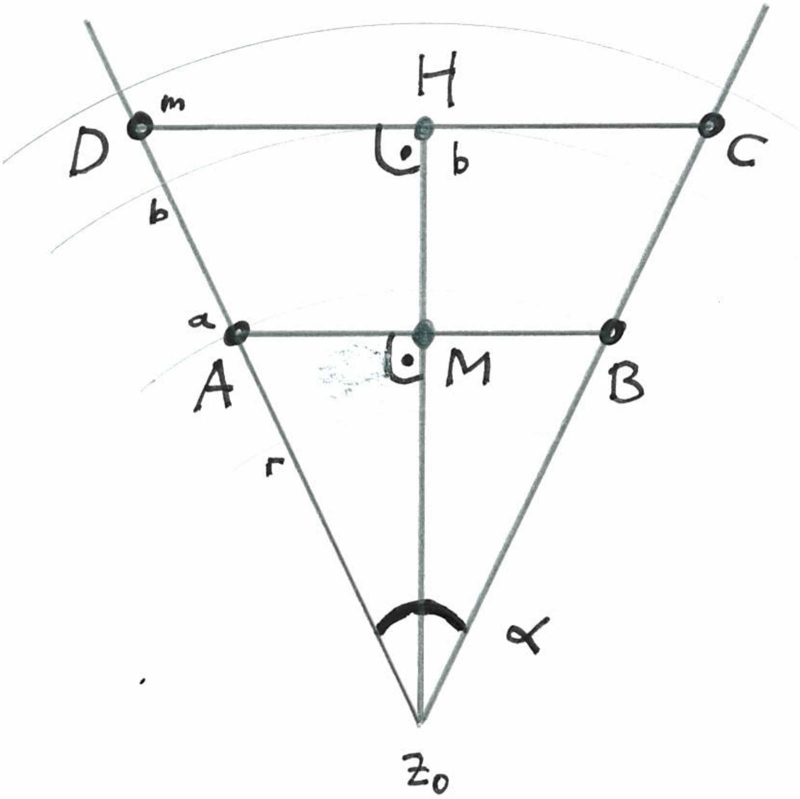


Abb. 7

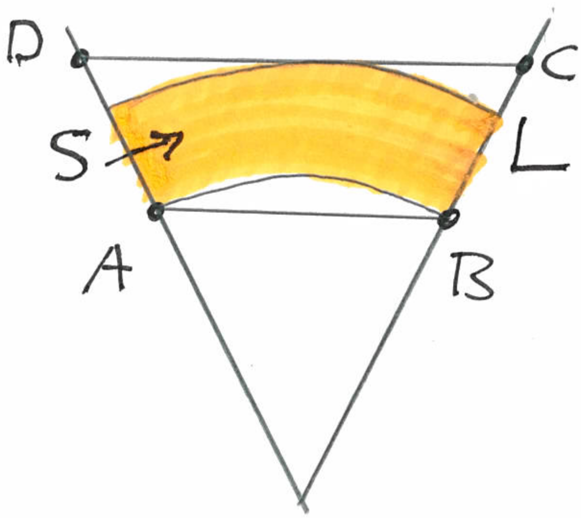


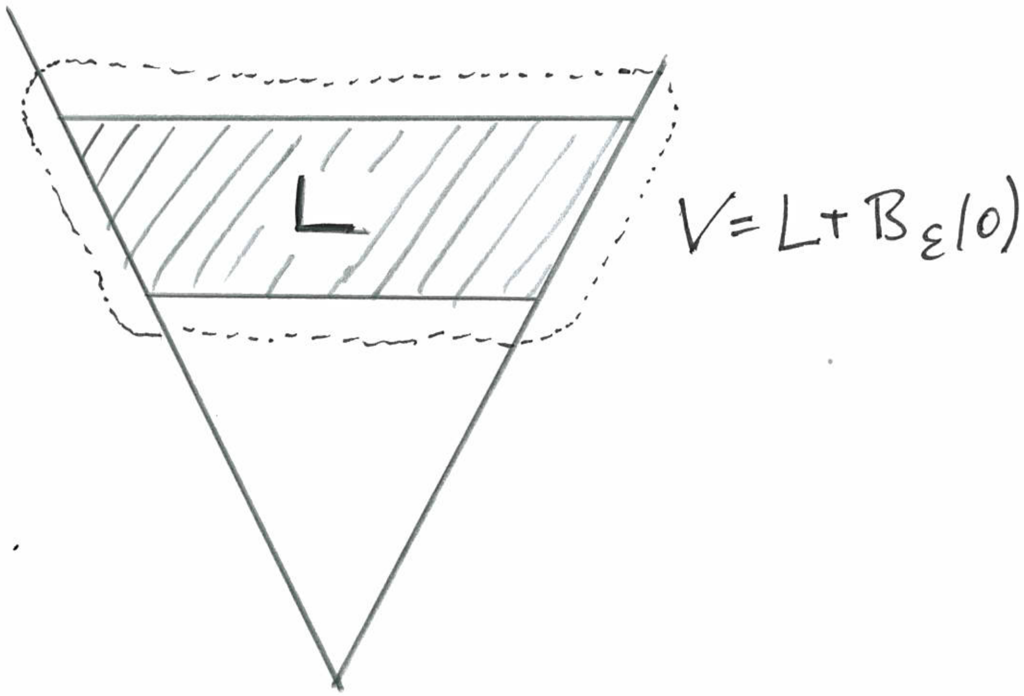
Zu Kapitel 15

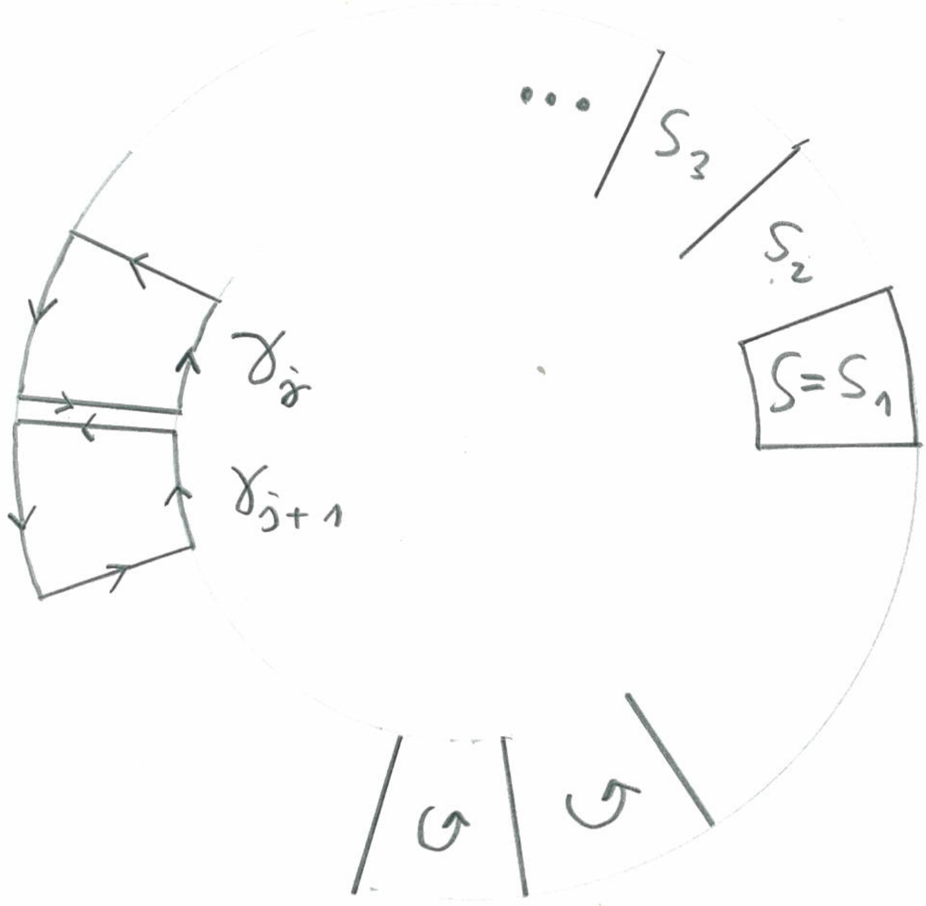


$b = m \cos \frac{\alpha}{2}$

$|M - z_0|$
$= a \cos \frac{\alpha}{2}$

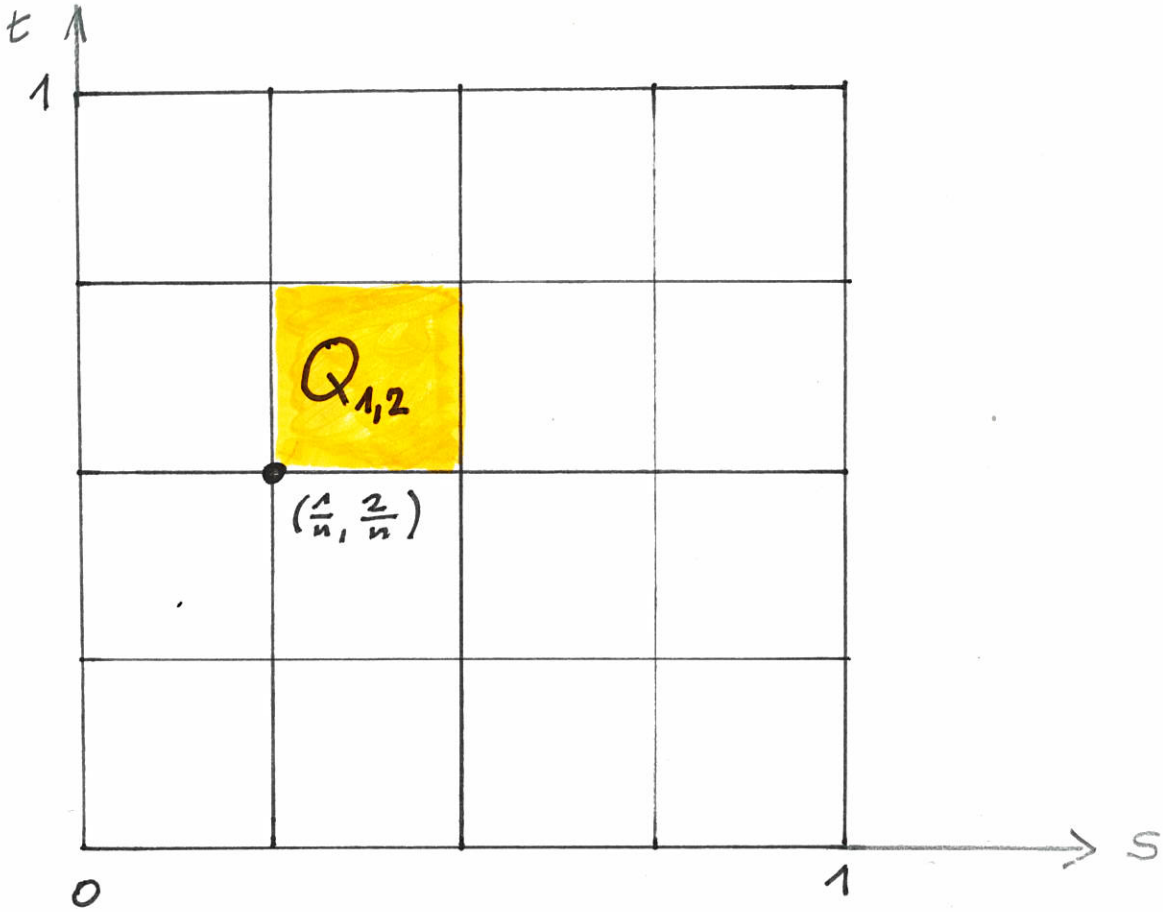



L
V=L+B_ε(0)

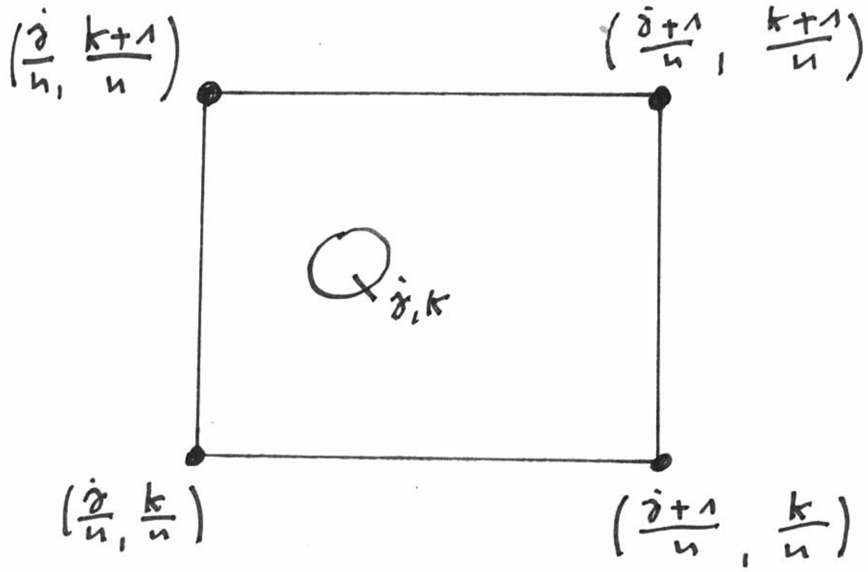

...
S_3
S_2
S=S_1
γ_j
γ_{j+1}

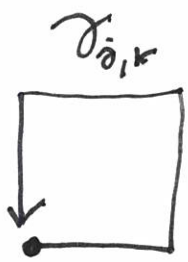
Zu Kapitel 17

Benutze äquidistante Unterteilung von $[0,1]$ auf s-Achse und auf t-Achse; z.B. $\underline{\underline{n=4}}$:



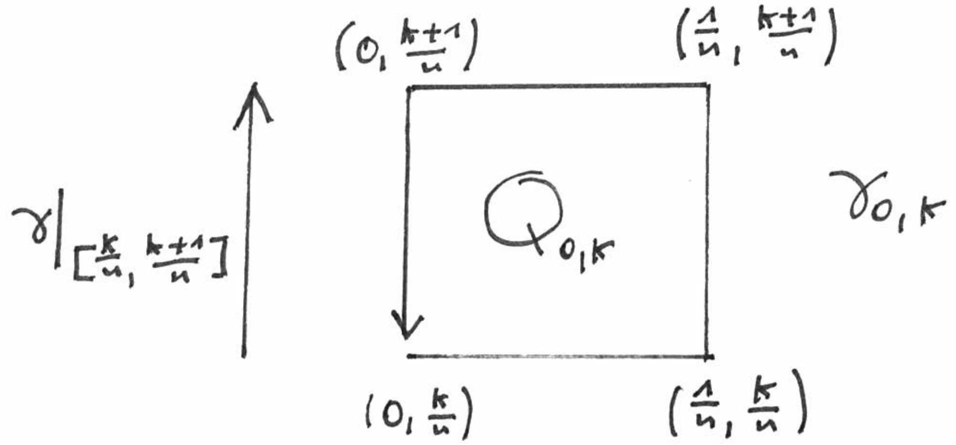
Wenn $j \neq 0$ und $j \neq n-1$, benutze für $\gamma_{j,k}$ die Funktionswerte von F an den Ecken von $Q_{j,k}$:



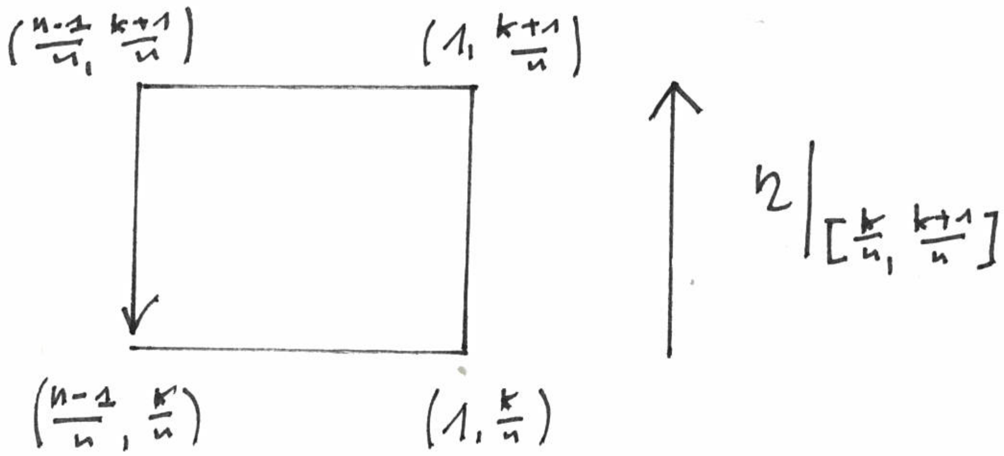


$\gamma_{0,k}$ benutzt links den Teilweg

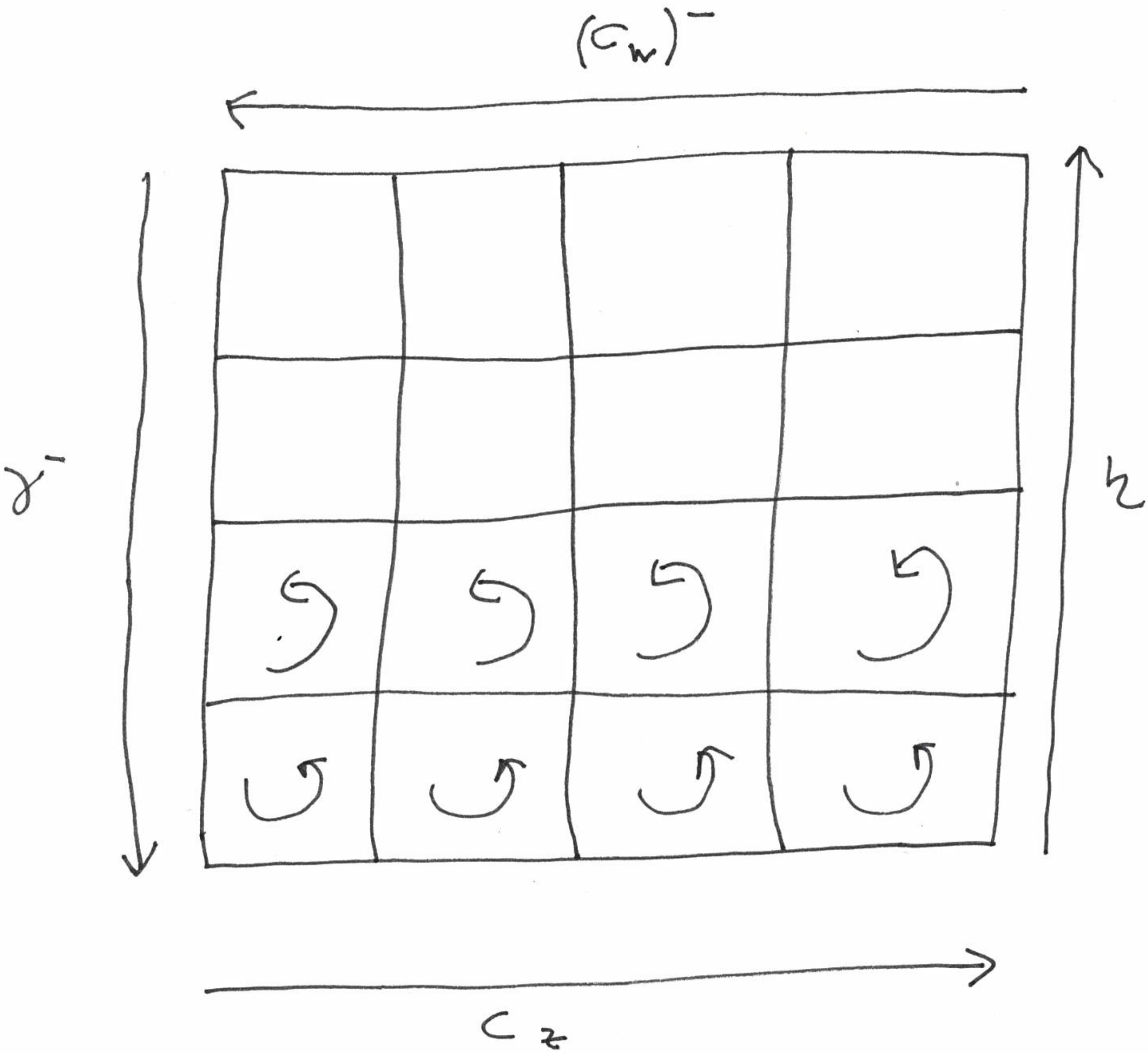
$\gamma|_{[\frac{k}{n},\frac{k+1}{n}]}$ bzw. den umgekehrten Weg:



$\gamma_{n-1,k}$ benutzt rechts $\eta|_{[\frac{k}{n},\frac{k+1}{n}]}$:



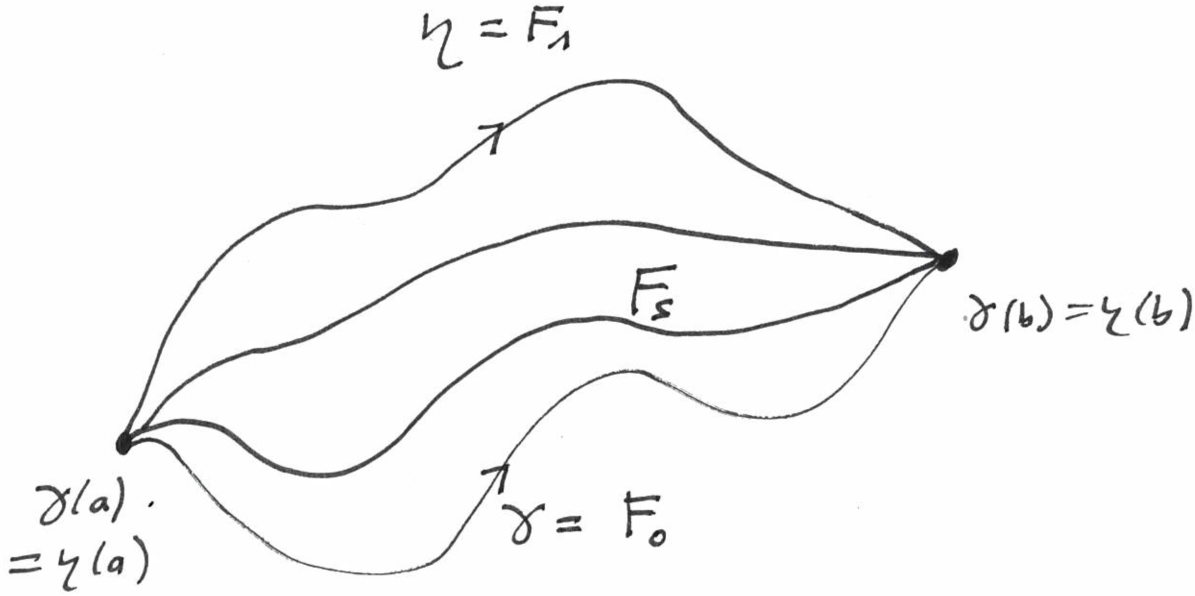
Insgesamt:



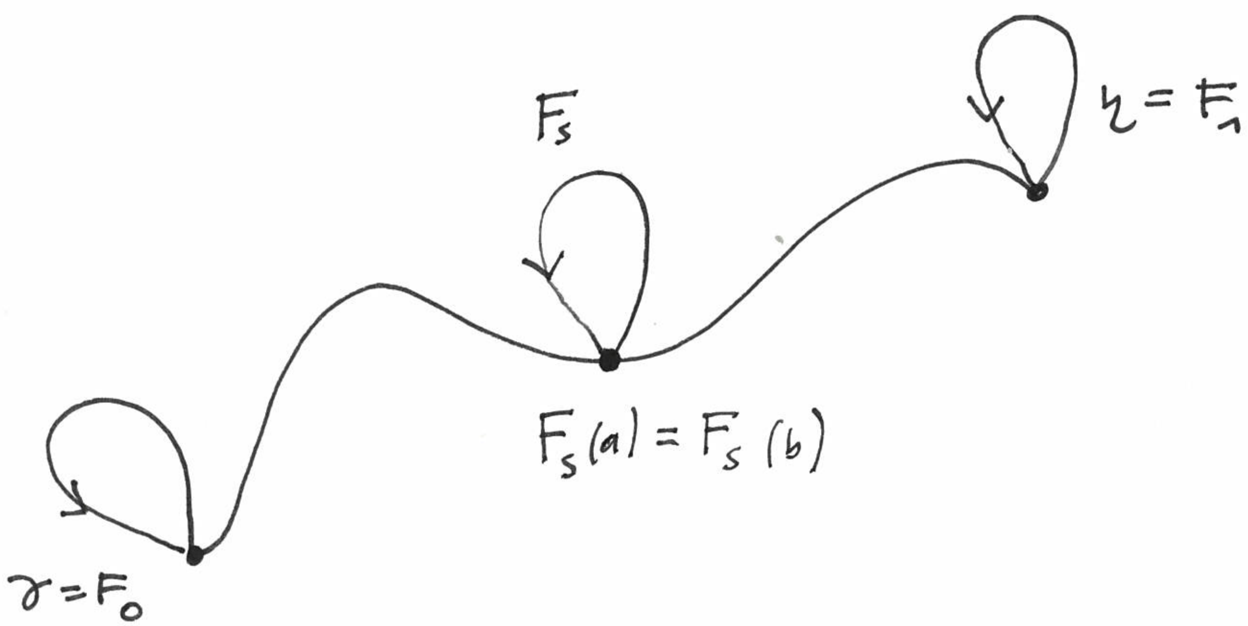
mit $z := \gamma(0) = \eta(0)$

$w := \gamma(1) = \eta(1)$

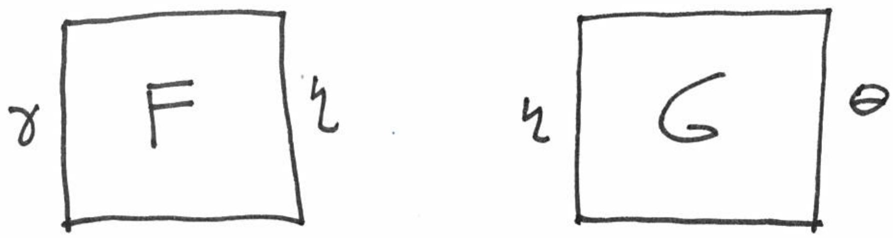
F Homotopie von γ nach η bei festen Endpunkten:

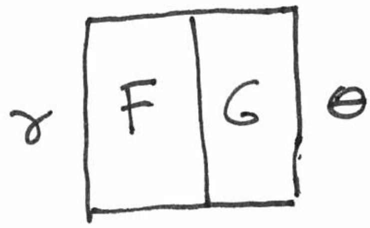


F Homotopie geschlossener Wege von γ nach η:



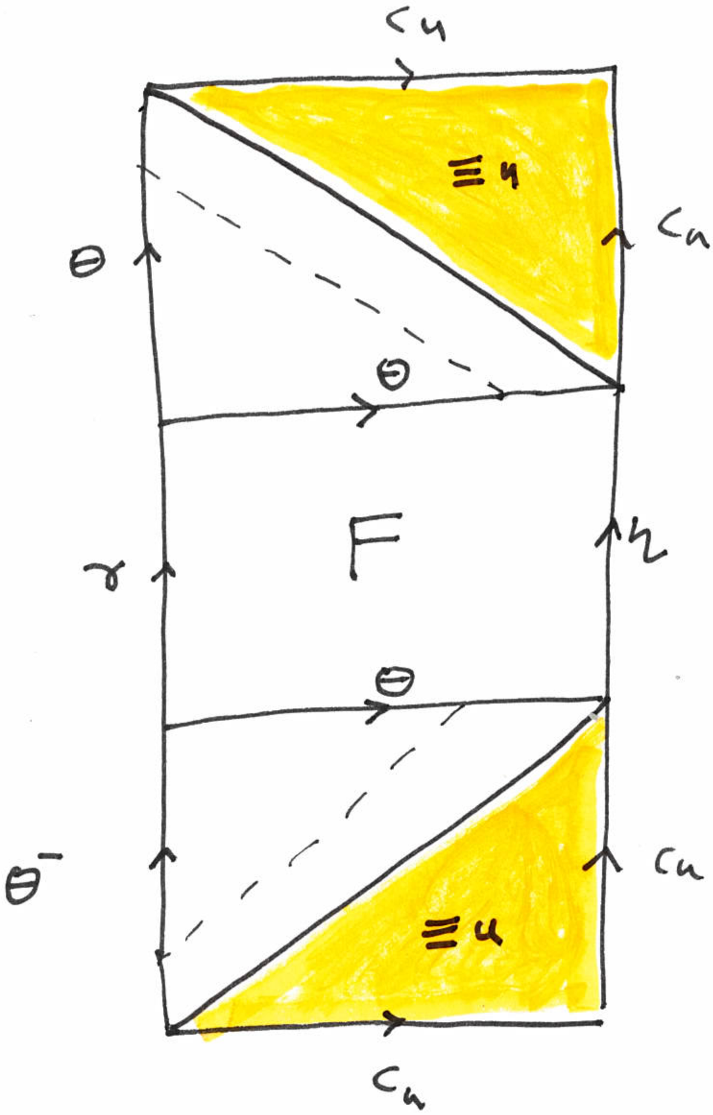
zu Lemma 17.7:





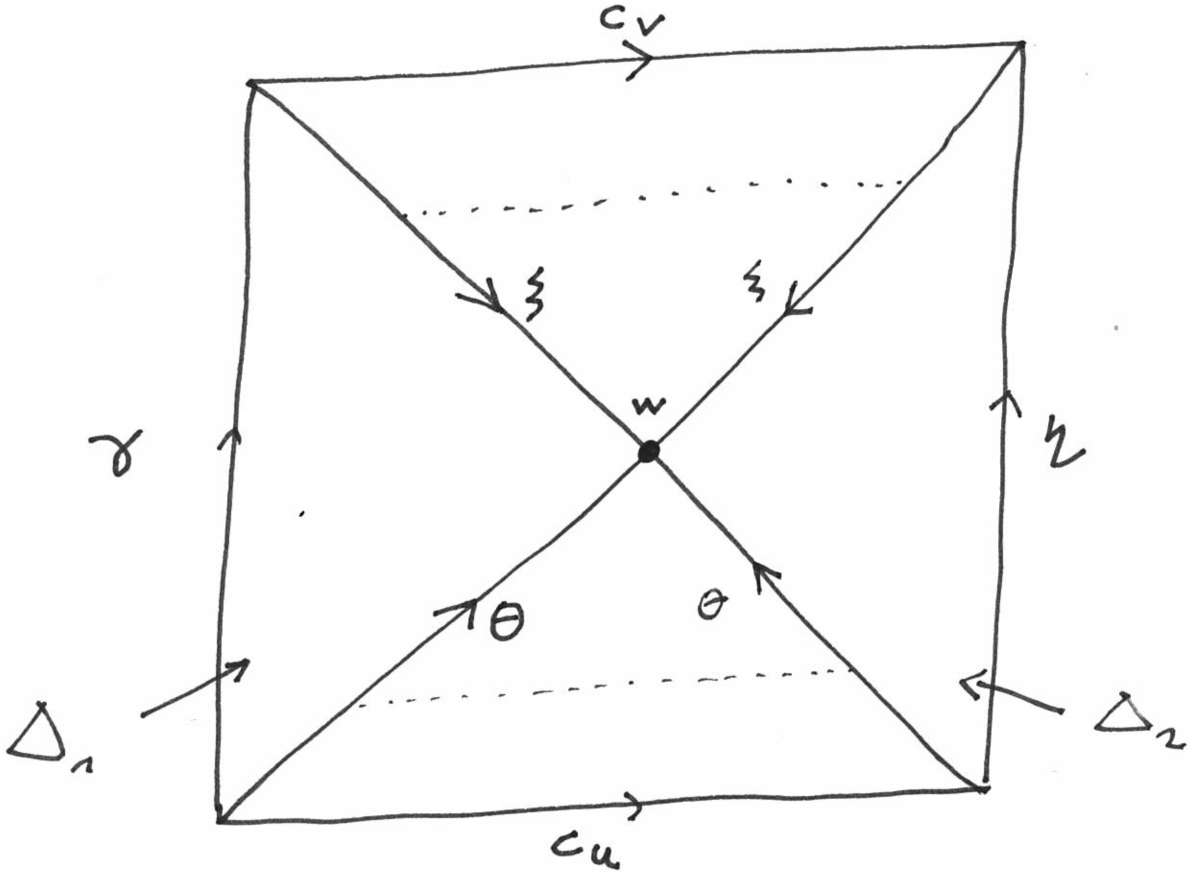
$F * G$

Zum Beweis von Satz 17.3:



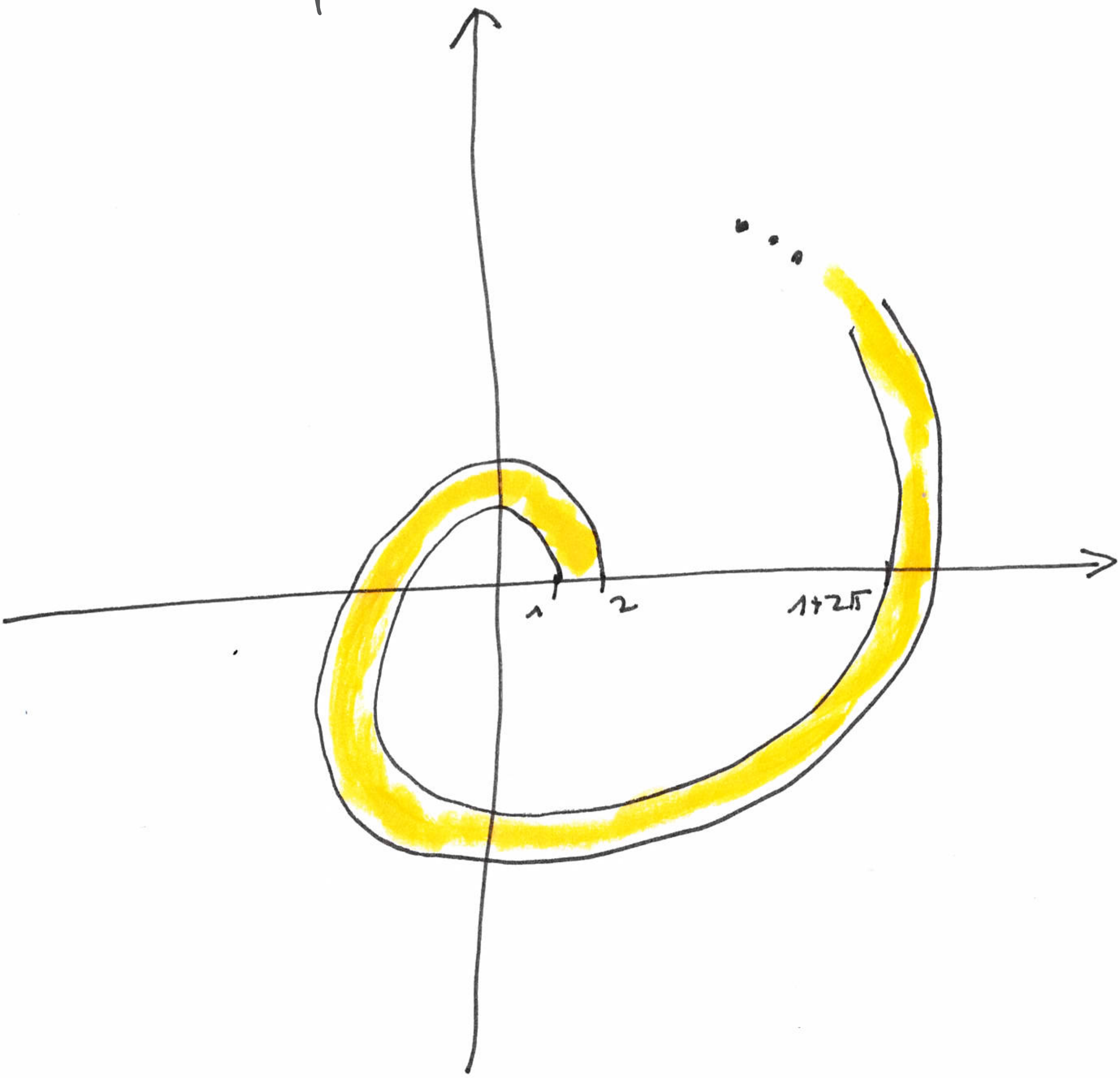
konstant auf gestrichelten Parallelen

zum Beweis von Satz 17.15:



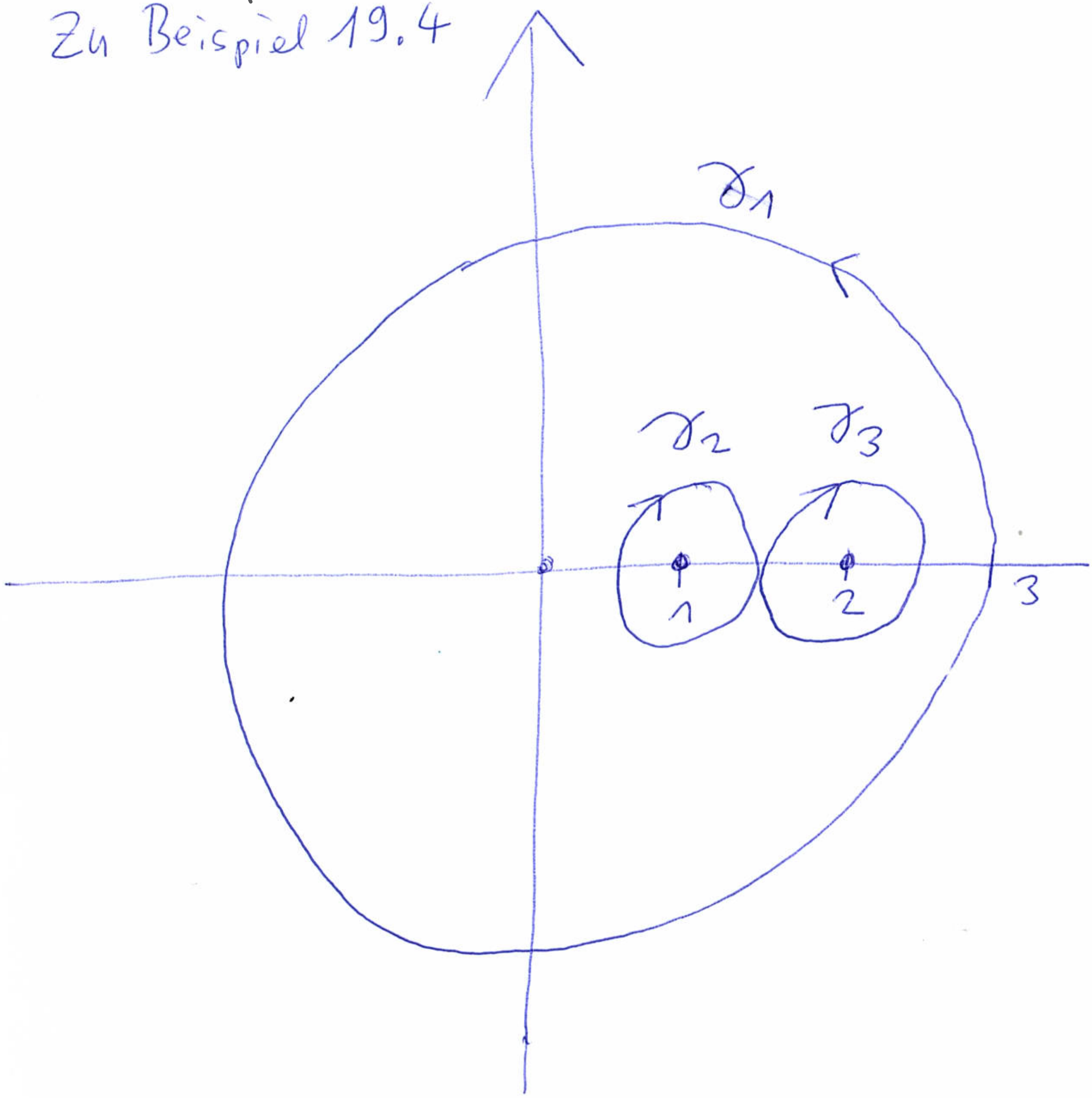
konstant auf gestrichelten Strecken

Zu Beispiel 17.18



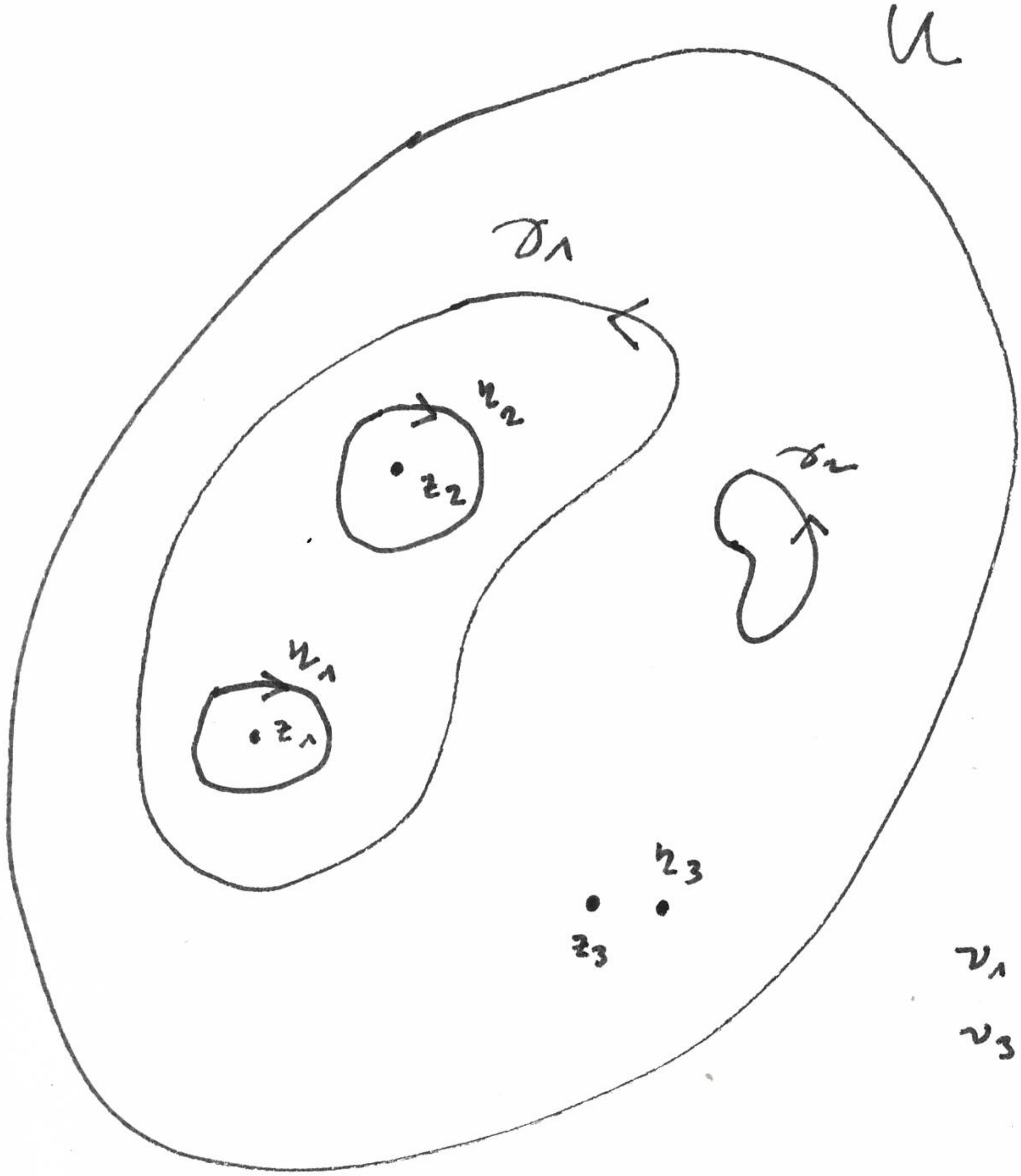
Zu Kapitel 19

Zu Beispiel 19.4



Zu Kapitel 20

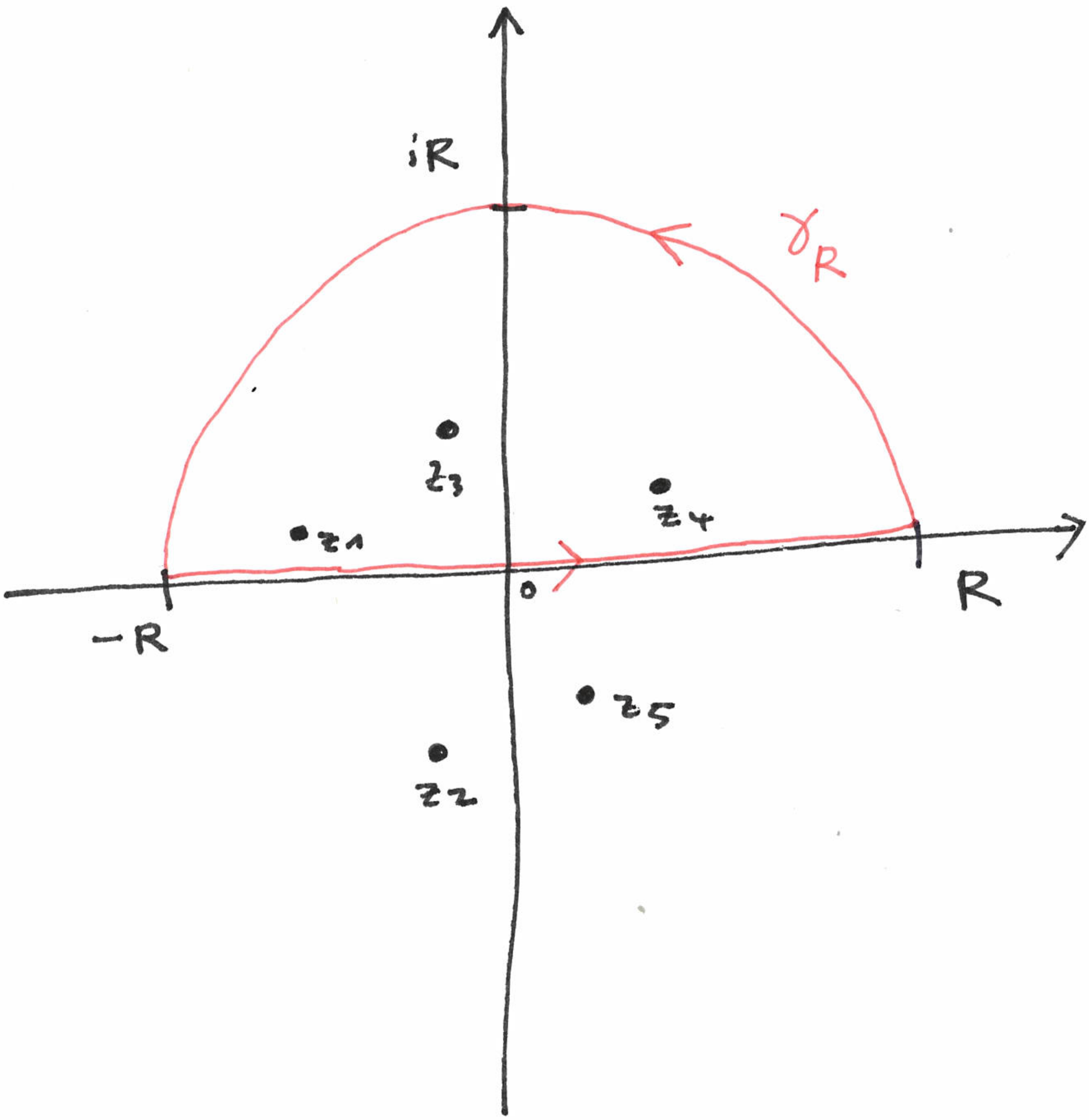
Zum Beweis des Residuensatzes



$\nu_1 = \nu_2 = 1$

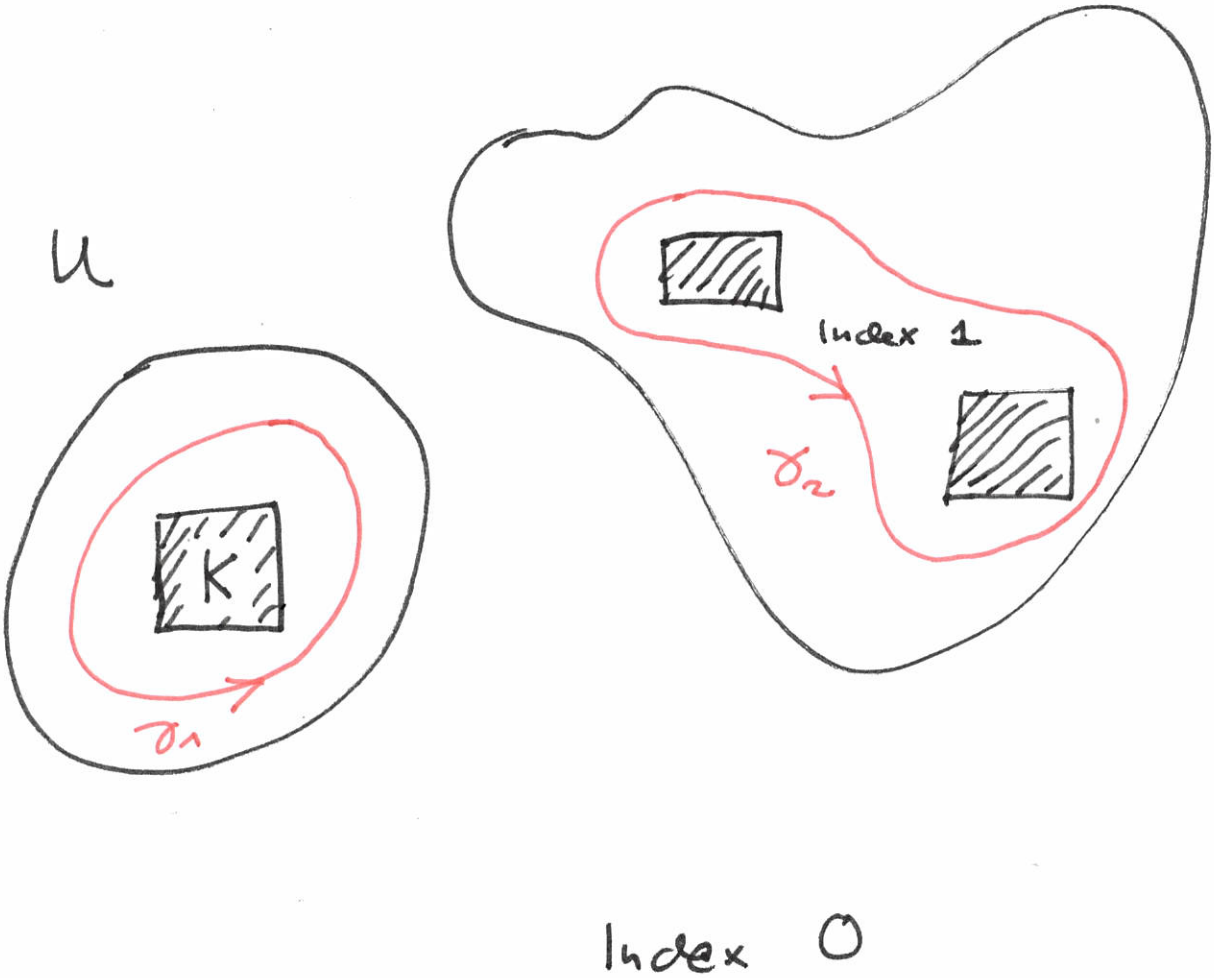
$\nu_3 = 0$

Zu Satz 20.3

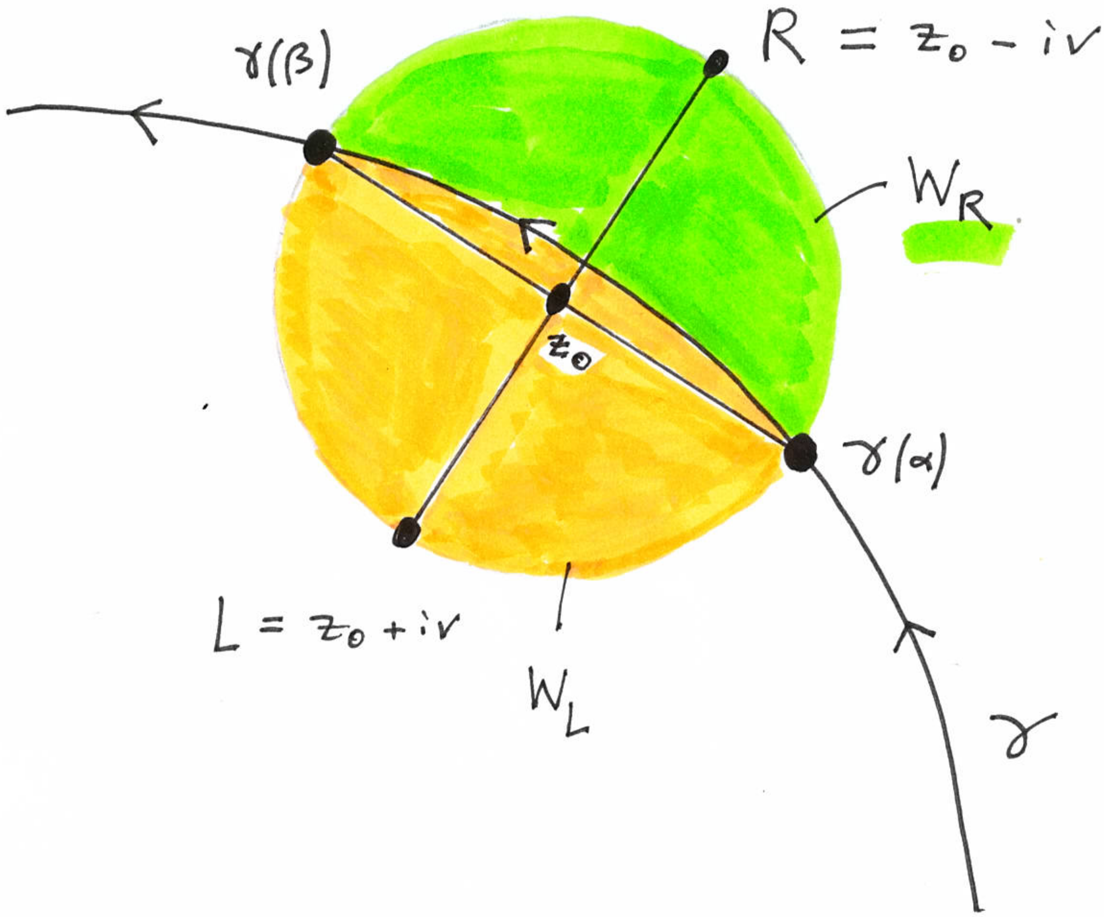


Zu Kapitel 22

Zu Satz 22.1



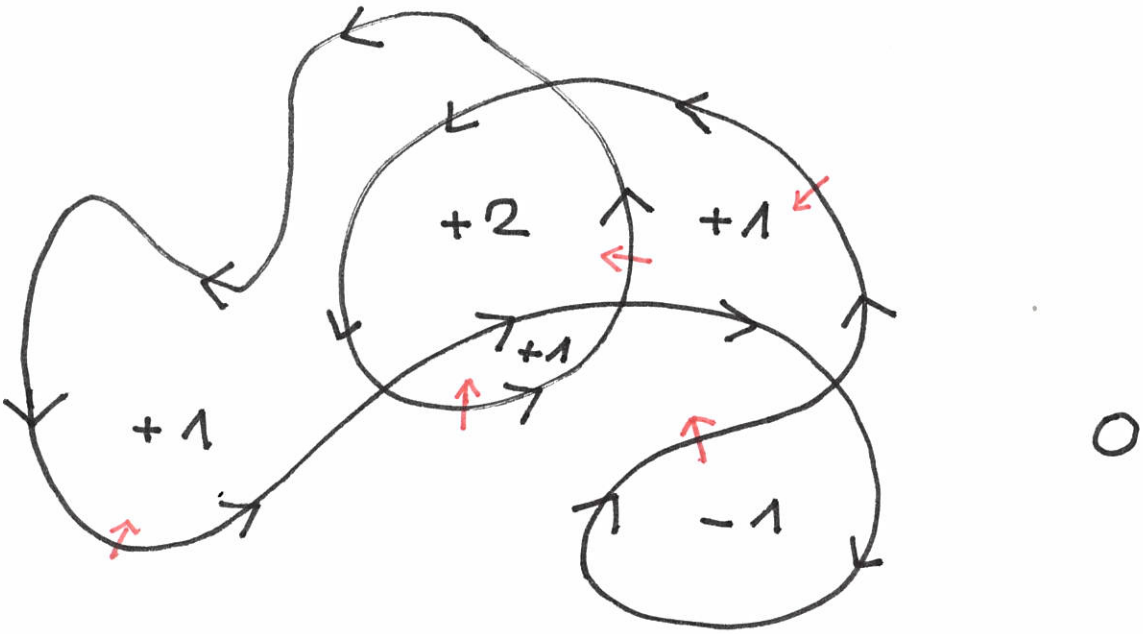
Zu Satz 22.2



Index auf W_L

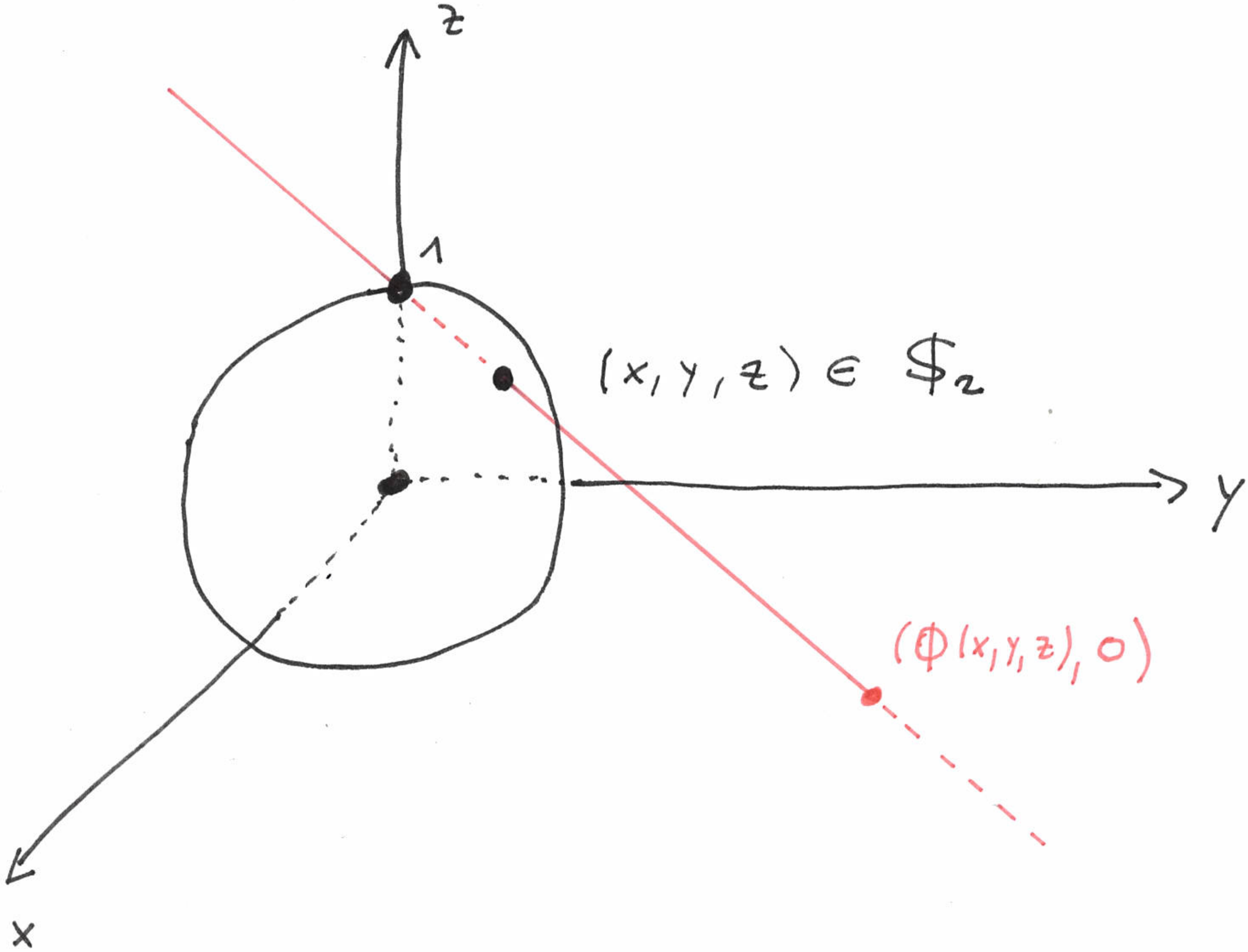
$= 1 +$ Index auf W_R

Beispiel zu Satz 22.2:



Umlaufzahlen des Wegs

Zur stereographischen Projektion



Schnittpunkt der Geraden durch $(0,0,1)$ und (x,y,z) mit der x-y-Ebene