

Einführung in die Funktionalanalysis

Prof. Dr. Helge Glöckner

9. März 2021

Dieser Text basiert auf den Präsentationen zur Vorlesung “Einführung in die Funktionalanalysis” von Prof. Glöckner, die im Wintersemester 2020/21 im Format 4+2 digital an der Universität Paderborn gehalten wurde. Zielgruppe waren Bachelorstudierende der Mathematik und Technomathematik im fünften Semester. Die Vorlesung war dreigeteilt: Zunächst wurden Beispiele und die Grundprinzipien der Funktionalanalysis in normierten Räumen vorgestellt (insb. das Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit, die Sätze von der offenen Abbildung und vom abgeschlossenen Graphen sowie der Fortsetzungssatz von Hahn-Banach). Im zweiten Teil der Vorlesung wurden Grundlagen der Topologie vertieft und einige Sätze bereitgestellt, die für Analysis und Funktionalanalysis wichtig sind (z.B. der Satz von Tychonoff, das Urysohnsche Lemma und der Approximationssatz von Stone-Weierstraß). Im dritten Teil wurden die eigentliche Funktionalanalysis fortgesetzt und u.a. der Satz von Banach-Alaoglu, der Satz von Arzela-Ascoli (in sehr allgemeiner Form) und kompakte Operatoren behandelt.

Abschließend wurden Hilbert-Räume diskutiert, adjungierte Operatoren und der Spektralsatz für kompakte hermitesche Operatoren.

Komplementäre Themen wurden im begleitenden Seminar “Reelle Analysis und Topologie” behandelt (u.a. Regularität von Borelmaßen und Rieszscher Darstellungssatz; komplexe Maße und Satz von Lebesgue-Radon-Nikodym; Dualräume von L^p -Räumen, Separabilität von L^p -Räumen; absolut stetige Funktionen).

Der Themenkreis wird im WS 2021/22 fortgesetzt: In der Vorlesung “Lokalkonvexe Räume” werden topologische Vektorräume behandelt, die nicht notwendig normierte Räume sind, sich aber noch durch eine Familie von Halbnormen beschreiben lassen. Exemplarisch werden hier Testfunktionen und Distributionen behandelt. Voraussichtlich wird es im WS 2021/22 zudem ein Seminar “Funktionalanalysis und Spektraltheorie” geben und dort insb. die Operatortheorie vertieft.

Das Skript ist weitgehend in sich geschlossen; Literaturhinweise finden Sie ab Seite 485.

Teil I: Banachräume und Grundprinzipien der Funktionalanalysis

1 Banachräume: Erste Beispiele und Grundlagen	8
2 Stetigkeit linearer Abbildungen und Operatornorm	25
3 Räume stetiger linearer Abbildungen	42
4 Stetigkeit bilinearer Abbildungen	50
5 Beispiele von Dualräumen	55
6 Konvexe Funktionen und Ungleichungen	69
7 L^p-Räume	79
8 Separabilität	96
9 Der Bairesche Kategoriensatz	106
10 Grundtatsachen über konvexe Mengen	110
11 Das Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit	116
12 Der Satz von der offenen Abbildung	121
13 Der Satz von abgeschlossenen Graphen	129

14	Hintergrund: Offene Abbildungen, Quotientenabbildungen ..	133
15	Auswahlaxiom und Zornsches Lemma	139
16	Der Fortsetzungssatz von Hahn-Banach	150
17	Erste Anwendungen des Satzes von Hahn-Banach	161
18	Faktorräume normierter Räume	166
19	Mehr über komplementierte Untervektorräume	172
20	Dualität	181
21	Bidual und Auswertungshomomorphismus	191
22	Reflexive Räume, I	197
23	Stetige Fortsetzung dicht definierter Operatoren	201
24	Existenz schwacher Integrale in Banachräumen	206
25	Vervollständigung eines normierten Raums	213
26	Exkurs: Tensorprodukte und Funktionenräume	217
Teil II: Weitere Grundlagen der Topologie und Analysis		
27	Netze in der Topologie	234

28	Summierbare und absolut summierbare Familien	275
29	Kompakte und lokalkompakte Räume; Urysohnsches Lemma	291
30	Der Approximationssatz von Stone-Weierstraß.....	313
31	Initiale Topologien, Produkttopologie	328
32	Filter in der Topologie und der Satz von Tychonoff	341
33	Vollständige Regularität	354
	Anhang zu §33: Stone-Čech-Kompaktifizierung	361
34	Finale Topologien, k -Räume und $k_{\mathbb{R}}$ -Räume	365
Teil III: Fortsetzung der Funktionalanalysis		
35	Schwach-*-Topologie und Satz von Banach-Alaoglu.....	375
36	Gleichgradige Stetigkeit und Satz von Arzela-Ascoli.....	378
37	Kompakte Operatoren	399
38	Reflexive Räume, II (Charakterisierung)	406
39	Hilberträume	414
40	Adjungierte Operatoren	446

41 Spektralsatz für kompakte hermitesche Operatoren	460
42 Anhang: Beweis des Zornschen Lemmas	476
Literaturliste	485

§1 Banachräume: Erste Beispiele und Grundlagen

Im folgenden sei $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.

Definition 1.1

Ein **normierter Raum** ist ein Paar $(E, \|\cdot\|)$ aus einem \mathbb{K} -Vektorraum E und einer Norm $\|\cdot\|: E \rightarrow [0, \infty[$; es gilt also

Positive Homogenität: $(\forall x \in E)(\forall t \in \mathbb{K}) \|tx\| = |t| \|x\|$

Subadditivität: $(\forall x, y \in E) \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Definitheit: $(\forall x \in E) \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Dann definiert $d(x, y) := \|x - y\|$ eine Metrik auf E . Ist E bzgl. d ein vollständiger metrischer Raum, so nennt man den normierten Raum $(E, \|\cdot\|)$ einen **Banachraum**.

Eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Vektoren $x_n \in E$ ist eine Cauchyfolge in E , wenn

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n, m \geq N) \|x_n - x_m\| < \varepsilon.$$

Die Vollständigkeit bedeutet, dass in E jede Cauchyfolge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert, d.h. es existiert ein $x \in E$ derart, dass

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \geq N) \|x_n - x\| < \varepsilon.$$

Beispiel 1.2: \mathbb{R}^n und \mathbb{C}^n sind bezüglich jeder Norm Banachräume (siehe Analysis 2)

Lemma 1.3

Es sei $(E, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum.

- (a) Jede Cauchyfolge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in E ist **beschränkt**, d.h. es ist $\sup\{\|x_n\| : n \in \mathbb{N}\} < \infty$.
- (b) Eine Cauchyfolge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in E ist genau dann konvergent, wenn sie eine konvergente Teilfolge besitzt.
- (c) Ist E ein Banachraum, so auch jeder abgeschlossene Untervektorraum $F \subseteq E$ mit der induzierten Norm, $\|x\|_F := \|x\|$ für $x \in F$.
- (d) Ist ein Untervektorraum $F \subseteq E$ in der induzierten Norm ein Banachraum, so ist F in E abgeschlossen.

Beweis. (a) Es existiert $N \in \mathbb{N}$ derart, dass $\|x_n - x_m\| \leq 1$ für alle $n, m \geq N$. Für $n \geq N$ können wir $m := N$ nehmen und erhalten

$$\|x_n\| = \|x_N + (x_n - x_N)\| \leq \|x_N\| + \|x_n - x_N\| \leq \|x_N\| + 1.$$

Definieren wir R als das Maximum von $\|x_1\|, \dots, \|x_{N-1}\|$ und $\|x_N\| + 1$, so gilt also $\|x_n\| \leq R$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(b) Wir wissen aus der Analysis, dass jede Teilfolge einer konvergenten Folge konvergiert, gegen den gleichen Grenzwert. Existiere umgekehrt eine konvergente Teilfolge $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$, mit $n_1 < n_2 < \dots$ und Limes $x \in E$. Gegeben $\varepsilon > 0$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$ derart, dass $\|x_n - x_m\| < \varepsilon/2$ für alle $n, m \geq N$. Weiter existiert ein $K \in \mathbb{N}$ derart, dass $\|x - x_{n_k}\| < \varepsilon/2$ für alle $k \geq K$. Es existiert ein $\ell \geq K$ mit $n_\ell \geq N$. Für alle $n \geq N$ gilt dann

$$\|x_n - x\| \leq \|x_n - x_{n_\ell}\| + \|x_{n_\ell} - x\| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

Somit konvergiert $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen x .

(c) Ist $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in F , so ist $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ auch eine Cauchyfolge in E . Wegen der Vollständigkeit existiert also

$$x := \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$$

in E . Da F abgeschlossen ist und $x_n \in F$ für jedes n , folgt $x \in F$.

(d) Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in F , die in E gegen ein $x \in E$ konvergiert. Wir zeigen, dass $x \in F$. Als konvergente Folge ist $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ auch eine Cauchyfolge in E . Dann ist $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ auch eine Cauchyfolge in F und somit gegen ein $y \in F$ konvergent, weil F vollständig ist. Dann gilt auch $x_n \rightarrow y$ in E und somit ist

$$x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = y \in F;$$

folglich ist F abgeschlossen. \square

Beispiel 1.4

(a) Ist X eine Menge, so schreiben wir $\ell^\infty(X) := \ell^\infty(X, \mathbb{K})$ für den Vektorraum aller beschränkten Funktionen $f: X \rightarrow \mathbb{K}$, so dass also

$$\|f\|_\infty := \sup\{|f(x)| : x \in X\} < \infty$$

gilt in $[0, \infty]$. Die Supremumsnorm $\|\cdot\|_\infty$ macht $\ell^\infty(X)$ zu einem Banachraum (Übung).

(b) Man kürzt ab: $\ell^\infty := \ell^\infty(\mathbb{N}) := \ell^\infty(\mathbb{N}, \mathbb{K})$. Die Elemente von ℓ^∞ sind also beschränkte Folgen $f = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $a_n = f(n) \in \mathbb{K}$.

(c) Ist X ein metrischer (oder topologischer) Raum, so ist die Teilmenge $BC(X, \mathbb{K})$ der stetigen beschränkten Funktionen ein abgeschlossener Untervektorraum von $\ell^\infty(X)$ (Übung), somit ein Banachraum mit der Supremumsnorm.

(d) Insb. ist $(C(K, \mathbb{K}), \|\cdot\|_\infty)$ ein Banachraum für jeden kompakten metrischen (oder topologischen)* Raum K , denn nach dem Satz vom Maximum ist $C(K, \mathbb{K}) = BC(K, \mathbb{K})$. Schreibe auch $C(K) := C(K, \mathbb{K})$. (* Ein top. Raum K heißt kompakt, wenn er Hausdorffsch ist & jede offene Überdeckung eine endliche Teilüberdeckung hat.)

Ist $(E, \|\cdot\|_E)$ ein Banachraum, so ist auch die Menge $\ell^\infty(X, E)$ der beschränkten E -wertigen Funktionen, mit

$$\|f\|_\infty := \sup\{\|f(x)\|_E : x \in X\} < \infty,$$

ein Banachraum bezüglich der Supremumsnorm $\|\cdot\|_\infty$ (im Beweis für (a) muss man nur überall den Betrag $|\cdot|$ durch $\|\cdot\|_E$ ersetzen).

Beispiel 1.5

(a) Man schreibt c_0 für die Menge der Nullfolgen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in \mathbb{K} , so dass also

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$$

Es ist c_0 ein abgeschlossener Untervektorraum von ℓ^∞ (Übung), somit $(c_0, \|\cdot\|_\infty)$ ein Banachraum.

(b) Auch die Menge c aller konvergenten Folgen in \mathbb{K} ist ein abgeschlossener Untervektorraum von ℓ^∞ und somit ein Banachraum (Übung).

Unendliche Reihen in normierten Räumen (und ihre Konvergenz) definiert man analog zu Reihen reeller oder komplexer Zahlen.

Definition 1.6.

Sei $(E, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum und $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in E . Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ mit den Summanden a_n ist definiert als die Folge $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ der Anfangssummen $S_n := \sum_{k=1}^n a_k$. Man nennt die Reihe **konvergent**, wenn die Folge der Anfangssummen konvergiert und schreibt dann auch

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n := \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k$$

für den Grenzwert. Gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|a_n\| < \infty,$$

so wird die Reihe **absolut konvergent** genannt.

Die folgende Charakterisierung ist manchmal nützlich beim Nachweis von Vollständigkeit.

Lemma 1.7

Ein normierter Raum $(E, \|\cdot\|)$ ist genau dann ein Banach-Raum, wenn in E jede absolut konvergente Reihe konvergiert.

Beweis. Sei jede absolut konvergente Reihe konvergent. Ist $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in E , so existiert ein $n_1 \in \mathbb{N}$ derart, dass

$$\|x_n - x_m\| < 1/2 \quad \text{für alle } n, m \geq n_1.$$

Rekursiv finden wir $n_1 < n_2 < \dots$ derart, dass

$$\|x_n - x_m\| < (1/2)^k \quad \text{für alle } n, m \geq n_k.$$

Insbesondere gilt dann

$$\|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\| < (1/2)^k \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}$$

und somit

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\| \leq \sum_{k=1}^{\infty} (1/2)^k = 1 < \infty.$$

Per Voraussetzung konvergiert also $\sum_{k=1}^{\infty} (x_{n_{k+1}} - x_{n_k})$ in E . Sei y der Grenzwert. Man beachte, dass

$$x_{n_{j+1}} - x_1 = \sum_{k=1}^j (x_{n_{k+1}} - x_{n_k}) \rightarrow y.$$

Also ist auch die Folge $(x_{n_{j+1}})_{j \in \mathbb{N}}$ konvergent. Da diese eine Teilfolge der Cauchyfolge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist, ist letztere nach Lemma 1.3 (b) konvergent.

(Wir haben benutzt:

Konvergiert eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in einem normierten Raum $(E, \|\cdot\|)$ gegen x und ist $y \in E$, so konvergiert die Folge $(x_n + y)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen $x + y$.

Dies folgt aus $\|(x_n + y) - (x + y)\| = \|x_n - x\| \rightarrow 0$.)

Sei umgekehrt E als vollständig angenommen und $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ eine absolut konvergente Reihe in E . Wir zeigen, dass die Folge $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ der Anfangssummen $S_n := \sum_{k=1}^n x_k$ eine Cauchyfolge ist (und somit konvergent). Aufgrund der Konvergenz der Folge $(\sum_{k=1}^n \|x_k\|)_{n \in \mathbb{N}}$ ist diese eine Cauchyfolge; zu $\varepsilon > 0$ finden wir daher ein $N \in \mathbb{N}$ derart, dass

$$\sum_{k=n+1}^m \|x_k\| = \sum_{k=1}^m \|x_k\| - \sum_{k=1}^n \|x_k\| < \varepsilon$$

für alle $m \geq n \geq N$. Somit gilt

$$\|S_n - S_m\| = \left\| \sum_{k=n+1}^m x_k \right\| \leq \sum_{k=n+1}^m \|x_k\| < \varepsilon$$

für alle $m \geq n \geq N$, also ist $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge. \square

Zwei weitere Klassen von Banachräumen sind für uns wichtig. Aus der Analysis kennen wir für $p \in [1, \infty[$ bereits die p -Norm auf \mathbb{R}^n und \mathbb{C}^n ,

$$\|(x_1, \dots, x_n)\|_p := \sqrt[p]{\sum_{k=1}^n |x_k|^p}.$$

Definition 1.8

Für $p \in [1, \infty[$ definieren wir ℓ^p als die Menge aller Folgen $x = (x_k)_{k \in \mathbb{N}}$, welche **p -summierbar** sind, d.h.

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p < \infty.$$

Wir setzen $\|x\|_p := \sqrt[p]{\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p}$.

Satz 1.9

Für jedes $p \in [1, \infty[$ ist $(\ell^p, \|\cdot\|_p)$ ein Banachraum.

Beweis. Wir zeigen zunächst, dass ℓ^p ein Untervektorraum des Vektorraums $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ aller Folgen ist und $\|\cdot\|_p$ eine Norm auf ℓ^p .

Offenbar ist $0 = (0)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^p$ mit $\|0\|_p = 0$. Ist $x = (x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ in ℓ^p und $x \neq 0$, so existiert ein $m \in \mathbb{N}$ mit $x_m \neq 0$. Dann ist $\|x\|_p \geq |x_m| > 0$.

Gegeben $x = (x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ und $y = (y_k)_{k \in \mathbb{N}}$ haben wir für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \sqrt[p]{\sum_{k=1}^n |x_k + y_k|^p} &= \|(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n)\|_p \\ &\leq \|(x_1, \dots, x_n)\|_p + \|(y_1, \dots, y_n)\|_p \\ &= \sqrt[p]{\sum_{k=1}^n |x_k|^p} + \sqrt[p]{\sum_{k=1}^n |y_k|^p} \leq \|x\|_p + \|y\|_p, \end{aligned}$$

somit $\sum_{k=1}^n |x_k + y_k|^p \leq (\|x\|_p + \|y\|_p)^p$. Übergang zum Supremum liefert $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k + y_k|^p \leq (\|x\|_p + \|y\|_p)^p < \infty$. Also ist $x + y \in \ell^p$ und $\|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p$.

Gegeben $t \in \mathbb{K}$ ist weiter

$$\sum_{k=1}^{\infty} |tx_k|^p = \sum_{k=1}^{\infty} |t|^p |x_k|^p = |t|^p \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p = |t|^p (\|x\|_p)^p < \infty,$$

somit $tx \in \ell^p$ und $\|tx\|_p = |t| \|x\|_p$.

Sei nun $(f^{(j)})_{j \in \mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in ℓ^p , wobei $f^{(j)} = (f_k^{(j)})_{k \in \mathbb{N}}$.

Für jedes feste $k \in \mathbb{N}$ ist dann $(f_k^{(j)})_{j \in \mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in \mathbb{K} , da

$$|f_k^{(j)} - f_k^{(i)}| \leq \|f^{(j)} - f^{(i)}\|_p$$

für große i, j kleiner jedem vorgegebenen $\varepsilon > 0$ gemacht werden kann. Da \mathbb{K} vollständig ist, existiert ein $a_k \in \mathbb{K}$ mit

$$a_k = \lim_{j \rightarrow \infty} f_k^{(j)}.$$

Sei $a := (a_k)_{k \in \mathbb{N}}$. Wir zeigen nun, dass $a \in \ell^p$; anschließend zeigen wir, dass $f^{(j)} \rightarrow a$ in ℓ^p , was den Beweis beendet.

Gegeben $\varepsilon > 0$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$ derart, dass

$$\|f^{(j)} - f^{(i)}\|_p < \varepsilon \quad \text{für alle } i, j \geq N. \quad (1)$$

Somit gilt für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$\sqrt[p]{\sum_{k=1}^n |f_k^{(j)} - f_k^{(i)}|^p} \leq \|f^{(j)} - f^{(i)}\|_p \leq \varepsilon.$$

Mit $j \rightarrow \infty$ folgt

$$\sqrt[p]{\sum_{k=1}^n |a_k - f_k^{(i)}|^p} \leq \varepsilon.$$

Also ist

$$\begin{aligned} \|(a_1, \dots, a_n)\|_p &\leq \|(a_1, \dots, a_n) - (f_1^{(i)}, \dots, f_n^{(i)})\|_p + \|(f_1^{(i)}, \dots, f_n^{(i)})\|_p \\ &\leq \varepsilon + \|f^{(i)}\|_p \end{aligned}$$

und somit

$$\sum_{k=1}^n |a_k|^p \leq (\varepsilon + \|f^{(i)}\|_p)^p.$$

Bilden des Supremums über n liefert

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^p \leq (\varepsilon + \|f^{(i)}\|_p)^p < \infty. \text{ Also ist } a \in \ell^p.$$

Wir zeigen nun, dass $f^{(j)} \rightarrow a$ in ℓ^p für $j \rightarrow \infty$. Gegeben $\varepsilon > 0$ sei N wie zuvor. Es existiert ein $\ell \in \mathbb{N}$ derart, dass

$$\sqrt[p]{\sum_{k=\ell+1}^{\infty} |a_k|^p} < \varepsilon \quad (2)$$

und

$$\sqrt[p]{\sum_{k=\ell+1}^{\infty} |f_k^{(N)}|^p} < \varepsilon. \quad (3)$$

Es existiert ein $M \geq N$ derart, dass

$$\sqrt[p]{\sum_{k=1}^{\ell} |f_k^{(n)} - a_k|^p} < \varepsilon \quad \text{für alle } n \geq M. \quad (4)$$

Wir benutzen nun, dass für jedes $b = (b_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \ell^p$ stets

$$\begin{aligned}
\sqrt[p]{\sum_{k=1}^{\infty} |b_k|^p} &= \|b\|_p = \|(b_1, \dots, b_\ell, 0, \dots) + (0, \dots, 0, b_{\ell+1}, \dots)\|_p \\
&\leq \|(b_1, \dots, b_\ell, 0, \dots)\|_p + \|(0, \dots, 0, b_{\ell+1}, \dots)\|_p \\
&= \sqrt[p]{\sum_{k=1}^{\ell} |b_k|^p} + \sqrt[p]{\sum_{k=\ell+1}^{\infty} |b_k|^p}
\end{aligned}$$

gilt. Also ist für alle $n \geq M$

$$\begin{aligned}
\|f^{(n)} - a\|_p &\leq \sqrt[p]{\sum_{k=1}^{\ell} |f_k^{(n)} - a_k|^p} + \sqrt[p]{\sum_{k=\ell+1}^{\infty} |f_k^{(n)} - a_k|^p} \\
&\leq \varepsilon + \sqrt[p]{\sum_{k=\ell+1}^{\infty} |f_k^{(n)} - f_k^{(N)}|^p} + \sqrt[p]{\sum_{k=\ell+1}^{\infty} |f_k^{(N)} - a_k|^p}
\end{aligned}$$

$$\leq \varepsilon + \|f^{(n)} - f^{(N)}\|_p + \sqrt[p]{\sum_{k=\ell+1}^{\infty} |f_k^{(N)}|^p} + \sqrt[p]{\sum_{k=\ell+1}^{\infty} |a_k|^p} \leq 4\varepsilon$$

unter Benutzung von (4), (1), (3) und (2). Also gilt $f^{(j)} \rightarrow a$. \square

Allgemeiner betrachtet man $L^p(X, \mu)$ zu einem gegebenen Maßraum (X, \mathcal{S}, μ) , etwa $L^p[0, 1]$ bezüglich des Lebesgue-Borel-Maßes auf $[0, 1]$ (siehe Kapitel 7).

§2 Stetigkeit linearer Abbildungen und Operatornorm

Wir charakterisieren Stetigkeit für lineare Abbildungen zwischen normierten Räumen und diskutieren Beispiele.

Notation: Ist $(E, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum, $x \in E$ und $r > 0$, so schreiben wir

$$B_r^E(x) := B_r^{\|\cdot\|}(x) := \{y \in E : \|y - x\| < r\}$$

für die offene Kugel vom Radius r um x und

$$\overline{B}_r^E(x) := \overline{B}_r^{\|\cdot\|}(x) := \{y \in E : \|y - x\| \leq r\}$$

für die entsprechende abgeschlossene Kugel.

Wir benutzen folgende Fakten über normierte Räume:

Lemma 2.1

Ist $(E, \|\cdot\|_E)$ ein normierter Raum, so gilt:

- (a) Die Addition $\alpha: E \times E \rightarrow E, (x, y) \mapsto x + y$ ist stetig, wenn wir $E \times E$ mit der Norm

$$(x, y) \mapsto \max\{\|x\|_E, \|y\|_E\}$$

versehen.

- (b) Die Translationen $E \rightarrow E, y \mapsto x + y$ sind stetig (und sogar Homöomorphismen) für alle $x \in E$.
- (c) Die Abbildung $\mathbb{K} \times E \rightarrow E, (t, x) \mapsto tx$ der Multiplikation mit Skalaren ist stetig.
- (d) Für jedes $t \in \mathbb{K} \setminus 0$ ist die Abbildung $E \rightarrow E, x \mapsto tx$ ein Homöomorphismus.

Beweis (in der Vorlesung übersprungen).

Offenbar konvergiert in $E \times E$ eine Folge von Elementen (x_n, y_n) genau dann gegen $(x, y) \in E \times E$, wenn $x_n \rightarrow x$ und $y_n \rightarrow y$ in E .

(a) Wenn $(x_n, y_n) \rightarrow (x, y)$ in $E \times E$, so folgt

$$\|(x + y) - (x_n + y_n)\|_E \leq \|x - x_n\|_E + \|y - y_n\|_E \rightarrow 0.$$

Also ist α an der Stelle (x, y) stetig.

(b) Aus $y_n \rightarrow y$ folgt $x + y_n \rightarrow x + y$ nach dem Vorigen.

(c) Gelte $(t_n, x_n) \rightarrow (t, x)$ in $\mathbb{K} \times E$, also $t_n \rightarrow t$ und $x_n \rightarrow x$.
Dann folgt

$$\begin{aligned} \|tx - t_n x_n\|_E &= \|(t - t_n)x + t_n(x - x_n)\|_E \\ &\leq |t - t_n| \|x\|_E + |t_n| \|x - x_n\|_E \\ &\rightarrow 0 \|x\|_E + |t| 0 = 0, \end{aligned}$$

also $t_n x_n \rightarrow tx$. Somit die Multiplikationsabbildung $\mathbb{K} \times E \rightarrow E$ stetig an der Stelle (t, x) .

(d) Für $t \in \mathbb{K}$ ist die Abbildung $\mu_t: E \rightarrow E$, $x \mapsto tx$ nach dem Vorigen stetig. Ist $t \neq 0$, so ist offenbar $\mu_{1/t}$ die Umkehrabbildung für μ_t und auch $\mu_{1/t}$ ist stetig. \square

Satz 2.2

Es seien $(E, \|\cdot\|_E)$ und $(F, \|\cdot\|_F)$ normierte Räume und $\alpha: E \rightarrow F$ eine lineare Abbildung. Dann sind äquivalent:

- (a) α ist stetig;
- (b) α ist stetig an der Stelle 0;
- (c) Es ist

$$\|\alpha\|_{\text{op}} := \sup\{\|\alpha(x)\|_F : x \in E \text{ mit } \|x\|_E \leq 1\} < \infty;$$

- (d) Es existiert ein $M \in [0, \infty[$ derart, dass

$$\|\alpha(x)\|_F \leq M\|x\|_E \quad \text{für alle } x \in E.$$

Beweis. (a) \Rightarrow (b) ist klar.

(b) \Rightarrow (a): Gilt $x_n \rightarrow x$ in E , so folgt $x_n - x \rightarrow x - x = 0$, somit

$$\|\alpha(x) - \alpha(x_n)\|_F = \|\alpha(x - x_n)\|_F \rightarrow 0.$$

(b) \Rightarrow (c) Da $\alpha^{-1}(\overline{B}_1^F(0))$ eine Nullumgebung in E ist, existiert ein $r > 0$ mit

$$\overline{B}_r^E(0) \subseteq \alpha^{-1}(\overline{B}_1^F(0)).$$

Dann gilt $\alpha(\overline{B}_r^E(0)) \subseteq \overline{B}_1^F(0)$. Für $x \in E$ mit $\|x\|_E \leq 1$ ist $\|rx\|_E = r\|x\|_E \leq r$, somit

$$\|\alpha(x)\|_F = \frac{1}{r} \|\alpha(rx)\|_F \leq \frac{1}{r}.$$

Es folgt $\|\alpha\|_{\text{op}} \leq \frac{1}{r} < \infty$.

(c) \Rightarrow (d). Wir zeigen, dass $M := \|\alpha\|_{\text{op}}$ gewählt werden kann. Sei $x \in E$. Für $r > 0$ mit $r\|x\|_E \leq 1$ ist

$$r\|\alpha(x)\|_F = \|\alpha(rx)\|_F \leq \|\alpha\|_{\text{op}},$$

also $\|\alpha(x)\|_F \leq \frac{1}{r}\|\alpha\|_{\text{op}}$. Ist $\|x\|_E = 0$, schließen wir $\|\alpha(x)\|_F \leq \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{r}\|\alpha\|_{\text{op}} = 0 = \|\alpha\|_{\text{op}}\|x\|_E$. Ist $\|x\|_E > 0$, wählen wir $r := 1/\|x\|_E$ und erhalten $\|\alpha(x)\|_F \leq \|\alpha\|_{\text{op}}\|x\|_E$.

(d) \Rightarrow (b): Ist x_n eine Nullfolge in E , so gilt

$$\|\alpha(x_n)\|_F \leq M\|x_n\| \rightarrow 0$$

und somit $\alpha(x_n) \rightarrow 0$. Also ist α stetig an der Stelle 0. \square

Bemerkung 2.3

(a) Nach dem Beweis von (c) \Rightarrow (d) ist $\|\alpha\|_{\text{op}}$ eine mögliche Wahl für M , also

$$\|\alpha(x)\|_F \leq \|\alpha\|_{\text{op}} \|x\|_E \quad \text{für alle } x \in E$$

wenn α stetig ist. Dies ist die kleinstmögliche Wahl für M , denn für M wie in (d) und $x \in E$ mit $\|x\|_E \leq 1$ ist

$$\|\alpha(x)\|_F \leq M \|x\|_E \leq M$$

und Übergang zum Supremum in x liefert $\|\alpha\|_{\text{op}} \leq M$.

(b) Lineare Abbildungen $\alpha: E \rightarrow F$ mit $\|\alpha\|_{\text{op}} < \infty$ nennt man auch **beschränkte (lineare) Operatoren**. Nach Satz 2.2 ist eine lineare Abbildung also genau dann stetig, wenn sie ein beschränkter linearer Operator ist.

Beispiel 2.4

Ist $(F, \|\cdot\|_F)$ ein normierter Raum, so ist jede lineare Abbildung $\alpha: \mathbb{R}^n \rightarrow F$ stetig, denn wegen $(x_1, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^n x_j e_j$ ist

$$\alpha(x_1, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^n x_j \alpha(e_j)$$

und die Abbildungen $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, (x_1, \dots, x_n) \mapsto x_j$ sind stetig.

Mit $C(K) := C(K, \mathbb{K})$:

Beispiel 2.5

Für jeden kompakten topologischen Raum K und jedes $x \in K$ ist die Punktauswertung

$$\text{ev}_x: C(K) \rightarrow \mathbb{K}, \quad f \mapsto f(x)$$

stetig mit $\|\text{ev}_x\|_{\text{op}} \leq 1$, denn diese ist linear und

$$|\text{ev}_x(f)| = |f(x)| \leq \sup\{|f(y)| : y \in K\} = \|f\|_{\infty} \quad \text{für alle } f \in C(K).$$

Beispiel 2.6

Es sei K ein kompakter topologischer Raum. Für jedes $f \in C(K)$ ist der Multiplikationsoperator

$$m_f: C(K) \rightarrow C(K), \quad g \mapsto fg$$

stetig, mit $\|m_f\|_{\text{op}} \leq \|f\|_{\infty}$ (wobei $(fg)(x) := f(x)g(x)$).

Denn m_f ist linear und für jedes $x \in K$ ist

$$|m_f(g)(x)| = |f(x)g(x)| \leq |f(x)| |g(x)| \leq \|f\|_{\infty} \|g\|_{\infty},$$

somit $\|m_f(g)\|_{\infty} \leq \|f\|_{\infty} \|g\|_{\infty}$.

Beispiel 2.7

Es seien K und L kompakte topologische Räume und $f: K \rightarrow L$ eine stetige Abbildung. Dann ist

$$f^*: C(L) \rightarrow C(K), \quad g \mapsto g \circ f$$

eine stetige lineare Abbildung mit $\|f\|_{\text{op}} \leq 1$. Man schreibt auch $C(f, \mathbb{K})$ statt f^* .

In der Tat ist f^* linear. Für jedes $g \in C(L)$ und $x \in K$ ist

$$|f^*(g)(x)| = |g(f(x))| \leq \|g\|_{\infty},$$

somit $\|f^*(g)\|_{\infty} \leq \|g\|_{\infty}$.

Gegeben $k \in \mathbb{N}_0$ machen wir den Raum $C^k[0, 1]$ der C^k -Funktionen $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{K}$ zu einem normierten Raum mit der durch

$$\|f\|_{C^k} := \max\{\|f\|_\infty, \|f'\|_\infty, \dots, \|f^{(k)}\|_\infty\}$$

für $f \in C^k[0, 1]$ gegebenen Norm, wobei $f^{(j)}$ für $j \in \{1, \dots, k\}$ die j te Ableitung von f ist. (Man schreibt auch $f^{(0)} := f$).

Beispiel 2.8

Die lineare Abbildung

$$D: C^{k+1}[0, 1] \rightarrow C^k[0, 1], \quad f \mapsto f'$$

ist stetig, mit $\|D\|_{\text{op}} \leq 1$.

Es ist nämlich

$$\|(Df)^{(j)}\|_\infty = \|f^{(j+1)}\|_\infty \leq \|f\|_{C^{k+1}}$$

für alle $j \in \{0, 1, \dots, k\}$ und somit $\|Df\|_{C^k} \leq \|f\|_{C^{k+1}}$.

Wählt man auf C^{k+1} ungeschickter eine Norm, wird D unstetig, etwa wenn $k = 0$:

Beispiel 2.9

Die lineare Abbildung

$$D: C^1[0, 1] \rightarrow C[0, 1], \quad f \mapsto f'$$

ist unstetig, wenn wir beide Seiten mit der Supremumsnorm versehen.

Definieren wir $f_n \in C^1[0, 1]$ via $f_n(x) := \sin(nx)$, so ist $\|f_n\|_\infty \leq 1$ und

$$|Df_n(x)| = |f_n'(x)| = |n \cos(nx)| = n$$

für $x = 0$, somit $\|Df_n\|_\infty \geq n$, folglich per Definition als Supremum

$$\|D\|_{\text{op}} \geq \|Df_n\|_\infty \geq n$$

und somit $\|D\|_{\text{op}} = \infty$.

Beispiel 2.10

Für jedes $p \in [1, \infty]$ und $n \in \mathbb{N}$ ist die Punktauswertung

$$\text{ev}_n: \ell^p \rightarrow \mathbb{K}, \quad a = (a_k)_{k \in \mathbb{N}} \mapsto a_n$$

stetig und linear, mit $\|\text{ev}_n\|_{\text{op}} \leq 1$.

Fall $p = \infty$: Offenbar ist $|\text{ev}_n(a)| = |a_n| \leq \|a\|_{\infty}$.

Fall $p \in [1, \infty[$: Es ist $|\text{ev}_n(a)| = |a_n| \leq \|a\|_p$, weil

$$|a_n|^p \leq \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^p = (\|a\|_p)^p.$$

Sind $(E, \|\cdot\|_E)$ und $(F, \|\cdot\|_F)$ normierte Räume, so können wir $E \times F$ mit der durch

$$\|(x, y)\| := \max\{\|x\|_E, \|y\|_F\}$$

gegebenen “Maximumnorm” (oder “Produktnorm”) versehen.

Dann ist $B_r^{E \times F}(x, y) = B_r^E(x) \times B_r^F(y)$ und somit ist die zugehörige Topologie auf $E \times F$ die Produkttopologie, d.h. eine Menge $U \subseteq E \times F$ ist genau dann offen, wenn zu jedem $(x, y) \in U$ eine offene x -Umgebung $V \subseteq E$ und eine offene y -Umgebung $W \subseteq F$ existiert mit $V \times W \subseteq U$ (Übung).

Beispiel 2.11

Die Projektionen $\text{pr}_1: E \times F \rightarrow E, (x, y) \mapsto x$ und $\text{pr}_2: E \times F \rightarrow F, (x, y) \mapsto y$ sind stetig und linear, mit Operatornorm ≤ 1 .

Es ist $\|\text{pr}_1(x, y)\|_E = \|x\|_E \leq \max\{\|x\|_E, \|y\|_F\} = \|(x, y)\|$ und somit $\|\text{pr}_1\|_{\text{op}} \leq 1$. Analog für pr_2 .

Definition 2.12

Es seien $(E, \|\cdot\|_E)$ und $(F, \|\cdot\|_F)$ normierte Räume und $\alpha: E \rightarrow F$ eine lineare Abbildung.

- Ist α stetig und gibt es eine stetige lineare Abbildung $\beta: F \rightarrow E$ mit $\beta \circ \alpha = \text{id}_E$ und $\alpha \circ \beta = \text{id}_F$, so nennt man α einen **topologischen Isomorphismus** (oder auch: einen Isomorphismus topologischer Vektorräume).^a
- Gilt $\|\alpha(x)\|_F = \|x\|_E$ für alle $x \in E$, so nennt man α eine (lineare) **Isometrie**.^b
- Ist α eine Isometrie und existiert eine Isometrie $\beta: F \rightarrow E$ mit $\beta \circ \alpha = \text{id}_E$ und $\alpha \circ \beta = \text{id}_F$, so nennt man α einen **isometrischen Isomorphismus**.

^aEs ist also α stetig, invertierbar und α^{-1} ($= \beta$) ist ebenfalls stetig. Aus der linearen Algebra wissen wir, dass α^{-1} automatisch linear ist.

^bDann ist $\|\alpha\|_{\text{op}} \leq 1$, also α stetig. Weiter ist α injektiv, denn ist $0 \neq x \in E$, so ist $\|\alpha(x)\|_F = \|x\|_E > 0$ und somit $\alpha(x) \neq 0$, also $\ker(\alpha) = \{0\}$.

Eine Isometrie ist genau dann ein isometrischer Isomorphismus, wenn sie surjektiv und somit bijektiv ist, denn es ist dann $\|\alpha^{-1}(y)\|_E = \|\alpha(\alpha^{-1}(y))\|_F = \|y\|_F$ für alle $y \in F$, also α^{-1} ($=: \beta$) automatisch isometrisch.

Beispiel 2.13

Sei $f: K \rightarrow L$ eine stetige Abbildung zwischen kompakten topologischen Räumen. Ist f surjektiv, so ist

$$f^*: C(L) \rightarrow C(K), \quad g \mapsto g \circ f$$

eine Isometrie (Übung). Diese braucht nicht surjektiv zu sein, also kein isometrischer Isomorphismus (Übung).

Beispiel 2.14

Die Abbildung $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $t \mapsto 2t$ ist ein topologischer Isomorphismus von $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ nach $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, aber keine Isometrie.

Beispiel 2.15

Gegeben $a = (a_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \ell^\infty$ und $p \in [1, \infty[$ ist die Abbildung

$$m_a: \ell^p \rightarrow \ell^p, \quad m_a(x) := (a_k x_k)_{k \in \mathbb{N}} \quad \text{für } x = (x_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \ell^p$$

linear und stetig (mit $\|m_a\|_{\text{op}} \leq \|a\|_\infty$); sie ist eine Isometrie genau dann, wenn $|a_k| = 1$ für alle $k \in \mathbb{N}$. In diesem Fall ist m_a ein isometrischer Isomorphismus (Übung). Analog mit $p = \infty$.

§3 Räume stetiger linearer Abbildungen

Sind $(E, \|\cdot\|_E)$ und $(F, \|\cdot\|_F)$ normierte Räume, so schreiben wir $\mathcal{L}(E, F)$ für die Menge aller stetigen linearen Abbildungen $\alpha: E \rightarrow F$.

Satz 3.1

$\mathcal{L}(E, F)$ ist ein Untervektorraum des Raums F^E aller Funktionen von E nach F . Weiter gilt:

- (a) $\|\cdot\|_{\text{op}}: \mathcal{L}(E, F) \rightarrow [0, \infty[$, $\alpha \mapsto \|\alpha\|_{\text{op}}$ ist eine Norm auf $\mathcal{L}(E, F)$.
- (b) Ist F ein Banachraum, so auch $(\mathcal{L}(E, F), \|\cdot\|_{\text{op}})$.

Beweis. Die Nullfunktion $0: E \rightarrow F$ ist stetig, also in $\mathcal{L}(E, F)$. Sind $\alpha, \beta: E \rightarrow F$ stetig und linear, so auch jede Linearkombination $s\alpha + t\beta$; also ist $s\alpha + t\beta \in \mathcal{L}(E, F)$ und somit $\mathcal{L}(E, F)$ ein Untervektorraum von F^E .

(a) Offenbar ist $\|0\|_{\text{op}} = \sup\{0\} = 0$. Ist $\alpha \in \mathcal{L}(E, F)$ und $\alpha \neq 0$, so existiert ein $x \in E$ mit $\alpha(x) \neq 0$. Dann hat $x/\|x\|_E$ Norm 1; also ist

$$\|\alpha\|_{\text{op}} \geq \|\alpha(x/\|x\|_E)\| = \|\alpha(x)\|_F/\|x\|_E > 0.$$

Sind $\alpha, \beta \in \mathcal{L}(E, F)$, so gilt für alle $x \in \overline{B}_1^E(0)$

$$\|(\alpha+\beta)(x)\|_F = \|\alpha(x)+\beta(x)\|_F \leq \|\alpha(x)\|_F + \|\beta(x)\|_F \leq \|\alpha\|_{\text{op}} + \|\beta\|_{\text{op}}.$$

Übergang zum Supremum liefert $\|\alpha + \beta\|_{\text{op}} \leq \|\alpha\|_{\text{op}} + \|\beta\|_{\text{op}}$. Für $t = 0$ ist

$$\|t\alpha\|_{\text{op}} = \|0\|_{\text{op}} = 0 = 0\|\alpha\|_{\text{op}}.$$

Für $0 \neq t \in \mathbb{K}$ haben wir für x wie zuvor

$$\|(t\alpha)(x)\|_F = |t| \|\alpha(x)\|_F \leq |t| \|\alpha\|_{\text{op}},$$

somit $\|t\alpha\|_{\text{op}} \leq |t| \|\alpha\|_{\text{op}}$. Analog

$$\|\alpha\|_{\text{op}} = \|(1/t)t\alpha\|_{\text{op}} \leq \frac{1}{|t|} \|t\alpha\|_{\text{op}}$$

und somit $\|t\alpha\|_{\text{op}} \geq |t| \|\alpha\|_{\text{op}}$; folglich $\|t\alpha\|_{\text{op}} = |t| \|\alpha\|_{\text{op}}$.

(b) Es sei $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $\mathcal{L}(E, F)$. Nach Lemma 1.3 (a) ist diese beschränkt, also

$$M := \sup\{\|\alpha_n\|_{\text{op}} : n \in \mathbb{N}\} < \infty.$$

Für jedes $x \in E$ ist $(\alpha_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in F , denn

$$\|\alpha_m(x) - \alpha_n(x)\|_F = \|(\alpha_m - \alpha_n)(x)\|_F \leq \|\alpha_m - \alpha_n\|_{\text{op}} \|x\|_E$$

wird $\leq \varepsilon$ für genügend große m und n . Da F vollständig angenommen ist, existiert der Grenzwert

$$\alpha(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n(x) \quad \text{in } F.$$

Für $x, y \in E$ und $n \in \mathbb{N}$ konvergiert

$$\alpha_n(x + y) = \alpha_n(x) + \alpha_n(y)$$

sowohl gegen $\alpha(x + y)$ als auch gegen $\alpha(x) + \alpha(y)$; somit gilt

$$\alpha(x + y) = \alpha(x) + \alpha(y).$$

Ebenso folgt $\alpha(tx) = t\alpha(x)$ für $t \in \mathbb{K}$ und $x \in E$. Also ist α linear. Für alle $x \in E$ mit $\|x\|_E \leq 1$ ist $\|\alpha_n(x)\|_F \leq \|\alpha_n\|_{\text{op}} \leq M$, folglich

$$\|\alpha(x)\|_F = \lim_{n \rightarrow \infty} \|\alpha(x_n)\|_F \leq M$$

wegen der Stetigkeit von $\|\cdot\|_F: F \rightarrow [0, \infty[$. Also ist $\|\alpha\|_{\text{op}} \leq M$ und somit α stetig. Gegeben $\varepsilon > 0$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$ derart, dass $\|\alpha_m - \alpha_n\|_{\text{op}} \leq \varepsilon$ für alle $n, m \geq N$, also

$$(\forall n, m \geq N)(\forall x \in \overline{B}_1^E(0)) \|(\alpha_m - \alpha_n)(x)\|_F \leq \varepsilon.$$

Dann gilt also

$$(\forall n \geq N)(\forall x \in \overline{B}_1^E(0))(\forall m \geq N) \|\alpha_m(x) - \alpha_n(x)\|_F \leq \varepsilon.$$

Mit $m \rightarrow \infty$ folgt

$$(\forall n \geq N)(\forall x \in \overline{B}_1^E(0)) \|\alpha(x) - \alpha_n(x)\|_F \leq \varepsilon.$$

Also ist $\|\alpha - \alpha_n\|_{\text{op}} \leq \varepsilon$ für alle $n \geq N$ und somit gilt $\alpha_n \rightarrow \alpha$ in $(\mathcal{L}(E, F), \|\cdot\|_{\text{op}})$. \square

$(\mathbb{K}, |\cdot|)$ ist ein Banachraum, also $E' := \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ mit der Operatornorm stets ein Banachraum.

Definition 3.2

Der Banachraum $(E', \|\cdot\|_{\text{op}})$ wird **Dualraum** von E genannt. Seine Elemente, stetige lineare Abbildungen

$$\lambda: E \rightarrow \mathbb{K},$$

nennt man **stetige lineare Funktionale**.

In Kürze berechnen wir einige Dualräume; wir werden sehen, dass

$$(\ell^1)' \cong \ell^\infty, \quad (c_0)' \cong \ell^1 \quad \text{und} \quad (\ell^p)' = \ell^{\frac{1}{1-1/p}} \quad \text{für } p \in]1, \infty[.$$

Wir halten zwei Argumente aus dem vorigen Beweis fest:

Lemma 3.3

Seien $(E, \|\cdot\|_E)$ und $(F, \|\cdot\|_F)$ normierte Räume. Für jedes $x \in E$ ist die Punktauswertung

$$\text{ev}_x: \mathcal{L}(E, F) \rightarrow F, \quad \alpha \mapsto \alpha(x)$$

stetig und linear, mit $\|\text{ev}_x\|_{\text{op}} \leq \|x\|_E$.

Beweis. ev_x ist linear und $\|\text{ev}_x(\alpha)\|_F = \|\alpha(x)\|_F \leq \|\alpha\|_{\text{op}}\|x\|_E$. \square

Lemma 3.4

Ist $\alpha: E \rightarrow F$ eine stetige lineare Abbildung zwischen normierten Räumen $(E, \|\cdot\|_E)$ und $(F, \|\cdot\|_F)$ und $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in E , so ist $(\alpha(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in F .

Beweis. Gegeben $\varepsilon > 0$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$ derart, dass

$$\|x_m - x_n\|_E < \frac{\varepsilon}{\|\alpha\|_{\text{op}} + 1}$$

für alle $n, m \geq N$ und somit

$$\begin{aligned} \|\alpha(x_m) - \alpha(x_n)\|_F &= \|\alpha(x_m - x_n)\|_F \leq \|\alpha\|_{\text{op}} \|x_m - x_n\|_E \\ &\leq \frac{\|\alpha\|_{\text{op}}}{\|\alpha\|_{\text{op}} + 1} \varepsilon < \varepsilon. \end{aligned}$$

§4 Stetigkeit bilinearer Abbildungen

Sind E_1, E_2 und F Vektorräume über \mathbb{K} , so nennt man eine Abbildung $b: E_1 \times E_2 \rightarrow F$ **bilinear**, wenn für jedes $x \in E_1$ die Abbildung

$$b(x, \cdot): E_2 \rightarrow F, \quad y \mapsto b(x, y)$$

und für jedes $y \in E_2$ die Abbildung

$$b(\cdot, y): E_1 \rightarrow F, \quad x \mapsto b(x, y)$$

linear ist.

Seien nun $(E_1, \|\cdot\|_{E_1})$, $(E_2, \|\cdot\|_{E_2})$ und $(F, \|\cdot\|_F)$ normierte Räume. Wir versehen wieder $E_1 \times E_2$ mit der Maximumnorm $\|(x, y)\| := \max\{\|x\|_{E_1}, \|y\|_{E_2}\}$, so dass $(x_n, y_m) \rightarrow (x, y)$ in $E_1 \times E_2$ genau dann, wenn $x_n \rightarrow x$ in E_1 und $y_n \rightarrow y$ in E_2 .

Analog zu Satz 2.2 gilt:

Satz 4.1

Für eine bilineare Abbildung $b: E_1 \times E_2 \rightarrow F$ sind äquivalent:

- (a) b ist stetig;
- (b) b ist stetig an der Stelle $(0, 0)$;
- (c) Es ist

$$\|b\|_{\text{op}} := \sup\{\|b(x, y)\|_F : x \in \overline{B}_1^{E_1}(0), y \in \overline{B}_1^{E_2}(0)\} < \infty;$$

- (d) Es existiert ein $M \in [0, \infty[$ derart, dass

$$(\forall x \in E_1)(\forall y \in E_2) \|b(x, y)\|_F \leq M \|x\|_{E_1} \|y\|_{E_2}.$$

In diesem Fall ist $\|b\|_{\text{op}} \leq M$ und es gilt

$$\|b(x, y)\|_F \leq \|b\|_{\text{op}} \|x\|_{E_1} \|y\|_{E_2} \text{ für alle } x \in E_1 \text{ und } y \in E_2.$$

Beweis. Die Implikation “(a) \Rightarrow (b)” ist klar.

(b) \Rightarrow (c): Es existiert ein $r > 0$ derart, dass

$$\overline{B}_r^{E_1}(0) \times \overline{B}_r^{E_2}(0) = B_r^{E_1 \times E_2}(0,0) \subseteq b^{-1}(\overline{B}_1^F(0)).$$

Sei $(x, y) \in E_1 \times E_2$ mit $\|x\|_{E_1} \leq 1$ und $\|y\|_{E_2} \leq 1$. Dann ist $\|rx\|_{E_1} \leq r$ und $\|ry\|_{E_2} \leq r$, somit

$$\|b(x, y)\|_F = \frac{1}{r^2} \|b(rx, ry)\|_F \leq \frac{1}{r^2}.$$

Bildung des Supremums über alle (x, y) liefert $\|b\|_{\text{op}} \leq \frac{1}{r^2} < \infty$.

(c) \Rightarrow (d): Sei $(x, y) \in E_1 \times E_2$. Ist $x = 0$ oder $y = 0$, so ist

$$\|b(x, y)\|_F = \|0\|_F = 0 \leq \|b\|_{\text{op}} \|(x, y)\|.$$

Ist $x \neq 0$ und $y \neq 0$, so ist

$$\|b(x, y)\|_F = \|x\|_{E_1} \|y\|_{E_2} \left\| b \left(\frac{1}{\|x\|_{E_1}} x, \frac{1}{\|y\|_{E_2}} y \right) \right\|_F \leq \|b\|_{\text{op}} \|x\|_{E_1} \|y\|_{E_2}.$$

Die Bedingung aus (d) ist also erfüllt mit $M := \|b\|_{\text{op}}$.

(d) \Rightarrow (b): Sei $(x, y) \in E_1 \times E_2$ und $(x_n, y_n) \in E_1 \times E_2$ für $n \in \mathbb{N}$ mit $(x_n, y_n) \rightarrow (x, y)$ für $n \rightarrow \infty$. Dann gilt

$$\begin{aligned} & \|b(x, y) - b(x_n, y_n)\|_F \\ & \leq \|b(x, y) - b(x_n, y)\|_F + \|b(x_n, y) - b(x_n, y_n)\|_F \\ & = \|b(x - x_n, y)\|_F + \|b(x_n, y - y_n)\|_F \\ & \leq M\|x - x_n\|_{E_1}\|y\|_{E_2} + M\|x_n\|_{E_1}\|y - y_n\|_{E_2} \\ & \rightarrow M\|y\|_{E_2} + M\|x\|_{E_1}0 = 0, \end{aligned}$$

also $b(x_n, y_n) \rightarrow b(x, y)$. Somit ist b stetig an der Stelle (x, y) .

Aus der Bedingung in (d) folgt $\|b(x, y)\|_F \leq M\|x\|_{E_1}\|y\|_{E_2} \leq M$ für alle $x \in \overline{B}_1^{E_1}(0)$ und $y \in \overline{B}_1^{E_2}(0)$. Übergang zum Supremum liefert $\|b\|_{\text{op}} \leq M$.

Beispiel 4.2

Für alle normierten Räume $(E, \|\cdot\|_E)$ und $(F, \|\cdot\|_F)$ ist die bilineare Abbildung

$$\text{ev}: \mathcal{L}(E, F) \times E \rightarrow F, \quad (\alpha, x) \mapsto \alpha(x)$$

stetig mit $\|\text{ev}\|_{\text{op}} \leq 1$.

Beweis: Es ist $\|\text{ev}(\alpha, x)\|_F = \|\alpha(x)\|_F \leq \|\alpha\|_{\text{op}}\|x\|_E$. \square

Beispiel 4.3

Für alle normierten Räume $(E, \|\cdot\|_E)$, $(F, \|\cdot\|_F)$ und $(G, \|\cdot\|_G)$ ist die bilineare Abbildung

$$\text{comp}: \mathcal{L}(F, G) \times \mathcal{L}(E, F) \rightarrow \mathcal{L}(E, G), \quad (\alpha, \beta) \mapsto \alpha \circ \beta$$

stetig mit $\|\text{comp}\|_{\text{op}} \leq 1$.

Beweis: Es ist $\|\text{comp}(\alpha, \beta)\|_{\text{op}} = \|\alpha \circ \beta\|_{\text{op}} \leq \|\alpha\|_{\text{op}}\|\beta\|_{\text{op}}$, denn für $x \in E$ ist $\|\alpha(\beta(x))\|_G \leq \|\alpha\|_{\text{op}}\|\beta(x)\|_F \leq \|\alpha\|_{\text{op}}\|\beta\|_{\text{op}}\|x\|_E$. \square

§5 Beispiele von Dualräumen

Gegeben $n \in \mathbb{N}$ schreiben wir e_n für die Folge $(0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$ mit n tem Folgenglied 1.

Lemma 5.1

Für alle $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^1$ gilt

$$a = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k e_k$$

in ℓ^1 .

Beweis. Es ist

$$\sum_{k=1}^n a_k e_k = (a_1, \dots, a_n, 0, \dots)$$

und

$$a - \sum_{k=1}^n a_k e_k = (0, \dots, 0, a_{n+1}, \dots)$$

mit

$$\left\| a - \sum_{k=1}^n a_k e_k \right\|_1 = \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k| \rightarrow 0$$

für $n \rightarrow \infty$. \square

Bemerkung 5.2

Gegeben $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^p$ mit $p \in]1, \infty[$ gilt

$$a = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n \tag{1}$$

in ℓ^p . Ebenso gilt (1) in c_0 für alle $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in c_0$ (Übung).

Satz 5.3

Für jedes $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^\infty$ und $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^1$ ist $m_a(x) := (a_n x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^1$ und

$$\lambda_a: \ell^1 \rightarrow \mathbb{K}, \quad x \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$$

ist ein Element von $(\ell^1)'$ mit $\|\lambda_a\|_{\text{op}} = \|a\|_\infty$. Die Abbildung

$$\lambda: \ell^\infty \rightarrow (\ell^1)', \quad a \mapsto \lambda_a$$

ist ein isometrischer Isomorphismus.

Bemerkung 5.4

Die Additionsabbildung $\alpha: \ell^1 \rightarrow \mathbb{K}$, $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist linear und stetig mit $\|\alpha\|_{\text{op}} \leq 1$, weil $|\alpha(a)| = \left| \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \sum_{k=1}^n a_k \right| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n |a_k| = \|a\|_1$.

Beweis von Satz 5.3. Sei $\alpha: \ell^1 \rightarrow \mathbb{K}$ wie in Bemerkung 5.4. Nach Beispiel 2.15 ist $m_a: \ell^1 \rightarrow \ell^1$ stetig und linear mit $\|m_a\|_{\text{op}} \leq \|a\|_{\infty}$. Also ist $\lambda_a = \alpha \circ m_a$ stetig und linear mit

$$\|\lambda_a\|_{\text{op}} \leq \|\alpha\|_{\text{op}} \|m_a\|_{\text{op}} \leq \|a\|_{\infty}.$$

Wegen $\|e_n\|_1 = 1$ ist

$$\|\lambda_a\|_{\text{op}} \geq |\lambda_a(e_n)| = |a_n|.$$

Bilden des Supremums über alle n liefert $\|\lambda_a\|_{\text{op}} \geq \|a\|_{\infty}$. Also ist $\|\lambda_a\|_{\text{op}} = \|a\|_{\infty}$. Die Abbildung $\lambda: a \mapsto \lambda_a$ ist offenbar linear und nach dem Vorigen ist sie eine Isometrie. Wir brauchen nur noch zu zeigen, dass λ surjektiv ist. Sie hierzu $\mu \in (\ell^1)'$. Wir definieren

$$a_n := \mu(e_n) \quad \text{für } n \in \mathbb{N}.$$

Wegen

$$|a_n| = |\mu(e_n)| \leq \|\mu\|_{\text{op}} \|e_n\|_1 \leq \|\mu\|_{\text{op}}$$

ist dann $a := (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^{\infty}$. Für jedes $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^1$ ist nun

$$\mu(x) = \mu\left(\sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \mu(e_n) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n a_n = \lambda_a(x),$$

also $\mu = \lambda_a$. \square

Nach dem Vorigen ist also $(\ell^1)' \cong \ell^\infty$.

Satz 5.5

Für jedes $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^1$ und $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in c_0$ ist $m_a(x) := (a_n x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^1$ und

$$\lambda_a: c_0 \rightarrow \mathbb{K}, \quad x \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$$

ist ein Element von $(c_0)'$ mit $\|\lambda_a\|_{\text{op}} = \|a\|_1$. Die Abbildung

$$\lambda: \ell^1 \rightarrow (c_0)', \quad a \mapsto \lambda_a$$

ist ein isometrischer Isomorphismus.

Beweis. Wir wissen, dass die Additionsabbildung

$$\alpha: \ell^1 \rightarrow \mathbb{K}, \quad (y_n)_{n \in \mathbb{N}} \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} y_n$$

linear ist und stetig mit $\|\alpha\|_{\text{op}} \leq 1$ (Bemerkung 5.4). Nach Beispiel 2.15 ist

$$m_a(x) \in \ell^1 \quad \text{und} \quad \|m_a(x)\|_1 \leq \|a\|_1 \|x\|_{\infty} \quad \text{für alle } a \in \ell^1 \text{ und } x \in c_0.$$

Für jedes $a \in \ell^1$ ist $m_a: c_0 \rightarrow \ell^1$ offenbar linear und nach dem Vorigen ist $\|m_a\|_{\text{op}} \leq \|a\|_1$. Also ist

$$\lambda_a := \alpha \circ m_a: c_0 \rightarrow \mathbb{K}$$

stetig und linear mit

$$\|\lambda_a\|_{\text{op}} \leq \|\alpha\|_{\text{op}} \|m_a\|_{\text{op}} \leq \|a\|_1. \quad (2)$$

Für $k \in \mathbb{N}$ wähle $\phi_k \in \mathbb{R}$ mit $e^{i\phi_k} a_k = |a_k|$. Setzen wir

$$x^n := \sum_{k=1}^n e^{i\phi_k} e_k = (e^{i\phi_1}, \dots, e^{i\phi_n}, 0, 0, \dots),$$

so ist $\|x^n\|_\infty = 1$ und

$$\lambda_a(x^n) = \sum_{k=1}^n e^{i\phi_k} a_k = \sum_{k=1}^n |a_k|,$$

folglich

$$\|\lambda_a\|_{\text{op}} \geq |\lambda_a(x^n)| = \sum_{k=1}^n |a_k|.$$

Bildung des Supremums über alle $n \in \mathbb{N}$ liefert

$$\|\lambda_a\|_{\text{op}} \geq \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| = \|a\|_1.$$

Da auch (2) gilt, ist also $\|\lambda_a\|_{\text{op}} = \|a\|_1$. Offenbar ist die Abbildung $\lambda: \ell^1 \rightarrow (c_0)'$, $a \mapsto \lambda_a$ linear; nach dem Vorigen ist sie eine lineare Isometrie. Wir brauchen nur noch zu zeigen, dass λ surjektiv ist.

Zum Beweis der Surjektivität von $\lambda: \ell^1 \rightarrow (c_0)'$ sei $\mu \in (c_0)'$. Setze

$$a_n := \mu(e_n) \quad \text{für } n \in \mathbb{N}.$$

Definieren wir ϕ_k und $x^n = \sum_{k=1}^n e^{i\phi_k} e_k$ wie oben, so ist

$$\|\mu\|_{\text{op}} \geq |\mu(x^n)| = \left| \sum_{k=1}^n e^{i\phi_k} \mu(e_k) \right| = \sum_{k=1}^n |a_k|$$

für alle $n \in \mathbb{N}$, folglich $a := (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^1$. Für jedes $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in c_0$ ist nun

$$\mu(x) = \mu\left(\sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \mu(e_n) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n a_n = \lambda_a(x),$$

also $\mu = \lambda_a$. \square

Definition 5.6

Gegeben $p \in]1, \infty[$ definieren wir den **konjugierten Exponenten** als

$$q := \frac{1}{1 - 1/p};$$

dieser ist durch

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \quad (3)$$

festgelegt. Der zu q konjugierte Exponent ist somit p . Wir definieren den zu 1 konjugierten Exponenten als ∞ , den zu ∞ konjugierten Exponenten als 1.

Manche Autoren schreiben auch p' statt q .

Multiplikation von (3) mit q führt auf

$$\frac{q}{p} + 1 = q. \quad (4)$$

Sei $p \in]1, \infty[$ und $q \in]1, \infty[$ der konjugierte Exponent. Für alle $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^q$ and $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^p$ ist dann

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n a_n| \leq \|x\|_p \|a\|_q < \infty$$

nach der Hölderschen Ungleichung, die im folgenden Kapitel bewiesen wird. Somit ist

$$m_a(x) := (x_n a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^1 \quad \text{und} \quad \|m_a(x)\|_1 \leq \|x\|_p \|a\|_q.$$

Offenbar ist $m_a: \ell^p \rightarrow \ell^1$ linear; nach dem Vorigen ist $\|m_a\|_{\text{op}} \leq \|a\|_q$. Mit $\alpha: \ell^1 \rightarrow \mathbb{K}$ wie zuvor ist also

$$\lambda_a := \alpha \circ m_a \in (\ell^p)'$$

mit

$$\|\lambda_a\|_{\text{op}} \leq \|a\|_q. \tag{5}$$

Satz 5.7

Für $p \in]1, \infty[$ und $q := 1/(1 - 1/p)$ ist die Abbildung

$$\lambda: \ell^q \rightarrow (\ell^p)', \quad a \mapsto \lambda_a$$

ein isometrischer Isomorphismus.

Beweis. Damit λ eine Isometrie ist, genügt es, $\|\lambda_a\|_{\text{op}} = \|a\|_q$ nachzuweisen für alle $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^q$ mit $\|a\|_q = 1$ (Übung). Wir wählen $\phi_n \in \mathbb{R}$ für $n \in \mathbb{N}$ derart, dass $e^{i\phi_n} a_n = |a_n|$. Setzen wir

$$x_n := e^{i\phi_n} |a_n|^{q/p},$$

so ist $x := (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^p$ und $\|x\|_p = 1$, denn

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^q = (\|a\|_q)^q = 1 < \infty.$$

Unter Benutzung von (4) erhalten wir weiter

$$\|\lambda_a\|_{\text{op}} \geq |\lambda_a(x)| = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^{1+q/p} = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^q = 1 = \|a\|_q.$$

Mit (5) folgt $\|\lambda_a\|_{\text{op}} = \|a\|_q$.

Um Surjektivität von λ zu zeigen, sei $\mu \in (\ell^p)'$. Wir definieren

$$a_n := \mu(e_n) \quad \text{für } n \in \mathbb{N}$$

und wählen $\phi_n \in \mathbb{R}$ mit $e^{i\phi_n} a_n = |a_n|$. Gegeben $n \in \mathbb{N}$ sei

$$x^n := \sum_{k=1}^n e^{i\phi_k} |a_k|^{q/p} e_k;$$

dann ist $(\|x^n\|_p)^p = \sum_{k=1}^n |a_k|^q$. Weiter ist

$$\begin{aligned} \|\mu\|_{\text{op}} \|x^n\|_p &\geq |\mu(x^n)| = \sum_{k=1}^n e^{i\phi_k} |a_k|^{q/p} \mu(e_k) = \sum_{k=1}^n |a_k|^{q/p+1} \\ &= \sum_{k=1}^n |a_k|^q = (\|x^n\|_p)^p \end{aligned}$$

und somit $\|\mu\|_{\text{op}} \geq (\|x^n\|_p)^{p-1}$, also

$$\sum_{k=1}^n |a_k|^q = (\|x^n\|_p)^p \leq (\|\mu\|_{\text{op}})^{\frac{p}{p-1}}.$$

Es folgt $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^q \leq (\|\mu\|_{\text{op}})^{\frac{p}{p-1}} < \infty$, also $a := (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^q$.
Schließlich ist für jedes $y = (y_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^p$

$$\mu(y) = \mu \left(\sum_{n=1}^{\infty} y_n e_n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} y_n \mu(e_n) = \lambda_a(y),$$

also $\mu = \lambda_a$.

§6 Konvexe Funktionen und Ungleichungen

Wir formulieren und beweisen zwei für die Analysis wichtige Ungleichungen, die Höldersche Ungleichung und die Minkowskische Ungleichung. Als Hilfsmittel kommt Konvexität von Funktionen ins Spiel.

Wir stellen zunächst alles nötige Grundwissen über konvexe Funktionen einer reellen Variablen bereit (das aus Analysis 1 oder 2 schon bekannt sein könnte).

Definition 6.1

Eine Funktion $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ auf einem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ heißt **konvex**, wenn für alle $x < y < z$ in I

$$f(y) \leq f(x) + (y - x) \frac{f(z) - f(x)}{z - x}.$$

Es muss also stets $(y, f(y))$ unterhalb der Sekanten durch $(x, f(x))$ und $(z, f(z))$ liegen.

Lemma 6.2

Für $x < y < z$ in I gilt

$$f(y) \leq f(x) + (y - x) \frac{f(z) - f(x)}{z - x} \quad (1)$$

genau dann, wenn

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq \frac{f(z) - f(y)}{z - y}. \quad (2)$$

Die Steigung der Sekanten durch $(x, f(x))$ und $(y, f(y))$ muss also kleiner gleich der Steigung der Sekanten durch $(y, f(y))$ und $(z, f(z))$ sein.

Beweis. Aus (1) folgt (2), indem wir $f(x)$ auf beiden Seiten abziehen und durch $y - x > 0$ teilen. Aus (2) folgt (1), indem wir beide Seiten mit $y - x > 0$ multiplizieren und $f(x)$ addieren. \square .

Satz 6.3

Es sei $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ eine zweimal differenzierbare Funktion auf einem nicht entarteten Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$. Gilt $f''(x) \geq 0$ für alle $x \in I$, so ist f eine konvexe Funktion.

Beweis. Da $f'' \geq 0$, ist die Funktion f' monoton wachsend (siehe Analysis 1). Sind $x < y < z$ in I , so gibt es nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung Zwischenstellen $\xi \in]x, y[$ und $\theta \in]y, z[$ derart, dass

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} = f'(\xi) \quad \text{und} \quad \frac{f(z) - f(y)}{z - y} = f'(\theta).$$

Da $\xi < y < \theta$, ist $f'(\xi) \leq f'(\theta)$, so dass (2) folgt. Nach Lemma 6.2 gilt dann auch (1) und somit ist f konvex. \square

Beispiel 6.4

Für jedes $a \in]0, \infty[$ ist die Funktion

$$f_a: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto a^x := e^{x \ln a}$$

konvex.

Denn es ist $f'_a(x) = \ln(a)e^{x \ln a}$ und somit $f''_a(x) = (\ln a)^2 e^{x \ln a} \geq 0$;
Satz 6.4 liefert also die Behauptung. \square

Bemerkung 6.5

Für $x < z$ in I ist die Bedingung

$$f(y) \leq f(x) + (y - x) \frac{f(z) - f(x)}{z - x} \quad \text{für alle } y \in]x, z[$$

äquivalent zur Bedingung

$$f(tx + (1 - t)z) \leq tf(x) + (1 - t)f(z) \quad \text{für alle } t \in]0, 1[;$$

man schreibe einfach $y := tx + (1 - t)z = z + t(x - z)$ um bzw.
 $t := (z - y)/(z - x)$.

Wir setzen noch $0^x := 0$ für alle $x \in]0, \infty[$ und $\infty^x := \infty$. Wie in der Integrationstheorie üblich sei weiter $0 \cdot \infty := \infty \cdot 0 := 0$.

Lemma 6.6

Sei $p \in]1, \infty[$ und $q := 1/(1 - 1/p)$ der konjugierte Exponent. Dann gilt für alle $a, b \in [0, \infty]$

$$ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q. \quad (3)$$

Beweis. Die Ungleichung (3) ist trivial, wenn $a = 0$ oder $b = 0$ ist (dann sind beide Seiten 0). Seien nun $a, b \in]0, \infty[$. Ist $a = \infty$ oder $b = \infty$, ist (3) trivial (dann sind beide Seiten ∞). Seien nun also $a, b \in]0, \infty[$. Da $\frac{1}{q} = 1 - \frac{1}{p}$, ist

$$\begin{aligned} ab &= e^{\ln a} e^{\ln b} = e^{\ln a + \ln b} = e^{\frac{1}{p}p \ln a + \frac{1}{q}q \ln b} \\ &= e^{\frac{1}{p} \ln(a^p) + (1 - \frac{1}{p}) \ln(b^q)} \leq \frac{1}{p} e^{\ln(a^p)} + (1 - \frac{1}{p}) e^{\ln(b^q)} \\ &= \frac{1}{p} a^p + \frac{1}{q} b^q \end{aligned}$$

unter Benutzung der Konvexität von $x \mapsto e^x$ und Bemerkung 6.5.

Satz 6.7 (Höldersche Ungleichung)

Sei $p \in]1, \infty[$ und $q := 1/(1 - 1/p)$ der konjugierte Exponent. Sei (X, \mathcal{S}, μ) ein Maßraum. Dann gilt für alle messbaren Funktionen $f: X \rightarrow [0, \infty]$ und $g: X \rightarrow [0, \infty]$

$$\int_X f(x)g(x) d\mu(x) \leq \left(\int_X f(x)^p d\mu(x) \right)^{1/p} \left(\int_X g(x)^q d\mu(x) \right)^{1/q}. \quad (4)$$

Beweis. Verschwindet f oder g fast überall, so sind beide Seiten 0 und (4) gilt trivialerweise. Seien nun also $A := \int_X f^p d\mu$ und $B := \int_X g^q d\mu$ in $]0, \infty]$. Ist $A = \infty$ oder $B = \infty$, so ist die rechte Seite von (4) gleich ∞ , so dass (4) gilt. Seien nun also $A, B \in]0, \infty[$. Indem wir beide Seiten von (4) durch $A^{1/p} B^{1/q}$ teilen, erhalten wir die äquivalente Ungleichung

$$\int_X (f/A^{1/p})(g/B^{1/q}) d\mu \leq 1$$

und dürfen nach Ersetzen von f durch $f/A^{1/p}$ und g durch $g/B^{1/q}$ fortan $A = B = 1$ annehmen.

Nach Lemma 6.6 gilt für jedes $x \in X$

$$f(x)g(x) \leq \frac{1}{p}f(x)^p + \frac{1}{q}g(x)^q.$$

Integration liefert

$$\int_X fg \, d\mu \leq \frac{1}{p}A + \frac{1}{q}B = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 = A^{1/p}B^{1/q}.$$

Also gilt (4). \square

Satz 6.8 (Minkowskische Ungleichung)

Sei (X, \mathcal{S}, μ) ein Maßraum und $p \in]1, \infty[$. Dann gilt für alle messbaren Funktionen $f: X \rightarrow [0, \infty]$ und $g: X \rightarrow [0, \infty]$

$$\left(\int_X (f(x) + g(x))^p d\mu(x) \right)^{1/p} \leq \left(\int_X f(x)^p d\mu(x) \right)^{1/p} + \left(\int_X g(x)^p d\mu(x) \right)^{1/p}. \quad (5)$$

Beweis. Verschwindet f oder g fast überall, so kann die Funktion und der entsprechende rechte Summand weggelassen werden und die Behauptung ist trivial. Seien nun also $A := \int_X f^p d\mu$ und $B := \int_X g^p d\mu$ in $]0, \infty[$. Ist $A = \infty$ oder $B = \infty$, so ist die rechte Seite von (5) gleich ∞ , so dass (5) gilt. Seien nun also $A, B \in]0, \infty[$. Teilen durch $A^{1/p} + B^{1/p}$ führt auf die zu (5) äquivalente Ungleichung

$$\left(\int_X \left(\frac{f}{A^{1/p} + B^{1/p}} + \frac{g}{A^{1/p} + B^{1/p}} \right)^p d\mu \right)^{1/p} \leq 1.$$

Nach Ersetzen von f durch $f/(A^{1/p} + B^{1/p})$ und g durch $g/(A^{1/p} + B^{1/p})$ dürfen wir also annehmen, dass $A^{1/p} + B^{1/p} = 1$. Anwendung der Hölderschen Ungleichung liefert

$$\int_X f(f+g)^{p-1} d\mu \leq \left(\int_X f^p d\mu \right)^{1/p} \left(\int_X (f+g)^{q(p-1)} d\mu \right)^{1/q} \quad (6)$$

mit $q := 1/(1 - 1/p)$. Analog ist

$$\int_X g(f+g)^{p-1} d\mu \leq \left(\int_X g^p d\mu \right)^{1/p} \left(\int_X (f+g)^{q(p-1)} d\mu \right)^{1/q}, \quad (7)$$

wobei $q(p-1) = p$. Für alle $a, b \in [0, \infty]$ ist $a + b$ kleiner gleich dem Maximum von $2a$ und $2b$, folglich $(a + b)^p$ kleiner gleich dem Maximum von $(2a)^p$ und $(2b)^p$, folglich

$$(a + b)^p \leq 2^p a^p + 2^p b^p.$$

Also ist

$$C := \int_X (f + g)^p d\mu \leq 2^p A + 2^p B < \infty;$$

zudem gilt $C \geq A > 0$. Addition von (6) und (7) liefert

$$\begin{aligned} C &= \int_X (f+g)(f+g)^{p-1} d\mu \\ &\leq \underbrace{(A^{1/p} + B^{1/p})}_{=1} \left(\int_X (f+g)^p d\mu \right)^{1/q} = C^{1/q}. \end{aligned}$$

Also ist $C^{1/p} = C^{1-1/q} \leq 1 = A^{1/p} + B^{1/p}$, d.h. (5) gilt. \square

Es sei (X, \mathcal{S}, μ) ein Maßraum und $p \in [1, \infty[$. Gegeben eine messbare Funktion $f: X \rightarrow \mathbb{K}$ sei

$$\|f\|_{\mathcal{L}^p} := \left(\int_X |f(x)|^p d\mu(x) \right)^{1/p}.$$

Es sei $\mathcal{L}^p(X, \mu)$ die Menge aller messbaren Funktionen $f: X \rightarrow \mathbb{K}$ derart, dass $\|f\|_{\mathcal{L}^p} < \infty$. Offenbar ist $0 \in \mathcal{L}^p(X, \mu)$. Nach der Minkowskischen Ungleichung ist

$$\|f + g\|_{\mathcal{L}^p} \leq \|f\|_{\mathcal{L}^p} + \|g\|_{\mathcal{L}^p} < \infty$$

für alle $f, g \in \mathcal{L}^p(X, \mu)$ und somit $f + g \in \mathcal{L}^p(X, \mu)$. Zudem ist für $z \in \mathbb{K}$

$$\|zf\|_{\mathcal{L}^p} = \left(\int_X |z|^p |f(x)|^p d\mu(x) \right)^{1/p} = |z| \|f\|_{\mathcal{L}^p} < \infty,$$

also $zf \in \mathcal{L}^p(X, \mu)$. Wir haben gezeigt:

Lemma 7.1

$\mathcal{L}^p(X, \mu)$ ist ein Untervektorraum des Vektorraums \mathbb{K}^X aller Funktionen $f: X \rightarrow \mathbb{K}$ und $\|\cdot\|_{\mathcal{L}^p}: \mathcal{L}^p(X, \mu) \rightarrow [0, \infty[$ ist eine Halbnorm.

Halbnormen sind wie folgt definiert:

Definition 7.2

Es sei E ein \mathbb{K} -Vektorraum. Eine Abbildung $q: E \rightarrow [0, \infty[$ heißt **Halbnorm** auf E , wenn gilt:

- (a) (Positive Homogenität) Es ist $q(zx) = |z|q(x)$ für alle $z \in \mathbb{K}$ und $x \in E$;
- (b) (Subadditivität) Es ist $q(x + y) \leq q(x) + q(y)$ für alle $x, y \in E$.

Dann ist $q(0) = q(0 \cdot 0) = |0|q(0) = 0q(0) = 0$. Im Gegensatz zu einer Norm braucht aus $q(x) = 0$ jedoch nicht $x = 0$ zu folgen.

Lemma 7.3

Ist $q: E \rightarrow [0, \infty[$ eine Halbnorm auf einem Vektorraum E , so ist

$$N_q := q^{-1}(\{0\})$$

ein Untervektorraum von E . Sei $E_q := E/N_q = \{x + N_q : x \in E\}$ der Faktorraum/Quotientenvektorraum. Dann ist die Abbildung

$$\|\cdot\|_q: E_q \rightarrow [0, \infty[, \quad x + N_q \mapsto q(x)$$

wohldefiniert und eine Norm auf E_q .

Beweis. Wegen $q(0) = 0$ ist $0 \in N_q$. Für $x \in N_q$ und $z \in \mathbb{K}$ ist $q(zx) = |z|q(x) = 0$, also $zx \in N_q$. Weiter folgt für $x, y \in N_q$ aus

$$0 \leq q(x + y) \leq q(x) + q(y) = 0,$$

dass $q(x + y) = 0$, also $x + y \in N_q$. Also ist N_q ein Untervektorraum von E .

Sind $x, y \in E$ und $x + N_q = y + N_q$, so ist $x - y \in N_q$, somit

$$q(x) = q(y + (x - y)) \leq q(y) + \underbrace{q(x - y)}_{=0} \leq q(y)$$

und analog $q(y) \leq q(x)$, also $q(x) = q(y)$. Somit ist $\|\cdot\|_q$ wohldefiniert. Kürzen wir ab

$$[x] := x + N_q,$$

so ist

$$\|[x] + [y]\|_q = \|[x+y]\|_q = q(x+y) \leq q(x) + q(y) = \|[x]\|_q + \|[y]\|_q$$

und für $z \in \mathbb{K}$

$$\|z[x]\|_q = \|[zx]\|_q = q(zx) = |z|q(x) = |z|\|[x]\|_q.$$

Zudem ist $0 = \|[x]\|_q = q(x)$ genau dann, wenn $x \in N_q$, also $[x] = 0$ in E/N_q . Also ist $\|\cdot\|_q$ eine Norm. \square

Beispiel 7.4

$N := \{f \in \mathcal{L}^p(X, \mu) : \|f\|_{\mathcal{L}^p} = 0\}$ ist die Menge aller messbaren Funktionen $f: X \rightarrow \mathbb{K}$ derart, dass

$$\int_X |f(x)|^p d\mu(x) = 0,$$

also $f(x) = 0$ für μ -fast alle $x \in X$ (also außerhalb einer messbaren Menge vom Maß Null). Es gilt

$$f + N = g + N$$

genau dann, wenn $f - g \in N$, also $f(x) = g(x)$ für μ -fast alle $x \in X$. Somit ist

$$[f] := f + N$$

die Menge aller messbaren Funktionen $g: X \rightarrow \mathbb{K}$, die fast überall mit f übereinstimmen.

Nach Lemma 7.3 ist

$$L^p(X, \mu) := \mathcal{L}^p(X, \mu) / N$$

ein normierter Raum mit der Norm

$$\|\cdot\|_{L^p} : L^p(X, \mu) \rightarrow [0, \infty[, \quad [f] \mapsto \|[f]\|_{L^p} := \|f\|_{\mathcal{L}^p}.$$

Satz 7.5

Für jeden Maßraum (X, \mathcal{S}, μ) und jedes $p \in [1, \infty[$ ist $(L^p(X, \mu), \|\cdot\|_{L^p})$ ein Banachraum.

Beweis. Sei $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathcal{L}^p(X, \mu)$ derart, dass

$$C := \sum_{n=1}^{\infty} \|[f_n]\|_{L^p} < \infty;$$

wir zeigen, dass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} [f_n]$ in $L^p(X, \mu)$ konvergiert.

Es gilt

$$\left\| \sum_{k=1}^n |f_k| \right\|_{\mathcal{L}^p} \leq \sum_{k=1}^n \|f_k\|_{\mathcal{L}^p} = \sum_{k=1}^n \| [f_k] \|_{L^p} \leq C$$

und somit

$$\begin{aligned} C^p &\geq \left(\left\| \sum_{k=1}^n |f_k| \right\|_{\mathcal{L}^p} \right)^p = \int_X \left(\sum_{k=1}^n |f_k(x)| \right)^p d\mu(x) \\ &\rightarrow \int_X \left(\sum_{k=1}^{\infty} |f_k(x)| \right)^p d\mu(x) \end{aligned} \quad (1)$$

für $n \rightarrow \infty$, unter Benutzung des Satzes über monotone Konvergenz. Also ist

$$\sum_{k=1}^{\infty} |f_k(x)| < \infty \quad (2)$$

für fast alle $x \in X$, etwa außerhalb der Menge $A \in \mathcal{S}$ vom Maß $\mu(A) = 0$. Indem wir jedes f_n auf A durch 0 ersetzen, was $[f_n]$ unverändert lässt, dürfen wir annehmen, dass (2) für alle $x \in X$ gilt, also $f(x) := \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ absolut konvergiert.

Dann ist $|f(x)| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |f_k(x)|$, also

$$(\|f\|_{\mathcal{L}^p})^p = \int_X |f(x)|^p d\mu(x) \leq \int_X \left(\sum_{k=1}^{\infty} |f_k(x)| \right)^p d\mu(x) \leq C^p < \infty,$$

somit $f \in \mathcal{L}^p(X, \mu)$. Dann gilt $(f(x) - \sum_{k=1}^n f_k(x))^p \rightarrow 0$ punktweise für $n \rightarrow \infty$ und

$$\begin{aligned} \left| f(x) - \sum_{k=1}^n f_k(x) \right|^p &= \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x) \right|^p \leq \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} |f_k(x)| \right)^p \\ &\leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} |f_k(x)| \right)^p =: g(x) \end{aligned}$$

wobei $\int_X g(x) d\mu(x) \leq C^p < \infty$ nach (1). Also gilt

$$\left\| [f] - \sum_{k=1}^n [f_k] \right\|_{\mathcal{L}^p} = \left(\int_X \left| f(x) - \sum_{k=1}^n f_k(x) \right|^p d\mu(x) \right)^{1/p} \rightarrow 0$$

für $n \rightarrow \infty$ nach dem Satz über majorisierte Konvergenz, mit der integrierbaren Majorante g . Folglich ist $[f] = \sum_{k=1}^{\infty} [f_k]$.

Bemerkung 7.6

Konvergiert in $L^p(X, \mu)$ eine Folge $([f_n])_{n \in \mathbb{N}}$ gegen ein $[f] \in L^p(X, \mu)$, so gibt es eine Teilfolge $(f_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$, die punktweise fast überall gegen f konvergiert.

Wir finden nämlich $n_1 < n_2 < \dots$ derart, dass für alle $k \in \mathbb{N}$

$$\|[f_{n_{k+1}}] - [f_{n_k}]\|_{L^p} < \frac{1}{2^k}$$

und somit $\sum_{k=1}^{\infty} \|[f_{n_{k+1}}] - [f_{n_k}]\|_{L^p} < \infty$. Nach dem Vorigen gibt es eine Menge $A \in \mathcal{S}$ mit $\mu(A) = 0$ derart, dass

$$\sum_{k=1}^{\infty} (f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x))$$

für all $x \in X \setminus A$ konvergiert, etwa gegen $h(x)$, und

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^m [f_{n_{k+1}} - f_{n_k}] = [h]$$

in $L^p(X, \mu)$ wenn wir noch $h(x) := 0$ setzen für $x \in A$.

Es ist aber $\sum_{k=1}^m [f_{n_{k+1}} - f_{n_k}] = [f_{n_{m+1}}] - [f_{n_1}]$, so dass also

$$[h] = [f] - [f_{n-1}].$$

Also gibt es eine Menge $B \in \mathcal{S}$ mit $\mu(B) = 0$ derart, dass $h(x) = f(x) - f_{n_1}(x)$ für alle $x \in X \setminus B$. Für alle $x \in X \setminus (A \cup B)$ gilt dann

$$f_{n_{k+1}}(x) = f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_1}(x) + f_{n_1}(x) \rightarrow h(x) + f_{n_1}(x) = f(x).$$

Für eine messbare Funktion $f: X \rightarrow [0, \infty]$ definieren wir ihr **essentielles Supremum** als

$$\operatorname{ess\,sup}_\mu(f) := \inf\{\|f|_{X \setminus A}\|_\infty : A \in \mathcal{S} \text{ mit } \mu(A) = 0\}.$$

Für eine messbare Funktion $f: X \rightarrow \mathbb{K}$ sei

$$\|f\|_{\mathcal{L}^\infty} := \operatorname{ess\,sup}_\mu |f|.$$

Wir schreiben $\mathcal{L}^\infty(X, \mu)$ für die Menge aller messbaren Funktionen $f: X \rightarrow \mathbb{K}$ derart, dass $\|f\|_{\mathcal{L}^\infty} < \infty$.

Lemma 7.7

$\mathcal{L}^\infty(X, \mu)$ ist ein Untervektorraum von \mathbb{K}^X und $\|\cdot\|_{\mathcal{L}^\infty} : \mathcal{L}^\infty(X, \mu) \rightarrow [0, \infty[$, $f \mapsto \|f\|_{\mathcal{L}^\infty}$ ist eine Halbnorm.

Die folgende Beobachtung ist nützlich:

Bemerkung 7.8

Gegeben eine messbare Funktion $f: X \rightarrow [0, \infty]$ gibt es eine messbare Menge $A \subseteq X$ mit $\mu(A) = 0$ derart, dass

$$\operatorname{ess\,sup}_\mu(f) = \|f|_{X \setminus A}\|_\infty. \quad (3)$$

Dann gilt $\operatorname{ess\,sup}_\mu(f) = \|f|_{X \setminus B}\|_\infty$ für jedes $B \in \mathcal{S}$ mit $A \subseteq B$ und $\mu(B) = 0$.

Die Aussage ist klar, wenn $\operatorname{ess\,sup}_\mu(f) = \infty$ und somit $\|f|_{X \setminus A}\|_\infty = \infty$ für alle $A \in \mathcal{S}$ mit $\mu(A) = 0$. Ist $\operatorname{ess\,sup}_\mu(f) < \infty$, finden wir Mengen $A_n \in \mathcal{S}$ mit $\mu(A_n) = 0$ und

$$\|f|_{X \setminus A_n}\|_\infty \leq \operatorname{ess\,sup}_\mu(f) + \frac{1}{n}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Sei $A := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$; dann ist $\mu(A) = 0$ und

$$\|f|_{X \setminus A}\|_\infty \geq \operatorname{ess\,sup}_\mu(f) \geq \|f|_{X \setminus A_n}\|_\infty - \frac{1}{n} \geq \|f|_{X \setminus A}\|_\infty - \frac{1}{n}$$

für jedes $n \in \mathbb{N}$, somit $\operatorname{ess\,sup}_\mu(f) = \|f|_{X \setminus A}\|_\infty$.

Ist $B \in \mathcal{S}$ mit $\mu(B) = 0$ gilt $A \subseteq B$ für ein A mit (3), so ist

$$\|f|_{X \setminus B}\|_{\infty} \geq \operatorname{ess\,sup}_{\mu}(f) = \|f|_{X \setminus A}\|_{\infty} \geq \|f|_{X \setminus B}\|_{\infty}$$

und folglich $\|f|_{X \setminus B}\|_{\infty} = \operatorname{ess\,sup}_{\mu}(f)$. \square

Beweis von Lemma 7.7. Es ist $\|0\|_{\mathcal{L}^{\infty}} = \operatorname{ess\,sup}_{\mu}(0) = 0$ und somit $0 \in \mathcal{L}^{\infty}(X, \mu)$. Sind $f, g \in \mathcal{L}^{\infty}(X, \mu)$, so wählen wir $A, C \in \mathcal{S}$ mit $\mu(A) = \mu(C) = 0$ und

$$\|f\|_{\mathcal{L}^{\infty}} = \|f|_{X \setminus A}\|_{\infty} \quad \text{und} \quad \|g\|_{\mathcal{L}^{\infty}} = \|g|_{X \setminus C}\|_{\infty}.$$

Mit $B := A \cup C$ ist dann

$$\begin{aligned} \|f + g\|_{\mathcal{L}^{\infty}} &= \operatorname{ess\,sup}_{\mu} |f + g| \leq \|(f + g)|_{X \setminus B}\|_{\infty} \\ &\leq \|f|_{X \setminus B}\|_{\infty} + \|g|_{X \setminus B}\|_{\infty} \\ &= \operatorname{ess\,sup}_{\mu} |f| + \operatorname{ess\,sup}_{\mu} |g| = \|f\|_{\mathcal{L}^{\infty}} + \|g\|_{\mathcal{L}^{\infty}} < \infty \end{aligned}$$

insbesondere also $f + g \in \mathcal{L}^{\infty}(X, \mu)$. Wir wissen schon, dass

$$\|0f\|_{\mathcal{L}^{\infty}} = \|0\|_{\mathcal{L}^{\infty}} = 0 = |0| \|f\|_{\mathcal{L}^{\infty}}.$$

Weiter gilt für $0 \neq z \in \mathbb{K}$

$$\|zf\|_{\mathcal{L}^\infty} = \operatorname{ess\,sup}_\mu |zf| \leq \|(zf)|_{X \setminus A}\|_\infty = |z| \|f|_{X \setminus A}\|_\infty = |z| \|f\|_{\mathcal{L}^\infty} < \infty$$

also $zf \in \mathcal{L}^\infty(X, \mu)$. Da ebenso

$$\|f\|_{\mathcal{L}^\infty} = \|(1/z)zf\|_{\mathcal{L}^\infty} \leq \frac{1}{|z|} \|zf\|_{\mathcal{L}^\infty},$$

folgt $\|zf\|_{\mathcal{L}^\infty} \geq |z| \|f\|_{\mathcal{L}^\infty}$ und somit $\|zf\|_{\mathcal{L}^\infty} = |z| \|f\|_{\mathcal{L}^\infty}$. \square

Nach dem Vorigen ist $N := \{f \in \mathcal{L}^\infty(X, \mu) : \|f\|_{\mathcal{L}^\infty} = 0\}$ ein Untervektorraum von $\mathcal{L}^\infty(X, \mu)$ und

$$L^\infty(X, \mu) := \mathcal{L}^\infty(X, \mu) / N$$

ein normierter Raum mit der durch $\|[f]\|_{L^\infty} := \|f\|_{\mathcal{L}^\infty}$ für $[f] := f + N \in L^\infty(X, \mu)$ gegebenen Norm.

Man beachte, dass eine messbare Funktion $f : X \rightarrow \mathbb{K}$ genau dann in N ist, wenn f fast überall verschwindet (denn $\text{ess sup}_\mu |f| = 0$ gilt genau dann, also $f|_{X \setminus A} = 0$ für ein $A \in \mathcal{S}$ mit $\mu(A) = 0$).

Also gilt $f + N = g + N$ genau dann, wenn $f(x) = g(x)$ für fast alle $x \in X$.

Satz 7.8

Für jeden Maßraum (X, \mathcal{S}, μ) ist $(L^\infty(X, \mu), \|\cdot\|_{L^\infty})$ ein Banachraum. Für jede konvergente Folge $([f_n])_{n \in \mathbb{N}}$ in $L^\infty(X, \mu)$ mit Limes $[f]$ existiert eine Teilfolge $(f_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ derart, dass $f_{n_k}(x)$ für $k \rightarrow \infty$ gegen $f(x)$ konvergiert für fast alle $x \in X$.

Beweis. Wir beweisen die Vollständigkeit; die Aussage über

Teilfolgen wird in der Übung nachgewiesen. Seien $f_n \in \mathcal{L}^\infty(X, \mu)$ derart, dass $\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_{L^\infty} < \infty$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ existiert ein $A_n \in \mathcal{S}$ mit $\mu(A_n) = 0$ derart, dass

$$\|f_n\|_{\mathcal{L}^\infty} = \|f|_{X \setminus A_n}\|_\infty.$$

Dann ist $B := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{S}$ eine Menge vom Maß $\mu(B) = 0$ und

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad \|[f_n]\|_{L^\infty} = \|f_n\|_{\mathcal{L}^\infty} = \|f|_{X \setminus B}\|_\infty,$$

folglich

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n|_{X \setminus B}\|_\infty = \sum_{n=1}^{\infty} \|[f_n]\|_{L^\infty} < \infty.$$

Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} f_n|_{X \setminus B}$ ist also absolut konvergent im Banachraum $(\ell^\infty(X \setminus B), \|\cdot\|_\infty)$ und somit konvergent gegen ein $h \in \ell^\infty(X \setminus B)$. Als punktweiser Grenzwert messbarer Funktionen ist h messbar und somit auch

$$f: X \rightarrow \mathbb{K}, \quad x \mapsto \begin{cases} h(x) & \text{wenn } x \in X \setminus B; \\ 0 & \text{wenn } x \in B. \end{cases}$$

Weiter ist $\|f\|_{\mathcal{L}^\infty} \leq \|f|_{X \setminus B}\|_\infty = \|h\|_\infty < \infty$, also $f \in \mathcal{L}^\infty(X, \mu)$.

Schließlich gilt

$$\left\| [f] - \sum_{k=1}^n [f_k] \right\|_{L^\infty} \leq \left\| f|_{X \setminus B} - \sum_{k=1}^n f_k|_{X \setminus B} \right\|_\infty \rightarrow 0$$

für $n \rightarrow \infty$, es ist also $[f] = \sum_{n=1}^\infty [f_n]$ in $L^\infty(X, \mu)$. \square

Definition 8.1

Eine Teilmenge D eines topologischen Raums X heißt **dicht**, wenn $X = \overline{D}$ (Abschluss) ist, d.h. für jede nicht-leere offene Teilmenge $U \subseteq X$ ist $U \cap D \neq \emptyset$.

Bemerkung 8.2

Ist X ein metrischer Raum, so ist $D \subseteq X$ genau dann dicht, wenn für jedes $x \in X$ eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in D existiert mit

$$x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n.$$

Definition 8.3

Ein topologischer Raum heißt **separabel**, wenn er eine abzählbare dichte Teilmenge besitzt.

Zum Beispiel ist \mathbb{R} separabel, da \mathbb{Q} in \mathbb{R} dicht ist, Ebenso ist \mathbb{Q}^n in \mathbb{R}^n dicht, also \mathbb{R}^n separabel. Verwandter Begriff:

Definition 8.4

Eine Menge \mathcal{B} von offenen Teilmengen eines topologischen Raums X wird **Basis** (der Topologie) genannt, wenn jede offene Menge eine Vereinigung von Mengen aus \mathcal{B} ist.

Für jedes offene Menge $U \subseteq X$ gibt es also eine Familie $(V_j)_{j \in J}$ von Mengen $V_j \in \mathcal{B}$ mit $U = \bigcup_{j \in J} V_j$.

Beispiele 8.5

(a) Ist (X, d) ein metrischer Raum, so ist die Menge $\{B_r(x) : x \in X, r > 0\}$ eine Basis der Topologie auf X . Auch $\{B_{1/k}(x) : x \in X, k \in \mathbb{N}\}$ ist eine Basis.

(b) Es ist $\{]a, b[: a, b \in \mathbb{Q} \text{ mit } a < b\}$ eine abzählbare Basis der Topologie auf \mathbb{R} .

(c) $\{B_{1/k}(x) : x \in \mathbb{Q}^n, k \in \mathbb{N}\}$ ist eine abzählbare Basis der Topologie auf \mathbb{R}^n .

Satz 8.6

Ein metrischer Raum (X, d) ist genau dann separabel, wenn seine Topologie eine abzählbare Basis besitzt.

Beweis. Ist $D \subseteq X$ eine abzählbare dichte Teilmenge, so ist

$$\mathcal{B} := \{B_{1/k}(x) : x \in D, k \in \mathbb{N}\}$$

eine abzählbare Menge offener Teilmengen von X . Ist $U \subseteq X$ eine offene Teilmenge, so existiert für jedes $y \in U$ ein $k(y) \in \mathbb{N}$ mit $B_{2/k(y)}(y) \subseteq U$. Da D dicht ist, existiert ein

$$x(y) \in D \cap B_{1/k(y)}(y).$$

Dann ist $y \in B_{1/k(y)}(x(y))$ und

$d(z, y) \leq d(z, x(y)) + d(x(y), y) < 2/k(y)$ für alle $z \in B_{1/k(y)}(x(y))$,

also $B_{1/k(y)}(x(y)) \subseteq B_{2/k(y)}(y) \subseteq U$. Folglich ist

$U \subseteq \bigcup_{y \in U} B_{1/k(y)}(x(y)) \subseteq U$ und Gleichheit folgt; \mathcal{B} ist eine Basis.

Existiere umgekehrt eine abzählbare Basis \mathcal{B} . Dann ist auch $\mathcal{B} \setminus \{\emptyset\}$ eine Basis und wir dürfen annehmen, dass $V \neq \emptyset$ für alle $V \in \mathcal{B}$. Für jedes $V \in \mathcal{B}$ wählen wir ein Element $x_V \in V$. Dann ist

$$D := \{x_V : V \in \mathcal{B}\}$$

eine abzählbare Teilmenge von X . Diese ist dicht, denn ist $U \subseteq X$ eine nicht-leere offene Teilmenge, so ist diese eine Vereinigung von Mengen aus \mathcal{B} und somit existiert ein $V \in \mathcal{B}$ mit $V \subseteq U$. Dann ist

$$x_V \in V \subseteq U$$

und somit $D \cap U \neq \emptyset$, also D dicht in X . \square

Satz 8.7

Hat ein topologischer Raum X eine abzählbare Basis der Topologie, so auch jede Teilmenge $Y \subseteq X$, versehen mit der induzierten Topologie.

Beweis. Ist \mathcal{B} eine abzählbare Basis der Topologie auf X , so ist

$$\mathcal{B}_Y := \{V \cap Y : V \in \mathcal{B}\}$$

eine abzählbare Menge offener Teilmengen von Y . Diese ist eine Basis der Topologie auf Y , denn ist W offen in Y , so gibt es eine offene Teilmenge $U \subseteq X$ mit $W = U \cap Y$. Es gibt eine Familie $(V_j)_{j \in J}$ von Mengen $V_j \in \mathcal{B}$ mit $U = \bigcup_{j \in J} V_j$.

Dann ist $V_j \cap Y \in \mathcal{B}_Y$ und

$$W = U \cap Y = \left(\bigcup_{j \in J} V_j \right) \cap Y = \bigcup_{j \in J} (V_j \cap Y)$$

eine Vereinigung von Mengen aus \mathcal{B}_Y . \square

Folgerung 8.8

Ist (X, d) ein separabler metrischer Raum, so ist auch jede Teilmenge $Y \subseteq X$ separabel.

Beweis. X hat nach Satz 8.6 eine abzählbare Basis. Nach Satz 8.7 hat Y eine abzählbare Basis und ist also nach Satz 8.6 separabel. \square

Bemerkung 8.9

Sind (X, d_X) und (Y, d_Y) separable metrische Räume, so ist auch $X \times Y$ separabel, wenn wir die Maximummetrik d benutzen, die durch

$$d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) := \max\{d_X(x_1, x_2), d_Y(y_1, y_2)\}$$

gegeben ist (Übung).

Auch das Produkt zweier separabler topologischer Räume ist separabel in der Produkttopologie (die wir noch kennenlernen werden).

Definition 8.10

Sei $(E, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum über $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Eine Teilmenge $M \subseteq E$ heißt **total**, wenn ihr Spann $\text{span}_{\mathbb{K}}(M)$ in E dicht ist.

Satz 8.11

Ein normierter Raum $(E, \|\cdot\|)$ ist genau dann separabel, wenn er eine abzählbare totale Teilmenge enthält.

Beweis. Ist $D \subseteq E$ eine abzählbare dichte Teilmenge, so ist $\text{span}_{\mathbb{K}}(D) \supseteq D$ ebenfalls dicht, also D total.

Ist $M = \{x_k : k \in \mathbb{N}\}$ eine abzählbare totale Teilmenge von E , so betrachten wir im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ für $n \in \mathbb{N}$ die abzählbare Menge

$$A_n := \mathbb{Q}x_1 + \cdots + \mathbb{Q}x_n.$$

Dann ist auch

$$D := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$$

abzählbar. Gegeben $t := (t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n$ gibt es

$q_k := (q_{1,k}, \dots, q_{n,k}) \in \mathbb{Q}^n$ für $k \in \mathbb{N}$ mit $q_k \rightarrow t$ für $k \rightarrow \infty$.

Dann gilt

$$t_1 x_1 + \cdots + t_n x_n = \lim_{k \rightarrow \infty} (q_{1,k} x_1 + \cdots + q_{n,k} x_n) \in \overline{A_n} \subseteq \overline{D},$$

also $\text{span}_{\mathbb{R}}(x_1, \dots, x_n) \subseteq \overline{D}$. Es folgt $\text{span}_{\mathbb{R}}(M) \subseteq \overline{D}$ und somit $\overline{D} = E$, da $\text{span}_{\mathbb{R}}(M)$ dicht angenommen ist.

Im Falle $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ersetze man im Vorigen \mathbb{Q} durch $\mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$. \square

Satz 8.12

Der normierte Raum c_0 ist separabel. Weiter ist ℓ^p separabel für alle $p \in [1, \infty[$.

Beweis. Sei $M := \{e_k : k \in \mathbb{N}\}$ die Menge der Standard-Einheitsvektoren. Für jedes $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in c_0$ ist nach Bemerkung 5.2

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k e_k = \lim_{n \rightarrow \infty} x_k e_k \in \overline{\text{span}_{\mathbb{K}} M},$$

also M total in c_0 . Da M abzählbar ist, ist c_0 nach Satz 8.11 separabel. Analog ist ℓ^p separabel. \square

Satz 8.13

ℓ^∞ ist nicht separabel.

Beweis. Auf der Teilmenge $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ induziert ℓ^∞ die diskrete Topologie (d.h. jede Teilmenge $U \subseteq \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ ist relativ offen), da alle einpunktigen Teilmengen offen sind. In der Tat ist für jedes $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$

$$\{y = (y_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}} : \|y - x\|_\infty < 1\} = \{x\},$$

da die vorige Bedingung $|y_n - x_n| < 1$ erfordert und somit $y_n = x_n$, da $y_n - x_n \in \{-1, 0, 1\}$. Für jede Basis der Topologie von $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ muss daher

$$\{x\} \in \mathcal{B}$$

gelten für jedes $x \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ und somit ist \mathcal{B} (wie $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$) überabzählbar. Nach Satz 8.7 kann also auch ℓ^∞ keine abzählbare Basis der Topologie besitzen. Nach Satz 8.6 ist also ℓ^∞ nicht separabel. \square

Gegeben einen normierten Raum $(E, \|\cdot\|)$ versehen wir $\mathcal{L}(E) := \mathcal{L}(E, E)$ mit der Operatornorm.

Folgerung 8.14

Für jedes $p \in [1, \infty]$ ist $\mathcal{L}(\ell^p)$ nicht separabel. Auch $\mathcal{L}(c_0)$ ist nicht separabel.

Beweis. Die Abbildung $\alpha: \ell^\infty \rightarrow \mathcal{L}(\ell^p)$, $x \mapsto m_x$, welche $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^\infty$ auf den Multiplikationsoperator

$$m_x: \ell^p \rightarrow \ell^p, \quad (y_n)_{n \in \mathbb{N}} \mapsto (x_n y_n)_{n \in \mathbb{N}}$$

abbildet, ist eine lineare Isometrie. Als Abbildung von ℓ^∞ nach $\alpha(\ell^\infty)$ ist α ein isometrischer Isomorphismus und somit ein Homöomorphismus. Wäre der metrische Raum $\mathcal{L}(\ell^p)$ separabel, so auch die Teilmenge $\alpha(\ell^\infty)$ und somit auch ℓ^∞ , im Widerspruch zu Satz 8.13. Der Beweis für c_0 ist analog (Details: Übung). \square

§9 Der Bairesche Kategoriensatz

Der Bairesche Kategoriensatz ist ein Satz über vollständige metrische Räume. Er ist ein wichtiges Hilfsmittel der Funktionalanalysis.

Ist X ein topologischer Raum und $A \subseteq X$ eine Teilmenge, so schreiben wir A^0 für das Innere von A (die Vereinigung aller offenen Teilmengen $U \subseteq X$ mit $U \subseteq A$).

Satz 9.1 (Bairescher Kategoriensatz)

Es sei (X, d) ein vollständiger metrischer Raum mit $X \neq \emptyset$. Gilt

$$X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$$

mit abgeschlossenen Teilmengen $A_n \subseteq X$, so existiert ein $n \in \mathbb{N}$ derart, dass $A_n^0 \neq \emptyset$.

Eine der Mengen A_n hat also einen "inneren Punkt", d.h. einen Punkt im Inneren A_n^0 .

Beweis. Wäre die Schlussfolgerung falsch, so wäre $A_n^0 = \emptyset$ für jedes $n \in \mathbb{N}$, somit insbesondere $A_n \neq X$ und folglich

$$V_n := X \setminus A_n$$

eine offene, nicht leere Teilmenge von X . Per Voraussetzung ist

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} V_n = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} (X \setminus A_n) = X \setminus \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = X \setminus X = \emptyset. \quad (1)$$

Da $A_n^0 = \emptyset$, wäre für jede nicht-leere offene Teilmenge $U \subseteq X$ diese nicht in A_n enthalten und somit $U \cap (X \setminus A_n) \neq \emptyset$, d.h.

$$(\forall n \in \mathbb{N}) (\forall U \neq \emptyset \text{ offen}) \quad U \cap V_n \neq \emptyset. \quad (2)$$

Sei $x_1 \in V_1$. Es gibt ein $k_1 \in \mathbb{N}$ derart, dass

$$\overline{B}_{1/k_1}(x_1) \subseteq V_1.$$

Nach (2) existiert ein

$$x_2 \in \overline{B}_{1/k_1}(x_1) \cap V_2.$$

Da die rechte Seite offen ist, existiert ein $k_2 > k_1$ mit

$$\overline{B}_{1/k_2}(x_2) \subseteq B_{1/k_1}(x_1) \cap V_2.$$

Rekursiv finden wir für $n \in \mathbb{N}$ Elemente x_1, x_2, \dots, x_n von X und natürliche Zahlen $k_1 < k_2 < \dots < k_n$ derart, dass

$$x_m \in B_{1/k_{m-1}}(x_{m-1}) \cap V_m$$

und

$$\overline{B}_{1/k_m}(x_m) \subseteq B_{1/k_{m-1}}(x_{m-1}) \cap V_m$$

für alle $m \in \{2, \dots, n\}$. In der Tat: Sind x_1, \dots, x_n und k_1, \dots, k_n gefunden, so existiert nach (2) ein

$$x_{n+1} \in B_{1/k_n}(x_n) \cap V_{n+1};$$

da die rechte Seite offen ist, gibt es ein $k_{n+1} > k_n$ derart, dass

$$\overline{B}_{1/k_{n+1}}(x_{n+1}) \subseteq B_{1/k_n}(x_n) \cap V_{n+1}.$$

Dann gilt

$$\overline{B}_{1/k_1}(x_1) \supseteq \overline{B}_{1/k_2}(x_2) \supseteq \dots$$

und somit nach dem Schachtelungsprinzip

$$M := \bigcap_{m \in \mathbb{N}} \overline{B}_{1/k_m}(x_m) \neq \emptyset.$$

Jedoch ist $\overline{B}_{1/k_m}(x_m) \subseteq V_m$, somit

$$M \subseteq \bigcap_{m \in \mathbb{N}} V_m.$$

Da $M \neq \emptyset$, widerspricht dies (1). \square

Bemerkung. Sei X ein topologischer Raum. Eine Teilmenge $M \subseteq X$ heißt **nirgends dicht**, wenn ihr Abschluss keine inneren Punkte besitzt, $(\overline{M})^0 = \emptyset$. Baires Terminologie: Eine Teilmenge $M \subseteq X$ heißt **von erster Kategorie**, wenn sie eine abzählbare Vereinigung nirgends dichter Mengen ist. Andernfalls heißt M **von zweiter Kategorie**. Der Bairesche Kategoriensatz besagt also:

Jeder vollständige metrische Raum $X \neq \emptyset$ ist von zweiter Kategorie (als Teilmenge von sich selbst).

§10 Grundtatsachen über konvexe Mengen

Konvexe Mengen spielen oft eine wichtige Rolle. Wir halten die benötigten Grundbegriffe fest und einige elementare Fakten.

Definition 10.1

Sei E ein reeller oder komplexer Vektorraum und $C \subseteq E$ eine Teilmenge.

(a) C heißt **konvex**, wenn für alle $x, y \in C$ auch ihre Verbindungsstrecke in C enthalten ist, also

$$(1 - t)x + ty = x + t(y - x) \in C$$

für alle $t \in [0, 1]$.

(b) C heißt **symmetrisch**, wenn $C = -C$, wobei $-C := \{-x : x \in C\}$.

Kugeln $B_\varepsilon^E(0)$ und $\overline{B}_\varepsilon^E(0)$ um 0 in einem normierten Raum $(E, \|\cdot\|)$ sind konvex und symmetrisch.

Lemma 10.2

Es sei E ein reeller oder komplexer Vektorraum.

(a) Ist $C \subseteq E$ konvex und symmetrisch, so gilt $[-1, 1]C \subseteq C$, also

$$(\forall t \in [-1, 1]) (\forall x \in C) \quad tx \in C. \quad (1)$$

(b) Ist $(C_j)_{j \in J}$ eine Familie konvexer Teilmengen von E mit $J \neq \emptyset$, so ist auch $\bigcap_{j \in J} C_j$ konvex.

(c) Ist $(C_j)_{j \in J}$ eine Familie symmetrischer Teilmengen von E mit $J \neq \emptyset$, so ist auch $\bigcap_{j \in J} C_j$ symmetrisch.

Sei nun $\alpha: E \rightarrow F$ eine lineare Abbildung.

(d) Ist $C \subseteq E$ konvex, so ist $\alpha(C) \subseteq F$ konvex. Ist $C \subseteq E$ symmetrisch, so ist $\alpha(C) \subseteq F$ symmetrisch.

(e) Ist $C \subseteq F$ konvex, so ist $\alpha^{-1}(C) \subseteq E$ konvex. Ist $C \subseteq F$ symmetrisch, so ist $\alpha^{-1}(C) \subseteq E$ symmetrisch.

(f) Ist $C \subseteq E$ konvex, so auch $z + C$ für alle $z \in E$.

Beweis. (a) Der Fall $C = \emptyset$ ist trivial. Existiere nun ein $x \in C$.
Dann ist $-x \in C$ und somit

$$0 = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}(-x) \in C.$$

Weiter gilt dann für alle $x \in C$ und $t \in [0, 1]$

$$tx = (1 - t)0 + tx \in C$$

und zudem $(-t)x = t(-x) \in C$.

(f) Für alle $x, y \in C$ und $t \in [0, 1]$ ist

$$(z + x) + t((z + y) - (z + x)) = z + x + t(y - x) \in z + C,$$

da $x + t(y - x) \in C$. Also ist $z + C$ konvex.

(a)–(e): Übung. \square

Lemma 10.3

Es sei $(E, \|\cdot\|_E)$ ein normierter Raum. Dann gilt:

(a) Ist $C \subseteq E$ eine konvexe Menge, so ist auch der Abschluss \overline{C} konvex.

(b) Ist $C \subseteq E$ eine konvexe Menge, so gilt

$$x + t(y - x) \in C^0$$

für alle $x \in C$, $y \in C^0$ und $t \in]0, 1]$. Insb. ist C^0 konvex.

(c) Ist $C \subseteq E$ symmetrisch, so auch \overline{C} und C^0 .

Beweis. (a) Seien $x, y \in \overline{C}$. Dann gilt

$$x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \quad \text{und} \quad y = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$$

für Folgen von Elementen $x_n, y_n \in C$. Für $t \in [0, 1]$ ist dann

$$(1 - t)x_n + ty_n \in C$$

und mit $n \rightarrow \infty$ erhalten wir $(1 - t)x + ty \in \overline{C}$.

(b) Die Abbildungen

$$h_t: E \rightarrow E, \quad v \mapsto tv$$

und

$$\tau_{(1-t)x}: E \rightarrow E, \quad v \mapsto (1-t)x + v$$

sind Homöomorphismen. Also ist

$$(1-t)x + tC^0 = (\tau_{(1-t)x} \circ h_t)(C^0)$$

eine offene Teilmenge von E . Da diese in C enthalten ist, ist sie im Innern C^0 enthalten:

$$(1-t)x + tC^0 \subseteq C^0.$$

(c) Übung. \square

Lemma 10.4 (Spezieller – in Vorlesung übersprungen!)

Ist $(E, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum und $C \subseteq E$ konvex. Dann gilt:

(a) Ist $C^0 \neq \emptyset$, so ist C^0 dicht in C und somit dicht im Abschluss von C , also


$$\overline{C^0} = \overline{C}.$$

(b) Ist $C^0 \neq \emptyset$, so stimmt C^0 mit dem Inneren des Abschlusses überein,

$$C^0 = (\overline{C})^0.$$

Beweis. (a) Ist $y \in C^0$ und $x \in C$, so ist

$(1 - 1/n)x + (1/n)y \in C^0$ nach Lemma 10.3 (b) und diese Punkte konvergieren gegen x für $n \rightarrow \infty$. Also ist $y \in \overline{C^0}$.

(b) Die Inklusion " \subseteq " folgt aus $C \subseteq \overline{C}$. Gäbe es ein $x \in (\overline{C})^0 \setminus C^0$, so dürfen wir nach Ersetzen von C durch $C - x$ annehmen, dass $x = 0$. Es gibt ein $\varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon(0) \subseteq (\overline{C})^0$. Da C^0 in \overline{C} dicht ist, ist $U := C^0 \cap B_\varepsilon(0) \neq \emptyset$. Dann ist $-U$ eine offene Teilmenge von $-B_\varepsilon(0) = B_\varepsilon(0) \subseteq (\overline{C})^0$. Da C^0 dicht ist in \overline{C} , existiert ein $y \in C^0 \cap (-U)$. Dann ist $-y \in U \subseteq C^0$, also $x = 0 = (1/2)y + (1/2)(-y) \in C^0$, Widerspruch. 

§11 Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit

Satz 11.1 (Satz von Banach-Steinhaus)

Es sei $(E, \|\cdot\|_E)$ ein Banachraum, $(F, \|\cdot\|_F)$ ein normierter Raum und $M \subseteq \mathcal{L}(E, F)$ eine Menge stetiger linearer Abbildungen derart, dass

$$(\forall x \in E) \quad \sup_{\alpha \in M} \|\alpha(x)\|_F < \infty. \quad (1)$$

Dann gilt

$$\sup_{\alpha \in M} \|\alpha\|_{\text{op}} < \infty. \quad (2)$$

Bemerkung 11.2

Gilt (1), so nennt man die Menge $M \subseteq \mathcal{L}(E, B)$ von Operatoren **punktweise beschränkt**. Gilt (2), so nennt man M **gleichmäßig beschränkt**. Der Satz von Banach-Steinhaus besagt also, dass jede punktweise beschränkte Menge stetiger linearer Operatoren auf einem Banachraum gleichmäßig beschränkt ist. Er wird auch das **Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit** genannt.

Bemerkung 11.3

Wir werden später sehen, dass eine Teilmenge $M \subseteq \mathcal{L}(E, F)$ genau dann gleichmäßig beschränkt ist, wenn M in geeignetem Sinne “gleichgradig stetig” ist.

Beweis von Satz 11.1. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist die Menge

$$A_n := \{x \in E : (\forall \alpha \in M) \|\alpha(x)\|_F \leq n\} = \bigcap_{\alpha \in M} \alpha^{-1}(\overline{B}_n^F(0))$$

konvex und symmetrisch und abgeschlossen. Für jedes $x \in E$ gibt es wegen (1) ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\sup\{\|\alpha(x)\|_F : \alpha \in M\} \leq n$, also $x \in A_n$. Somit ist

$$E = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n.$$

Nach dem Baireschen Kategoriensatz existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $A_n^0 \neq \emptyset$. Da das Innere A_n^0 konvex und symmetrisch ist, ist $0 \in A_n^0$. Es existiert also ein $\varepsilon > 0$ derart, dass

$$\overline{B}_\varepsilon^E(0) \subseteq A_n^0.$$

Für alle $\alpha \in M$ gilt somit

$$\alpha(\overline{B}_\varepsilon^E(0)) \subseteq \overline{B}_n^F(0),$$

folglich

$$\begin{aligned}\alpha(\overline{B}_1^E(0)) &= \alpha((1/\varepsilon)\overline{B}_\varepsilon^E(0)) = (1/\varepsilon)\alpha(\overline{B}_\varepsilon^E(0)) \\ &\subseteq (1/\varepsilon)\overline{B}_n^F(0) = \overline{B}_{n/\varepsilon}^F(0).\end{aligned}$$

Für jedes $\alpha \in M$ ist also $\|\alpha(x)\|_F \leq n/\varepsilon$ für alle $x \in E$ mit $\|x\|_E \leq 1$ und folglich $\|\alpha\|_{\text{op}} \leq n/\varepsilon$. \square

Folgerung 11.4

Es sei $(E, \|\cdot\|_E)$ ein Banachraum, $(F, \|\cdot\|_F)$ ein normierter Raum und $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge stetiger linearer Abbildungen $\alpha_n: E \rightarrow F$, welche punktweise gegen eine Funktion $\alpha: E \rightarrow F$ konvergiert, also

$$(\forall x \in E) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n(x) = \alpha(x) \text{ in } F.$$

Dann ist $\alpha: E \rightarrow F$ linear und stetig.

Beweis. Die Linearität ist klar: Für $x, y \in E$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ folgt aus

$$\alpha_n(\lambda x + \mu y) = \lambda \alpha_n(x) + \mu \alpha_n(y)$$

für $n \rightarrow \infty$, dass $\alpha(\lambda x + \mu y) = \lambda \alpha(x) + \mu \alpha(y)$.

Sei $M := \{\alpha_n : n \in \mathbb{N}\}$. Für jedes $x \in E$ ist $(\alpha_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ eine konvergente Folge in F und somit eine beschränkte Folge; also ist

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \|\alpha_n(x)\|_F < \infty.$$

Die Menge M ist also punktweise beschränkt und somit nach dem Satz von Banach-Steinhaus auch gleichmäßig beschränkt, also

$$L := \sup_{n \in \mathbb{N}} \|\alpha_n\|_{\text{op}} < \infty.$$

Für alle $x \in E$ mit $\|x\|_E \leq 1$ gilt

$$\|\alpha_n(x)\|_F \leq \|\alpha_n\|_{\text{op}} \|x\|_E \leq L$$

und somit per Grenzübergang $n \rightarrow \infty$ auch

$$\|\alpha(x)\|_F \leq L.$$

Bildung des Supremums über alle x liefert $\|\alpha\|_{\text{op}} \leq L$. Insbesondere ist die lineare Abbildung α stetig. \square

§12 Satz von der offenen Abbildung

Wir lernen nun ein zweites wichtiges Grundprinzip der Funktionalanalysis kennen, das auf dem Baireschen Kategoriensatz beruht, den Satz von der offenen Abbildung (kurz auch “Offenheitssatz”).

Definition 12.1

Eine Abbildung $f: X \rightarrow Y$ zwischen topologischen Räumen heißt **offene Abbildung**, wenn $f(U)$ in Y offen ist für jede offene Teilmenge $U \subseteq X$.

Ist $f(A)$ abgeschlossen in Y für jede abgeschlossene Teilmenge $A \subseteq X$, so wird f eine **abgeschlossene Abbildung** genannt.

Satz 12.2 (Satz von der offenen Abbildung)

Es seien $(E, \|\cdot\|_E)$ und $(F, \|\cdot\|_F)$ Banachräume. Dann ist jede surjektive, stetige lineare Abbildung $\alpha: E \rightarrow F$ eine offene Abbildung.

Beweis. Es genügt, zu zeigen, dass $\alpha(B_\varepsilon^E(0))$ eine Nullumgebung in F ist für jedes $\varepsilon > 0$. Ist nämlich $U \subseteq E$ eine offene Menge und $y \in \alpha(U)$, etwa $y = \alpha(x)$ mit $x \in U$, so gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon^E(x) \subseteq U$; dann ist

$$\alpha(B_\varepsilon^E(x)) = \alpha(x + B_\varepsilon^E(0)) = \alpha(x) + \alpha(B_\varepsilon^E(0))$$

eine Umgebung von $\alpha(x)$ in F und wegen $\alpha(U) \supseteq \alpha(B_\varepsilon^E(x))$ also $\alpha(U)$ eine Umgebung von $y = \alpha(x)$. Da $y \in \alpha(U)$ beliebig war, ist $\alpha(U)$ offen.

Es genügt, zu zeigen, dass $\alpha(B_1^E(0))$ eine Nullumgebung in F ist. Dann ist für jedes $\varepsilon > 0$ auch

$$\alpha(B_\varepsilon^E(0)) = \alpha(\varepsilon B_1^E(0)) = \varepsilon \alpha(B_1^E(0))$$

eine Nullumgebung (da die Abbildung $h_\varepsilon: F \rightarrow F$, $y \mapsto \varepsilon y$ ein Homöomorphismus ist mit $h_\varepsilon(0) = 0$).

Aus $E = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n^E(0) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} n B_1^E(0)$ folgt

$$F = \alpha(E) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} n \alpha(B_1^E(0)),$$

so dass erst recht $F = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \overline{n\alpha(B_1^E(0))}$. Nach dem Baireschen Kategoriensatz existiert ein $n \in \mathbb{N}$ derart, dass

$$\overline{n\alpha(B_1^E(0))}^0 \neq \emptyset.$$

Da h_n ein Homöomorphismus ist, ist die linke Seite gleich $h_n(\overline{\alpha(B_1^E(0))}^0)$ und somit

$$\overline{\alpha(B_1^E(0))}^0 \neq \emptyset.$$

Nun ist $\alpha(B_1^E(0))$ konvex und symmetrisch, also auch der Abschluss dieser Menge und sein Inneres (siehe Lemma 10.3 und Lemma 10.2 (a)); folglich ist

$$0 \in \overline{\alpha(B_1^E(0))}^0.$$

Es existiert also ein $r > 0$ derart, dass

$$B_r^F(0) \subseteq \overline{\alpha(B_1^E(0))}. \quad (1)$$

Wir zeigen nun, dass

$$B_{r/2}^F(0) \subseteq \alpha(B_1^E(0)), \quad (2)$$

was den Beweis beendet. Anwenden von $h_{2^{-n}}$ auf (1) zeigt, dass

$$B_{r/2^n}^F(0) \subseteq \overline{\alpha(B_{2^{-n}}^E(0))}$$

für jedes $n \in \mathbb{N}$; da das Bild im Abschluss dicht ist, gilt insbesondere

$$(\forall z \in B_{r/2^n}^F(0)) (\exists x \in B_{2^{-n}}^E(0)) \quad \|z - \alpha(x)\|_F \leq r/2^{n+1}. \quad (3)$$

Gegeben $y \in B_{r/2}^F(0)$ finden wir also ein $x_1 \in B_{1/2}^E(0)$ derart, dass $\|y - \alpha(x_1)\|_F < r/4$. Rekursiv finden wir $x_k \in B_{2^{-k}}^E(0)$ derart, dass

$$\|y - \alpha(x_1) - \dots - \alpha(x_k)\|_F < r/2^{k+1}. \quad (4)$$

Sind nämlich x_1, \dots, x_{n-1} schon gefunden, so können wir (3) mit $z := y - \alpha(x_1) - \dots - \alpha(x_{n-1}) \in B_{r/2^n}^F(0)$ anwenden und setzen $x_n := x$ für das dort beschriebene $x \in B_{2^{-n}}^E(0)$. Wegen $\|x_k\|_E < 2^{-k}$ ist dann

$$s := \sum_{k=1}^{\infty} x_k$$

in E absolut konvergent (wegen der Vollständigkeit also konvergent) und $\|s\|_E \leq \sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|_E < \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} = 1$, also

$s \in B_1^E(0)$. Weiter gilt

$$\|y - \alpha(s)\|_F = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| y - \sum_{j=1}^k \alpha(x_j) \right\|_F = 0$$

wegen (4) und somit $y = \alpha(s)$. \square

Folgerung 12.3

Sind $(E, \|\cdot\|_E)$ und $(F, \|\cdot\|_F)$ Banachräume und ist eine stetige lineare Abbildung $\alpha: E \rightarrow F$ bijektiv, so ist $\alpha^{-1}: F \rightarrow E$ stetig.

Beweis. Nach dem Offenheitssatz ist α eine offene Abbildung. Für jede offene Teilmenge $U \subseteq E$ ist also $\alpha(U)$ in F offen. Da $\alpha(U)$ gleich dem Urbild $(\alpha^{-1})^{-1}(U)$ von U unter der Umkehrabbildung α^{-1} ist, ist α^{-1} stetig. \square

Definition 12.4

Es sei $(E, \|\cdot\|_E)$ ein normierter Raum. Ein Untervektorraum $F \subseteq E$ heißt **komplementierter Untervektorraum** des normierten Raums $(E, \|\cdot\|)$, wenn es einen Untervektorraum $C \subseteq E$ gibt, welcher die stetige lineare Abbildung

$$\alpha: F \times C \rightarrow E, \quad (x, y) \mapsto x + y$$

zu einem topologischen Isomorphismus macht. Wir schreiben dann

$$E = F \oplus C$$

und nennen C einen (topologisch) komplementären Untervektorraum zu F (oder auch: ein topologisches Komplement).

Hierbei versehen wir $F \times C$ mit der durch

$\|(x, y)\| := \max\{\|x\|_E, \|y\|_E\}$ gegebenen Norm; da

$$\|\alpha(x, y)\|_E = \|x + y\|_E \leq \|x\|_E + \|y\|_E \leq 2\|(x, y)\|,$$

ist die lineare Abbildung α immer stetig mit $\|\alpha\|_{\text{op}} \leq 2$.

Bemerkung 12.5

(a) Aus der linearen Algebra ist bekannt: $\alpha: F \times C \rightarrow E$ ist genau dann bijektiv (also ein Isomorphismus von Vektorräumen), wenn

$$E = F + C \quad \text{und} \quad F \cap C = \{0\}$$

(dann ist also $E = F \oplus C$ als Vektorraum, ohne Norm und Topologie).

(b) Ist F ein komplementierter Untervektorraum in E , so ist F abgeschlossen in E , denn $F \times \{0\}$ ist abgeschlossen in $F \times C$ und α ist ein Homöomorphismus.¹

¹Die Projektion $\text{pr}_2: F \times C \rightarrow C$ ist stetig (linear mit Operatornorm ≤ 1) und $F \times \{0\} = (\text{pr}_2)^{-1}(\{0\})$, wobei die einpunktige Menge $\{0\}$ in C abgeschlossen ist.

Satz 12.6

Es sei $(E, \|\cdot\|_E)$ ein Banachraum. Sind F und C abgeschlossene Untervektorräume von E derart, dass $F + C = E$ und $F \cap C = \{0\}$, so ist

$$E = F \oplus C$$

und somit F ein komplementierter Untervektorraum von E , mit topologischem Komplement C .

Beweis. Die lineare Abbildung

$$\alpha: F \times C \rightarrow E, \quad (x, y) \mapsto x + y$$

ist stetig und per Voraussetzung bijektiv. Da F und C als abgeschlossene Untervektorräume von E Banachräume sind, ist auch $F \times C$ ein Banachraum. Nach dem Offenheitssatz (bzw. Folgerung 12.3) ist α ein topologischer Isomorphismus. \square

§13 Satz vom abgeschlossenen Graphen

Für eine lineare Abbildung $\alpha: E \rightarrow F$ zwischen \mathbb{K} -Vektorräumen ist

$$\text{graph}(\alpha) := \{(x, \alpha(x)) : x \in E\}$$

ein Untervektorraum von $E \times F$, denn $(0, 0) \in \text{graph}(\alpha)$ und

$$\begin{aligned}\lambda(x, \alpha(x)) + \mu(y, \alpha(y)) &= (\lambda x + \mu y, \lambda \alpha(x) + \mu \alpha(y)) \\ &= (\lambda x + \mu y, \alpha(\lambda x + \mu y))\end{aligned}$$

für alle $x, y \in E$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, wobei die letzte Gleichheit auf der Linearität von α beruht. Sind $(E, \|\cdot\|_E)$ und $(F, \|\cdot\|_F)$ normierte Räume und ist α stetig, so ist $\text{graph}(\alpha)$ abgeschlossen in $E \times F$ mit der Maximumnorm. Ist nämlich (x, y) im Abschluss des Graphen, so gibt es $(x_n, \alpha(x_n)) \in \text{graph}(\alpha)$ für $n \in \mathbb{N}$ mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n, \alpha(x_n)) = (x, y).$$

Dann gilt $x_n \rightarrow x$ und folglich $\alpha(x_n) \rightarrow \alpha(x)$ wegen der Stetigkeit von α . Da auch $\alpha(x_n) \rightarrow y$, ist $y = \alpha(x)$ und somit $(x, y) = (x, \alpha(x)) \in \text{graph}(\alpha)$.

Der Satz vom abgeschlossenen Graphen (kurz: Graphensatz) besagt, dass im Falle von linearen Abbildungen zwischen Banachräumen auch die Umkehrung gilt:

Satz 13.1 (Satz vom abgeschlossenen Graphen)

Sind $(E, \|\cdot\|_E)$ und $(F, \|\cdot\|_F)$ Banachräume und $\alpha: E \rightarrow F$ eine lineare Abbildung, deren Graph $\text{graph}(\alpha)$ in $E \times F$ abgeschlossen ist, so ist α stetig.

Beweis. Als abgeschlossener Untervektorraum von $E \times F$ ist $\text{graph}(\alpha)$ ein Banachraum mit der durch

$$\|(x, \alpha(x))\| := \max\{\|x\|_E, \|\alpha(x)\|_F\}$$

gegebenen Norm. Diese Norm macht die Einschränkung

$$\pi_1: \text{graph}(\alpha) \rightarrow E, \quad (x, \alpha(x)) \mapsto x$$

der Projektion $E \times F \rightarrow E$ auf die erste Komponente zu einer stetigen linearen Abbildung mit $\|\pi_1\|_{\text{op}} \leq 1$, da

$$\|\pi_1(x, \alpha(x))\|_E = \|x\|_E \leq \max\{\|x\|_E, \|\alpha(x)\|_F\} = \|(x, \alpha(x))\|.$$

Analog ist $\pi_2: \text{graph}(\alpha) \rightarrow F, (x, \alpha(x)) \mapsto \alpha(x)$ eine stetige lineare Abbildung mit $\|\pi_2\|_{\text{op}} \leq 1$. Nun ist π_1 bijektiv; nach dem Offenheitssatz (bzw. Folgerung 12.3) ist die Umkehrabbildung

$$(\pi_1)^{-1}: E \rightarrow \text{graph}(\alpha), \quad x \mapsto (x, \alpha(x))$$

stetig. Folglich ist $\alpha = \pi_2 \circ (\pi_1)^{-1}$ stetig. \square

Beispiel 13.2

Es sei X eine Menge, $E \subseteq \mathbb{K}^X$ ein Untervektorraum und $\|\cdot\|_E$ eine Norm auf E , welche E zu einem Banachraum macht und für jedes $x \in X$ die Punktauswertung

$$\text{ev}_x: E \rightarrow \mathbb{K}, \quad f \mapsto f(x)$$

zu einer stetigen linearen Abbildung. Ist $g: X \rightarrow X$ eine Abbildung derart, dass

$$g^*(f) := f \circ g \in E \quad \text{für alle } f \in E,$$

so ist die lineare Abbildung $g^*: E \rightarrow E$ automatisch stetig.

Beweis. Nach dem Graphensatz brauchen wir nur zu zeigen, dass $\text{graph}(g^*)$ in $E \times E$ abgeschlossen ist.

Hierzu sei $(f, h) \in E \times E$ im Abschluss von $\text{graph}(g^*)$; es gibt also $f_n \in E$ für $n \in \mathbb{N}$ mit $(f_n, g^*(f_n)) \rightarrow (f, h)$ für $n \rightarrow \infty$. Dann gilt $g^*(f_n) \rightarrow h$ in E und somit für jedes $x \in X$ wegen der Stetigkeit von ev_x

$$f_n(g(x)) = (f_n \circ g)(x) = g^*(f_n)(x) = \text{ev}_x(g^*(f_n)) \rightarrow \text{ev}_x(h) = h(x).$$

Andererseits gilt wegen der Stetigkeit von $\text{ev}_{g(x)}$

$$f_n(g(x)) = \text{ev}_{g(x)}(f_n) \rightarrow \text{ev}_{g(x)}(f) = f(g(x)).$$

Also ist $h(x) = f(g(x))$ für alle $x \in X$, folglich $h = f \circ g = g^*(f)$ und somit $(f, h) = (f, g^*(f)) \in \text{graph}(g^*)$. \square

§14 Offene Abbildungen und Quotientenabbildungen

In diesem Kapitel stellen wir etwas Hintergrund zu Quotientenabbildungen und offenen Abbildungen zusammen, im Hinblick auf normierte Räume. Am Rande kommen auch abgeschlossene Abbildungen vor.

Lemma 14.1

Ist (X, \mathcal{O}) ein topologischer Raum, Y eine Menge und $q: X \rightarrow Y$ eine surjektive Abbildung, so ist

$$\mathcal{O}_Y := \{U \subseteq Y : q^{-1}(U) \in \mathcal{O}\}$$

eine Topologie auf Y , welche q stetig macht.

Beweis. Wegen $f^{-1}(Y) = X \in \mathcal{O}$ und $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset \in \mathcal{O}$ sind $Y, \emptyset \in \mathcal{O}_Y$. Für $U, V \in \mathcal{O}_Y$ ist

$$f^{-1}(U \cap V) = f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V) \in \mathcal{O},$$

also $U \cap V \in \mathcal{O}_Y$. Ist $(U_j)_{j \in J}$ eine Familie von Mengen $U_j \in \mathcal{O}_Y$, so ist

$$f^{-1}\left(\bigcup_{j \in J} U_j\right) = \bigcup_{j \in J} f^{-1}(U_j) \in \mathcal{O},$$

also $\bigcup_{j \in J} U_j \in \mathcal{O}_Y$. Also ist \mathcal{O}_Y eine Topologie auf Y . Da $f^{-1}(U) \in \mathcal{O}$ für alle $U \in \mathcal{O}_Y$, ist q stetig als Abbildung von (X, \mathcal{O}) nach (Y, \mathcal{O}_Y) . \square

Definition 14.2

Die Topologie \mathcal{O}_Y in Lemma 14.1 wird **Quotiententopologie** genannt. Ist $q: X \rightarrow Y$ eine surjektive Abbildung zwischen topologischen Räumen derart, dass die gegebene Topologie auf Y gleich der Quotiententopologie ist, so nennt man q eine **Quotientenabbildung**.

Bemerkung 14.3

Eine Abbildung $q: X \rightarrow Y$ zwischen topologischen Räumen ist also genau dann eine Quotientenabbildung, wenn

$$(\forall U \subseteq Y) \quad U \text{ offen in } Y \Leftrightarrow q^{-1}(U) \text{ offen in } X.$$

Durch Übergang zu Komplementen sehen wir: q ist genau dann eine Quotientenabbildung, wenn

$$(\forall A \subseteq Y) \quad A \text{ abgeschlossen in } Y \Leftrightarrow q^{-1}(A) \text{ abgeschlossen in } X.$$

Quotientenabbildungen sind unter anderem wegen des folgenden Sachverhalts nützlich.

Satz 14.4

Es sei $q: X \rightarrow Y$ eine Quotientenabbildung zwischen topologischen Räumen. Ist Z ein topologischer Raum, so ist eine Abbildung $f: Y \rightarrow Z$ genau dann stetig, wenn $f \circ q: X \rightarrow Z$ stetig ist.

Beweis. Ist f stetig, so auch $f \circ q$. Ist $f \circ q$ stetig, so ist für jede offene Teilmenge $U \subseteq Z$

$$q^{-1}(f^{-1}(U)) = (f \circ q)^{-1}(U)$$

offen in X . Da q eine Quotientenabbildung ist, ist also $f^{-1}(U)$ offen. Somit ist f stetig. \square

Satz 14.5

Es sei $q: X \rightarrow Y$ eine surjektive stetige Abbildung zwischen topologischen Räumen. Ist q eine offene Abbildung oder eine abgeschlossene Abbildung, so ist q eine Quotientenabbildung.

Beweis. Wir zeigen die Schlussfolgerung, wenn q eine offene Abbildung ist; um den Fall einer abgeschlossenen Abbildung zu beweisen, ersetze man im folgenden Beweis offene durch abgeschlossene Mengen. Sei $U \subseteq Y$ eine Teilmenge. Ist U offen in Y , so ist $q^{-1}(U)$ offen in X , da q stetig ist. Ist $q^{-1}(U)$ offen, so ist wegen der Surjektivität von q

$$U = q(q^{-1}(U)).$$

Da q per Annahme eine offene Abbildung ist, ist U also offen. \square

Satz 14.6

Seien $(E, \|\cdot\|_E)$ und $(F, \|\cdot\|_F)$ normierte Räume. Eine surjektive, stetige lineare Abbildung $q: E \rightarrow F$ ist genau dann eine Quotientenabbildung, wenn q eine offene Abbildung ist.

Beweis. Ist q offen, so ist q nach Satz 14.5 eine Quotientenabbildung. Ist q eine Quotientenabbildung und $U \subseteq E$ eine offene Menge, so ist

$$q^{-1}(q(U)) = U + \ker(q) = \bigcup_{x \in \ker(q)} (U + x)$$

offen als Vereinigung der offenen Mengen $U + x = \tau_x(U)$ mit dem Homöomorphismus $\tau_x: E \rightarrow E, y \mapsto x + y$. Per Definition der Quotiententopologie ist $q(U)$ also offen in Y . \square

Der Themenkreis wird in Kapitel 18 fortgesetzt!

§15 Auswahlaxiom und Zornsches Lemma

Wir erinnern an die Begriffe partiell bzw. total geordneter Mengen.

Definition 15.1

Eine Relation \leq ($\subseteq X \times X$) auf einer Menge X heißt **Ordnungsrelation**, wenn für alle $x, y, z \in X$ gilt:

Reflexivität: $x \leq x$;

Antisymmetrie: $x \leq y$ und $y \leq x \Rightarrow x = y$

Transitivität: $x \leq y$ und $y \leq z \Rightarrow x \leq z$.

Man nennt dann (X, \leq) eine **partiell geordnete Menge**. Gilt zudem

Totalität: Für alle $x, y \in X$ ist $x \leq y$ oder $y \leq x$,

so nennt man \leq eine **totale Ordnung** und (X, \leq) eine **total geordnete Menge**.

Man schreibt $x < y$, wenn $x \leq y$ und $x \neq y$. Man schreibt $x \geq y$ bzw. $x > y$, wenn $y \leq x$ bzw. $y < x$.

Beispiel 15.2

(a) \mathbb{N}_0 und \mathbb{Z} sind total geordnete Mengen mit $n \leq m \Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{N}_0) m = n + k$.

(b) \mathbb{R} ist eine total geordnete Menge mit $x \leq y \Leftrightarrow (\exists t \in \mathbb{R}) y - x = t^2$.

(c) Für jede Menge X ist die Potenzmenge $\mathcal{P}(X)$ eine geordnete Menge mit Mengeninklusion, also $\leq := \subseteq$. Hat X mindestens zwei verschiedene Elemente, so ist $\mathcal{P}(X)$ nicht total geordnet.

Beispiel 15.3

Ist (X, \leq) eine partiell geordnete Menge und $Y \subseteq X$ eine Teilmenge, so ist

$$\leq_Y := \leq \cap (Y \times Y)$$

eine Ordnungsrelation auf Y , die **induzierte Ordnung**. Gegeben $x, y \in Y$ gilt also $x \leq_Y y$ genau dann, wenn $x \leq y$.

Definition 15.4

Es sei (X, \leq) eine partiell geordnete Menge.

- (a) Eine Teilmenge $\Gamma \subseteq X$ heißt **Kette**, wenn Γ in der induzierten Ordnung total geordnet ist.
- (b) Man nennt ein Element $y \in X$ eine **obere Schranke** für eine Teilmenge $M \subseteq X$, wenn $x \leq y$ für alle $x \in M$.
- (c) Ein Element $y \in X$ heißt **maximal**, wenn es kein echt größeres gibt, also $(\forall z \in X) y \leq z \Rightarrow y = z$.
- (d) Ein Element $y \in X$ heißt **größtes Element**, wenn $x \leq y$ für alle $x \in X$.

Beispiel 15.5

Wir ordnen $X := \{\{1\}, \{2\}\}$ durch Mengeninklusion. Dann sind $\{1\}$ und $\{2\}$ maximale Elemente von X . Ein größtes Element in X existiert nicht.

Größte Elemente sind eindeutig, wenn sie existieren: Sind y und z solche, so ist $y \leq z$ und $z \leq y$, also $y = z$.

Bemerkung 15.6

In einer total geordneten Menge (X, \leq) ist ein Element y genau dann ein größtes, wenn es maximal ist; man nennt es dann das **Maximum** von X und schreibt $\max X := y$. Induktion zeigt: Jede endliche, nicht leere, total geordnete Menge besitzt ein Maximum.

Definition 15.7

Eine partiell geordnete Menge (X, \leq) heißt **induktiv geordnet**, wenn jede Kette $\Gamma \subseteq X$ in X eine obere Schranke besitzt.

Der folgende Sachverhalt ist wesentlich für die Funktionalanalysis.

Satz 15.8 (Zornsches Lemma)

Jede induktiv geordnete Menge besitzt ein maximales Element.

Das Zornsche Lemma folgt aus dem Auswahlaxiom der Mengenlehre, siehe Kapitel 42 am Semesterende (und ist zu diesem äquivalent):

15.9 (Auswahlaxiom)

Für jede Familie $(X_j)_{j \in J}$ nicht leerer Mengen X_j mit $J \neq \emptyset$ ist

$$\prod_{j \in J} X_j \neq \emptyset.$$

Es existiert also eine Familie $(x_j)_{j \in J}$ von Elementen $x_j \in X_j$.

Eine endliche Teilmenge Φ eines \mathbb{K} -Vektorraums E heißt **linear unabhängig**, wenn aus $\sum_{v \in \Phi} t_v \cdot v = 0$ mit $t_v \in \mathbb{K}$ stets $t_v = 0$ folgt für alle $v \in \Phi$. Eine Teilmenge $S \subseteq E$ heißt linear unabhängig, wenn jede endliche Teilmenge $\Phi \subseteq S$ in E linear unabhängig ist.

Beispiel 15.10

Jeder \mathbb{K} -Vektorraum E besitzt eine unter Mengeninklusion maximale linear unabhängige Teilmenge (eine Basis).

Beweis. Sei M die Menge aller linear unabhängigen Teilmengen $S \subseteq E$; wir ordnen M via Mengeninklusion. Dann ist $\emptyset \in M$, also $M \neq \emptyset$. Sei Γ eine Kette in M . Ist $\Gamma = \emptyset$, so ist jedes Element von M eine obere Schranke für Γ . Ist $\Gamma \neq \emptyset$, so ist

$$R := \bigcup_{S \in \Gamma} S$$

ein Element von M , denn ist $\Phi = \{x_1, \dots, x_n\}$ eine endliche Teilmenge von R , so ist $x_j \in S_j$ für ein $S_j \in \Gamma$. Da Γ total geordnet ist, gibt es ein $k \in \{1, \dots, n\}$ mit

$$S_j \leq S_k \quad \text{für alle } j \in \{1, \dots, n\}, \text{ also } S_k = \max\{S_1, \dots, S_n\}.$$

Dann ist $\Phi \subseteq S_k$ und somit Φ linear unabhängig, also auch R ; somit ist $R \in M$. Per Konstruktion ist $S \subseteq R$ für alle $S \in \Gamma$, also $S \leq R$, d.h. R ist eine obere Schranke für Γ .

Also ist M induktiv geordnet. Nach dem Zornschen Lemma hat M ein maximales Element B . \square

Ist $B \subseteq E$ eine maximale linear unabhängige Teilmenge, so muss $\text{span}_{\mathbb{K}}(B) = E$ sein, denn andernfalls gäbe es ein $x \in E \setminus \text{span}_{\mathbb{K}}(B)$ und dann wäre auch $B \cup \{x\}$ linear unabhängig, also $B \cup \{x\} \in M$ mit $B < B \cup \{x\}$ im Widerspruch zur Maximalität von B . Jedes $x \in E$ lässt sich also schreiben als Linearkombination

$$x = \sum_{b \in B} t_b \cdot b$$

mit $t_b \in \mathbb{K}$ derart, dass $t_b \neq 0$ für nur endlich viele $b \in B$. Wegen der linearen Unabhängigkeit von B sind die t_b eindeutig festgelegt.

Beispiel 15.11

Für jede unendliche Menge X gibt es eine Menge J paarweise disjunkter, abzählbarer unendlicher Teilmengen $N \subseteq X$ mit

$$X = \bigcup_{N \in J} N.$$

Beweis. Sei M die Menge aller Mengen J von paarweise disjunkten, abzählbar unendlichen Teilmengen von X . Dann ist $\emptyset \in M$, also $M \neq \emptyset$. Wir ordnen M durch Mengeninklusion. Sei Γ eine Kette in M . Ist $\Gamma = \emptyset$, so ist jedes $J \in M$ eine obere Schranke für Γ . Ist $\Gamma \neq \emptyset$, so ist

$$K := \bigcup_{J \in \Gamma} J \in M,$$

denn sind $N_1, N_2 \in K$ mit $N_1 \neq N_2$, so gibt es $J_1, J_2 \in \Gamma$ mit $N_1 \in J_1$ und $N_2 \in J_2$; dann sind $N_1, N_2 \in \max\{J_1, J_2\}$ und somit $N_1 \cap N_2 = \emptyset$. Da $J \leq K$ für alle $J \in \Gamma$, ist K eine obere Schranke für Γ . Also ist M induktiv geordnet und hat nach dem Zornschen Lemma ein maximales Element J .

Ist

$$X = \bigcup_{N \in J} N,$$

so sind wir fertig. Andernfalls muss

$$\Phi := X \setminus \bigcup_{N \in J} N$$

eine endliche Menge sein, denn sonst würde Φ eine abzählbar unendliche Menge A enthalten und dann wäre $J < J \cup \{A\}$ im Widerspruch zur Maximalität von J . Da X eine unendliche Menge ist, muss also $J \neq \emptyset$ sein. Wir wählen ein $N_0 \in J$ und ersetzen N_0 durch $N_0 \cup \Phi$: Es ist auch

$$J' := (J \setminus \{N_0\}) \cup (N_0 \cup \Phi) \in M$$

und $X = \bigcup_{N \in J'} N$. \square

Folgerung 15.12

Sind X und Y Mengen und nicht beide endlich, so gilt für ihre Mächtigkeiten

$$|X \cup Y| = \max\{|X|, |Y|\}.$$

Beweis. O.b.d.A. sei $|X|$ das Maximum. Wir schreiben $X = \bigcup_{N \in J} N$ wie in 15.11 und wählen Bijektionen $\phi_N: \mathbb{N} \rightarrow N$. Dann ist

$$\mathbb{N} \times J \rightarrow X, \quad (n, N) \mapsto \phi_N(n)$$

eine Bijektion, also $|\mathbb{N} \times J| = |X|$. Weiter ist

$$|X| \leq |X \cup Y| \leq |\mathbb{N} \times X| = |\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times J| = |\mathbb{N} \times J| = |X|,$$

also $|X| = |X \cup Y|$. \square

Folgerung 15.13

Für alle Mengen X und Z gibt es eine Menge Y mit $|X| = |Y|$ und $Y \cap Z = \emptyset$.

Beweis. $A := X \cup Z \cup \mathbb{N}$ ist eine unendliche Menge. Sei $A' := \mathcal{P}(A) \cap A$ und

$$B := \mathcal{P}(A) \setminus A = \mathcal{P}(A) \setminus A'.$$

Dann ist $\mathcal{P}(A) = A' \cup B$, nach 15.12 somit $|\mathcal{P}(A)| = \max\{|A'|, |B|\}$. Da $|A'| \leq |A| < |\mathcal{P}(A)|$, ist $|\mathcal{P}(A)| = |B|$. Aus $|X| \leq |A| < |\mathcal{P}(A)| = |B|$ folgt die Existenz einer injektiven Abbildung $f: X \rightarrow B$. Dann hat $Y := f(X)$ die Mächtigkeit von X und ist zu Z disjunkt, da $Z \subseteq A$ und $Y \cap A \subseteq B \cap A = \emptyset$. \square

§16 Fortsetzungssatz von Hahn-Banach

Sei $(E, \|\cdot\|_E)$ ein normierter Raum; im folgenden Satz betrachten wir auf einem Untervektorraum $F \subseteq E$ die durch $\|x\|_F := \|x\|_E$ für $x \in F$ gegebene induzierte Norm $\|\cdot\|_F: F \rightarrow [0, \infty[$.

Satz 16.1 (Satz von Hahn-Banach)

Ist $(E, \|\cdot\|_E)$ ein normierter Raum und $F \subseteq E$ ein Untervektorraum, so gibt es zu jedem stetigen linearen Funktional $\lambda: F \rightarrow \mathbb{K}$ ein stetiges lineares Funktional $\Lambda: E \rightarrow \mathbb{K}$ mit $\lambda = \Lambda|_F$ und $\|\Lambda\|_{\text{op}} = \|\lambda\|_{\text{op}}$.

Aus $\Lambda|_F = \lambda$ folgt $\|\Lambda\|_{\text{op}} \geq \|\lambda\|_{\text{op}}$; die Bedingung $\|\Lambda\|_{\text{op}} = \|\lambda\|_{\text{op}}$ ist also zu $\|\Lambda\|_{\text{op}} \leq \|\lambda\|_{\text{op}}$ äquivalent.

Wir beweisen den Satz zuerst im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ und benutzen folgende Beobachtung:

Lemma 16.2

Es seien J eine nicht leere Menge und $a_j \leq b_j$ reelle Zahlen für $j \in J$. Genau dann ist

$$\bigcap_{j \in J} [a_j, b_j] \neq \emptyset,$$

wenn

$$\sup_{j \in J} a_j \leq \inf_{j \in J} b_j.$$

Beweis. Sei $a := \sup\{a_j : j \in J\} \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$,
 $b := \inf\{b_j : j \in J\} \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ und $D := \bigcap_{j \in J} [a_j, b_j]$. Gibt es ein $x \in D$, so ist $x \in [a_j, b_j]$ und somit

$$a_j \leq x \leq b_j$$

für alle $j \in J$, woraus $a \leq x$ und $x \leq b$ folgt, also $a \leq b$. Ist umgekehrt $a \leq b$, so ist für jedes $j \in J$

$$a_j \leq a \leq b \leq b_j,$$

also $a \in [a_j, b_j]$. Also ist $a \in D$ und somit $D \neq \emptyset$. \square

Lemma 16.3

Satz 16.1 gilt, wenn $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ist und $F \subseteq E$ Kodimension 1 hat.

Also ist E/F eindimensional. Wählen wir ein $x_0 \in E$ mit $x_0 \notin F$, so ist $E = F \oplus \mathbb{R}x_0$ als reeller Vektorraum. Gegeben $\lambda \in F'$ sind die mögliche Fortsetzungen von λ von der Form

$$\Lambda_\alpha: E \rightarrow \mathbb{R}, \quad x + tx_0 \mapsto \lambda(x) + t\alpha \text{ für } x \in F, t \in \mathbb{R}$$

mit $\alpha \in \mathbb{R}$. Wir möchten erreichen, dass

$|\Lambda_\alpha(x + tx_0)| \leq \|\lambda\|_{\text{op}} \|x + tx_0\|_E$ für alle $x \in F$ und $t \in \mathbb{R}$, also

$$|\lambda(x) + t\alpha| \leq \|\lambda\|_{\text{op}} \|x + tx_0\|_E \quad (1)$$

für alle $x \in F$ und $t \in \mathbb{R}$. Dies ist automatisch wenn $t = 0$, braucht also nur für $t \neq 0$ überprüft werden. Da $\frac{1}{t}x$ mit $x \in F$ dann alle $x \in F$ durchläuft, führt Division von (1) durch $|t|$ auf die äquivalente Bedingung

$$|\lambda(x) + \alpha| \leq \|\lambda\|_{\text{op}} \|x + x_0\|_E \text{ für alle } x \in F,$$

also $|\alpha - (-\lambda(x))| \leq \|\lambda\|_{\text{op}} \|x + x_0\|_E$, also

$$\alpha \in \bigcap_{x \in F} [a_x, b_x]$$

mit $a_x := -\lambda(x) - \|\lambda\|_{\text{op}}\|x + x_0\|_E$ und
 $b_x := -\lambda(x) + \|\lambda\|_{\text{op}}\|x + x_0\|_E$. Für alle $x, y \in F$ ist

$$\begin{aligned}\lambda(y) - \lambda(x) &= \lambda(y - x) \leq |\lambda(y - x)| \leq \|\lambda\|_{\text{op}}\|y - x\|_E \\ &\leq \|\lambda\|_{\text{op}}\|y + x_0\|_E + \|\lambda\|_{\text{op}}\|x + x_0\|_E,\end{aligned}$$

also

$$-\lambda(x) - \|\lambda\|_{\text{op}}\|x + x_0\|_E \leq -\lambda(y) + \|\lambda\|_{\text{op}}\|y + x_0\|_E$$

und folglich $a_x \leq b_y$. Für jedes $x \in F$ ist also
 $a_x \leq \inf\{b_y : y \in F\} =: b$, folglich $a := \sup\{a_x : x \in F\} \leq b$. Nach
Lemma 16.2 existiert ein $\alpha \in \bigcap_{x \in F} [a_x, b_x]$ (z.B. $\alpha := a$). \square

Beweis von Satz 16.1 wenn $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Es sei M die Menge aller stetigen linearen Abbildungen $\mu: E_\mu \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\|\mu\|_{\text{op}} \leq \|\lambda\|_{\text{op}}$ derart, dass E_μ ein Untervektorraum von E ist mit $F \subseteq E_\mu$ und $\mu|_F = \lambda$. Wir schreiben $\mu_1 \leq \mu_2$, wenn $E_{\mu_1} \subseteq E_{\mu_2}$ ist und $\mu_2|_{E_{\mu_1}} = \mu_1$. Es ist klar, dass (M, \leq) eine partiell geordnete Menge ist; weiter ist $\lambda \in M$. Um zu sehen, dass M induktiv geordnet ist, sei Γ eine Kette in M . Ist $\Gamma = \emptyset$, so ist λ eine obere Schranke für Γ . Ist $\Gamma \neq \emptyset$, so ist

$$E_\nu := \bigcup_{\mu \in \Gamma} E_\mu$$

ein Untervektorraum von E mit $F \subseteq E_\nu$, denn es existiert ein $\mu \in \Gamma$ und dann ist $F \subseteq E_\mu \subseteq E_\nu$, also insb. $0 \in E_\nu$; gegeben $x_1, x_2 \in E_\nu$ und $s_1, s_2 \in \mathbb{R}$ gibt es $\mu_j \in \Gamma$ mit $x_j \in E_{\mu_j}$. Da Γ eine Kette ist, ist $\mu_1 \leq \mu_2$ oder $\mu_2 \leq \mu_1$; nachdem wir notfalls x_1 und x_2 vertauschen, dürfen wir $\mu_1 \leq \mu_2$ annehmen. Dann ist $E_{\mu_1} \subseteq E_{\mu_2}$, also $x_1, x_2 \in E_{\mu_2}$ und somit

$$s_1 x_1 + s_2 x_2 \in E_{\mu_2} \subseteq E_\nu.$$

Definieren wir $\nu: E_\nu \rightarrow \mathbb{R}$ via $\nu(x) := \mu(x)$ wenn $x \in E_\mu$, so ist ν wohldefiniert, denn ist $x \in E_{\mu_1} \cap E_{\mu_2}$ mit $\mu_1, \mu_2 \in \Gamma$, so dürfen wir $\mu_1 \leq \mu_2$ annehmen und erhalten

$$\mu_1(x) = \mu_2|_{E_{\mu_1}}(x) = \mu_2(x).$$

Gegeben $x_1, x_2 \in E_\nu$ und $s_1, s_2 \in \mathbb{R}$ finden wir wie oben ein $\mu \in \Gamma$ mit $x_1, x_2 \in E_\mu$; dann ist $s_1x_1 + s_2x_2 \in E_\mu$ und somit

$$\nu(s_1x_1 + s_2x_2) = \mu(s_1x_1 + s_2x_2) = s_1\mu(x_1) + s_2\mu(x_2) = s_1\nu(x_1) + s_2\nu(x_2).$$

Also ist $\nu: E_\nu \rightarrow \mathbb{R}$ linear. Es existiert ein $\mu \in \Gamma$; wir erhalten $\nu|_F = \mu|_F = \lambda$. Gegeben $x \in E_\nu$ existiert ein $\mu \in \Gamma$ mit $x \in E_\mu$. Dann ist

$$|\nu(x)| = |\mu(x)| \leq \|\mu\|_{\text{op}} \|x\|_E \leq \|\lambda\|_{\text{op}} \|x\|_E,$$

also $\|\nu\|_{\text{op}} \leq \|\lambda\|_{\text{op}}$. Nach dem Vorigen ist $\nu \in M$ und per Konstruktion ist $\mu \leq \nu$ für alle $\mu \in \Gamma$, also ν eine obere Schranke für Γ . Also ist M induktiv geordnet und hat somit ein maximales Element $\Lambda: E_\Lambda \rightarrow \mathbb{R}$, nach dem Zornschen Lemma.

Wäre $E_\Lambda \neq E$, so existiert ein $x_0 \in E \setminus E_\Lambda$ und wir könnten mit Lemma 16.3 Λ zu einem stetigen linearen Funktional Θ auf $E_\Lambda + \mathbb{R}x_0$ fortsetzen mit $\|\Theta\|_{\text{op}} = \|\Lambda\|_{\text{op}} = \|\lambda\|_{\text{op}}$. Dann wäre $\Theta \in M$ und $\Lambda < \Theta$, im Widerspruch zur Maximalität von Λ . Also muss doch $E_\Lambda = E$ sein. \square

Definition 16.4

Ist $(E, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum über \mathbb{C} und

$$m: \mathbb{C} \times E \rightarrow E, (z, x) \mapsto zx$$

die Multiplikation mit komplexen Skalaren, so schreiben wir $E_{\mathbb{R}}$ für E als reeller Vektorraum, versehen mit der Multiplikation

$$m|_{\mathbb{R} \times E}: \mathbb{R} \times E \rightarrow E, (t, x) \mapsto m(t, x).$$

Lemma 16.5

Für jeden normierten Raum $(E, \|\cdot\|)$ über \mathbb{C} ist $(E_{\mathbb{R}}, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum über \mathbb{R} und die Abbildung

$$\psi_E: (E')_{\mathbb{R}} \rightarrow (E_{\mathbb{R}})', \quad \lambda \mapsto \operatorname{Re} \circ \lambda$$

ist ein isometrischer Isomorphismus von reellen normierten Räumen.

Hierbei ist $E' = \mathcal{L}(E, \mathbb{C})$, $(E_{\mathbb{R}})' = \mathcal{L}(E_{\mathbb{R}}, \mathbb{R})$.

Beweis. Offenbar ist $u := \operatorname{Re} \circ \lambda$ reell linear. Für alle $x \in E$ ist

$$|u(x)| = |\operatorname{Re}(\lambda(x))| \leq |\lambda(x)| \leq \|\lambda\|_{\operatorname{op}} \|x\|,$$

also $\|u\|_{\operatorname{op}} \leq \|\lambda\|_{\operatorname{op}}$. Für jedes $x \in E$ existiert ein $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = 1$ derart, dass

$$|\lambda(x)| = z\lambda(x).$$

Dann ist $u(zx) = \operatorname{Re}(\lambda(zx)) = \operatorname{Re}(z\lambda(x)) = \operatorname{Re} |\lambda(x)| = |\lambda(x)|$,

also $|\lambda(x)| = |u(zx)| \leq \|u\|_{\operatorname{op}} \|zx\| = \|u\|_{\operatorname{op}} \|x\|$.

Wir folgern, dass $\|\lambda\|_{\text{op}} \leq \|u\|_{\text{op}}$ und somit $\|\psi_E(\lambda)\|_{\text{op}} = \|u\|_{\text{op}} = \|\lambda\|_{\text{op}}$. Also ist ψ_E eine lineare Isometrie. Gegeben $u \in (E_{\mathbb{R}})'$ ist

$$\lambda: E \rightarrow \mathbb{C}, \quad x \mapsto u(x) - iu(ix)$$

stetig und reell linear. Weiter ist für jedes $x \in E$

$$\lambda(ix) = u(ix) - iu(i^2x) = u(ix) + iu(x) = i(u(x) - iu(ix)) = i\lambda(x);$$

die reell lineare Abbildung λ ist daher komplex linear. Per Konstruktion ist $\psi_E(\lambda) = \text{Re} \circ \lambda = u$, also ψ_E surjektiv. \square

Beweis von Satz 16.1 wenn $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Nach Lemma 16.5 ist $u := \operatorname{Re} \circ \lambda \in (F_{\mathbb{R}})'$ mit $\|u\|_{\text{op}} = \|\lambda\|_{\text{op}}$. Nach dem reellen Fall von Satz 16.1 gibt es ein $U \in (E_{\mathbb{R}})'$ derart, dass $u = U|_F$ und $\|U\|_{\text{op}} = \|u\|_{\text{op}}$. Nach Lemma 16.5 gibt es ein $\Lambda \in E'$ derart, dass $\operatorname{Re} \circ \Lambda = U$. Da die Funktionale $\Lambda|_F$ und λ in F' den gleichen Realteil

$$\operatorname{Re} \circ \Lambda|_F = U|_F = u = \operatorname{Re} \circ \lambda$$

besitzen, ist $\Lambda|_F = \psi_F^{-1}(u) = \lambda$. Schließlich ist $\|\Lambda\|_{\text{op}} = \|U\|_{\text{op}} = \|u\|_{\text{op}} = \|\lambda\|_{\text{op}}$. \square

Folgerung 17.1

Es sei $(E, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum. Dann gibt es für jedes $x \in E$ ein $\lambda \in E'$ derart, dass

$$\|\lambda\|_{\text{op}} \leq 1 \quad \text{und} \quad \lambda(x) = \|x\|.$$

Beweis. Ist $x = 0$, so leistet $\lambda := 0 \in E'$ das Gewünschte. Ist $x \neq 0$, so ist

$$\alpha: \mathbb{K}x \rightarrow \mathbb{K}, \quad zx \mapsto z\|x\| \quad \text{für } z \in \mathbb{K}$$

eine bijektive lineare Abbildung und eine Isometrie (somit stetig mit $\|\alpha\|_{\text{op}} \leq 1$), da

$$|\alpha(zx)| = |z\|x\|| = |z| \|x\| = \|zx\| \quad \text{für alle } z \in \mathbb{K}.$$

Nach dem Hahn-Banachschen Fortsetzungssatz existiert ein $\lambda \in E'$ mit $\|\lambda\|_{\text{op}} = \|\alpha\|_{\text{op}} \leq 1$ derart, dass $\lambda|_{\mathbb{K}x} = \alpha$, somit $\lambda(x) = \alpha(x) = \|x\|$. \square

Definition 17.2

Es sei X eine Menge und M eine Menge von Abbildungen $f: X \rightarrow Y_f$. Man sagt, dass M **die Punkte von X trennt**, wenn für alle $x \neq y$ in X ein $f \in M$ existiert mit $f(x) \neq f(y)$.

Bemerkung 17.3

Ist E ein \mathbb{K} -Vektorraum und M eine Menge von linearen Abbildungen $\lambda: E \rightarrow E_\lambda$ in Vektorräume E_λ , so sind äquivalent:

- (a) M trennt die Punkte von E ;
- (b) Für jedes $x \in E$ mit $x \neq 0$ existiert ein $\lambda \in M$ mit $\lambda(x) \neq 0$.

Gilt (a), so gibt es für $x \in E$ mit $x \neq 0 =: y$ ein $\lambda \in M$ mit $\lambda(x) \neq \lambda(0) = 0$. Gilt (b) und sind $x, y \in E$ mit $x \neq y$, so ist $x - y \neq 0$. Es gibt also ein $\lambda \in M$ mit

$$\lambda(x - y) \neq 0.$$

Da $\lambda(x - y) = \lambda(x) - \lambda(y)$, folgt $\lambda(x) \neq \lambda(y)$. \square

Folgerung 17.4

Für jeden normierten Raum $(E, \|\cdot\|)$ trennt E' die Punkte von E .

Beweis. Ist $x \in E \setminus \{0\}$, so existiert nach Folgerung 17.1 ein $\lambda \in E'$ mit $\lambda(x) = \|x\| \neq 0$. \square

Definition 17.5

Ist $(E, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum und $f: [a, b] \rightarrow E$ stetig, so nennt man ein $x \in E$ ein **schwaches Integral von f** , wenn

$$(\forall \lambda \in E') \quad \lambda(x) = \int_a^b \lambda(f(t)) dt \quad \text{in } \mathbb{K}.$$

Bemerkung 17.6

Das schwache Integral x von f ist eindeutig, wenn es existiert.

Ist nämlich auch $y \in E$ ein solches, so gilt

$$(\forall \lambda \in E') \quad \lambda(x) = \int_a^b \lambda(f(t)) dt = \lambda(y)$$

und somit $x = y$, da E' die Punkte von E trennt. Wir können daher $\int_a^b f(t) dt := x$ setzen (wenn existent).

Das schwache Integral $\int_a^b f(t) dt \in E$ ist also eindeutig dadurch festgelegt, dass

$$(\forall \lambda \in E') \quad \lambda \left(\int_a^b f(t) dt \right) = \int_a^b \lambda(f(t)) dt. \quad (1)$$

Lemma 17.7 (Integralabschätzung)

Sei $(E, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum. Besitzt eine stetige Funktion $f: [a, b] \rightarrow E$ ein schwaches Integral, so gilt

$$\left\| \int_a^b f(t) dt \right\| \leq \int_a^b \|f(t)\| dt. \quad (2)$$

Beweis. Sei $x := \int_a^b f(t) dt \in E$. Nach Folgerung 17.1 existiert ein $\lambda \in E'$ derart, dass

$$\lambda(x) = \|x\|.$$

Da $\lambda(x)$ reell und nicht-negativ ist, schließen wir im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

$$\|x\| = \lambda(x) = |\lambda(x)| = \left| \int_a^b \lambda(f(t)) dt \right| \leq \int_a^b \underbrace{|\lambda(f(t))|}_{\leq \|\lambda\|_{\text{op}} \|f(t)\| \leq \|f(t)\|} dt$$

mit der üblichen Integralabschätzung für Riemannintegrale. Ist $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, gilt analog

$$\lambda(x) = \operatorname{Re}(\lambda(x)) = |\operatorname{Re}(\lambda(x))| \leq \left| \int_a^b \operatorname{Re}(\lambda(f(t))) dt \right| \leq \int_a^b |\operatorname{Re}(\lambda(f(t)))| dt \leq \int_a^b |\lambda(f(t))| dt \leq \int_a^b \|f(t)\| dt. \quad \square$$

Bemerkung 17.8

Es sei $f: [a, b] \rightarrow E$ eine Funktion mit $\lambda \circ f \in \mathcal{L}^1([0, 1], \mu)$ für jedes $\lambda \in E'$, wobei μ die Einschränkung des Lebesgue-Borel-Maßes auf $[a, b]$ ist. Dann gibt es analog höchstens ein $\int_a^b f(t) dt \in E$ mit (1). Ist zudem $\|\cdot\| \circ f: [a, b] \rightarrow [0, \infty[$ Borel-messbar (z.B. f Borel-messbar), so gilt (2), mit gleichem Beweis.

Ist $(E, \|\cdot\|)$ ein Banachraum, so existiert übrigens für jede stetige Funktion $f: [a, b] \rightarrow E$ ein schwaches Integral; man kann es als Grenzwert einer Folge Riemannscher Summen konstruieren.

§18 Faktorräume normierter Räume

Dieses Kapitel setzt §14 fort.

Satz 18.1

Ist $(E, \|\cdot\|_E)$ ein normierter Raum und $F \subseteq E$ ein abgeschlossener Untervektorraum, so definiert

$$\|x + F\| := \inf\{\|x + y\|_E : y \in F\}$$

eine Norm auf E/F , die sogenannte **Quotientennorm**. Diese macht die kanonische Abbildung $q: E \rightarrow E/F$ zu einer stetigen linearen Abbildung mit $\|q\|_{\text{op}} \leq 1$. Ist $(E, \|\cdot\|_E)$ ein Banachraum, so auch $(E/F, \|\cdot\|)$.

Beweis. Ist $x \in E$ mit $\|x + F\| = 0$, so existiert für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein $y_n \in F$ derart, dass

$$\|x + y_n\|_E \leq \frac{1}{n}.$$

Dann gilt $x + y_n \rightarrow 0$ und somit

$$y_n = (x + y_n) - x \rightarrow -x$$

für $n \rightarrow \infty$. Da F abgeschlossen ist, folgt $-x \in F$ und somit $x \in F$; also ist $x + F = F = 0_{E/F}$.

Sei nun $x \in E$ und $z \in \mathbb{K}$. Ist $z = 0$, so ist

$$0 \leq \|z(x + F)\| = \|zx + F\| = \|0 + F\| \leq \|0 + y\|_E = 0$$

mit $y := 0 \in F$, also $\|z(x + F)\| = 0 = 0\|x + F\|$. Ist $z \neq 0$, so durchläuft zy für $y \in F$ alle Punkte von F . Somit ist

$$\begin{aligned} \|z(x + F)\| &= \|zx + F\| = \inf\{\|zx + y\|_E : y \in F\} \\ &= \inf\{\|zx + zy\|_E : y \in F\} = \inf\{|z| \|x + y\|_E : y \in F\} \\ &= |z| \inf\{\|x + y\|_E : y \in F\} = |z| \|x + F\|. \end{aligned}$$

Gegeben $x_1, x_2 \in E$ und $\varepsilon > 0$ gibt es $y_1, y_2 \in F$ derart, dass

$$\|x_j + y_j\|_E \leq \|x_j + F\| + \varepsilon \quad \text{für } j \in \{1, 2\}.$$

Somit ist

$$\begin{aligned}
\|(x_1 + F) + (x_2 + F)\| &= \|(x_1 + x_2) + F\| \leq \|(x_1 + x_2) + y_1 + y_2\|_E \\
&\leq \|x_1 + y_1\|_E + \|x_2 + y_2\|_E \\
&\leq \|x_1 + F\| + \|x_2 + F\| + 2\varepsilon.
\end{aligned}$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt

$$\|(x_1 + F) + (x_2 + F)\| \leq \|x_1 + F\| + \|x_2 + F\|.$$

Also ist $\|\cdot\|$ eine Norm auf E/F . Per Definition ist

$$\|q(x)\| = \|x + F\| \leq \|x + 0\|_E = \|x\|, \text{ also } \|q\|_{\text{op}} \leq 1.$$

Sei nun E ein Banachraum und seien $x_n \in E$ derart, dass $(x_n + F)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in E/F ist. Es existieren natürliche Zahlen $n_1 < n_2 < \dots$ derart, dass

$$(\forall n, m \geq n_k) \|(x_n + F) - (x_m + F)\| < 2^{-k};$$

insbesondere gilt

$$\|(x_{n_{k+1}} + F) - (x_{n_k} + F)\| < 2^{-k} \text{ für alle } k \in \mathbb{N}.$$

Es gibt also ein $y_{k+1} \in F$ derart, dass

$$\|x_{n_{k+1}} - x_{n_k} + y_{k+1}\|_E < 2^{-k}.$$

Wir setzen noch $y_1 := 0$. Definieren wir

$$z_k := x_{n_k} + \sum_{j=1}^k y_j$$

für $k \in \mathbb{N}$, so ist $z_k + F = x_{n_k} + F$ und

$$\|z_{k+1} - z_k\|_E = \|x_{n_{k+1}} - x_{n_k} + y_{k+1}\| < 2^{-k}.$$

Also ist $(z_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in E und folglich konvergent gegen ein $z \in E$. Da

$$\begin{aligned} \|(z + F) - (x_{n_k} + F)\| &= \|(z + F) + (z_k + F)\| = \|(z - z_k) + F\| \\ &\leq \|z - z_k\|_E \rightarrow 0 \end{aligned}$$

für $k \rightarrow \infty$, konvergiert die Teilfolge $(x_{n_k} + F)_{k \in \mathbb{N}}$, und somit auch die Cauchyfolge $(x_n + F)_{n \in \mathbb{N}}$, gegen $z + F$. \square

Bemerkung 18.2

In der Situation von Satz 18.1 gilt für alle $r > 0$

$$q(B_r^E(0)) = B_r^{E/F}(0).$$

Also ist die surjektive Abbildung q eine offene Abbildung (siehe Beweis des Offenheitssatzes) und somit eine Quotientenabbildung.

Hierbei gilt die Inklusion " \subseteq ", da $\|q\|_{\text{op}} \leq 1$. Ist $z \in B_r^{E/F}(0)$, so existiert ein $x \in E$ mit $z = q(x)$. Da $\|z\| = \|x + F\| < r$, gibt es per Definition der Quotientennorm als Infimum ein $y \in F$ mit $\|x + y\|_E < r$. Dann ist $x + y \in B_r^E(0)$ und $q(x + y) = q(x) = z$.

Satz 18.3

Gegeben einen normierten Raum $(E, \|\cdot\|_E)$ und abgeschlossenen Untervektorraum $F \subseteq E$ versehen wir E/F mit der Quotientennorm $\|\cdot\|$. Sei $q: E \rightarrow E/F$ die kanonische Abbildung und $\alpha: E \rightarrow Y$ eine stetige lineare Abbildung in einen normierten Raum $(Y, \|\cdot\|_Y)$ derart, dass $F \subseteq \ker(\alpha)$. Dann existiert genau eine stetige lineare Abbildung $\beta: E/F \rightarrow Y$ derart, dass $\beta \circ q = \alpha$. Es gilt $\|\beta\|_{\text{op}} = \|\alpha\|_{\text{op}}$.

Beweis. Nach dem Homomorphiesatz der Linearen Algebra gibt es genau eine lineare Abbildung $\beta: E/F \rightarrow Y$ mit $\beta \circ q = \alpha$.

Bemerkung 18.2 liefert

$$\beta(B_1^{E/F}(0)) = \beta(q(B_1^E(0))) = \alpha(B_1^E(0)) \subseteq \overline{B}_{\|\alpha\|_{\text{op}}}(0),$$

also $\|\beta\|_{\text{op}} \leq \|\alpha\|_{\text{op}}$. Da $\|\alpha\|_{\text{op}} = \|\beta \circ q\|_{\text{op}} \leq \|\beta\|_{\text{op}} \|q\|_{\text{op}} \leq \|\beta\|_{\text{op}}$ wegen $\|q\|_{\text{op}} \leq 1$, folgt $\|\beta\|_{\text{op}} = \|\alpha\|_{\text{op}}$. \square

Definition 19.1

Es sei $f: X \rightarrow Y$ eine Abbildung. Eine Abbildung $g: Y \rightarrow X$ mit $g \circ f = \text{id}_X$ heißt **Linksinverse** zu f . Eine Abbildung $h: Y \rightarrow X$ mit $f \circ h = \text{id}_Y$ heißt **Rechtsinverse** zu f .

Definition 19.2

Eine Abbildung $f: X \rightarrow Y$ zwischen topologischen Räumen wird eine **topologische Einbettung** genannt oder auch ein **Homöomorphismus aufs Bild**, wenn die Ko-Einschränkung

$$f|^{f(X)}: X \rightarrow f(X), \quad x \mapsto f(x)$$

ein Homöomorphismus ist; dabei ist $f(X)$ mit der von Y induzierten Topologie versehen.

Lemma 19.3

Es seien X und Y topologische Räume. Sind $f: X \rightarrow Y$ und $g: Y \rightarrow X$ stetige Abbildungen mit $g \circ f = \text{id}_X$, so ist f eine topologische Einbettung und $g|_{f(X)}: f(X) \rightarrow Y$ ein Homöomorphismus.

Beweis. Offenbar ist f injektiv, somit $f|^{f(X)}: X \rightarrow f(X)$ bijektiv und somit invertierbar. Komposition von

$$g|_{f(X)} \circ f|^{f(X)} = g \circ f = \text{id}_X$$

von rechts mit $(f|^{f(X)})^{-1}$ zeigt, dass $(f|^{f(X)})^{-1} = g|_{f(X)}$ stetig ist. Also ist $f|^{f(X)}$ ein Homöomorphismus und damit auch $(f|^{f(X)})^{-1} = g|_{f(X)}$. \square

Wann immer eine stetige lineare Abbildung eine stetige lineare Linksinverse (bzw. eine stetige lineare Rechtsinverse) besitzt, erhält man eine Zerlegung des Wertebereichs (bzw. Definitionsbereichs) als direkte Summe:

Satz 19.4

Es seien $(E, \|\cdot\|_E)$ und $(F, \|\cdot\|_F)$ normierte Räume und $\alpha: E \rightarrow F$ sowie $\beta: F \rightarrow E$ stetige lineare Abbildungen derart, dass $\beta \circ \alpha = \text{id}_E$. Dann ist α eine topologische Einbettung, $\beta|_{\alpha(E)}: \alpha(E) \rightarrow F$ ein Homöomorphismus und als normierter Raum

$$F = \alpha(E) \oplus \ker(\beta).$$

Beweis. Da $\beta \circ \alpha = \text{id}_E$, ist für alle $y \in F$

$$\beta(y - \alpha(\beta(y))) = \beta(y) - \beta(\alpha(\beta(y))) = \beta(y) - \beta(y) = 0,$$

also $y - \alpha(\beta(y)) \in \ker(\beta)$. Da

$$y = \alpha(\beta(y)) + (y - \alpha(\beta(y))),$$

folgt $F = \alpha(E) + \ker(\beta)$. Ist $y \in \alpha(E) \cap \ker(\beta)$, so existiert ein $x \in E$ mit $y = \alpha(x)$. Dann ist $0 = \beta(y) = \beta(\alpha(x)) = x$, also $\alpha(E) \cap \ker(\beta) = \{0\}$. Nach dem Vorigen gilt $F = \alpha(E) \oplus \ker(\beta)$ als Vektorraum; also ist

$$\Sigma: \alpha(E) \times \ker(\beta) \rightarrow F, (a, b) \mapsto a + b$$

ein Isomorphismus von Vektorräumen. Weiter ist Σ stetig und nach dem Vorigen ist

$$\Sigma^{-1}(y) = (\alpha(\beta(y)), y - \alpha(\beta(y)))$$

für alle $y \in F$, somit Σ^{-1} stetig. Für die ersten zwei Aussagen siehe Lemma 19.3. \square

Satz 19.5

Ist $(F, \|\cdot\|)$ ein endlich-dimensionaler normierter Raum, so gilt:

- (a) Jeder Isomorphismus $\phi: \mathbb{K}^n \rightarrow F$ von Vektorräumen ist ein topologischer Isomorphismus.
- (b) $(F, \|\cdot\|_F)$ ist ein Banachraum.
- (c) Jede lineare Abbildung $\alpha: F \rightarrow E$ in einen normierten Raum $(E, \|\cdot\|_E)$ ist stetig.
- (d) Jede Norm auf F definiert die gleiche Topologie auf F .

Beweis. (a) Es sei $\phi: \mathbb{K}^n \rightarrow F$ ein Isomorphismus von Vektorräumen. Dann ist $\|\cdot\| \circ \phi$ eine Norm auf \mathbb{K}^n . Da alle Normen auf \mathbb{K}^n äquivalent sind (siehe Analysis 2), definiert diese die übliche Topologie auf \mathbb{K}^n (also die gleiche wie die Maximum-Norm $\|\cdot\|_\infty$). Offenbar ist ϕ ein isometrischer Isomorphismus von $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\| \circ \phi)$ nach $(F, \|\cdot\|)$, also ein Homöomorphismus.

(b) Wir wissen, dass \mathbb{K}^n vollständig ist. Nach (a) ist $F \cong \mathbb{K}^n$, also auch F vollständig.

(c) Es sei ϕ wie in (a). Da alle Normen auf \mathbb{K}^n äquivalent sind,

gibt es ein $C > 0$ derart, dass

$$\|\cdot\|_\infty \leq C\|\cdot\| \circ \phi.$$

Für alle $x = (x_1, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^n x_j e_j \in \mathbb{K}^n$ gilt nun

$$\|\alpha(\phi(x))\|_E = \left\| \sum_{j=1}^n x_j \alpha(e_j) \right\|_E \leq \sum_{j=1}^n |x_j| \|\alpha(e_j)\|_E \leq K \|x\|_\infty$$

mit $K := \sum_{j=1}^n \|\alpha(e_j)\|_E$, also $\|\alpha(\phi(x))\|_E \leq KC\|\phi(x)\|$. Also ist $\|\alpha(y)\|_E \leq KC\|y\|$ für alle $y \in F$.

(d) Ist auch $\|\cdot\|'$ eine Norm auf F , so ist nach (c) id_F als Abbildung von $(F, \|\cdot\|)$ nach $(F, \|\cdot\|')$ und umgekehrt stetig, also id_F ein Homöomorphismus. \square

Satz 19.6

Ist $(E, \|\cdot\|_E)$ ein normierter Raum, so gilt:

- (a) Jeder endlich-dimensionale Untervektorraum $F \subseteq E$ ist komplementiert.
- (b) Jeder abgeschlossene Untervektorraum $F \subseteq E$ von endlicher Kodimension ist komplementiert (d.h. $\dim_{\mathbb{K}}(E/F) < \infty$).

Beweis. (a) Es sei $\phi = (\phi_1, \dots, \phi_n): F \rightarrow \mathbb{K}^n$ ein Isomorphismus. Nach dem Hahn-Banachschen Fortsetzungssatz gibt es für jedes $k \in \{1, \dots, n\}$ ein $\lambda_k \in E'$ mit $\lambda_k|_F = \phi_k$. Dann ist

$$\beta := \phi^{-1} \circ (\lambda_1, \dots, \lambda_n): E \rightarrow F$$

eine stetige lineare Abbildung derart, dass $\beta|_F = \text{id}_F$, also $\beta \circ j = \text{id}_F$ mit der Inklusion $j: F \rightarrow E$. Nach Satz 19.4 (a) ist $F = j(F)$ in E komplementiert, mit $\ker(\beta)$ als topologischem Komplement.

(b) Wir versehen E/F mit der Quotientennorm $\|\cdot\|$; es sei $q: E \rightarrow E/F$, $x \mapsto x + F$ die kanonische Quotientenabbildung. Wir wählen eine Basis b_1, \dots, b_n für E/F und $v_1, \dots, v_n \in E$ derart, dass $q(v_k) = b_k$ für alle $k \in \{1, \dots, n\}$. Es sei $\beta: E/F \rightarrow E$ die lineare Abbildung

$$\sum_{k=1}^n x_k b_k \mapsto \sum_{k=1}^n x_k v_k$$

für $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{K}$. Nach Satz 19.5 (c) ist β stetig. Nun ist $q \circ \beta = \text{id}_{E/F}$, da

$$(q \circ \beta) \left(\sum_{k=1}^n x_k b_k \right) = q \left(\sum_{k=1}^n x_k v_k \right) = \sum_{k=1}^n x_k q(v_k) = \sum_{k=1}^n x_k b_k.$$

Also ist β eine stetige lineare Rechtsinverse für q , somit $\beta(E/F)$ ein topologisches Komplement zu $\ker(q) = F$, nach Satz 19.4 (b).

Den folgenden Satz beweisen wir in der Übung.

Satz 19.7

Es sei $(E, \|\cdot\|_E)$ ein normierter Raum. Für einen Untervektorraum $F \subseteq E$ sind äquivalent:

- (a) F ist in E komplementiert;
- (b) Die Inklusion $j: F \rightarrow E$ hat eine stetige lineare Linksinverse;
- (c) Die kanonische Quotientenabbildung $q: E \rightarrow E/F$ hat eine stetige lineare Rechtsinverse;
- (d) Es existiert eine stetige lineare Abbildung $p: E \rightarrow E$ derart, dass $p^2 = p$ und $p(E) = F$;
- (e) Es existiert eine stetige lineare Abbildung $p: E \rightarrow E$ derart, dass $p^2 = p$ und $F = \ker(p)$.

In (d) und (e) ist p also ein **Idempotent** in der Algebra $\mathcal{L}(E)$.

Beachten Sie, dass mit p auch $\text{id}_E - p$ ein Idempotent ist; es gilt $\ker(\text{id}_E - p) = p(E)$ und $(\text{id}_E - p)(E) = \ker(p)$.

Jedem normierten Raum $(E, \|\cdot\|_E)$ können wir seinen Dualraum

$$E' := \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$$

zuordnen, versehen mit der Operatornorm; dieser ist ein Banachraum (siehe Definition 3.2). Ist $\alpha: E \rightarrow F$ eine stetige lineare Abbildung in einen normierten Raum $(F, \|\cdot\|_F)$, so nennt man

$$\alpha' := \mathcal{L}(\alpha, \mathbb{K}): F' \rightarrow E', \quad \lambda \mapsto \lambda \circ \alpha$$

die **duale lineare Abbildung**. Diese ist stetig mit $\|\alpha'\|_{\text{op}} \leq \|\alpha\|_{\text{op}}$ (vgl. Beispiel 4.3). Offensichtlich ist

$$\text{id}'_E = \text{id}_{E'}; \tag{1}$$

weiter gilt

$$(\beta \circ \alpha)' = \alpha' \circ \beta' \tag{2}$$

für jede stetige lineare Abbildung $\beta: F \rightarrow Y$ in einen normierten Raum $(Y, \|\cdot\|_Y)$, denn $(\beta \circ \alpha)'(\lambda) = (\lambda \circ \beta) \circ \alpha = \alpha'(\beta'(\lambda))$.

Satz 20.1

Es sei $\alpha: E \rightarrow F$ eine stetige lineare Abbildung zwischen normierten Räumen $(E, \|\cdot\|_E)$ und $(F, \|\cdot\|_F)$. Dann gilt:

- (a) Ist α ein topologischer Isomorphismus, so auch α' .
- (b) Ist α ein isometrischer Isomorphismus, so auch α' .
- (c) Es gilt $\|\alpha'\|_{\text{op}} = \|\alpha\|_{\text{op}}$.

Beweis. (a) Da $\text{id}_{E'} = (\text{id}_E)' = (\alpha^{-1} \circ \alpha)' = \alpha' \circ (\alpha^{-1})'$ und $\text{id}_{F'} = (\text{id}_F)' = (\alpha \circ \alpha^{-1})' = (\alpha^{-1})' \circ \alpha'$, ist α' invertierbar mit $(\alpha')^{-1} = (\alpha^{-1})'$; dies ist eine stetige lineare Abbildung.

(b) Nach (a) ist α' ein topologischer Isomorphismus mit $(\alpha')^{-1} = (\alpha^{-1})'$. Da $\|\alpha'\|_{\text{op}} \leq \|\alpha\|_{\text{op}} \leq 1$ und $\|(\alpha')^{-1}\|_{\text{op}} = \|(\alpha^{-1})'\|_{\text{op}} \leq \|\alpha^{-1}\|_{\text{op}} \leq 1$, ist α' eine Isometrie.

(c) Wir wissen, dass $\|\alpha'\|_{\text{op}} \leq \|\alpha\|_{\text{op}}$. Für jedes $x \in E$ mit $\|x\|_E \leq 1$ existiert nach Folgerung 17.1 ein $\lambda \in F'$ mit $\|\lambda\|_{\text{op}} \leq 1$ und $\lambda(\alpha(x)) = \|\alpha(x)\|_F$. Dann ist

$$\|\alpha(x)\|_F = |\lambda(\alpha(x))| = |\alpha'(\lambda)(x)| \leq \|\alpha'(\lambda)\|_{\text{op}} \leq \|\alpha'\|_{\text{op}}.$$

Übergang zum Supremum in x liefert $\|\alpha\|_{\text{op}} \leq \|\alpha'\|_{\text{op}}$.

Definition 20.2

Es sei $(E, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum. Für $M \subseteq E$ definieren wir den **Annulator** von M in E' als

$$M^\perp := \{\lambda \in E' : (\forall x \in M) \lambda(x) = 0\}.$$

Lineare Isometrien nennen wir fortan auch **isometrische Einbettungen**.

Satz 20.3

Ist $(E, \|\cdot\|_E)$ ein normierter Raum und $F \subseteq E$ ein abgeschlossener Untervektorraum, so sei $j: F \rightarrow E, x \mapsto x$ die Inklusionsabbildung und $q: E \rightarrow E/F, x \mapsto x + F$ die kanonische Quotientenabbildung. Versehen wir F mit der induzierten Norm und E/F mit der Quotientennorm, so gilt:

- (a) $q': (E/F)' \rightarrow E'$ ist eine isometrische Einbettung.
- (b) $j': E' \rightarrow F'$ ist eine Quotientenabbildung.
- (c) $\text{im}(q') = \ker(j') = F^\perp$.

Beweis. (a) Nach Satz 18.3 ist $\|\lambda \circ q\|_{\text{op}} = \|\lambda\|_{\text{op}}$.

(b) Für jedes $\lambda \in F'$ existiert nach dem Satz von Hahn-Banach ein $\Lambda \in E'$ mit $\lambda = \Lambda|_F = \Lambda \circ j = j'(\Lambda)$ und $\|\Lambda\|_{\text{op}} = \|\lambda\|_{\text{op}}$. Also ist j' surjektiv. Ist $\lambda \in B_1^{F'}(0)$, so ist $\|\Lambda\|_{\text{op}} = \|\lambda\|_{\text{op}} < 1$, also

$$B_1^{F'}(0) \subseteq j'(B_1^{E'}(0)).$$

Wegen $\|j'\|_{\text{op}} = \|j\|_{\text{op}} \leq 1$ ist zudem $j'(B_1^{E'}(0)) \subseteq B_1^{F'}(0)$, also $j'(B_1^{E'}(0)) = B_1^{F'}(0)$. Somit ist die surjektive Abbildung j' eine offene Abbildung (siehe Beweis des Offenheitssatzes) und somit eine Quotientenabbildung.

(c) Ist $\lambda \in \text{im}(q')$, so ist $\lambda = \mu \circ q$ für ein $\mu \in (E/F)'$, somit $\lambda|_F = \mu \circ q|_F = 0$, also $\lambda \in F^\perp$. Ist $\lambda \in F^\perp$, so existiert nach Satz 18.3 ein $\beta \in (E/F)'$ mit $\lambda = \beta \circ q = q'(\beta)$, also ist $\beta \in \text{im}(q')$. Also ist $\text{im}(q') = F^\perp$. Gegeben $\lambda \in E'$ ist $j'(\lambda) = \lambda \circ j = \lambda|_F$ genau dann 0, wenn $\lambda \in F^\perp$. Also ist $\ker(j') = F^\perp$. \square

Sind $\alpha: E_1 \rightarrow E_2$ und $\beta: E_2 \rightarrow E_3$ lineare Abbildungen, so nennt man

$$\{0\} \rightarrow E_1 \xrightarrow{\alpha} E_2 \xrightarrow{\beta} E_3 \rightarrow \{0\}$$

eine kurze exakte Sequenz, wenn α injektiv ist, β surjektiv und $\text{im}(\alpha) = \ker(\beta)$.

Bemerkung 20.4

Offenbar ist

$$\{0\} \rightarrow F \xrightarrow{j} E \xrightarrow{q} E/F \rightarrow \{0\}$$

eine kurze exakte Sequenz in der Situation von Satz 20.3; der Satz zeigt, dass auch die Sequenz

$$\{0\} \rightarrow (E/F)' \xrightarrow{q'} E' \xrightarrow{j'} F' \rightarrow \{0\}$$

exakt ist.

Definition 20.5

Sei $(E, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum. Für jede Teilmenge $N \subseteq E'$ definieren wir den **Annulator** von N in E als

$$N_{\perp} := \{x \in E : (\forall \lambda \in N) \lambda(x) = 0\} = \bigcap_{\lambda \in N} \ker(\lambda).$$

Bemerkung 20.6

Offenbar ist N_{\perp} ein abgeschlossener Untervektorraum von E . Laut Lemma 3.3 ist die Punktauswertung

$$\text{ev}_x: E' \rightarrow \mathbb{K}, \quad \lambda \mapsto \lambda(x)$$

für jedes $x \in E$ stetig und linear. Sei $M \subseteq E$. Da

$$M^{\perp} = \bigcap_{x \in M} \ker(\text{ev}_x),$$

ist M^{\perp} ein abgeschlossener Untervektorraum von E' .

Offensichtlich gilt $M_1 \subseteq M_2 \Rightarrow M_1^\perp \supseteq M_2^\perp$ und $N_1 \subseteq N_2 \Rightarrow (N_1)^\perp \supseteq (N_2)^\perp$ für Teilmengen $M_j \subseteq E$ bzw. $N_j \subseteq E'$.

Satz 20.7

In jedem normierten Raum $(E, \|\cdot\|)$ gilt:

- (a) Für jeden abgeschlossenen Untervektorraum $F \subseteq E$ ist $F = (F^\perp)^\perp$.
- (b) Für jede Teilmenge $M \subseteq E$ ist

$$(M^\perp)^\perp = \overline{\text{span}_{\mathbb{K}}(M)}$$

gleich dem Abschluss des linearen Spans.

Beweis. (a) Per Definition ist $F \subseteq (F^\perp)^\perp$. Sei $q: E \rightarrow E/F$ die kanonische Quotientenabbildung. Ist $x \in E$ mit $x \notin F$, so ist $q(x) \neq 0$. Nach Folgerung 17.4 existiert ein $\lambda \in (E/F)'$ mit $\lambda(q(x)) \neq 0$. Dann ist $\lambda \circ q \in F^\perp$ und $(\lambda \circ q)(x) \neq 0$, also $x \notin (F^\perp)^\perp$.

(b) Es ist $(M^\perp)_\perp$ ein abgeschlossener Untervektorraum von E und $M \subseteq (M^\perp)_\perp$, also

$$F := \overline{\text{span}_{\mathbb{K}}(M)} \subseteq (M^\perp)_\perp.$$


Aus $M \subseteq F$ folgt $M^\perp \supseteq F^\perp$ und daraus $(M^\perp)_\perp \subseteq (F^\perp)_\perp = F$, wobei schließlich (a) benutzt wurde. Also ist $F = (M^\perp)_\perp$. \square

Der folgende Satz knüpft an Satz 20.1 an.

Satz 20.8

Es sei $\alpha: E \rightarrow F$ eine stetige lineare Abbildung zwischen normierten Räumen $(E, \|\cdot\|_E)$ und $(F, \|\cdot\|_F)$.

- (a) Ist α eine topologische Einbettung, so ist $\alpha': F' \rightarrow E'$ eine Quotientenabbildung.
- (b) Ist α eine Quotientenabbildung, so ist α' eine topologische Einbettung.
- (c) Hat α dichtes Bild, so ist α' injektiv.

Beweis. (a) Es ist $\alpha = j \circ \alpha|_{\alpha(E)}$, wobei $\alpha|_{\alpha(E)}$ ein topologischer Isomorphismus ist $j: \alpha(E) \rightarrow F$ die Inklusion. Nach Satz 20.3 (b) 

ist j' eine Quotientenabbildung; nach Satz 20.1 (a) ist $(\alpha|_{\alpha(E)})'$ ein topologischer Isomorphismus. Also ist

$$\alpha' = (\alpha|_{\alpha(E)})' \circ j'$$

eine Quotientenabbildung (z.B. da stetig, surjektiv und offen).

(b) Nach Satz 18.3 gibt es eine eindeutige stetige lineare Abbildung

$$\beta: E / \ker(\alpha) \rightarrow F$$

mit $\beta \circ q = \alpha$, wobei $q: E \rightarrow E / \ker(\alpha)$ die kanonische Quotientenabbildung ist. Die Abbildung β ist surjektiv, da α surjektiv ist; β ist injektiv, da $0 = \beta(q(x)) = \alpha(x)$ impliziert, dass $x \in \ker(\alpha)$ und somit $q(x) = 0$. Weiter ist β eine offene Abbildung, weil wegen der Surjektivität von q

$$\beta(U) = \beta(q(q^{-1}(U))) = (\beta \circ q)(q^{-1}(U)) = \alpha(q^{-1}(U))$$

in F offen ist für jede offene Teilmenge $U \subseteq E / \ker(\alpha)$. Also ist β ein topologischer Isomorphismus. Nach Satz 20.3 (a) ist q' eine topologische Einbettung; da β' ein topologischer Isomorphismus ist, auch $\alpha' = q' \circ \beta'$ eine topologische Einbettung.

(c) Ist $\lambda \in \ker(\alpha')$, so ist $\lambda \circ \alpha = 0$, also $\lambda|_{\alpha(E)} = 0$ auf der dichten Teilmenge $\alpha(E) \subseteq F$. Für jedes $y \in F$ gibt es eine Folge $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\alpha(E)$ mit $y_n \rightarrow y$; es folgt¹

$$\lambda(y) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda(y_n) = 0.$$

Also ist $\lambda = 0$, somit $\ker(\alpha') = \{0\}$, also α' injektiv. \square

Bemerkung 20.9

Bilden wir $(E, \|\cdot\|)$ auf $(E', \|\cdot\|_{\text{op}})$ ab und $\alpha \in \mathcal{L}(E, F)$ auf $\alpha' \in \mathcal{L}(F', E')$, so erhalten wir wegen (1) und (2) einen kontravarianten Funktor $(\cdot)'$ von der Kategorie der normierten Räume und stetigen linearen Abbildungen in die Kategorie der Banachräume und stetigen linearen Abbildungen.

¹Wir werden später sehen: Sind $f, g: X \rightarrow Y$ Abbildungen zwischen topologischen Räumen, $f|_D = g|_D$ für eine dichte Teilmenge $D \subseteq X$ und Y Hausdorffsch, so folgt $f = g$.

§21 Bidual und Auswertungshomomorphismus

Wir setzen die in §20 begonnene Dualitätstheorie fort.

Lemma 21.1

Ist $(E, \|\cdot\|_E)$ ein normierter Raum, so ist für jedes $x \in E$ die Punktauswertung

$$\text{ev}_x: E' \rightarrow \mathbb{K}, \quad \lambda \mapsto \lambda(x)$$

ein stetiges lineares Funktional auf $(E', \|\cdot\|_{\text{op}})$, mit

$$\|\text{ev}_x\|_{\text{op}} = \|x\|_E.$$

Es ist also $\text{ev}_x \in (E')'$.

Beweis. Wir wissen aus Lemma 3.3, dass ev_x stetig und linear ist mit $\|\text{ev}_x\|_{\text{op}} \leq \|x\|_E$. Nach Folgerung 17.1 existiert ein $\lambda \in E'$ mit $\|\lambda\|_{\text{op}} \leq 1$ und $\lambda(x) = \|x\|_E$. Also ist

$$\|\text{ev}_x\|_{\text{op}} \geq |\lambda(x)| = \|x\|_E$$

und somit $\|\text{ev}_x\|_{\text{op}} = \|x\|_E$. \square

Definition 21.2

Ist $(E, \|\cdot\|_E)$ ein normierter Raum, so nennt man $E'' := (E')'$ den **Bidual** von E . Man versieht E'' mit der Operatornorm

$$\|\cdot\|_{\text{op}}: E'' \rightarrow [0, \infty[, \quad \phi \mapsto \|\phi\|_{\text{op}} = \sup\{|\phi(\lambda)| : \lambda \in E' \text{ mit } \|\lambda\|_{\text{op}} \leq 1\};$$

diese macht E'' zu einem Banachraum. Die Abbildung

$$\eta_E: E \rightarrow E'', \quad x \mapsto \text{ev}_x$$

heißt **Auswertungshomomorphismus**. Ist $\alpha: E \rightarrow F$ eine stetige lineare Abbildung in einen normierten Raum $(F, \|\cdot\|_F)$, so schreiben wir

$$\alpha'' := (\alpha')': E'' \rightarrow F'', \quad \phi \mapsto \phi \circ \alpha'.$$

Es ist also $\alpha''(\phi)(\lambda) = \phi(\alpha'(\lambda)) = \phi(\lambda \circ \alpha)$ für alle $\phi \in E''$ und $\lambda \in F'$.

Satz 21.3

Ist $(E, \|\cdot\|_E)$ ein normierter Raum, so gilt:

- (a) Der Auswertungshomomorphismus $\eta_E: E \rightarrow E''$ ist eine lineare isometrische Einbettung.
- (b) Für jede stetige lineare Abbildung $\alpha: E \rightarrow F$ in einen normierten Raum $(F, \|\cdot\|_F)$ gilt $\|\alpha''\|_{\text{op}} = \|\alpha\|_{\text{op}}$ und $\alpha'' \circ \eta_E = \eta_F \circ \alpha$.
- (c) Es ist $(\text{id}_E)'' = \text{id}_{E''}$. Für alle normierten Räume $(F, \|\cdot\|_F)$ und $(Y, \|\cdot\|_Y)$ und alle stetigen linearen Abbildungen $\alpha: E \rightarrow F$ sowie $\beta: F \rightarrow Y$ gilt $(\beta \circ \alpha)'' = \beta'' \circ \alpha''$.

Wir haben also ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} E'' & \xrightarrow{\alpha''} & F'' \\ \eta_E \uparrow & & \uparrow \eta_F \\ E & \xrightarrow{\alpha} & F. \end{array}$$

Beweis. (a) Für alle $x, y \in E$ und $s, t \in \mathbb{K}$ gilt für alle $\lambda \in E'$

$$\eta_E(tx+sy)(\lambda) = \lambda(tx+sy) = t\lambda(x)+s\lambda(y) = (t\eta_E(x)+s\eta_E(y))(\lambda);$$

es ist also $\eta_E(tx + sy) = t\eta_E(x) + s\eta_E(y)$. Somit ist η_E linear. Da $\|\eta_E(x)\|_{\text{op}} = \|\text{ev}_x\|_{\text{op}} = \|x\|_E$ nach Lemma 21.1, ist η_E eine isometrische Einbettung.

(b) Zweimalige Anwendung von Satz 20.1 (c) zeigt, dass

$\|\alpha''\|_{\text{op}} = \|(\alpha')'\|_{\text{op}} = \|\alpha'\|_{\text{op}} = \|\alpha\|_{\text{op}}$. Für alle $x \in E$ gilt für alle $\lambda \in F'$

$$\begin{aligned}(\alpha'' \circ \eta_E)(x)(\lambda) &= \alpha''(\eta_E(x))(\lambda) = (\eta_E(x) \circ \alpha')(\lambda) \\ &= \eta_E(x)(\alpha'(\lambda)) = \eta_E(x)(\lambda \circ \alpha) \\ &= (\lambda \circ \alpha)(x) = \lambda(\alpha(x)) \\ &= \eta_F(\alpha(x))(\lambda) = (\eta_F \circ \alpha)(x)(\lambda);\end{aligned}$$

also ist $(\alpha'' \circ \eta_E)(x) = (\eta_F \circ \alpha)(x)$ und somit $\alpha'' \circ \eta_E = \eta_F \circ \alpha$.

(c) Es ist $(\text{id}_E)'' = ((\text{id}_E)')' = (\text{id}_{E'})' = \text{id}_{E''}$ und

$(\beta \circ \alpha)'' = ((\beta \circ \alpha)')' = (\alpha' \circ \beta')' = \beta'' \circ \alpha''$, wobei Formel (1)

bzw. (2) aus §20 je zweimal benutzt wurde. \square

Als eine erste Anwendung zeigen wir die folgende Tatsache, die manchmal "Satz von Mackey" genannt wird.

Satz 21.4

In einem normierten Raum $(E, \|\cdot\|_E)$ sind für jede Teilmenge $M \subseteq E$ die folgenden Eigenschaften äquivalent:

- (a) M ist beschränkt, d.h. $\sup\{\|x\|_E : x \in M\} < \infty$;
- (b) M ist **schwach beschränkt**, d.h. das Bild $\lambda(M) \subseteq \mathbb{K}$ ist beschränkt für jedes $\lambda \in E'$.

Beweis. Ist M beschränkt und K das Supremum in (a), so ist für alle $\lambda \in E'$

$$|\lambda(x)| \leq \|\lambda\|_{\text{op}} \|x\|_E \leq \|\lambda\|_{\text{op}} K \text{ für alle } x \in M,$$

also $\lambda(M)$ beschränkt.

Ist M schwach beschränkt, so ist die Teilmenge $\eta_E(M)$ von E'' punktweise beschränkt, denn für alle $\lambda \in E'$ ist

$$\{\eta_E(x)(\lambda) : x \in M\} = \{\lambda(x) : x \in M\} = \lambda(M)$$

in \mathbb{K} beschränkt. Da $(E', \|\cdot\|_{\text{op}})$ ein Banachraum ist, ist nach dem

Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit die Menge $\eta_E(M)$ eine beschränkte Teilmenge von $(E'', \|\cdot\|_{\text{op}})$, also

$$L := \sup\{\|\eta_E(x)\|_{\text{op}} : x \in M\} < \infty.$$

Da η_E eine Isometrie ist, ist $\|\eta_E(x)\|_{\text{op}} = \|x\|_E$ für alle $x \in M$, somit $\sup\{\|x\|_E : x \in M\} = L < \infty$, also M beschränkt. \square

Für die Allgemeinbildung sei bemerkt:

Bemerkung 21.5

Bilden wir einen normierten Raum $(E, \|\cdot\|_E)$ auf $(E'', \|\cdot\|_{\text{op}})$ ab und eine stetige lineare Abbildung $\alpha: E \rightarrow F$ zwischen normierten Räumen auf α'' , so erhalten wir nach Satz 21.3 (c) einen kovarianten Funktor $(\cdot)''$ von der Kategorie der normierten Räume und stetigen linearen Abbildungen in die Unterkategorie der Banachräume und stetigen linearen Abbildungen. Nach Satz 21.3 (b) ist $\eta: E \mapsto \eta_E$ eine natürliche Transformation vom Funktor id auf der Kategorie der normierten Räume zum Funktor $(\cdot)''$ (betrachtet als Funktor in die Kategorie der normierten Räume, also von links komponiert mit dem Vergiß-Funktor, der die Vollständigkeit vergisst).

Definition 22.1

Ein Banachraum $(E, \|\cdot\|_E)$ heißt **reflexiv**, wenn der Auswertungshomomorphismus $\eta_E: E \rightarrow E''$ ein isometrischer Isomorphismus ist.

Da η_E immer eine isometrische Einbettung ist, ist E also genau dann reflexiv, wenn η_E surjektiv ist.

Beispiel 22.2

Für jedes $p \in]1, \infty[$ ist ℓ^p reflexiv.

Beweis. Sei q der konjugierte Exponent. Wir wissen, dass

$$\beta: \ell^p \rightarrow (\ell^q)', \quad \beta(x)(y) := \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n$$

für $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^p$, $y = (y_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^q$ ein isometrischer Isomorphismus ist. Einen analogen Isomorphismus haben wir für vertauschte Rollen von p und q ; seine Umkehrabbildung ist

der isometrische Isomorphismus

$$\alpha: (\ell^p)' \rightarrow \ell^q, \quad \lambda \mapsto (\lambda(e_n))_{n \in \mathbb{N}}$$

mit den Standard-Einheitsvektoren e_n . Dann ist auch

$\alpha': (\ell^q)' \rightarrow (\ell^p)''$ ein isometrischer Isomorphismus und somit auch

$\alpha' \circ \beta: \ell^p \rightarrow (\ell^p)''$. Wir brauchen nur noch zeigen, dass

$\alpha' \circ \beta = \eta_{\ell^p}$. Hierzu sei $x \in \ell^p$ und $\lambda \in (\ell^p)'$. Wir erhalten

$$\begin{aligned} \alpha'(\beta(x))(\lambda) &= (\beta(x) \circ \alpha)(\lambda) = \beta(x)\left((\lambda(e_n))_{n \in \mathbb{N}}\right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} x_n \lambda(e_n) = \lambda\left(\sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n\right) \\ &= \lambda(x) = \eta_{\ell^p}(x)(\lambda), \end{aligned}$$

so dass also $\alpha'(\beta(x)) = \eta_{\ell^p}(x)$ und somit $\alpha' \circ \beta = \eta_{\ell^p}$. \square

Beispiel 22.3

c_0 ist nicht reflexiv.

Da $(c_0)' \cong \ell^1$, ist nämlich $(c_0)'' \cong (\ell^1)' \cong \ell^\infty$ als normierter Raum.

Da c_0 separabel ist aber ℓ^∞ nicht, kann c_0 nicht zu ℓ^∞ isomorph sein und somit auch nicht zu $(c_0)''$.

Beispiel 22.4

ℓ^1 ist nicht reflexiv.

Wäre nämlich ℓ^1 reflexiv, so wäre $(\ell^1)''$ separabel, weil ja $(\ell^1)'' \cong \ell^1$ wäre und ℓ^1 separabel ist. Folglich wäre $(\ell^1)'$ separabel, nach Aufgabe 20 auf Aufgabenblatt 6. Jedoch ist $(\ell^1)' \cong \ell^\infty$ nicht separabel, Widerspruch.

Satz 22.5

Ist ein Banachraum $(E, \|\cdot\|_E)$ reflexiv, so ist auch $(E', \|\cdot\|_{\text{op}})$ reflexiv.

Beweis. Der Auswertungshomomorphismus $\eta_E: E \rightarrow E''$ ist ein isometrischer Isomorphismus und somit auch die duale lineare Abbildung $(\eta_E)': E''' \rightarrow E'$. Wir zeigen, dass

$$\eta_{E'} \circ (\eta_E)' = \text{id}_{E'''} . \quad (1)$$

Gilt dies, so liefert Komposition von rechts mit der inversen Abbildung von $(\eta_E)'$, dass $\eta_{E'} = ((\eta_E)')^{-1}$ ist, ein isometrischer Isomorphismus. Seien $\theta \in E'''$ und $\phi \in E''$. Setzen wir

$x := (\eta_E)^{-1}(\phi)$, so ist also $\phi = \eta_E(x)$. Nun ist

$$\begin{aligned}(\eta_{E'} \circ (\eta_E)')(\theta)(\phi) &= \eta_{E'}((\eta_E)'(\theta))(\phi = \eta_{E'}(\theta \circ \eta_E)(\phi)) \\ &= \phi(\theta \circ \eta_E) = \eta_E(x)(\theta \circ \eta_E) \\ &= (\theta \circ \eta_E)(x) = \theta(\eta_E(x)) = \theta(\phi),\end{aligned}$$

also $(\eta_{E'} \circ (\eta_E)')(\theta) = \theta$, also $\eta_{E'} \circ (\eta_E)' = \text{id}_{E''}$.

Bemerkung 22.6

Auch die Umkehrung gilt: Ein Banachraum E ist genau dann reflexiv, wenn E' reflexiv ist (siehe Werners Buch).

Also ist z.B. $\ell^\infty \cong (\ell^1)'$ nicht reflexiv, da ℓ^1 nicht reflexiv ist. N.B.

Bemerkung 22.7

Sind zwei Banachräume E und F topologisch isomorph, so ist E genau dann reflexiv, wenn F es ist.

Beweis. Ist $\alpha: E \rightarrow F$ ein topologischer Isomorphismus, so auch $\alpha'': E'' \rightarrow F''$ und es gilt $\alpha'' \circ \eta_E = \eta_F \circ \alpha$. Also ist η_E genau dann ein topologischer Isomorphismus, wenn η_F es ist. \square

§23 Stetige Fortsetzung dicht definierter Operatoren

Folgende simple Tatsache wird später auf Abbildungen in Hausdorffräume verallgemeinert:

Lemma 23.1

Es seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume und $f, g: X \rightarrow Y$ stetige Abbildungen. Gilt $f|_D = g|_D$ für eine dichte Teilmenge $D \subseteq X$, so ist $f = g$.

Beweis. Für jedes $x \in X$ gibt es eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in D mit $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$. Da f und g stetig sind, folgt

$$f(x) = f\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{f(x_n)}_{=g(x_n)} = g\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n\right) = g(x). \quad \square$$

Stetige lineare Abbildungen auf dichten Unterräumen lassen sich in eindeutiger Weise stetig linear fortsetzen.

Satz 23.2

Es sei $(E, \|\cdot\|_E)$ ein normierter Raum, $(F, \|\cdot\|_F)$ ein Banachraum und $D \subseteq E$ ein dichter Untervektorraum. Dann gibt es für jede stetige lineare Abbildung $\alpha: D \rightarrow F$ genau eine stetige lineare Abbildung $\beta: E \rightarrow F$ derart, dass $\beta|_D = \alpha$. Es gilt $\|\alpha\|_{\text{op}} = \|\beta\|_{\text{op}}$.

Bemerkung 23.3

Bezeichnet $j: D \rightarrow E$ die Inklusionsabbildung, so ist also die Einschränkungabbildung

$$\mathcal{L}(F, j): \mathcal{L}(E, F) \rightarrow \mathcal{L}(D, F), \quad \beta \mapsto \beta \circ j = \beta|_D$$

ein isometrischer Isomorphismus.

Lemma 23.4

Ist $\alpha: E \rightarrow F$ eine stetige lineare Abbildung zwischen normierten Räumen und $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in E , so ist $(\alpha(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in F .

Beweis. Gegeben $\varepsilon > 0$ gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ derart, dass

$$(\forall n, m \geq N) \quad \|x_n - x_m\|_E \leq \frac{\varepsilon}{\|\alpha\|_{\text{op}} + 1}.$$

Dann gilt für alle $n, m \geq N$ also

$$\|\alpha(x_n) - \alpha(x_m)\|_F = \|\alpha(x_n - x_m)\|_F \leq \|\alpha\|_{\text{op}} \|x_n - x_m\|_E \leq \frac{\|\alpha\|_{\text{op}}}{\|\alpha\|_{\text{op}} + 1} \varepsilon \leq \varepsilon.$$

Somit ist $(\alpha(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge. \square .

Beweis von Satz 23.2. Existenz von β . Gegeben $x \in E$ gibt es eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in D derart, dass $x_n \rightarrow x$ in E . Dann ist $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in E , somit auch in D . Da α stetig und linear ist, ist nach Lemma 23.4 also $(\alpha(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in F und somit konvergent, da F vollständig ist. Wir setzen

$$\beta(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha(x_n).$$

Dann ist $\beta(x)$ wohldefiniert, denn ist auch $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in D mit Limes x , so auch die Folge $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit den Folgengliedern

$$x_1, y_1, x_2, y_2, \dots$$

Da $(\alpha(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ und $(\alpha(y_n))_{n \in \mathbb{N}}$ Teilfolgen von $(\alpha(z_n))_{n \in \mathbb{N}}$ sind, ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha(z_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha(y_n).$$

Ist $x \in D$, so können wir insbesondere die durch $x_n := x$ gegebene konstante Folge wählen und erhalten

$$\beta(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha(x) = \alpha(x).$$

Also ist $\beta|_D = \alpha$. Sind $x, y \in E$ und $s, t \in \mathbb{K}$, so wählen wir Folgen $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in D mit $x_n \rightarrow x$ und $y_n \rightarrow y$. Dann ist $(tx_n + sy_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in D mit $tx_n + sy_n \rightarrow tx + sy$. Nun gilt

$$\alpha(tx_n + sy_n) = t\alpha(x_n) + s\alpha(y_n)$$

für alle $n \in \mathbb{N}$; für $n \rightarrow \infty$ folgt

$$\beta(tx + sy) = t\beta(x) + s\beta(y).$$

Also ist β linear. Ist $x \in E$ und $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in D mit $x_n \rightarrow x$, so gilt $\|\alpha(x_n)\|_F \leq \|\alpha\|_{\text{op}} \|x_n\|_E$ für $n \rightarrow \infty$. Weiter gilt $\|x_n\|_E \rightarrow \|x\|_E$, folglich

$$\begin{aligned}\|\beta(x)\|_F &= \left\| \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha(x_n) \right\|_F = \lim_{n \rightarrow \infty} \|\alpha(x_n)\|_F \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \|\alpha\|_{\text{op}} \|x_n\|_E = \|\alpha\|_{\text{op}} \|x\|_E.\end{aligned}$$

Es ist also β stetig mit $\|\beta\|_{\text{op}} \leq \|\alpha\|_{\text{op}}$. Da $\beta|_D = \alpha$, gilt auch $\|\beta\|_{\text{op}} \geq \|\alpha\|_{\text{op}}$ und somit Gleichheit.

Eindeutigkeit: Siehe Lemma 23.1. \square

§24 Existenz schwacher Integrale in Banachräumen

Als ein Beispiel für stetiges Fortsetzen auf den Abschluss konstruieren wir schwache Integrale in Banachräumen.

Satz 24.1

Es seien $(E, \|\cdot\|_E)$ ein Banachraum und $a < b$ reelle Zahlen. Dann existiert für jede stetige Funktion $f: [a, b] \rightarrow E$ das schwache Integral $\int_a^b f(t) dt$ in E .

Im Beweis versehen wir den Vektorraum $C([a, b], E)$ aller stetigen Funktionen $f: [a, b] \rightarrow E$ mit der Supremumsnorm,

$$\|f\|_\infty := \sup\{\|f(t)\|_E : t \in [a, b]\};$$

diese macht aus $C([a, b], E)$ einen Banachraum (was wir aber nicht benutzen). Als Hilfsmittel für den Beweis betrachten wir den Untervektorraum $C([a, b], E)_{\text{fin}}$ aller stetigen Funktionen $f: [a, b] \rightarrow E$ derart, dass der Spann

$$\text{span}_{\mathbb{K}}(f([a, b]))$$

des Bildes ein endlich-dimensionaler Untervektorraum von E ist. 

Für jedes $f \in C([a, b], \mathbb{K})$ und jeden Vektor $v \in E$ ist

$$f \otimes v: [a, b] \rightarrow E, \quad t \mapsto f(t)v \quad (1)$$

eine solche Funktion; der Spann ihres Bildes ist in $\mathbb{K}v$ enthalten.

Lemma 24.2

Für jeden normierten Raum $(E, \|\cdot\|_E)$ und alle $a < b$ gilt:

- (a) $C([a, b], E)_{\text{fin}}$ ist dicht in $C([a, b], E)$ bzgl. $\|\cdot\|_\infty$.
- (b) Es ist $C([a, b], E)_{\text{fin}} = \text{span}_{\mathbb{K}}\{f \otimes v: f \in C([a, b], \mathbb{K}), v \in E\}$.

Beweis. (a) Sei $f \in C([a, b], E)$ und $\varepsilon > 0$. Da f als stetige Funktion auf einem kompakten Intervall gleichmäßig stetig ist, gibt es ein $\delta > 0$ derart, dass

$$(\forall s, t \in [a, b]) \quad |s - t| < \delta \Rightarrow \|f(s) - f(t)\|_E < \varepsilon/2.$$

Wir wählen $n \in \mathbb{N}$ so groß, dass $(b - a)/n < \delta$ und betrachten die äquidistante Unterteilung $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ von $[a, b]$ mit

$$t_k := a + \frac{k}{n}(b - a) \quad \text{für } k \in \{0, 1, \dots, n\}.$$

Wir definieren $g: [a, b] \rightarrow E$ stückweise via

$$g(t) := f(t_{k-1}) + \frac{t - t_{k-1}}{t_k - t_{k-1}}(f(t_k) - f(t_{k-1}))$$

für $k \in \{1, \dots, n\}$ und $t \in [t_{k-1}, t_k]$. Es ist g eine stückweise affin-lineare Funktion, die den Polygonzug durch die Punkte $f(t_0), f(t_1), \dots, f(t_n)$ durchläuft; also ist $g \in C([a, b], E)_{\text{fin}}$. Für k und t wie zuvor sind $f(t_{k-1})$, $f(t)$ und $f(t_k)$ in $B_{\varepsilon/2}^E(f(t_k))$ enthalten, also auch die Verbindungsstrecke von $f(t_{k-1})$ und $f(t_k)$ und somit auch $g(t)$. Also ist

$$\|f(t) - g(t)\|_E \leq \text{diam } B_{\varepsilon/2}^E(f(t_k)) \leq \varepsilon$$

und somit $\|f - g\|_{\infty} \leq \varepsilon$.

(b) Gegeben $f \in C([a, b], E)_{\text{fin}}$ ist $F := \text{span}_{\mathbb{K}}(f([a, b]))$ endlich-dimensional. Sei b_1, \dots, b_n eine Basis für F . Für alle $y \in F$ ist

$$y = \sum_{k=1}^n b_k^*(y) b_k$$

mit eindeutigen Zahlen $b_k^*(y) \in \mathbb{K}$, die offenbar linear von y

abhängen. Man nennt $b_1^*, \dots, b_n^* \in F'$ die zu b_1, \dots, b_n duale Basis; es gilt $b_j^*(b_k) = \delta_{j,k}$ (Kronecker-delta) für alle $j, k \in \{1, \dots, n\}$. Für jedes $t \in [a, b]$ ist dann also

$$f(t) = \sum_{k=1}^n b_k^*(f(t)) b_k$$

und somit $f = \sum_{k=1}^n (b_k^* \circ f) \otimes b_k$. \square

Beweis von Satz 24.1. Jedes $f \in C([a, b], E)_{\text{fin}}$ hat in E ein schwaches Integral. Schreiben wir nämlich $f = \sum_{k=1}^n f_k \otimes v_k$ mit $f_k \in C([a, b], \mathbb{K})$ und $v_k \in E$ (siehe Lemma 24.2 (b)) und setzen

$$z := \sum_{k=1}^n \left(\int_a^b f_k(t) dt \right) v_k,$$

so gilt für jedes $\lambda \in E'$

$$\lambda(z) = \sum_{k=1}^n \lambda(v_k) \int_a^b f_k(t) dt = \int_a^b \lambda \left(\sum_{k=1}^n f_k(t) v_k \right) dt = \int_a^b \lambda(f(t)) dt;$$

also ist $z = \int_a^b f(t) dt$. Da das schwache Integral eindeutig ist,

erhalten wir eine Funktion

$$I: C([a, b], E)_{\text{fin}} \rightarrow E, \quad f \mapsto \int_a^b f(t) dt.$$

Diese ist linear, weil für alle $f, g \in C([a, b], E)_{\text{fin}}$ und $r, s \in \mathbb{K}$

$$\begin{aligned} \lambda(rI(f) + sI(g)) &= r\lambda(I(f)) + s\lambda(I(g)) \\ &= r \int_a^b \lambda(f(t)) dt + s \int_a^b \lambda(g(t)) dt \\ &= \int_a^b \lambda(rf(t) + sg(t)) dt \end{aligned}$$

für alle $\lambda \in E'$ gilt und somit somit

$rI(f) + sI(g) = \int_a^b (rf + sg)(t) dt = I(rf + sg)$ ist. Die Integralabschätzung (Lemma 17.7) liefert

$$\|I(f)\|_E \leq \int_a^b \|f(t)\|_E dt \leq \int_a^b \|f\|_{\infty} dt = (b - a)\|f\|_{\infty}.$$

Also ist I stetig mit $\|I\|_{\text{op}} \leq b - a$. Da $C([a, b], E)_{\text{fin}}$ nach Lemma 24.2 (a) in $C([a, b], E)$ dicht ist, liefert Satz 23.2 eine

stetige lineare Fortsetzung

$$\tilde{I}: C([a, b], E) \rightarrow E$$

von I . Gegeben $f \in C([a, b], E)$ finden wir eine Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $C([a, b], E)_{\text{fin}}$, die gleichmäßig gegen f konvergiert. Für jedes $\lambda \in E'$ gilt dann

$$\begin{aligned}\lambda(\tilde{I}(f)) &= \lambda\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{I}(f_n)\right) = \lambda\left(\lim_{n \rightarrow \infty} I(f_n)\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda(I(f_n)) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \lambda(f_n(t)) dt = \int_a^b \lambda(f(t)) dt,\end{aligned}$$

da $\lambda \circ f_n$ gleichmäßig gegen $\lambda \circ f$ konvergiert wegen

$$\|\lambda \circ f - \lambda \circ f_n\|_{\infty} = \|\lambda \circ (f - f_n)\|_{\infty} \leq \|\lambda\|_{\text{op}} \|f - f_n\|_{\infty}.$$

Also ist $\tilde{I}(f) = \int_a^b f(t) dt$ in E . \square

Bemerkung 24.3

Man kann zeigen, dass $C([a, b], E)_{\text{fin}}$ mit der bilinearen Abbildung

$$C([a, b], \mathbb{K}) \times E \rightarrow C([a, b], E)_{\text{fin}}, \quad (f, v) \mapsto f \otimes v$$

das Tensorprodukt der \mathbb{K} -Vektorräume $C([a, b], \mathbb{K})$ und E ist, also

$$C([a, b], E)_{\text{fin}} = C([a, b], \mathbb{K}) \otimes_{\mathbb{K}} E$$

(siehe Kapitel 26).

Definition 25.1

Eine **Vervollständigung** eines normierten Raums $(E, \|\cdot\|_E)$ ist ein Banachraum $(\tilde{E}, \|\cdot\|)$, zusammen mit einer linearen Isometrie $\theta: E \rightarrow \tilde{E}$, deren Bild $\theta(E)$ in \tilde{E} dicht ist.

Vervollständigungen existieren und sind eindeutig bis auf Isomorphie.

Satz 25.2

Jeder normierte Raum $(E, \|\cdot\|_E)$ hat eine Vervollständigung. Sind $(F_1, \|\cdot\|_{F_1}, \theta_1)$ und $(F_2, \|\cdot\|_{F_2}, \theta_2)$ Vervollständigungen von E , so existiert ein isometrischer Isomorphismus $\alpha: F_1 \rightarrow F_2$ derart, dass $\alpha \circ \theta_1 = \theta_2$.

Beweis. Der Abschluss $\tilde{E} := \overline{\eta_E(E)}$ von $\eta_E(E)$ in E'' ist ein Banachraum bezüglich der Operatornorm und

$$\theta := \eta_E|_{\tilde{E}} : E \rightarrow \tilde{E}$$

ist eine lineare Isometrie mit dichtem Bild. Also ist $(\tilde{E}, \|\cdot\|_{\text{op}}, \theta)$ eine Vervollständigung für E .

Sind $(F_j, \|\cdot\|_{F_j}, \theta_j)$ Vervollständigungen von E für $j \in \{1, 2\}$, so ist $\theta_j|_{\theta_j(E)} : E \rightarrow \theta_j(E)$ ein isometrischer Isomorphismus, also

$$\alpha_1 := \theta_2 \circ (\theta_1|_{\theta_1(E)})^{-1} : \theta_1(E) \rightarrow F_2$$

eine lineare Isometrie. Nach Satz 23.2 existiert eine stetige lineare Fortsetzung $\beta_1 : F_1 \rightarrow F_2$ von α_1 . Analog existiert eine stetige lineare Fortsetzung $\beta_2 : F_2 \rightarrow F_1$ von $\alpha_2 := \theta_1 \circ (\theta_2|_{\theta_2(E)})^{-1}$. Dann ist sowohl $\beta_2 \circ \beta_1$ als auch id_{F_1} eine stetige lineare Fortsetzung von $\text{id}_{\theta_1(E)}$, also $\beta_2 \circ \beta_1 = \text{id}_{F_1}$ nach Lemma 23.1. Analog ist $\beta_1 \circ \beta_2 = \text{id}_{F_2}$, somit β_1 invertierbar mit $(\beta_1)^{-1} = \beta_2$. Da $\|\beta_j\|_{\text{op}} = \|\alpha_j\|_{\text{op}} \leq 1$ für $j \in \{1, 2\}$, ist β_1 ein isometrischer Isomorphismus. \square

Satz 25.3

Zu jedem normierten Raum $(E, \|\cdot\|_E)$ existiert eine Vervollständigung $(\tilde{E}, \|\cdot\|, \theta)$ derart, dass E ein dichter Untervektorraum von \tilde{E} ist und $\theta: E \rightarrow \tilde{E}$ die Inklusionsabbildung $x \mapsto x$.

Die von \tilde{E} auf E induzierte Norm ist also die auf E gegebene.

Beweis. Nach Satz 25.2 existiert eine Vervollständigung $(F, \|\cdot\|_F, \Theta)$ von $(E, \|\cdot\|_E)$. Nach Folgerung 15.13 existiert eine Menge X mit $X \cap E = \emptyset$, welche die gleiche Mächtigkeit wie $F \setminus \Theta(E)$ besitzt; es gibt also eine bijektive Abbildung

$$\phi: X \rightarrow F \setminus \Theta(E).$$

Wir setzen $\tilde{E} := E \cup X$ als Menge. Dann ist die Abbildung

$$\alpha: \tilde{E} \rightarrow F, \quad x \mapsto \begin{cases} \Theta(x) & \text{wenn } x \in E \\ \phi(x) & \text{wenn } x \in X \end{cases}$$

bijektiv. Wir geben \tilde{E} die eindeutig festgelegte Vektorraumstruktur, die α zu einem Isomorphismus von Vektorräumen macht. Dann ist

$\|\cdot\| := \|\cdot\|_F \circ \alpha$ eine Norm auf \tilde{E} , die α zu einem isometrischen Isomorphismus macht; also ist $(\tilde{E}, \|\cdot\|)$ ein Banachraum. Da $\alpha(E) = \Theta(E)$ ein dichter Untervektorraum von F ist, ist die Teilmenge E von \tilde{E} ein dichter Untervektorraum. Da $\alpha|_E = \Theta$ auch für die ursprüngliche Vektorraumstruktur auf E eine injektive lineare Abbildung war, also ein Isomorphismus auf das Bild $\Theta(E)$, stimmt diese mit der Untervektorraumstruktur überein. Zudem ist $\|x\| = \|\Theta(x)\|_F = \|x\|_E$ für alle $x \in E$. Also ist $(\tilde{E}, \|\cdot\|)$ eine Vervollständigung von E , mit der Inklusionsabbildung $\theta: E \rightarrow \tilde{E}$.

§26 Exkurs: Tensorprodukte und Funktionenräume

Tensorprodukte werden u.a. in Algebra, Differentialgeometrie und Funktionalanalysis benutzt. In diesem Abschnitt geben wir eine kurze Einführung in Tensorprodukte von Vektorräumen.

Definition 26.1

Es seien E und F Vektorräume über einem Körper K . Ein K -Vektorraum T , zusammen mit einer bilinearen Abbildung $\tau: E \times F \rightarrow T$, heißt ein **Tensorprodukt** von E und F , wenn für jede bilineare Abbildung $\beta: E \times F \rightarrow Y$ in einen K -Vektorraum Y genau eine lineare Abbildung $\bar{\beta}: T \rightarrow Y$ existiert derart, dass $\bar{\beta} \circ \tau = \beta$.

Satz 26.2

Für alle K -Vektorräume E und F existiert ein Tensorprodukt (T, τ) von E und F . Ist auch (S, σ) ein solches, so existiert ein Isomorphismus $\alpha: T \rightarrow S$ von K -Vektorräumen derart, dass $\alpha \circ \tau = \sigma$.

Freie K -Vektorräume sind mitunter ein nützliches Hilfsmittel.

Definition 26.3 (Freier K -Vektorraum über X)

Ist X eine Menge, so schreiben wir

$$K^{(X)}$$

für die Menge aller Funktionen $f: X \rightarrow K$ derart, dass $\{x \in X: f(x) \neq 0\}$ endlich ist. Dann ist $K^{(X)}$ ein Untervektorraum des K -Vektorraums K^X aller Funktionen $f: X \rightarrow K$. Für $x \in X$ schreiben wir \hat{x} für die Funktion

$$\hat{x}: X \rightarrow K, \quad y \mapsto \begin{cases} 1 & \text{wenn } x = y \\ 0 & \text{wenn } x \neq y. \end{cases}$$

Offenbar ist $\hat{x} \in K^{(X)}$.

Wiederholung: Eine maximale linear unabhängige Teilmenge B eines K -Vektorraums E wird **Basis** von E genannt.

Für jede Basis B von E ist $\text{span}_K(B) = E$.

Gäbe es nämlich ein $v \in E$ außerhalb des Spanns, so wäre auch $B \cup \{v\}$ linear unabhängig (Widerspruch!). In der Tat: Ist

$$tv + t_1b_1 + \cdots + t_nb_n = 0$$

mit $n \in \mathbb{N}$, paarweise verschiedenen b_1, \dots, b_n aus B und Skalaren $t, t_1, \dots, t_n \in K$, so muss $t = 0$ sein (da wir sonst nach v auflösen könnten und v in $\text{span}_K(B)$ wäre) und folglich $t_1 = \cdots = t_n = 0$.

Ist B eine Basis von E , so ist jedes $v \in E$ von der Form

$$v = \sum_{b \in B} t_b b$$

für genau ein $(t_b)_{b \in B} \in K^{(B)}$.

Da $v \in \text{span}_K(B)$, ist v eine solche Linearkombination. Ist $\sum_{b \in B} t_b b = \sum_{b \in B} s_b b$, so ist $\sum_{b \in B} (t_b - s_b) b = 0$, folglich $t_b - s_b = 0$ für alle B (wegen der linearen Unabhängigkeit von B) und somit $t_b = s_b$.

Beispiel 26.4

$B := \{\hat{x} : x \in X\}$ ist eine Basis für $K^{(X)}$.

Ist $\Phi \subseteq X$ eine endliche Teilmenge und

$$\sum_{x \in \Phi} t_x \hat{x} = 0$$

mit $t_x \in K$ für $x \in \Phi$, so haben wir an der Stelle $y \in \Phi$

$$0 = \sum_{x \in \Phi} t_x \hat{x}(y) = t_y.$$

Also sind alle $t_y = 0$ und somit $\{\hat{x} : x \in \Phi\}$ linear unabhängig. Folglich ist B linear unabhängig. Für jedes $f \in K^{(X)}$ mit $f \notin B$ ist

$$f = \sum_{x \in X} f(x) \hat{x} \in \text{span}_K(B), \text{ also } 1 \cdot f + \sum_{x \in X} (-f(x)) \hat{x} = 0.$$

Somit ist $B \cup \{f\}$ nicht linear unabhängig. Folglich ist B maximal.

Lemma 26.5

Ist $B \subseteq E$ eine Basis und $(y_b)_{b \in B}$ eine Familie von Vektoren eines K -Vektorraums F , so gibt es genau eine lineare Abbildung $\alpha: E \rightarrow F$ derart, dass $\alpha(b) = y_b$ für alle $b \in B$.

Beweis: Es ist notwendig $\alpha\left(\sum_{b \in B} t_b b\right) = \sum_{b \in B} t_b y_b$ für alle $(t_b)_{b \in B} \in K^{(B)}$ und umgekehrt definiert dies ein α mit den gewünschten Eigenschaften. \square

Beweis von Satz 26.2. Es sei B eine Basis von E und C eine Basis von F . Wir zeigen, dass $T := K^{(B \times C)}$ ein Tensorprodukt von E und F ist zusammen mit der bilinearen Abbildung

$$\tau: E \times F \rightarrow K^{(B \times C)}, \quad \left(\sum_{b \in B} t_b b, \sum_{c \in C} s_c c \right) \mapsto \sum_{(b,c) \in B \times C} t_b s_c (b,c)^\wedge.$$

Beachten Sie, dass $\tau(b, c) = (b, c)^\wedge$ für alle $(b, c) \in B \times C$ (dadurch ist die bilineare Abbildung τ auch festgelegt). Ist $\beta: E \times F \rightarrow Y$ eine bilineare Abbildung in einen K -Vektorraum Y , so gibt es nach Beispiel 26.4 und Lemma 26.5 genau eine

lineare Abbildung $\bar{\beta}: T \rightarrow Y$ derart, dass

$$\bar{\beta}((b, c)^\wedge) = \beta(b, c) \quad \text{für alle } (b, c) \in B \times C.$$

Für alle $x = \sum_{b \in B} t_b b \in E$ und $y = \sum_{c \in C} s_c c \in F$ gilt dann

$$\bar{\beta}(\tau(x, y)) = \sum_{(b, c) \in B \times C} t_b s_c \underbrace{\bar{\beta}(\tau(b, c))}_{=\beta(b, c)} = \beta(x, y).$$

Also ist $\bar{\beta} \circ \tau = \beta$. Ist auch $\alpha: T \rightarrow Y$ eine lineare Abbildung mit $\alpha \circ \tau = \beta$, so ist

$$\beta(b, c) = \alpha(\tau(b, c)) = \alpha((b, c)^\wedge)$$

für alle $(b, c) \in B \times C$ und somit $\alpha = \bar{\beta}$ wegen der Eindeutigkeit in Lemma 26.5. Also ist (T, τ) ein Tensorprodukt von E und F . Ist auch (S, σ) ein solches, so gibt es eindeutige lineare Abbildungen

$$\bar{\tau}: S \rightarrow T \quad \text{und} \quad \bar{\sigma}: T \rightarrow S$$

derart, dass $\bar{\tau} \circ \sigma = \tau$ und $\bar{\sigma} \circ \tau = \sigma$. Dann sind $\bar{\tau} \circ \bar{\sigma}$ und id_T lineare Abbildungen von T nach T derart, dass

$$(\bar{\tau} \circ \bar{\sigma}) \circ \tau = \bar{\tau} \circ \sigma = \tau$$

und

$$\text{id}_T \circ \tau = \tau.$$

Wegen der Eindeutigkeitsaussage für die induzierte lineare Abbildung in der Definition des Tensorprodukts (T, τ) ist also $\bar{\tau} \circ \bar{\sigma} = \text{id}_T$. Analog ist $\bar{\sigma} \circ \bar{\tau} = \text{id}_S$, also $\bar{\sigma}: T \rightarrow S$ ein Isomorphismus von Vektorräumen mit $(\bar{\sigma})^{-1} = \bar{\tau}$. \square

Definition 26.6

Wir schreiben künftig $E \otimes_K F$ für ein Tensorprodukt von E und F und

$$\otimes: E \times F \rightarrow E \otimes_K F, \quad (x, y) \mapsto x \otimes y$$

für die zugehörige bilineare Abbildung. Elemente der Form $x \otimes y$ werden **elementare Tensoren** genannt. Wir benötigen Tensorprodukte nur für $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ und schreiben einfach $E \otimes F$ statt $E \otimes_{\mathbb{K}} F$.

Warnung: In der Algebra schreibt man abweichend eher $M \otimes N := M \otimes_{\mathbb{Z}} N$ für \mathbb{Z} -Moduln M und N .

Bemerkung 26.7

Ist B eine Basis von E und C eine Basis von F , so bilden die Vektoren $b \otimes c$ für $(b, c) \in B \times C$ eine Basis für $E \otimes F$.

Die obige Konstruktion liefert dies für ein Tensorprodukt und da alle kanonisch isomorph zueinander sind, gilt dies in allen.

Definition 26.8

Gegeben lineare Abbildungen $\alpha: E_1 \rightarrow F_1$ und $\beta: E_2 \rightarrow F_2$ zwischen \mathbb{K} -Vektorräumen ist

$$E_1 \times E_2 \rightarrow F_1 \otimes F_2, \quad (x, y) \mapsto \alpha(x) \otimes \beta(y)$$

eine bilineare Abbildung; also existiert genau eine lineare Abbildung

$$\alpha \otimes \beta: E_1 \otimes E_2 \rightarrow F_1 \otimes F_2$$

derart, dass $(\alpha \otimes \beta)(x \otimes y) = \alpha(x) \otimes \beta(y)$ für alle $(x, y) \in E_1 \times E_2$.

Satz 26.9

Sind α und β injektiv, so auch $\alpha \otimes \beta$. Sind α und β surjektiv, so auch $\alpha \otimes \beta$.

Beweis. Ist B eine Basis für E_1 , so ist $\alpha(B)$ eine linear unabhängige Teilmenge von F_1 und lässt sich zu einer Basis B' von F_1 ergänzen (in Beispiel 15.10 kann man M ersetzen durch die Menge aller linear unabhängigen Teilmengen S , die eine gegebene linear unabhängige Teilmenge enthalten). Ist C eine Basis für E_2 , so ergänzen wir ebenso $\beta(C)$ zu einer Basis C' von F_2 . Dann bilden die Vektoren $x \otimes y$ für $(x, y) \in B' \times C'$ eine Basis von $F_1 \otimes F_2$. Folglich sind die Vektoren

$$(\alpha \otimes \beta)(b \otimes c) = \alpha(b) \otimes \beta(c)$$

für $(b, c) \in B \times C$ linear unabhängig. Gegeben $z \in \ker(\alpha \otimes \beta)$ gibt es eindeutige $t_{b,c} \in \mathbb{K}$, die alle bis auf endlich viele verschwinden, mit $z = \sum_{(b,c) \in B \times C} t_{b,c} b \otimes c$. Aus

$$0 = (\alpha \otimes \beta)(z) = \sum_{(b,c) \in B \times C} t_{b,c} \alpha(b) \otimes \beta(c)$$

folgt $t_{b,c} = 0$ für alle $(b, c) \in B \times C$, somit $z = 0$. Also ist $\alpha \otimes \beta$ injektiv.

Sind α und β surjektiv, so finden wir für jedes $(y_1, y_2) \in F_1 \times F_2$ ein $(x_1, x_2) \in E_1 \times E_2$ mit $\alpha(x_1) = y_1$ und $\beta(x_2) = y_2$, also

$$(\alpha \otimes \beta)(x_1 \otimes x_2) = y_1 \otimes y_2.$$

Das Bild von $\alpha \otimes \beta$ enthält also alle elementaren Tensoren. Da das Bild ein Untervektorraum ist, enthält es den Spann der Menge der elementaren Tensoren, also $F_1 \otimes F_2$. \square

Ist X ein topologischer Raum und $(E, \|\cdot\|_E)$ ein normierter Raum, so schreiben wir $C(X, E)_{\text{fin}} \subseteq C(X, E)$ für den Untervektorraum aller stetigen Funktionen $f: X \rightarrow E$ derart, dass $\text{span}_{\mathbb{K}}(f(X))$ endlich-dimensional ist. Für $f \in C(X, \mathbb{K})$ und $v \in E$ schreiben wir vorübergehend $f(\cdot)v$ für die Funktion

$$f(\cdot)v: X \rightarrow E, \quad x \mapsto f(x)v.$$

Beispiel 26.10

Es ist $C(X, E)_{\text{fin}}$ ein Tensorprodukt von $C(X, \mathbb{K})$ und E ,
zusammen mit der bilinearen Abbildung

$$C(X, \mathbb{K}) \times E \rightarrow C(X, E)_{\text{fin}}, \quad (f, v) \mapsto f(\cdot)v.$$

Es gibt nämlich genau eine lineare Abbildung

$$\alpha: C(X, \mathbb{K}) \otimes E \rightarrow C(X, E)_{\text{fin}}$$

derart, dass $\alpha(f \otimes v) = f(\cdot)v$ für alle $(f, v) \in C(X, \mathbb{K}) \times E$. Wie in Lemma 24.2 (b) sieht man, dass α surjektiv ist. Sei nun $z \in \ker(\alpha)$. Wir wählen eine Basis B für $C(X, \mathbb{K})$, eine Basis C für E und schreiben $z = \sum_{(b,c) \in B \times C} t_{b,c} b \otimes c$, wobei die $t_{b,c} \in \mathbb{K}$ fast alle verschwinden. Dann ist also

$$0 = \sum_{(b,c) \in B \times C} t_{b,c} b(\cdot)c$$

und somit für jedes $x \in X$

$$0 = \sum_{c \in C} \left(\sum_{b \in B} t_{b,c} b(x) \right) c,$$

woraus $\sum_{b \in B} t_{b,c} b(x) = 0$ folgt für jedes $c \in C$. Für jedes $c \in C$ ist also

$$\sum_{b \in B} t_{b,c} b = 0$$

und somit $t_{b,c} = 0$ für jedes $b \in B$. Somit ist $z = 0$ und α injektiv, also bijektiv. \square

Bemerkung 26.11

Man kann also $C(X, E)_{\text{fin}} = C(X, \mathbb{K}) \otimes E$ schreiben und $f \otimes v$ statt $f(\cdot)v$ wie in §24.

Ist X eine Menge und E ein \mathbb{K} -Vektorraum, so sei E^X der Vektorraum aller Funktionen $f: X \rightarrow E$ und $(E^X)_{\text{fin}}$ der Untervektorraum

$$(E^X)_{\text{fin}} := \{f \in E^X : \text{span}_{\mathbb{K}}(f(X)) \text{ ist endlich-dimensional}\}.$$

Analog zum Vorigen sieht man, dass die durch $f \otimes v \mapsto f(\cdot)v$ eindeutig festgelegte lineare Abbildung $\mathbb{K}^X \otimes E \rightarrow (E^X)_{\text{fin}}$ eine Bijektion ist. Also gilt:

Beispiel 26.12

Es ist $(E^X)_{\text{fin}} = \mathbb{K}^X \otimes E$, zusammen mit der bilinearen Abbildung $\mathbb{K}^X \times E \rightarrow (E^X)_{\text{fin}}, (f, v) \mapsto f(\cdot)v$.

Sind X und Y topologische Räume, so ist die Abbildung

$$C(X, \mathbb{K}) \times C(Y, \mathbb{K}) \rightarrow C(X \times Y, \mathbb{K}), \quad (f, g) \mapsto ((x, y) \mapsto f(x)g(y))$$

bilinear, es gibt also eine eindeutige lineare Abbildung

$\alpha: C(X, \mathbb{K}) \otimes C(Y, \mathbb{K}) \rightarrow C(X \times Y, \mathbb{K})$ derart, dass

$\alpha(f \otimes g) = ((x, y) \mapsto f(x)g(y))$ für alle

$(f, g) \in C(X, \mathbb{K}) \times C(Y, \mathbb{K})$. Die Abbildung α ist injektiv, denn sie ist eine Einschränkung der entsprechenden Abbildung

$\beta: \mathbb{K}^X \otimes \mathbb{K}^Y \rightarrow \mathbb{K}^{X \times Y}$; es genügt also, zu zeigen, dass β injektiv ist.

Nun ist aber die lineare Abbildung

$$\Phi: \mathbb{K}^{X \times Y} \rightarrow (\mathbb{K}^Y)^X, \quad f \mapsto f^\vee$$

mit $f^\vee(x)(y) := f(x, y)$ bijektiv, da

$$\Psi: (\mathbb{K}^Y)^X \rightarrow \mathbb{K}^{X \times Y}, \quad g \mapsto g^\wedge$$

mit $g^\wedge(x, y) := g(x)(y)$ die Umkehrfunktion ist (wir benutzen also das "Exponentialgesetz" $\mathbb{K}^{X \times Y} \cong (\mathbb{K}^Y)^X$). Es genügt folglich, zu zeigen, dass $\Phi \circ \beta$ injektiv ist. Dies aber ist die Abbildung

$$\mathbb{K}^X \otimes \mathbb{K}^Y \rightarrow (\mathbb{K}^Y)^X, \quad f \otimes g \mapsto f(\cdot)g,$$

die nach der Begründung von Beispiel 26.12 injektiv ist.

Beispiel 26.13

Fortan bezeichne $f \otimes g: X \times Y \rightarrow \mathbb{K}$ die Abbildung $(x, y) \mapsto f(x)g(y)$. Nach dem Vorigen ist

$$\text{im}(\alpha) = \text{span}_{\mathbb{K}}\{f \otimes g: (f, g) \in C(X, \mathbb{K}) \times C(Y, \mathbb{K})\}$$

ein Tensorprodukt $C(X, \mathbb{K}) \otimes C(Y, \mathbb{K})$ mit der bilinearen Abbildung $C(X, \mathbb{K}) \times C(Y, \mathbb{K}) \rightarrow \text{im}(\alpha)$, $(f, g) \mapsto f \otimes g$.

Definition 26.14

Sind $(E, \|\cdot\|_E)$ und $(F, \|\cdot\|_F)$ normierte Räume, so schreiben wir

$$\mathcal{L}(E, F)_{\text{fin}} := \{\alpha \in \mathcal{L}(E, F) : \dim_{\mathbb{K}}(\alpha(E)) < \infty\} = \mathcal{L}(E, F) \cap C(E, F)_{\text{fin}}$$

für den Untervektorraum $\mathcal{L}(E, F)_{\text{fin}} \subseteq \mathcal{L}(E, F)$ der stetigen linearen Operatoren von endlichem Rang.

Beispiel 26.15

Es ist $\mathcal{L}(E, F)_{\text{fin}} = E' \otimes F$, zusammen mit der bilinearen Abbildung

$$E' \times F \rightarrow \mathcal{L}(E, F)_{\text{fin}}, \quad (\lambda, v) \mapsto \lambda(\cdot)v$$

mit $\lambda(\cdot)v: E \rightarrow F, x \mapsto \lambda(x)v$.

Die Abbildung $E' \times F \rightarrow \mathcal{L}(E, F)_{\text{fin}}, (\lambda, v) \mapsto \lambda(\cdot)v$ ist nämlich bilinear, somit gibt es genau eine lineare Abbildung

$$\alpha: E' \otimes F \rightarrow \mathcal{L}(E', F)_{\text{fin}}$$

derart, dass $\alpha(\lambda \otimes v) = \lambda(\cdot)v$ für alle $\lambda \in E'$ und $v \in F$. Wie im Beweis von Lemma 24.2 (b) sieht man, dass α surjektiv ist. Nun ist aber α eine Einschränkung der durch $f \otimes v \mapsto f(\cdot)v$ festgelegten linearen Abbildung

$$C(E, \mathbb{K}) \otimes F \rightarrow C(E, F),$$

die nach Beispiel 26.10 injektiv ist. Also ist α injektiv, somit bijektiv und ergo ein Isomorphismus von Vektorräumen. Also ist $\mathcal{L}(E, F)_{\text{fin}}$ ein Tensorprodukt mit der bilinearen Abbildung $\alpha \circ \otimes$. \square

Résumé. Wir haben Tensorprodukte über ihre universelle Eigenschaft eingeführt und folgende Beispiele kennen gelernt:

$$C(X, E)_{\text{fin}} = C(X, \mathbb{K}) \otimes E;$$

$$C(X, \mathbb{K}) \otimes C(Y, \mathbb{K}) \subseteq C(X \times Y, \mathbb{K});$$

$$\mathcal{L}(E, F)_{\text{fin}} = E' \otimes F$$

§27 Netze in der Topologie

In diesem Kapitel wiederholen und vertiefen wir Grundbegriffe der Topologie. Als einen neuen Begriff lernen wir Netze kennen und einige ihrer Anwendungen in der Topologie.

Zur Erinnerung:

Definition 27.1

Eine **Topologie** auf einer Menge X ist eine Menge \mathcal{O} von Teilmengen von X derart, dass gilt:

- (a) $\emptyset \in \mathcal{O}$ und $X \in \mathcal{O}$;
- (b) Für alle $U, V \in \mathcal{O}$ ist $U \cap V \in \mathcal{O}$;
- (c) Für jede Familie $(V_j)_{j \in J}$ von Mengen $V_j \in \mathcal{O}$ ist $\bigcup_{j \in J} V_j \in \mathcal{O}$.

Eine Teilmenge $U \subseteq X$ wird **offen** genannt, wenn $U \in \mathcal{O}$. Ist \mathcal{O} eine Topologie auf X , so nennt man (X, \mathcal{O}) einen **topologischen Raum**. Eine Teilmenge $A \subseteq X$ wird **abgeschlossen** genannt, wenn $X \setminus A$ offen ist.

Es sind also \emptyset und X offene Mengen; der Durchschnitt von zwei

(und somit endlich vielen) offenen Mengen ist offen; und beliebige Vereinigungen offener Mengen sind offen. Übergang zu Komplementen zeigt: \emptyset und X sind abgeschlossen; Vereinigungen endlich vieler abgeschlossener Mengen sind abgeschlossen; und $\bigcap_{j \in J} A_j$ ist abgeschlossen für jede Familie $(A_j)_{j \in J}$ abgeschlossener Mengen A_j mit $J \neq \emptyset$.

Definition 27.2

Ist (X, \mathcal{O}) ein topologischer Raum und $x \in X$, so nennt man eine Teilmenge $U \subseteq X$ eine **Umgebung** von x (oder x -Umgebung), wenn eine offene Teilmenge $V \subseteq X$ existiert mit $x \in V \subseteq U$. Der topologische Raum heißt **Hausdorffsch**, wenn für alle $x, y \in X$ mit $x \neq y$ eine x -Umgebung U und eine y -Umgebung V existieren mit $U \cap V = \emptyset$.

Jede x -Umgebung enthält per Definition eine offene x -Umgebung. Auch die disjunkten Umgebungen U und V der Hausdorff-Eigenschaft können daher stets offen gewählt werden.

Beispiel 27.3

Ist (X, d) ein metrischer Raum, so ist

$$\mathcal{O} := \{U \subseteq X : (\forall x \in U)(\exists \varepsilon > 0) B_\varepsilon(x) \subseteq U\}$$

eine Topologie auf X . Für alle $x \in X$ und $\varepsilon > 0$ ist $B_\varepsilon(x) \in \mathcal{O}$. Die Topologie ist Hausdorffsch, da $B_\varepsilon(x) \cap B_\varepsilon(y) = \emptyset$ für alle $x \neq y$ in X , mit $\varepsilon := d(x, y)/2$.

Definition 27.4

Eine **gerichtete Menge** ist eine partiell geordnete Menge (I, \leq) derart, dass $I \neq \emptyset$ und für alle $i, j \in I$ ein $k \in I$ existiert derart, dass

$$i \leq k \quad \text{und} \quad j \leq k$$

(d.h. $\{i, j\}$ hat eine obere Schranke k in I).

Per Induktion finden wir dann für alle $i_1, \dots, i_n \in I$ ein $k \in I$ mit $i_1, \dots, i_n \leq k$ (d.h. jede endliche Teilmenge von I hat eine obere Schranke).

Definition 27.5

Ein **Netz** in einer Menge X ist eine Familie $(x_i)_{i \in I}$ von Elementen $x_i \in X$, wobei (I, \leq) eine gerichtete Menge ist.

Beispiel 27.6

Jede nicht leere, total geordnete Menge ist eine gerichtete Menge, also z.B. \mathbb{N} mit der üblichen Totalordnung \leq . Jede Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist insb. ein Netz.

Beispiel 27.7

Ist (X, \mathcal{O}) ein topologischer Raum und $x \in X$, so schreiben wir $\mathcal{U}_x(X)$ für die Menge aller x -Umgebungen in X . Man nennt $\mathcal{U}_x(X)$ den **Umgebungsfilter** von x . Schreiben wir $U \leq V$ wenn $V \subseteq U$, so wird $\mathcal{U}_x(X)$ zu einer gerichteten Menge.

Es ist nämlich $x \in U$ und sind $U, V \in \mathcal{U}_x(X)$, so ist $U \cap V \in \mathcal{U}_x(X)$ und $U \cap V \subseteq U$ sowie $U \cap V \subseteq V$, also $U \leq U \cap V$ und $V \leq U \cap V$.

Definition 27.8

Es sei (X, \mathcal{O}) ein topologischer Raum und $x \in X$. Wir sagen, ein Netz $(x_i)_{i \in I}$ in X **konvergiert gegen x** (und schreiben $x_i \rightarrow x$), wenn für jede x -Umgebung U ein $j \in I$ existiert derart, dass

$$x_i \in U \quad \text{für alle } i \in I \text{ mit } i \geq j.$$

Das Netz heißt **konvergent**, wenn es gegen ein $x \in X$ konvergiert.

Beispiel 27.9

Eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in einem topologischen Raum X konvergiert also genau dann gegen $x \in X$, wenn

$$(\forall U \in \mathcal{U}_x(X)) (\exists N \in \mathbb{N}) (\forall n \geq N) x_n \in U.$$

Satz 27.10

Ein topologischer Raum (X, \mathcal{O}) ist genau dann Hausdorffsch, wenn in X jedes konvergente Netz $(x_i)_{i \in I}$ einen eindeutigen Grenzwert besitzt.

Wir schreiben dann

$$\lim x_i$$

für diesen Grenzwert.

Beweis. Konvergiert ein Netz $(x_i)_{i \in I}$ sowohl gegen $x \in X$ als auch gegen $y \in X$ mit $y \neq x$, so gibt es für jede Umgebung U von x und jede Umgebung V von y ein $j \in I$ derart, dass

$$x_i \in U \quad \text{für alle } i \in I \text{ mit } i \geq j$$

und ein $k \in I$ derart, dass $x_i \in V$ für alle $i \geq k$. Da (I, \leq) gerichtet ist, existiert ein $\ell \in I$ derart, dass $j \leq \ell$ und $k \leq \ell$. Dann gilt

$$x_\ell \in U \cap V$$

und somit $U \cap V \neq \emptyset$; also ist X nicht Hausdorffsch. Ist umgekehrt X nicht Hausdorffsch, so gibt es $x \neq y$ in X derart, dass $U \cap V \neq \emptyset$ für alle $U \in \mathcal{U}_x(X)$ und $V \in \mathcal{U}_y(X)$. Wir ordnen

$$I := \{U \cap V : U \in \mathcal{U}_x(X), V \in \mathcal{U}_y(X)\}$$

partiell, indem wir genau dann $U_1 \cap V_1 \leq U_2 \cap V_2$ schreiben, wenn $U_2 \cap V_2 \subseteq U_1 \cap V_1$. Dann ist (I, \leq) gerichtet. Da $W \neq \emptyset$

für jedes $W = U \cap V \in I$, können wir ein $x_W \in W$ wählen. Für jede x -Umgebung $U (= U \cap X \in I)$ gilt für alle $W \in I$ mit $U \leq W$

$$x_W \in W \subseteq U,$$

also $x_W \rightarrow x$. Analog gilt $x_W \rightarrow y$. Somit sind Grenzwerte nicht eindeutig. \square

Definition 27.11

Es sei X ein topologischer Raum. Der **Abschluss** \overline{M} einer Teilmenge $M \subseteq X$ ist definiert als der Durchschnitt

$$\overline{M} := \bigcap_{\substack{A \subseteq X \text{ abg.} \\ \text{mit } M \subseteq A}} A$$

aller abgeschlossenen Mengen, die M enthalten.

Also ist \overline{M} die kleinste abgeschlossene Teilmenge von X , die M enthält.

Satz 27.12

Es sei X ein topologischer Raum und $M \subseteq X$ eine Teilmenge. Für $x \in X$ sind äquivalent:

- (a) $x \in \overline{M}$;
- (b) $U \cap M \neq \emptyset$ für alle $U \in \mathcal{U}_x(X)$;
- (c) Es existiert ein Netz $(x_i)_{i \in I}$ in M derart, dass $x_i \rightarrow x$ in X .

Beweis. (a) \Rightarrow (b), also \neg (b) \Rightarrow \neg (a): Ist $M \cap U = \emptyset$ für ein $U \in \mathcal{U}_x(X)$, so gibt es eine offene x -Umgebung V mit $V \subseteq U$. Dann ist auch $M \cap V = \emptyset$, also $X \setminus V$ eine abgeschlossene Teilmenge von X mit $M \subseteq X \setminus V$, somit $\overline{M} \subseteq X \setminus V$, folglich $\overline{M} \cap V = \emptyset$ und somit $x \notin \overline{M}$.

(b) \Rightarrow (a), also \neg (a) \Rightarrow \neg (b): Ist $x \in X \setminus \overline{M}$, so ist $U := X \setminus \overline{M}$ eine offene Umgebung von x mit $U \cap M = \emptyset$.

(b) \Rightarrow (c): Für jedes $U \in \mathcal{U}_x(X) =: I$ existiert ein $x_U \in U \cap M$. Dann ist $(x_U)_{U \in I}$ ein Netz in M und $x_U \rightarrow x$, da $\forall U \in \mathcal{U}_x(X)$

$$x_V \in V \subseteq U \quad \text{für alle } V \in I \text{ mit } U \leq V.$$

(c) \Rightarrow (b): Sind $x_i \in M$ mit $x_i \rightarrow x$, so existiert für jedes $U \in \mathcal{U}_x(X)$ ein Element j der gerichteten Indexmenge derart, dass $x_i \in U$ für alle $i \geq j$. Insb. ist $x_j \in U$. Da $x_j \in M$, ist also $U \cap M \neq \emptyset$. \square

Definition 27.13

Es sei X ein topologischer Raum. Eine Teilmenge $D \subseteq X$ heißt **dicht**, wenn $\overline{D} = X$.

Lemma 27.14

Eine Teilmenge D eines topologischen Raums X ist genau dann dicht, wenn $U \cap D \neq \emptyset$ für jede nicht leere, offene Teilmenge $U \subseteq X$.

Beweis. Ist D dicht und U wie im Lemma, so sei $x \in U$. Dann ist U eine x -Umgebung und $x \in X = \overline{D}$ impliziert $U \cap D \neq \emptyset$ (siehe (a) \Rightarrow (b) in Satz 27.13). Sei umgekehrt $U \cap D \neq \emptyset$ für jede nicht leere, offene Teilmenge $U \subseteq X$. Ist $x \in X$ und U eine x -Umgebung, so enthält U eine offene x -Umgebung V . Da V offen und nicht leer ist, ist $V \cap D \neq \emptyset$, folglich auch $U \cap D \neq \emptyset$ und somit $x \in \overline{D}$, nach (b) \Rightarrow (a) in Satz 27.13. \square

Wir haben bereits den Begriff des Abschlusses \overline{M} wiederholt.

Definition 27.15

Es sei (X, \mathcal{O}) ein topologischer Raum und $M \subseteq X$ eine Teilmenge. Das **Innere** von M ist definiert als die Vereinigung

$$M^\circ := \bigcup_{\substack{V \in \mathcal{O} \text{ mit} \\ V \subseteq M}} V$$

aller in M enthaltenen offenen Teilmengen von X . Der **Rand** von M ist definiert als

$$\partial M := \overline{M} \setminus M^\circ.$$

Als Vereinigung offener Mengen ist M° offen. Per Konstruktion ist M° also die größte in M enthaltene offene Teilmenge von X .

Definition 27.16

Es sei (X, \mathcal{O}) ein topologischer Raum. Eine Menge $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{O}$ von offenen Teilmengen von X wird eine **Basis** der Topologie genannt, wenn jede offene Menge eine Vereinigung von Basismengen ist, also

$$(\forall U \in \mathcal{O}) (\exists M \subseteq \mathcal{B}) \quad U = \bigcup_{V \in M} V.$$

Oder äquivalent: Zu jeder offenen Teilmenge $U \subseteq X$ existiert eine Familie $(V_j)_{j \in J}$ von Mengen $V_j \in \mathcal{B}$ derart, dass $U = \bigcup_{j \in J} V_j$.

Satz 27.17

Eine Menge \mathcal{B} von Teilmengen einer Menge X ist genau dann eine Basis einer Topologie \mathcal{O} auf X , wenn gilt:

- (B1) $\bigcup_{V \in \mathcal{B}} V = X$ und
- (B2) Für alle $U, V \in \mathcal{B}$ und $x \in U \cap V$ existiert ein $W \in \mathcal{B}$ derart, dass $x \in W$ und $W \subseteq U \cap V$.

Die Topologie \mathcal{O} ist dann eindeutig durch \mathcal{B} festgelegt; es ist

$$\mathcal{O} = \left\{ \bigcup_{V \in M} V : M \subseteq \mathcal{B} \right\}. \quad (1)$$

Bemerkung 27.18

Bedingung (B2) ist insbesondere dann erfüllt, wenn gilt:

(B2)' Für alle $U, V \in \mathcal{B}$ ist $U \cap V \in \mathcal{B}$.

Beweis von Satz 27.17. Existiert \mathcal{O} , so ist die rechte Seite von (1) Teilmenge von \mathcal{O} , das jede Menge $V \in \mathcal{B}$ offen ist und Vereinigungen offener Mengen offen sind. Per Definition einer Basis ist zudem jedes $U \in \mathcal{O}$ eine Vereinigung von Basismengen, somit ein Element der rechten Seite. Also gilt (1); insbesondere ist \mathcal{O} eindeutig festgelegt.

Existiert \mathcal{O} , so muss X als offene Menge eine Vereinigung von Basismengen sein; also gilt (B1). Weiter sind dann alle Basismengen offen; gegeben $U, V \in \mathcal{B}$ ist somit auch $U \cap V$ offen, also

$$U \cap V = \bigcup_{W \in M} W$$

für eine Teilmenge $M \subseteq \mathcal{W}$. Jedes $x \in U \cap V$ ist dann in einem $W \in M$ enthalten und $W \subseteq U \cap V$. Also gilt (B2).

Sind (B1) und (B2) erfüllt, so definieren wir \mathcal{O} durch (1). Wegen (B1) ist dann $X \in \mathcal{O}$ und zudem ist $\emptyset = \bigcup_{V \in \emptyset} V \in \mathcal{O}$. Sind $U_j \in \mathcal{O}$, so gibt es Teilmengen $M_j \subseteq \mathcal{B}$ mit $U_j = \bigcup_{V \in M_j} V$. Mit $M := \bigcup_{j \in J} M_j$ ist dann

$$\bigcup_{j \in J} U_j = \bigcup_{V \in M} V,$$

also $\bigcup_{j \in J} U_j \in \mathcal{O}$. Sind $U_1, U_2 \in \mathcal{O}$, so gibt es $M_j \subseteq \mathcal{B}$ mit $U_j = \bigcup_{V \in M_j} V$ für $j \in \{1, 2\}$. Sei $M := \{W \in \mathcal{B} : W \subseteq U_1 \cap U_2\}$. Für jedes $x \in U_1 \cap U_2$ existieren $V_j \in M_j$ mit $x \in V_j$ für $j \in \{1, 2\}$. Nach (B2) gibt es ein $W \in \mathcal{B}$ mit $x \in W \subseteq V_1 \cap V_2$. Dann ist $W \subseteq U_1 \cap U_2$ und somit $W \in M$; zudem ist $x \in W$. Wir schließen, dass

$$U_1 \cap U_2 \subseteq \bigcup_{W \in M} W.$$

Die die Vereinigung per Definition von M such eine Teilmenge der linken Seite ist, folgt $U_1 \cap U_2 = \bigcup_{W \in M} W$. Also ist $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{O}$. Wir haben gezeigt, dass \mathcal{O} eine Topologie ist. Für jedes $U \in \mathcal{B}$ ist $U = \bigcup_{V \in \{U\}} V \in \mathcal{O}$. Weiter ist per Definition von \mathcal{O} jede offene Menge eine Vereinigung von Mengen aus \mathcal{B} . Also ist \mathcal{B} eine Basis für \mathcal{O} . \square

Satz 27.19

Sind (X, \mathcal{O}_X) und (Y, \mathcal{O}_Y) topologische Räume, so ist


$$\mathcal{B} := \{U \times V : U \in \mathcal{O}_X, V \in \mathcal{O}_Y\}$$

eine Basis für eine Topologie \mathcal{O} auf $X \times Y$. Sind (X, \mathcal{O}_X) und (Y, \mathcal{O}_Y) Hausdorffsch, so auch $(X \times Y, \mathcal{O})$.

Man nennt \mathcal{O} die **Produkttopologie** auf $X \times Y$. Wenn nichts anderes gesagt wurde, verstehen wir $X \times Y$ immer mit der Produkttopologie.

Beweis. Es ist $X \times Y \in \mathcal{B}$, also $X \times Y$ eine Vereinigung von Mengen aus \mathcal{B} . Also gilt (B1). Sind $U, V \in \mathcal{B}$, so existieren $U_1, U_2 \in \mathcal{O}_X$ und $V_1, V_2 \in \mathcal{O}_Y$ derart, dass $U = U_1 \times V_1$ und $V = U_2 \times V_2$. Dann ist $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{O}_X$ und $V_1 \cap V_2 \in \mathcal{O}_Y$, folglich

$$U \cap V = (U_1 \times U_2) \times (V_1 \times V_2) \in \mathcal{B}.$$

Es gilt also Bedingung (B2)' und somit auch (B2). Nach Satz 27.17 ist \mathcal{B} also eine Basis für genau eine Topologie \mathcal{O} auf X . 

Sind X und Y Hausdorffsch, so seien $(x_j, y_j) \in X \times Y$ für $j \in \{1, 2\}$ mit $(x_1, y_1) \neq (x_2, y_2)$. Dann gilt $x_1 \neq x_2$ oder $y_1 \neq y_2$; wir diskutieren den ersten Fall (der zweite lässt sich analog behandeln). Sei also $x_1 \neq x_2$. Da X Hausdorffsch ist, gibt es eine offene x_1 -Umgebung $U_1 \subseteq X$ und eine offene x_2 -Umgebung $U_2 \subseteq X$ derart, dass $U_1 \cap U_2 = \emptyset$. Dann sind

$$U_1 \times Y \quad \text{und} \quad U_2 \times Y$$

offene Umgebungen von (x_1, y_1) bzw. (x_2, y_2) in $(X \times Y, \mathcal{O})$ und es gilt

$$(U_1 \times Y) \cap (U_2 \times Y) = (U_1 \cap U_2) \times Y = \emptyset.$$

Also ist $(X \times Y, \mathcal{O})$ Hausdorffsch. \square

Satz 27.20

Ein topologischer Raum X ist genau dann Hausdorffsch, wenn die Diagonale

$$\Delta_X := \{(x, x) : x \in X\}$$

in $X \times X$ abgeschlossen ist.

Hierbei ist $X \times X$ mit der Produkttopologie versehen. 

Beweis. Ist X Hausdorffsch, so gibt es für jedes $(x, y) \in (X \times X) \setminus \Delta_X$ eine offene x -Umgebung U und eine offene y -Umgebung V in X derart, dass $U \cap V = \emptyset$ und somit

$$(U \times V) \cap \Delta_X = \emptyset.$$

Also ist $(x, y) \in U \times V \subseteq (X \times X) \setminus \Delta_X =: W$, somit $(x, y) \in W^\circ$. Also ist $W = W^\circ$, somit W offen und $(X \times X) \setminus W = \Delta_X$ abgeschlossen.

Ist umgekehrt Δ_X abgeschlossen, so ist $W := (X \times X) \setminus \Delta_X$ offen. Für alle $x, y \in X$ mit $x \neq y$ ist $(x, y) \in W$, es gibt also offene Teilmengen $U, V \subseteq X$ mit $(x, y) \in U \times V \subseteq W$. Dann ist U eine x -Umgebung, V eine y -Umgebung und $U \cap V = \emptyset$, da $U \times V \in (X \times X) \setminus \Delta_X$. Also ist X Hausdorffsch. \square

Definition 27.21

Eine Abbildung $f: X \rightarrow Y$ zwischen topologischen Räumen (X, \mathcal{O}_X) und (Y, \mathcal{O}_Y) heißt **stetig**, wenn Urbilder offener Mengen offen sind, d.h.

$$(\forall U \in \mathcal{O}_Y) f^{-1}(U) \in \mathcal{O}_X.$$

Ist $x \in X$ und $f^{-1}(U)$ eine x -Umgebung in X für jede $f(x)$ -Umgebung U in Y , so wird f **stetig an der Stelle x** genannt.

Übergang zu Komplementen zeigt: f ist genau dann stetig, wenn das Urbild $f^{-1}(A)$ in X abgeschlossen ist für jede abgeschlossene Teilmenge A von Y .

Satz 27.22

Eine Abbildung $f: X \rightarrow Y$ zwischen topologischen Räumen (X, \mathcal{O}_X) und (Y, \mathcal{O}_Y) ist genau dann stetig, wenn sie an jeder Stelle $x \in X$ stetig ist.

Beweis. Ist f stetig, $x \in X$ und $U \subseteq Y$ eine Umgebung von $f(x)$, so ist U° eine offene $f(x)$ -Umgebung in Y und somit

$$f^{-1}(U^\circ)$$

eine offene x -Umgebung. Wegen $f^{-1}(U) \supseteq f^{-1}(U^\circ)$ ist also auch $f^{-1}(U)$ eine x -Umgebung, somit f stetig an der Stelle x .

Ist f an jeder Stelle stetig und U eine offene Teilmenge von Y , so ist für jedes $x \in f^{-1}(U)$ die Menge U eine offene Umgebung von $f(x)$ und folglich $f^{-1}(U)$ eine x -Umgebung in X , also $x \in (f^{-1}(U))^\circ$. Also ist $f^{-1}(U) = (f^{-1}(U))^\circ$ offen. \square

Satz 27.23

Eine Abbildung $f: X \rightarrow Y$ zwischen topologischen Räumen ist genau dann stetig an einer Stelle $x \in X$, wenn $f(x_i) \rightarrow f(x)$ für jedes Netz $(x_i)_{i \in I}$ in X mit $x_i \rightarrow x$.

Beweis. Sei f stetig an der Stelle x und $(x_i)_{i \in I}$ ein Netz in X mit $x_i \rightarrow x$. Dann ist $(f(x_i))_{i \in I}$ ein Netz in Y . Ist $V \subseteq Y$ eine Umgebung von $f(x)$, so ist $f^{-1}(V)$ eine x -Umgebung. Da $x_i \rightarrow x$, existiert ein $j \in I$ derart, dass $x_i \in f^{-1}(V)$ für all $i \geq j$. Somit ist $f(x_i) \in V$ für alle $i \geq j$. Folglich gilt $f(x_i) \rightarrow f(x)$. Ist f an der Stelle x unstetig, so gibt es eine Umgebung V von $f(x)$ in Y derart, dass $f^{-1}(V)$ keine x -Umgebung ist. Für jede x -Umgebung $U \subseteq X$ ist also U nicht in $f^{-1}(V)$ enthalten und es existiert somit ein $x_U \in U \setminus f^{-1}(V)$. Folglich ist $f(x_U) \notin V$. Dann ist $(x_U)_{U \in \mathcal{U}_x(X)}$ ein Netz in X und konvergiert gegen x , weil für jede x -Umgebung

$$U \subseteq X$$

$$x_W \in W \subseteq U$$

gilt für alle $W \in \mathcal{U}_x(X)$ mit $W \supseteq U$, also $W \subseteq U$. Da $f(x_U) \notin V$ für alle $U \in \mathcal{U}_x(X)$, konvergiert $(f(x_U))_{U \in \mathcal{U}_x(X)}$ nicht gegen $f(x)$.

Satz 27.24

Es seien (X, \mathcal{O}_X) und (Y, \mathcal{O}_Y) topologische Räume und $f, g: X \rightarrow Y$ stetige Abbildungen. Gilt $f|_D = g|_D$ für eine dichte Teilmenge $D \subseteq X$ und ist Y Hausdorffsch, so ist $f = g$.

Beweis. Gegeben $x \in X = \overline{D}$ gibt es nach Satz 27.12 ein Netz $(x_i)_{i \in I}$ in D mit $x_i \rightarrow x$. Da f und g stetig sind und Grenzwerte in Y eindeutig sind (Satz 27.10), folgt

$$f(x) = \lim_{i \in I} \underbrace{f(x_i)}_{=g(x_i)} = g(x). \quad \square$$

Ein alternativer Beweis ohne Netze wird nach Satz 27.27 gegeben.

Satz 27.25

Sind $f: X \rightarrow Y$ und $g: Y \rightarrow Z$ stetige Abbildungen zwischen topologischen Räumen, so ist auch $g \circ f: X \rightarrow Z$ stetig. Ist f stetig an einer Stelle $x \in X$ und g stetig an der Stelle $f(x)$, so ist $g \circ f$ stetig an der Stelle x .

Beweis. Es genügt, die zweite Aussage zu zeigen. Sei $V \subseteq Z$ eine Umgebung von $(g \circ f)(x) = g(f(x))$. Da g an der Stelle $f(x)$ stetig ist, ist $g^{-1}(V)$ eine Umgebung von $f(x)$ in Y . Da f an der Stelle x stetig ist, ist somit $f^{-1}(g^{-1}(V))$ eine Umgebung von x in X . Also ist $(g \circ f)^{-1}(V) = f^{-1}(g^{-1}(V))$ eine x -Umgebung und somit $g \circ f$ stetig an der Stelle x . \square

Satz 27.26

Es seien (X, \mathcal{O}_X) und (Y, \mathcal{O}_Y) topologische Räume und $f: X \rightarrow Y$ eine Abbildung. Ist $f^{-1}(V)$ offen in X für offenen Mengen $V \subseteq Y$ in einer Basis \mathcal{B} für die Topologie auf Y , so ist f stetig.

Beweis. Sei $f^{-1}(V) \in \mathcal{O}_X$ für alle $V \in \mathcal{B}$. Ist $U \subseteq Y$ offen, so gibt es eine Teilmenge $M \subseteq \mathcal{B}$ mit $U = \bigcup_{V \in M} V$. Dann ist


$f^{-1}(U) = \bigcup_{V \in \mathcal{M}} f^{-1}(V)$ offen in X als Vereinigung offener Mengen. Also ist f stetig. \square

Satz 27.27

Es seien X_1, X_2 topologische Räume und $X := X_1 \times X_2$, versehen mit der Produkttopologie. Dann gilt:

- (a) Die Projektion $\text{pr}_j: X_1 \times X_2 \rightarrow X_j, (x_1, x_2) \mapsto x_j$ ist stetig für alle $j \in \{1, 2\}$.
- (b) Für jeden topologischen Raum Y ist eine Abbildung $f = (f_1, f_2): Y \rightarrow X_1 \times X_2$ genau dann stetig, wenn die Komponenten $f_1: Y \rightarrow X_1$ und $f_2: Y \rightarrow X_2$ stetig sind.
- (c) Für jedes $x_2 \in X_2$ ist die Abbildung $i_{x_2}: X_1 \rightarrow X, x_1 \mapsto (x_1, x_2)$ stetig. Für jedes $x_1 \in X_1$ ist $j_{x_1}: X_2 \rightarrow X, x_2 \mapsto (x_1, x_2)$ stetig.

Beweis. (a) Für alle offenen Teilmengen $U \subseteq X_1$ ist $(\text{pr}_1)^{-1}(U) = U \times X_2$ eine Basismenge und somit offen, Also ist pr_1 stetig. Analog ist pr_2 stetig.

(b) Ist f stetig, so sind auch $f_1 = \text{pr}_1 \circ f$ und $f_2 = \text{pr}_2 \circ f$ stetig. 

Seien f_1 und f_2 stetig. Damit f stetig ist, brauchen wir nur Offenheit von $f^{-1}(U)$ nachzuweisen für U in der Basis \mathcal{B} aller offenen Kästchen in $X_1 \times X_2$. Seien $U_1 \subseteq X_1$ und $U_2 \subseteq X_2$ offen.

$$\begin{aligned} \text{Dann ist } f^{-1}(U_1 \times U_2) &= \{x \in Y : (f_1(x), f_2(x)) \in U_1 \times U_2\} \\ &= \{x \in Y : f_1(x) \in U_1 \text{ und } f_2(x) \in U_2\} \\ &= (f_1)^{-1}(U_1) \cap (f_2)^{-1}(U_2) \end{aligned}$$

offen in Y .

(c) Die erste Komponente von i_{x_2} ist $\text{id}_{X_1} : X_1 \rightarrow X_1, x_1 \mapsto x_1$, also stetig. Die zweite Komponente von i_{x_2} ist die konstante Funktion $X_1 \rightarrow X_2, x_1 \mapsto x_2$, also ebenfalls stetig. Nach (b) ist i_{x_2} stetig. Analog ist für jedes $x_1 \in X_1$ die Funktion j_{x_1} stetig. \square

Zweiter Beweis für Satz 27.24. Da f und g stetig sind, ist auch $(f, g) : X \rightarrow Y \times Y, x \mapsto (f(x), g(x))$ stetig. Da Y Hausdorffsch ist, ist die Diagonale Δ_Y in $Y \times Y$ abgeschlossen, somit

$$A := \{x \in X : f(x) = g(x)\} = (f, g)^{-1}(\Delta_Y)$$

eine abgeschlossene Teilmenge von X . Per Voraussetzung ist $D \subseteq A$, somit $X = \overline{D} \subseteq A$, also $A = D$ und somit $f(x) = g(x)$ für alle $x \in X$. \square

Satz 27.28

Es seien X und Y topologische Räume und $(x, y) \in X \times Y$. Für ein Netz $(x_i, y_i)_{i \in I}$ in $X \times Y$ sind dann äquivalent:

- (a) $(x_i, y_i) \rightarrow (x, y)$ in $X \times Y$, versehen mit der Produkttopologie.
- (b) $x_i \rightarrow x$ in X und $y_i \rightarrow y$ in Y .

Beweis. Aus $(x_i, y_i) \rightarrow (x, y)$ folgt wegen der Stetigkeit von $\text{pr}_1: X \times Y \rightarrow X$, dass

$$x_i = \text{pr}_1(x_i, y_i) \rightarrow \text{pr}_1(x, y) = x.$$

Analog folgt $y_i \rightarrow y$. Gilt umgekehrt $x_i \rightarrow x$ und $y_i \rightarrow y$, so sei $U \subseteq X \times Y$ eine Umgebung von (x, y) . Per Definition der Produkttopologie gibt es offene Mengen $V \subseteq X$ und $W \subseteq Y$ mit

$$(x, y) \in V \times W \subseteq U^\circ.$$

Da $x_i \rightarrow x$, gibt es ein $j \in I$ derart, dass $x_i \in V$ für alle $i \geq j$. Da $y_i \rightarrow y$, gibt es ein $k \in I$ derart, dass $y_i \in W$ für alle $i \geq k$. Da I gerichtet ist, gibt es ein $\ell \in I$ derart, dass $j \leq \ell$ und $k \leq \ell$. Für alle $i \in I$ mit $i \geq \ell$ gilt dann $x_i \in V$ und $y_i \in W$, somit

$(x_i, y_i) \in V \times W \subseteq U$. Also konvergiert das Netz $(x_i, y_i)_{i \in I}$ gegen (x, y) . \square

Satz 27.29

Es seien X sowie Y topologische Räume und $M \subseteq X$, $N \subseteq Y$ Teilmengen. Sei $\overline{M} \subseteq X$ und $\overline{N} \subseteq Y$ der Abschluss. Dann gilt für den Abschluss von $N \times M$ in $X \times Y$

$$\overline{M \times N} = \overline{M} \times \overline{N}.$$

Beweis. Seien o.B.d.A. $M \neq \emptyset$ und $N \neq \emptyset$. Die Menge $\text{pr}_1^{-1}(\overline{M}) = \overline{M} \times Y$ ist abgeschlossen und enthält $M \times N$; folglich ist $\overline{M \times N} \subseteq \overline{M} \times Y$. Analog ist $\overline{M \times N} \subseteq X \times \overline{N}$ und somit

$$\overline{M \times N} \subseteq (\overline{M} \times Y) \cap (X \times \overline{N}) = \overline{M} \times \overline{N}.$$

Für alle $x \in \overline{M}$ und $y \in N$ gibt es ein Netz $(x_i)_{i \in I}$ in M mit $x_i \rightarrow x$ in X . Nach Satz 27.28 gilt dann $(x_i, y) \rightarrow (x, y)$. Folglich ist $(x, y) \in \overline{M \times N}$ und somit $\overline{M \times N} \subseteq \overline{M} \times \overline{N}$. Gegeben $(x, y) \in \overline{M} \times \overline{N}$ existiert ein Netz $(y_i)_{i \in I}$ in N mit $y_i \rightarrow y$. Dann gilt $(x, y_i) \rightarrow (x, y)$ und somit $(x, y) \in \overline{M \times N}$, da $(x, y_i) \in \overline{M \times N}$ für alle $i \in I$. \square

Definition 27.30

Ein **topologischer Vektorraum** ist ein \mathbb{K} -Vektorraum E , zusammen mit einer Topologie \mathcal{O} auf E , welche die Addition

$$E \times E \rightarrow E, \quad (x, y) \mapsto x + y$$

und die Multiplikation

$$\mathbb{K} \times E \rightarrow E, \quad (z, x) \mapsto zx$$

zu stetigen Abbildungen macht. Hierbei sind $E \times E$ und $\mathbb{K} \times E$ mit der Produkttopologie versehen.

Beispiel: Jeder normierte Raum $(E, \|\cdot\|)$ kann als topologischer Vektorraum betrachtet werden (versehen mit der mittels der Norm definierten Topologie); vgl. Lemma 2.1.

Induzierte Topologie

Satz 27.31

Ist (X, \mathcal{O}) ein topologischer Raum und Y eine Teilmenge von X , so ist

$$\mathcal{O}_Y := \{U \cap Y : U \in \mathcal{O}\}$$

eine Topologie auf Y .

Man rechnet direkt die Axiome einer Topologie nach für \mathcal{O}_Y .

Definition 27.32

Man nennt \mathcal{O}_Y die auf Y **induzierte Topologie** oder Spurtopologie. Die Mengen $V \in \mathcal{O}_Y$ werden **relativ offen** genannt oder einfach **offen in Y** . Die abgeschlossenen Mengen des topologischen Raums (Y, \mathcal{O}_Y) werden **relativ abgeschlossen** genannt oder einfach **abgeschlossen in Y** . Wird nichts anderes gesagt, so verstehen wir Teilmengen stets mit der induzierten Topologie.

Eine Teilmenge $A \subseteq Y$ ist genau dann relativ abgeschlossen, wenn $A = B \cap Y$ mit einer abgeschlossenen Menge $B \subseteq X$. Ist (X, \mathcal{O}) Hausdorffsch, so auch (Y, \mathcal{O}_Y) .

Bemerkung 27.33

Es sei X ein topologischer Raum und Y eine Teilmenge. Man rechnet sofort nach:

- (a) Genau dann ist Y offen in X , wenn jede relativ offene Teilmenge von Y in X offen ist.
- (b) Genau dann ist Y abgeschlossen in X , wenn jede relativ abgeschlossene Teilmenge von Y in X abgeschlossen ist.

Die induzierte Topologie hat folgende wichtige Eigenschaften:

Satz 27.34

Es sei X ein topologischer Raum und Y ein Teilmenge von X , versehen mit der induzierten Topologie. Dann gilt:

- (a) Die Inklusion $j: Y \rightarrow X$ ist stetig.

- (b) Ist Z ein topologischer Raum und $f: X \rightarrow Z$ eine stetige Abbildung, so ist auch die Einschränkung $f|_Y: Y \rightarrow Z$ stetig.
- (c) Ist Z ein topologischer Raum, so ist eine Abbildung $f: Z \rightarrow Y$ genau dann stetig, wenn $j \circ f: Z \rightarrow X, x \mapsto f(x)$ stetig ist.

Beweis. (a) Für jede offene Teilmenge $U \subseteq X$ ist $j^{-1}(U) = \{x \in Y: j(x) \in U\} = U \cap Y$ offen in Y , somit j stetig.

(b) $f|_Y = f \circ j$ ist eine Komposition stetiger Funktionen.

(c) Ist f stetig, so auch die Komposition $j \circ f$. Ist $j \circ f$ stetig und V eine relativ offene Teilmenge von Y , so ist

$$V = U \cap Y = j^{-1}(U)$$

für eine offene Teilmenge U von X . Also ist

$$f^{-1}(V) = f^{-1}(j^{-1}(U)) = (j \circ f)^{-1}(U);$$

diese Menge ist offen in Z , da $j \circ f$ stetig ist. Also ist f stetig. \square

Lemma 27.35

Es sei X ein topologischer Raum, $Y \subseteq X$ eine Teilmenge, $(y_i)_{i \in I}$ ein Netz in Y und $y \in Y$. Dann sind äquivalent:

- (a) $y_i \rightarrow y$ in Y , versehen mit der induzierten Topologie.
- (b) $y_i \rightarrow y$ in X .

Beweis. (a) \Rightarrow (b): Es sei $j: Y \rightarrow X$ die Inklusionsabbildung. Gilt $y_i \rightarrow y$ in Y , so folgt

$$y_i = j(y_i) \rightarrow j(y) = y \text{ in } X,$$

da j stetig ist.

(b) \Rightarrow (a): Gelte $y_i \rightarrow y$ in X . Ist V eine relativ offene y -Umgebung in Y , so existiert eine offene Teilmenge $U \subseteq X$ mit $V = U \cap Y$.

Dann ist U eine y -Umgebung in X , somit existiert ein $k \in I$ derart, dass

$$y_i \in U \quad \text{für alle } i \in I \text{ mit } i \geq k.$$

Da auch $y_i \in Y$, folgt $y_i \in U \cap Y = V$ für alle $i \geq k$. Also gilt $y_i \rightarrow y$ in Y . \square

Lemma 27.26

Es seien (X_1, \mathcal{O}_1) und (X_2, \mathcal{O}_2) topologische Räume und \mathcal{O} die Produkttopologie auf $X_1 \times X_2$. Gegeben Teilmengen $Y_j \subseteq X_j$ für $j \in \{1, 2\}$ versehen wir diese mit der von X_j induzierten Topologie \mathcal{O}_{Y_j} . Sei weiter \mathcal{O}_Y die von \mathcal{O} auf der Teilmenge $Y := Y_1 \times Y_2$ von $X := X_1 \times X_2$ induzierte Topologie. Dann stimmt \mathcal{O}_Y überein mit der Produkttopologie \mathcal{T} auf $Y_1 \times Y_2$, betrachtet als Produkt der topologischen Räume (Y_1, \mathcal{O}_{Y_1}) und (Y_2, \mathcal{O}_{Y_2}) .

Beweis. Wir zeigen, dass id_Y als Abbildung $(Y, \mathcal{T}) \rightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$ ein Homöomorphismus ist (dann ist $\mathcal{O}_Y = \mathcal{T}$). Sei $j: Y \rightarrow X$ die Inklusionsabbildung. Nach Satz 27.34 (c) genügt es für Stetigkeit von id_Y zu zeigen, dass $j \circ \text{id}_Y$ stetig ist. Sind $U_1 \subseteq X_1$ und $U_2 \subseteq X_2$ offene Teilmengen, so ist

$$(j \circ \text{id}_Y)^{-1}(U_1 \times U_2) = (U_1 \times U_2) \cap (Y_1 \times Y_2) = (U_1 \cap Y_1) \times (U_2 \cap Y_2) \in \mathcal{T};$$

also ist $j \circ \text{id}_Y$ stetig (siehe Satz 27.26). Weiter ist $(\text{id}_Y)^{-1}$ genau dann stetig, wenn die Komponenten von $(\text{id}_Y)^{-1}$ stetig sind

(Satz 27.27 (b)), also die Projektionen $Y_1 \times Y_2 \rightarrow Y_j$ (bzgl. \mathcal{O}_Y auf dem Definitionsbereich). Nach Satz 27.34 (c) brauchen wir nur zu zeigen, dass diese Abbildungen nach X_j stetig sind. Dann sind sie aber Einschränkungen der Projektionen $X_1 \times X_2 \rightarrow X_j$ und somit stetig (siehe Satz 27.34 (b) und Satz 27.27 (a)). \square

Satz 27.37

Ist E ein topologischer Vektorraum, so macht die induzierte Topologie jeden Untervektorraum F zu einem topologischen Vektorraum.

Beweis. Sei $\alpha: E \times E \rightarrow E$ die stetige Additionsabbildung und $\mu: \mathbb{K} \times E \rightarrow E$ die stetige Multiplikation mit Skalaren. Dann ist $\alpha|_{F \times F}: F \times F \rightarrow E$ stetig bezüglich der induzierten Topologie auf $F \times F$, die nach Lemma 27.26 mit der Produkttopologie übereinstimmt. Da $\alpha(F \times F) \subseteq F$, können wir die Ko-Einschränkung

$$\beta := \alpha|_{F \times F}^F: F \times F \rightarrow F, (x, y) \mapsto \alpha(x, y)$$

bilden und diese ist nach Satz 27.34 (c) stetig. Man beachte, dass β

die Additionsabbildung des Vektorraums F ist. Analog sieht man, dass $\mu|_{\mathbb{K} \times F}^F$, die Multiplikation mit Skalaren des Vektorraums F , bezüglich der Produkttopologie auf dem Definitionsbereich stetig ist. Also ist F ein topologischer Vektorraum. \square

Teilnetze, Häufungspunkte, Kompaktheit

Definition 27.38

Ein **Teilnetz** eines Netzes $(x_i)_{i \in I}$ mit gerichteter Indexmenge (I, \leq) ist ein Netz der Form $(x_{\lambda(a)})_{a \in A}$ mit einer gerichteten Menge (A, \leq) und einer Funktion $\lambda: A \rightarrow I$ derart,

$$(\forall a, b \in A) \quad a \leq b \Rightarrow \lambda(a) \leq \lambda(b)$$

und

$$(\forall i \in I) (\exists a \in A) \quad \lambda(a) \geq i.$$

Dann gilt $\lambda(b) \geq i$ für alle $b \geq a$ aus A .

Die Funktion λ ist also ordnungserhaltend und hat kofinales Bild $\lambda(A)$.

Satz 27.39

Es sei $(x_i)_{i \in I}$ ein Netz in einem topologischen Raum X . Für ein $x \in X$ sind folgende Eigenschaften äquivalent:

- (a) $(x_i)_{i \in I}$ hat ein gegen x konvergentes Teilnetz.
- (b) Für jede x -Umgebung $U \subseteq X$ und jedes $i \in I$ existiert ein $j \geq i$ in I derart, dass $x_j \in U$.

Sind die äquivalenten Eigenschaften erfüllt, so nennt man x einen **Häufungspunkt** des Netzes $(x_i)_{i \in I}$.

Beweis. (a) \Rightarrow (b): Ist $(x_{\lambda(a)})_{a \in A}$ ein gegen x konvergentes Teilnetz und $U \subseteq X$ eine x -Umgebung, so gibt es ein $b \in A$ derart, dass

$$x_{\lambda(c)} \in U \quad \text{für alle } c \geq b.$$

Gegeben $i \in I$ existiert ein $a \in A$ mit $\lambda(a) \geq i$. Da A gerichtet ist, existiert ein $c \in A$ derart, dass $c \geq a$ und $c \geq b$. Dann ist $x_{\lambda(c)} \in U$ und $\lambda(c) \geq \lambda(a) \geq i$. Man nehme also $j := \lambda(c)$.

(b) \Rightarrow (a): Wir setzen

$$A := \{(U, i) \in \mathcal{U}_x(X) \times I : x_i \in U\}$$

und schreiben $(U, i) \leq (V, j)$, wenn $V \subseteq U$ und $i \leq j$ in I . Diese Relation macht A zu einer geordneten Menge und A ist gerichtet. Für beliebiges $i \in I$ ist nämlich $(X, i) \in A$, somit $A \neq \emptyset$. Sind $(U, i), (V, j) \in A$, so gibt es, weil I gerichtet ist, ein $k \in I$ mit $i \leq k$ und $j \leq k$. Nach (b) gibt es ein $\ell \geq k$ derart, dass $x_\ell \in U \cap V$. Also ist $(U \cap V, \ell) \in A$ und es gilt $(U, i) \leq (U \cap V, \ell)$ und $(V, j) \leq (U \cap V, \ell)$.

Die Abbildung $\lambda: A \rightarrow I, (U, i) \mapsto i$ ist ordnungserhaltend. Gegeben $i \in I$ ist $(X, i) \in A$ und $\lambda(X, i) = i \geq i$. Somit ist $\lambda(A)$ kofinal in I . Also ist

$$(x_i)_{(U, i) \in A} = (x_{\lambda(U, i)})_{(U, i) \in A}$$

ein Teilnetz von $(x_i)_{i \in I}$. Ist $U \subseteq X$ eine x -Umgebung, so sei $i \in I$ beliebig; nach (b) existiert ein $j \geq i$ mit $x_j \in U$. Dann ist also $(U, j) \in A$. Für alle $(V, k) \geq (U, j)$ ist dann

$x_{\lambda(V, k)} = x_k \in V \subseteq U$. Also konvergiert $(x_i)_{(U, i) \in A}$ gegen x . \square

Definition 27.40

Ein topologischer Raum K heißt **quasikompakt**, wenn jede offene Überdeckung von K eine endliche Teilüberdeckung besitzt. Für jede Familie $(V_j)_{j \in J}$ offener Teilmengen $V_j \subseteq K$ mit $K = \bigcup_{j \in J} V_j$ existiert also eine endliche Teilmenge $\Phi \subseteq J$ mit $K = \bigcup_{j \in \Phi} V_j$. Ist K quasikompakt und Hausdorffsch, so wird K **kompakt** genannt.

Vorsicht, im Englischen andere Konventionen; oft

compact = quasikompakt

compact Hausdorff = kompakt

Satz 27.41

Ein topologischer Raum K ist genau dann quasikompakt, wenn jedes Netz in K ein konvergentes Teilnetz besitzt.

Beweis. Angenommen, ein Netz $(x_i)_{i \in I}$ in K besitzt kein konvergentes Teilnetz. Nach Satz 27.39 hat dann $(x_i)_{i \in I}$ keinen Häufungspunkt. Somit gibt es für jedes $x \in K$ eine x -Umgebung U_x und ein $i_x \in I$ derart, dass

$$(\forall i \geq i_x) \quad x_i \notin U_x.$$

Für $x \in K$ bilden die Mengen $(U_x)^\circ$ eine offene Überdeckung von K . Wäre K quasikompakt, so gäbe es eine endliche Teilmenge $\Phi \subseteq K$ mit

$$K = \bigcup_{x \in \Phi} (U_x)^\circ.$$

Da I gerichtet ist, gibt es eine obere Schranke i für $\{i_x : x \in \Phi\}$. Für jedes $x \in \Phi$ ist dann $i \geq i_x$ und somit $x_i \notin U_x$. Also ist

$$x_i \notin \bigcup_{x \in \Phi} U_x = K,$$

Widerspruch. Also ist K nicht quasikompakt.

Ist K nicht quasikompakt, so gibt es eine offene Überdeckung $(U_j)_{j \in J}$ von K , welche keine endliche Teilüberdeckung besitzt. Sei \mathcal{F} die Menge aller endlichen Teilmengen von J . Mit Mengeneinklusison ist \mathcal{F} eine gerichtete Menge. Für jedes $\Phi \in \mathcal{F}$ ist

$$\bigcup_{j \in \Phi} U_j \neq K,$$

es existiert also ein Element $x_\Phi \in K \setminus \bigcup_{j \in \Phi} U_j$. Dann ist $(x_\Phi)_{\Phi \in \mathcal{F}}$ ein Netz in K . Hätte dieses ein konvergentes Teilnetz und somit einen Häufungspunkt $x \in K$, so existiert ein $i \in J$ mit $x \in U_i$. Für alle $\Phi \geq \{i\}$ wäre dann

$$U_i \subseteq \bigcup_{j \in \Phi} U_j,$$

also $x_\Phi \in K \setminus \bigcup_{j \in \Phi} U_j \subseteq K \setminus U_i$, also $x_\Phi \notin U_i$. Somit wäre x kein Häufungspunkt des Netzes, Widerspruch. \square

Cauchy-Netze und Vollständigkeit

Definition 27.42

Ein Netz $(x_i)_{i \in I}$ in einem topologischen Vektorraum E heißt **Cauchy-Netz**, wenn für jede 0-Umgebung $U \subseteq E$ ein $i \in I$ derart existiert, dass

$$x_j - x_k \in U \quad \text{für alle } j, k \in I \text{ mit } j \geq i \text{ und } k \geq i.$$

Ist $(E, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum, so enthält jede 0-Umgebung eine ε -Umgebung. Also $(x_i)_{i \in I}$ ist Cauchy-Netz \Leftrightarrow

$$(\forall \varepsilon > 0) (\exists i \in I) (\forall j, k \geq i) \|x_j - x_k\| \leq \varepsilon.$$

Eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in einem topologischen Vektorraum E wird **Cauchy-Folge** genannt, wenn sie ein Cauchy-Netz ist, also

$$(\forall U \in \mathcal{U}_0(E)) (\exists N \in \mathbb{N}) (\forall n, m \geq N) \quad x_n - x_m \in U.$$

Satz 27.43

In einem Banachraum $(E, \|\cdot\|)$ ist jedes Cauchy-Netz konvergent.

Beweis. Sei $(x_i)_{i \in I}$ ein Cauchy-Netz in E . Wir finden eine Folge $i_1 \leq i_2 \leq \dots$ in I derart, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$(\forall i, j \geq i_n) \quad \|x_i - x_j\| < \frac{1}{n}.$$

Es gibt nämlich ein $i_1 \in I$ derart, dass

$$(\forall i, j \geq i_1) \quad \|x_i - x_j\| < 1.$$

Sind $i_1 \leq \dots \leq i_n$ bereits gefunden, so gibt es ein $\ell \in J$ derart, dass

$$(\forall i, j \geq \ell) \quad \|x_i - x_j\| < 1/(n+1).$$

Da I gerichtet ist, gibt es in I eine obere Schranke i_{n+1} für $\{i_n, \ell\}$.

Dann ist also $i_n \leq i_{n+1}$ und $\|x_i - x_j\| < 1/(n+1)$ für alle $i, j \geq i_{n+1}$. Für alle $N \in \mathbb{N}$ gilt für alle $n, m \geq N$

$$\|x_{i_n} - x_{i_m}\| < 1/N, \quad (2)$$

da $i_N \leq i_n$ und $i_N \leq i_m$. Also ist $(x_{i_n})_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $(E, \|\cdot\|)$ und somit konvergent gegen ein $x \in E$. Lassen wir $m \rightarrow \infty$ in (2), so sehen wir, dass

$$\|x_{i_n} - x\| \leq 1/N \quad \text{für alle } n \geq N.$$

Für alle $\varepsilon > 0$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit $2/N < \varepsilon$. Für alle $i \in I$ mit $i \geq i_N$ ist dann

$$\|x_i - x\| \leq \|x_i - x_{i_N}\| + \|x_{i_N} - x\| < \frac{1}{N} + \frac{1}{N} < \varepsilon.$$

Also gilt $x_i \rightarrow x$. \square

Definition 27.44

Ein topologischer Vektorraum E heißt **vollständig**, wenn in ihm jedes Cauchy-Netz konvergiert. Konvergiert jede Cauchy-Folge, so wird E **folgenreivollständig** genannt.

Per Definition ist ein Banachraum $(E, \|\cdot\|)$ eigentlich nur folgenreivollständig. Jedoch ist er nach Satz 27.43 auch vollständig.

Monotone Netze in $[0, \infty]$

Wir geben $[0, \infty]$ die Topologie, die als Basis die üblichen offenen Mengen $U \subseteq [0, \infty[$ besitzt und die Mengen $]R, \infty]$ für $R \geq 0$.

Satz 27.45

Es sei $(x_i)_{i \in I}$ ein Netz in $[0, \infty]$, mit einer gerichteten Indexmenge (I, \leq) . Ist das Netz **monoton**, also

$$(\forall i, j \in I) \quad i \leq j \Rightarrow x_i \leq x_j,$$

so konvergiert es gegen $\sup\{x_i : i \in I\} \in [0, \infty]$.

Beweis. Die Aussage ist klar, wenn $x_i = 0$ für alle $i \in I$. Andernfalls ist $s := \sup\{x_i : i \in I\} > 0$. Sei U eine Umgebung von s in $[0, \infty]$.

Nach Verkleinern von U dürfen wir annehmen, dass $U =]a, b]$ für ein $a \in [0, \infty[$ mit $a < s$ und ein $b \in [s, \infty]$. Da $a < s$, existiert ein $i \in I$ mit $x_i > a$. Wegen der Monotonie gilt dann $x_j \geq x_i > a$ für alle $j \geq i$. Zudem gilt $x_j \leq s \leq b$, somit

$$(\forall j \geq i) \quad x_j \in]a, b] \subseteq U.$$

Also gilt $x_i \rightarrow s$. \square

Beispiel: Summen von Familien in $[0, \infty]$

Ist J eine Menge, so schreiben wir \mathcal{F} (oder $\mathcal{F}(J)$) für die Menge aller endlichen Teilmengen $\Phi \subseteq J$ (die via Mengeninklusion gerichtet ist). Ist $(x_j)_{j \in J}$ eine Familie von Elementen $x_j \in [0, \infty]$, so ist

$$\left(\sum_{j \in \Phi} x_j \right)_{\Phi \in \mathcal{F}}$$

ein monotonen Netz in $[0, \infty]$, somit konvergent gegen

$$\sum_{j \in J} x_j := \sup \left\{ \sum_{j \in \Phi} x_j : \Phi \in \mathcal{F} \right\} \text{ in } [0, \infty].$$

Nenne $\sum_{j \in J} x_j \in [0, \infty]$ die **Summe der Familie** $(x_j)_{j \in J}$ in $[0, \infty]$.

Bemerkungen. (a) aus $x_i \leq y_i$ folgt $\sum_{i \in I} x_i \leq \sum_{i \in I} y_i$.

(b) Für $J \subseteq I$ ist offensichtlich $\sum_{i \in J} x_i \leq \sum_{i \in I} x_i$.

§28 Summierbare und absolut summierbare Familien

Wir studieren summierbare und absolut summierbare Familien in Banachräumen. Erstere werden zum Beispiel benötigt, um Elemente von Hilberträumen bezüglich eines vollständigen Orthonormalsystems entwickeln zu können; auch absolut summierbare Familien in \mathbb{K} spielen dann eine Rolle.

Es sei $(E, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum, I eine Menge, \mathcal{F} die Menge aller endlichen Teilmengen $\Phi \subseteq I$ und $(x_i)_{i \in I}$ eine Familie von Elementen $x_i \in E$. Wir schreiben auch $\mathcal{F}(I)$ statt \mathcal{F} .

Definition 28.1

Wir nennen $(x_i)_{i \in I}$ eine **summierbare Familie**, wenn das Netz $(\sum_{i \in \Phi} x_i)_{\Phi \in \mathcal{F}}$ der endlichen Teilsummen konvergiert. Den Grenzwert

$$\sum_{i \in I} x_i := \lim_{\Phi \in \mathcal{F}} \sum_{i \in \Phi} x_i$$

nennen wir dann die **Summe** der Familie $(x_i)_{i \in I}$. Gilt

$$\sum_{i \in I} \|x_i\| < \infty,$$

so nennen wir eine Familie $(x_i)_{i \in I}$ in E **absolut summierbar**.

Lemma 28.2

In einem Banachraum $(E, \|\cdot\|)$ ist ein Familie $(x_i)_{i \in I}$ von Elementen $x_i \in E$ genau dann summierbar, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine endliche Teilmenge $\Phi \subseteq I$ gibt derart, dass

$$\left\| \sum_{i \in \Psi} x_i \right\| < \varepsilon$$

für jede endliche Teilmenge $\Psi \subseteq I$ mit $\Phi \cap \Psi = \emptyset$.

Beweis. Notwendigkeit der Bedingung: Ist das Netz $(\sum_{i \in \Phi} x_i)_{\Phi \in \mathcal{F}}$ konvergent, so ist es insbesondere ein Cauchy-Netz. Gegeben $\varepsilon > 0$ gibt es also ein $\Phi \in \mathcal{F}$ derart, dass

$$\left\| \sum_{i \in \Xi} x_i - \sum_{i \in \Theta} x_i \right\| < \varepsilon \quad (1)$$

für alle $\Xi, \Theta \in \mathcal{F}$ mit $\Phi \subseteq \Xi$ und $\Phi \subseteq \Theta$. Gegeben $\Psi \in \mathcal{F}$ mit $\Psi \cap \Phi = \emptyset$ können wir $\Xi := \Psi \cup \Phi$ und $\Theta := \Phi$ nehmen; die Differenz der zwei Summen in (1) ist dann $\sum_{i \in \Psi} x_i$.

Die Bedingung ist hinreichend: Gegeben $\varepsilon > 0$ sei Φ wie im Lemma. Für alle $\Xi, \Theta \in \mathcal{F}$ mit $\Phi \subseteq \Xi$ und $\Phi \subseteq \Theta$ gilt dann

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{i \in \Xi} x_i - \sum_{i \in \Theta} x_i \right\| &= \left\| \sum_{i \in \Xi \setminus \Phi} x_i - \sum_{i \in \Theta \setminus \Phi} x_i \right\| \\ &\leq \left\| \sum_{i \in \Xi \setminus \Phi} x_i \right\| + \left\| \sum_{i \in \Theta \setminus \Phi} x_i \right\| < 2\varepsilon, \end{aligned}$$

da sich die Summanden zu Indizes $i \in \Phi$ auslöschen. Somit ist das Netz der endlichen Teilsummen ein Cauchy-Netz, also konvergent.

Satz 28.3

In einem Banachraum ist jede absolut summierbare Familie $(x_i)_{i \in I}$ summierbar.

Beweis. Sei $\mathcal{F} := \mathcal{F}(I)$. Da das Netz $(\sum_{i \in \Phi} \|x_i\|)_{\Phi \in \mathcal{F}}$ in \mathbb{R} konvergiert, gibt es nach Lemma 28.2 ein $\Phi \in \mathcal{F}$ derart, dass

$$(\forall \Psi \in \mathcal{F}) \quad \Psi \cap \Phi = \emptyset \Rightarrow \sum_{i \in \Psi} \|x_i\| < \varepsilon.$$

Für solche Ψ ist $\|\sum_{i \in \Psi} x_i\| \leq \sum_{i \in \Psi} \|x_i\| < \varepsilon$. Nach Lemma 28.2 ist die Familie $(x_i)_{i \in I}$ also summierbar. \square

Wir betrachten nun das Umordnen von Summanden und Zusammenfassen von Teilsommen, zunächst in $[0, \infty]$.

Satz 28.4 (Umordnungssatz in $[0, \infty]$)

Es sei $(x_i)_{i \in I}$ eine Familie in $[0, \infty]$ und $(I_j)_{j \in J}$ eine Familie von Teilmengen $I_j \subseteq I$ derart, dass $I = \bigcup_{j \in J} I_j$ und $I_j \cap I_k = \emptyset$ für alle $j, k \in J$ mit $j \neq k$. Dann gilt

$$\sum_{i \in I} x_i = \sum_{j \in J} \sum_{i \in I_j} x_i.$$

Beweis. Wir kürzen $S := \sum_{i \in I} x_i$ ab. Sei $\Psi \in \mathcal{F}(J)$. Für alle $\Phi_j \in \mathcal{F}(I_j)$ mit $j \in \Psi$ ist dann

$$\Phi := \bigcup_{j \in \Psi} \Phi_j \in \mathcal{F}(I),$$

wobei die Φ_j paarweise disjunkt sind. Schreiben wir $\Psi = \{j_1, \dots, j_n\}$ mit paarweise verschiedenen j_1, \dots, j_n , so ist also

$$\sum_{i \in \Phi_{j_1}} x_i + \dots + \sum_{i \in \Phi_{j_n}} x_i = \sum_{j \in \Psi} \sum_{i \in \Phi_j} x_i = \sum_{i \in \Phi} x_i \leq S.$$

Gehen wir nacheinander in den n Summen auf der linken Seite zum Grenzwert über, erhalten wir wegen der Stetigkeit der Addition $[0, \infty]^2 \rightarrow [0, \infty]$

$$\sum_{j \in \Psi} \sum_{i \in I_j} x_i \leq S.$$

Bildung des Supremums über alle Ψ liefert

$$s := \sum_{j \in J} \sum_{i \in I_j} x_i \leq S.$$

Ist $\Phi \in \mathcal{F}(I)$, so gibt es eine endliche Teilmenge $\Psi \subseteq J$ und endliche Teilmengen $\Phi_j \subseteq I_j$ für $j \in \Psi$ derart, dass

$$\Phi = \bigcup_{j \in \Psi} \Phi_j.$$

Dann ist

$$\sum_{i \in \Phi} x_i = \sum_{j \in \Psi} \sum_{i \in \Phi_j} x_j \leq \sum_{j \in \Psi} \sum_{i \in I_j} x_j \leq \sum_{j \in J} \sum_{i \in I_j} x_j = s.$$

Übergang zum Supremum über alle Φ liefert $S \leq s$. Also ist $s = S$.

Im Falle $I = \mathbb{N}$ (oder \mathbb{N}_0) können wir Summen in $[0, \infty]$ als Reihen deuten.

Satz 28.5

Für jede Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $[0, \infty]$ ist

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} x_n = \sum_{n=1}^{\infty} x_n.$$

Beweis. Die Folge $(\sum_{k=1}^n x_k)_{n \in \mathbb{N}}$ der Anfangssummen ist ein Teilnetz von $(\sum_{k \in \Phi} x_k)_{\Phi \in \mathcal{F}(\mathbb{N})}$, mittels der ordnungserhaltenden Abbildung

$$\lambda: \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{F}(\mathbb{N}), \quad n \mapsto \{1, \dots, n\},$$

konvergiert also gegen den selben Grenzwert in $[0, \infty]$. \square

Entsprechend Satz 28.4 haben wir in Banachräumen:

Satz 28.6 (Umordnungssatz in Banachräumen)

Es sei $(E, \|\cdot\|)$ ein Banachraum, $(x_i)_{i \in I}$ eine Familie in E und $(I_j)_{j \in J}$ eine Familie von Teilmengen $I_j \subseteq I$ derart, dass $I = \bigcup_{j \in J} I_j$ und $I_j \cap I_k = \emptyset$ für alle $j, k \in J$ mit $j \neq k$. Dann gilt:

- (a) Ist $(x_i)_{i \in I}$ summierbar, so ist für jedes $j \in J$ auch $(x_i)_{i \in I_j}$ summierbar, die Familie $(\sum_{i \in I_j} x_i)_{j \in J}$ ist summierbar und

$$\sum_{i \in I} x_i = \sum_{j \in J} \sum_{i \in I_j} x_i.$$

(b) Ist die Familie $(x_i)_{i \in I}$ absolut summierbar, so ist für jedes $j \in J$ die Familie $(x_i)_{i \in I_j}$ absolut summierbar und die Familie $(\sum_{i \in I_j} x_i)_{j \in J}$ ist absolut summierbar.

Beweis. (a) Gegeben $\varepsilon > 0$ gibt es nach Lemma 28.2 ein $\Phi \in \mathcal{F}(I)$ derart, dass

$$\left\| \sum_{i \in \Psi} x_i \right\| < \varepsilon \quad \text{für alle } \Psi \subseteq \mathcal{F}(I) \text{ mit } \Phi \cap \Psi = \emptyset.$$

Für $j \in J$ ist dann $\Phi_j := \Phi \cap I_j \in \mathcal{F}(I_j)$. Für jedes $\Psi \in \mathcal{F}(I_j)$ mit $\Psi \cap \Phi_j = \emptyset$ ist auch $\Psi \cap \Phi = \emptyset$, folglich $\|\sum_{i \in \Psi} x_i\| < \varepsilon$. Nach Lemma 28.2 ist die Familie $(x_i)_{i \in I_j}$ somit summierbar.

Gegeben $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\Theta \in \mathcal{F}(I)$ derart, dass

$$\left\| \sum_{i \in I} x_i - \sum_{i \in \Xi} x_i \right\| < \varepsilon$$

für alle $\Xi \in \mathcal{F}(I)$ mit $\Theta \subseteq \Xi$. Es existieren ein $\Psi \in \mathcal{F}(J)$ und $\Theta_j \in \mathcal{F}(I_j)$ für $j \in \Psi$ derart, dass $\Theta = \bigcup_{j \in \Psi} \Theta_j$. Für $j \in J \setminus \Psi$ sei $\Theta_j := \emptyset$. Sei $\Phi \in \mathcal{F}(J)$ mit $\Phi \supseteq \Psi$. Sind $\Phi_j \in \mathcal{F}(I_j)$ für $j \in \Phi$

beliebig mit $\Theta_j \subseteq \Phi_j$, so ist $\Xi := \bigcup_{j \in \Phi} \Phi_j \supseteq \Theta$ und somit

$$\left\| \sum_{i \in I} x_i - \sum_{j \in \Phi} \sum_{i \in \Phi_j} x_i \right\| = \left\| \sum_{i \in I} x_i - \sum_{i \in \Xi} x_i \right\| < \varepsilon.$$

Wir schreiben $\Phi = \{j_1, \dots, j_n\}$ und führen nacheinander einen Grenzübergang durch in $\Phi_{j_k} \in \mathcal{F}(I_{j_k})$ für $k \in \{1, \dots, n\}$. Dies liefert

$$\left\| \sum_{i \in I} x_i - \sum_{j \in \Phi} \sum_{i \in I_j} x_i \right\| \leq \varepsilon.$$

Da Netz $(\sum_{j \in \Phi} (\sum_{i \in I_j} x_i))_{\Phi \in \mathcal{F}(J)}$ konvergiert also gegen $\sum_{i \in I} x_i$.

(b) Nach Satz 28.4 ist

$$\sum_{j \in J} \sum_{i \in I_j} \|x_i\| = \sum_{i \in I} \|x_i\| < \infty.$$

Folglich ist $\sum_{i \in I_j} \|x_i\| < \infty$ für alle $j \in J$ (somit $(x_i)_{i \in I_j}$ absolut summierbar) und $\sum_{j \in J} \|\sum_{i \in I_j} x_i\| \leq \sum_{j \in J} \sum_{i \in I_j} \|x_i\| < \infty$, also auch $(\sum_{i \in I_j} x_i)_{j \in J}$ absolut summierbar. \square

Folgerung 28.7

Ist $(x_i)_{i \in I}$ eine summierbare Familie in einem Banachraum, so ist $(x_{\pi(i)})_{i \in I}$ eine summierbare Familie für jede bijektive Abbildung $\pi: I \rightarrow I$ und es ist

$$\sum_{i \in I} x_i = \sum_{i \in I} x_{\pi(i)}. \quad (2)$$

Beweis. Anwendung von Satz 28.6 (a) mit $J := I$ und $I_j := \{\pi(j)\}$ zeigt: Die Familie der $\sum_{i \in I_j} x_i = x_{\pi(j)}$ ist über $j \in J = I$ summierbar und

$$\sum_{i \in I} x_i = \sum_{j \in J} \sum_{i \in I_j} x_i = \sum_{j \in I} x_{\pi(j)}. \quad \square$$

(2) gilt auch für $x_i \in [0, \infty]$, als Spezialfall von Satz 28.4.

Satz 28.8

Für jede summierbare Familie $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in einem Banachraum $(E, \|\cdot\|)$ mit Indexmenge \mathbb{N} ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ konvergent und

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} x_n = \sum_{n=1}^{\infty} x_n.$$

Die Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist genau dann absolut summierbar, wenn die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ absolut konvergent ist.

Beweis. Die erste Aussage zeigt man wie Satz 28.5. Die zweite folgt durch Anwendung von Satz 28.5 auf $(\|x_n\|)_{n \in \mathbb{N}}$. \square

Bemerkung 28.9

Eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in \mathbb{R} ist genau dann summierbar, wenn die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ absolut konvergiert (und analog in \mathbb{C}).

Im Falle der Summierbarkeit können die Summanden nämlich beliebig permutiert werden mit gleichem Limes; nach dem Riemannschen Umordnungssatz liegt daher absolute Konvergenz vor.

Für Folgen in $E = \mathbb{R}$ sind Summierbarkeit und absolute Summierbarkeit also äquivalent!

Nicht aber in unendlich-dimensionalen Banachräumen.

Beispiel 28.10

In ℓ^2 ist die Familie $(\frac{1}{n}e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit den Standard-Einheitsvektoren e_n nicht absolut summierbar, da

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \|(1/n)e_n\|_{\ell^2} = \sum_{n \in \mathbb{N}} (1/n) = \sum_{n=1}^{\infty} (1/n) = \infty.$$

Die Familie ist jedoch summierbar.

Zu $\varepsilon > 0$ gibt es nämlich ein $n \in \mathbb{N}$ derart, dass

$\sqrt{\sum_{k=n+1}^{\infty} 1/k^2} < \varepsilon$. Für jedes $\Psi \in \mathcal{F}(\mathbb{N})$ mit $\Psi \cap \{1, \dots, n\} = \emptyset$ gilt

$$\left\| \sum_{k \in \Psi} (1/k)e_k \right\|_{\ell^2} = \sqrt{\sum_{k \in \Psi} 1/k^2} \leq \sqrt{\sum_{k=n+1}^{\infty} 1/k^2} < \varepsilon.$$

Nach Lemma 28.2 ist die Familie $((1/n)e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ also in ℓ^2 summierbar.

Satz 28.11

Ist in einem Banachraum $(E, \|\cdot\|)$ eine Familie $(x_i)_{i \in I}$ summierbar (bzw. absolut summierbar), so ist die Menge

$$I_0 := \{i \in I : x_i \neq 0\}$$

abzählbar. Ist $I_0 \subseteq \{i_1, \dots, i_n\}$ mit $n \in \mathbb{N}_0$ und paarweise verschiedenen i_1, \dots, i_n , so ist

$$\sum_{i \in I} x_i = \sum_{k=1}^n x_{i_k}.$$

Ist $I_0 \subseteq \{i_k : k \in \mathbb{N}\}$ mit paarweise verschiedenen i_k , so ist die Familie $(x_{i_k})_{k \in \mathbb{N}}$ summierbar (bzw. absolut summierbar) und

$$\sum_{i \in I} x_i = \sum_{k \in \mathbb{N}} x_{i_k} = \sum_{k=1}^{\infty} x_{i_k}.$$

Beweis. Es ist $I_0 = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} I_k$ mit

$$I_k := \{i \in I : \|x_i\| \geq 1/k\}.$$

Wäre die erste Aussage falsch, gäbe es also ein $m \in \mathbb{N}$ derart, dass I_m überabzählbar und somit eine unendliche Menge ist. Zu $\varepsilon := 1/m$ gäbe es nach Lemma 28.2 aber eine endliche Teilmenge $\Phi \subseteq I$ derart, dass

$$\left\| \sum_{i \in \Psi} x_i \right\| < \varepsilon$$

für alle endlichen Teilmengen $\Psi \subseteq I$ mit $\Psi \cap \Phi = \emptyset$. Da I_m eine unendliche Menge ist, ist $I_m \setminus \Phi \neq \emptyset$. Wir wählen $j \in I_m \setminus \Phi$. Nehmen wir $\Psi := \{j\}$, so folgt

$$\|x_j\| = \left\| \sum_{i \in \Psi} x_i \right\| < \varepsilon = 1/m,$$

Widerspruch.

Die zweite Aussage ist klar; die letzte folgt aus Satz 28.6 mit $J := \mathbb{N}$, $I_k := \{i_k\}$ für $k \geq 2$ und $I_1 := \{i_1\} \cup (I \setminus I_0)$, da $\sum_{i \in I_1} x_i = x_{i_1}$ (siehe Aussage 2). \square

Beispiel 28.12 (Doppelreihensatz – vgl. Analysis 1 wenn $E = \mathbb{R}$)

Es seien $(E, \|\cdot\|)$ ein Banachraum und $x_{n,m} \in E$ für $n, m \in \mathbb{N}$.

- (a) Ist die Familie $(x_{n,m})_{(n,m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}}$ in E summierbar, so ist für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Folge $(x_{n,m})_{m \in \mathbb{N}}$ summierbar; weiter ist $(\sum_{m=1}^{\infty} x_{n,m})_{n \in \mathbb{N}}$ summierbar. Für jedes $m \in \mathbb{N}$ ist $(x_{n,m})_{n \in \mathbb{N}}$ summierbar und $(\sum_{n=1}^{\infty} x_{n,m})_{m \in \mathbb{N}}$ ist summierbar, mit

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} x_{n,m} = \sum_{(n,m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}} x_{n,m} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} x_{n,m}. \quad (3)$$

- (b) Es ist $M := \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \|x_{n,m}\| = \sum_{(n,m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}} \|x_{n,m}\| = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \|x_{n,m}\|$ und $(x_{n,m})_{(n,m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}}$ ist genau dann absolut summierbar, wenn $M < \infty$.

Beweis. (a) Die ersten zwei Aussagen und die erste Gleichheit in (3) folgen aus Satz 28.6 mit $J := \mathbb{N}$ und $I_n := \{(n, m) : m \in \mathbb{N}\}$, wobei wir wie in Folgerung 28.7 die Bijektion $\mathbb{N} \rightarrow I_n, m \mapsto (n, m)$ nutzen, um I_n durch \mathbb{N} zu ersetzen. Rest von (a) analog mit vertauschten Rollen von n und m ; (b) analog mit Satz 28.4.

Ein topologischer Raum K heißt **quasikompakt**, wenn jede offene Überdeckung von K eine endliche Teilüberdeckung besitzt; ist K zudem Hausdorffsch, so wird K **kompakt** genannt.

Für jede Familie $(V_j)_{j \in J}$ offener Teilmengen $V_j \subseteq K$ mit $\bigcup_{j \in J} V_j = K$ muss also eine endliche Teilmenge $\Phi \subseteq J$ mit $\bigcup_{j \in \Phi} V_j = K$ existieren.

Eine **Teilmenge** K eines topologischen Raums X wird **kompakt** bzw. quasikompakt genannt, wenn K in der induzierten Topologie ein kompakter (bzw. quasikompakter) topologischer Raum ist.

(X, \mathcal{O}) induziert auf K die Topologie $\{K \cap W : W \in \mathcal{O}\}$. Also:

$K \subseteq X$ ist genau dann quasikompakt, wenn für jede Familie $(W_j)_{j \in J}$ offener Teilmengen W_j von X mit $K \subseteq \bigcup_{j \in J} W_j$ eine endliche Teilmenge $\Phi \subseteq J$ existiert mit $K \subseteq \bigcup_{j \in \Phi} W_j$.

Auch hier nenne $(W_j)_{j \in J}$ eine offene Überdeckung von K .

§29 Kompakte und lokalkompakte Räume; Urysohnsches Lemma

Wir zeigen, dass es auf jedem kompakten topologischen Raum K stetige Funktionen mit wünschenswerten Eigenschaften existieren und insbesondere $C(K, \mathbb{R})$ die Punkte von K trennt. Ähnliche Resultate sind für lokalkompakte Räume verfügbar.

Der folgende Satz fasst Eigenschaften kompakter bzw. quasikompakter topologischer Räume zusammen, die vielen aus der Analysis bekannt sind; die Beweise sind zwar der Vollständigkeit halber hier angegeben, werden in der Vorlesung aber übersprungen.

Satz 29.1

- (a) Jede abgeschlossene Teilmenge A eines quasikompakten topologischen Raums K ist quasikompakt.
- (b) Ist X ein Hausdorffscher topologischer Raum, so ist jede kompakte Teilmenge $K \subseteq X$ in X abgeschlossen.

- (c) Ist K ein quasikompakter topologischer Raum und $f: K \rightarrow Y$ eine stetige Abbildung in einen topologischen Raum Y , so ist $f(K)$ quasikompakt in der induzierten Topologie.
- (d) (Lemma von Wallace). Sind X_1 und X_2 topologische Räume, $K_j \subseteq X_j$ quasikompakt für $j \in \{1, 2\}$ und $U \subseteq X_1 \times X_2$ eine in der Produkttopologie offene Teilmenge mit $K_1 \times K_2 \subseteq U$, so gibt es eine offene Teilmenge $P \subseteq X_1$ mit $K_1 \subseteq P$ und eine offene Teilmenge $Q \subseteq X_2$ mit $K_2 \subseteq Q$ derart, dass $P \times Q \subseteq U$.

Beweis. (a) Ist $(W_j)_{j \in J}$ eine Familie offener Teilmengen von K mit $A \subseteq \bigcup_{j \in J} W_j$, so bilden die Mengen W_j für $j \in J$, zusammen mit der offenen Menge $K \setminus A$, eine offene Überdeckung für K . Da K quasikompakt ist, gibt es eine endliche Teilmenge $\Phi \subseteq J$ mit

$$K = (K \setminus A) \cup \bigcup_{j \in \Phi} W_j.$$

Dann ist $A \subseteq \bigcup_{j \in \Phi} W_j$, also A quasikompakt.

(b) Der Fall $K = \emptyset$ ist trivial; sei also $K \neq \emptyset$. Zu jedem $y \in X \setminus K$ existieren für jedes $x \in K$ eine offene x -Umgebung P_x in X und eine offene y -Umgebung Q_x in X derart, dass $P_x \cap Q_x = \emptyset$. Dann ist $K \subseteq \bigcup_{x \in \Phi} P_x$ für eine endliche Teilmenge $\Phi \subseteq K$. Als Durchschnitt endlich vieler offener y -Umgebungen ist $Q := \bigcap_{x \in \Phi} Q_x$ eine offene y -Umgebung in X . Weiter gilt

$$Q \cap K \subseteq Q \cap \bigcup_{x \in \Phi} P_x = \bigcup_{x \in \Phi} (Q \cap P_x) \subseteq \bigcup_{x \in \Phi} (Q_x \cap P_x) = \emptyset,$$

somit $Q \subseteq X \setminus K$. Also ist $X \setminus K$ eine Umgebung jeden Punktes darin und somit offen, also K abgeschlossen.

(c) Ist $(W_j)_{j \in J}$ eine Familie offener Teilmengen von Y mit $f(K) \subseteq \bigcup_{j \in J} W_j$, so sind die Urbilder $f^{-1}(W_j)$ offene Teilmengen von K mit $K = \bigcup_{j \in J} f^{-1}(W_j)$. Da K quasikompakt ist, existiert eine endliche Teilmenge $\Phi \subseteq J$ derart, dass $K = \bigcup_{j \in \Phi} f^{-1}(W_j)$. Dann ist

$$f(K) = f\left(\bigcup_{j \in \Phi} f^{-1}(W_j)\right) = \bigcup_{j \in \Phi} f(f^{-1}(W_j)) \subseteq \bigcup_{j \in \Phi} W_j.$$

(d) Ist $K_1 = \emptyset$ oder $K_2 = \emptyset$, ist die Behauptung trivial. Sei also $K_1 \neq \emptyset$ und $K_2 \neq \emptyset$. Für alle $x \in K_1$ und $y \in K_2$ gibt es per Definition der Produkttopologie eine offene x -Umgebung $P_{x,y}$ in X_1 und eine offene y -Umgebung $Q_{x,y}$ in X_2 derart, dass

$$P_{x,y} \times Q_{x,y} \subseteq U.$$

Für festes $y \in K_2$ ist $(P_{x,y})_{x \in K_1}$ eine offene Überdeckung von K_1 , es gibt also eine endliche Teilmenge $\Phi_y \subseteq K_1$ derart, dass

$$K_1 \subseteq \bigcup_{x \in \Phi_y} P_{x,y} =: P_y.$$

Weiter ist $Q_y := \bigcap_{x \in \Phi_y} Q_{x,y}$ eine offene y -Umgebung in X_2 und

$$P_y \times Q_y = \left(\bigcup_{x \in \Phi_y} P_{x,y} \right) \times Q_y = \bigcup_{x \in \Phi_y} (P_{x,y} \times Q_y) \subseteq \bigcup_{x \in \Phi_y} (P_{x,y} \times Q_{x,y}) \subseteq U.$$

Da $K_2 \subseteq \bigcup_{y \in K_2} Q_y$, gibt es eine endliche Teilmenge $\Psi \subseteq K_2$ derart, dass $K_2 \subseteq \bigcup_{y \in \Psi} Q_y =: Q$. Dann ist $P := \bigcap_{y \in \Psi} P_y$ eine offene Teilmenge von X_1 mit $K_1 \subseteq P$. Weiter gilt wie gewünscht

$$P \times Q = P \times \left(\bigcup_{y \in \Psi} Q_y \right) = \bigcup_{y \in \Psi} (P \times Q_y) \subseteq \bigcup_{y \in \Psi} (P_y \times Q_y) \subseteq U. \quad \square$$

Folgerung 29.2

Ist K ein kompakter topologischer Raum und $f: K \rightarrow Y$ eine stetige Abbildung in einen Hausdorffschen topologischen Raum Y , so ist f eine abgeschlossene Abbildung. Ist f zudem injektiv, so ist f eine topologische Einbettung (ein Homöomorphismus aufs Bild).

Beweis. Jede abgeschlossene Teilmenge $A \subseteq K$ ist nach Satz 29.1 (a) kompakt, somit $f(A)$ nach Satz 29.1 (c) quasikompakt und somit kompakt, da Y und somit auch $f(A)$ Hausdorffsch ist. Als kompakte Teilmenge von Y ist $f(A)$ abgeschlossen, nach Satz 29.1 (b). \square

Definition 29.3

Ein topologischer Raum X wird **normal** genannt, wenn er Hausdorffsch ist und für alle abgeschlossenen Teilmengen $A, B \subseteq X$ mit $A \cap B = \emptyset$ offene Teilmengen $P \subseteq X$ und $Q \subseteq X$ existieren derart, dass $A \subseteq P$, $B \subseteq Q$ und $P \cap Q = \emptyset$.

Disjunkte abgeschlossene Teilmengen haben in X also stets disjunkte Umgebungen.

Satz 29.4

Jeder kompakte topologische Raum K ist normal.

Beweis. Seien A und B abgeschlossene Teilmengen von K , die disjunkt sind, also $(A \times B) \cap \Delta_K = \emptyset$ mit der Diagonalen $\Delta_K := \{(x, x) : x \in K\}$ von $K \times K$. Nach Satz 29.1 (a) sind A und B kompakte Teilmengen von K . Da K Hausdorffsch ist, ist Δ_K nach Satz 27.20 abgeschlossen in $K \times K$, somit das Komplement

$$(K \times K) \setminus \Delta_K$$

offen in $K \times K$. Da das Komplement $A \times B$ enthält, gibt es nach dem Lemma von Wallace (Satz 29.1 (d)) offene Teilmengen $P, Q \subseteq K$ derart, dass $A \subseteq P$, $B \subseteq Q$ und $P \times Q \subseteq (K \times K) \setminus \Delta_K$, also $P \cap Q = \emptyset$. \square

Satz 29.5 (Urysohnsches Lemma für normale Räume)

Ist X ein normaler topologischer Raum und sind $A, B \subseteq X$ abgeschlossene Teilmengen mit $A \cap B = \emptyset$, so gibt es eine stetige Funktion $f: X \rightarrow [0, 1]$ derart, dass $f|_A = 0$ und $f|_B = 1$.

Der Beweis zeigt, dass man sogar immer erreichen kann, dass $f|_P = 0$ für eine offene Teilmenge $P \subseteq X$ mit $A \subseteq P$ und $f|_Q = 1$ für eine offene Teilmenge $Q \subseteq X$ mit $B \subseteq Q$.

Beim Beweis des Urysohnschen Lemmas nutzt eine Beobachtung.

Lemma 29.6

Ist X ein normaler topologischer Raum, $V \subseteq X$ eine offene Teilmenge und $A \subseteq X$ eine abgeschlossene Teilmenge mit $A \subseteq V$, so existiert eine offene Teilmenge $P \subseteq X$ derart, dass $A \subseteq P$ und der Abschluss in X die Bedingung $\overline{P} \subseteq V$ erfüllt.

Beweis. Das Komplement $B := X \setminus V$ ist abgeschlossen in X und disjunkt zu A , da $A \subseteq V$. Da X normal ist, gibt es also offene Teilmengen $P, Q \subseteq X$ derart, dass $A \subseteq P$, $B \subseteq Q$ und $P \cap Q = \emptyset$. Also ist $P \subseteq X \setminus Q$. Da diese Menge abgeschlossen ist, folgt $\overline{P} \subseteq X \setminus Q \subseteq X \setminus B = V$. \square

Den folgenden Begriff benutzen wir nur in den anschließenden zwei Beweisen.

Definition 29.7

Es sei X ein topologischer Raum. Wir definieren die **Oszillation** einer Funktion $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ an einer Stelle $x \in X$ als

$$\text{osc}_x(f) := \inf_{V \in \mathcal{U}_x(X)} \sup_{y \in V} |f(y) - f(x)| \in [0, \infty].$$

Es ist also f genau dann an der Stelle x stetig, wenn $\text{osc}_x(f) = 0$.

Lemma 29.8

Es sei X ein topologischer Raum und $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge beliebiger (nicht notwendig stetiger) Funktionen $f_n: X \rightarrow \mathbb{R}$, die gleichmäßig gegen eine Funktion $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ konvergiert. Ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{osc}_x(f_n) = 0$$

für jedes $x \in X$, so ist f stetig.

Beweis. Wir zeigen f ist stetig an einer gegebenen Stelle $x \in X$. Sei $\varepsilon > 0$. Wegen der gleichmäßigen Konvergenz existiert ein

$N \in \mathbb{N}$ derart, dass

$$(\forall n \geq N) (\forall y \in X) |f(y) - f_n(y)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Weil $\text{osc}_x(f_n) \rightarrow 0$, dürfen wir nach Vergrößern von N annehmen, dass zudem

$$(\forall n \geq N) \text{osc}_x(f_n) < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Insbesondere gilt $\text{osc}_x(f_N) < \varepsilon/3$. Also gibt es eine x -Umgebung $V \subseteq X$ derart, dass

$$\sup_{y \in V} |f_N(y) - f_N(x)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Dann gilt für alle $y \in V$

$$|f(y) - f(x)| \leq \underbrace{|f(y) - f_N(y)|}_{< \varepsilon/3} + \underbrace{|f_N(y) - f_N(x)|}_{< \varepsilon/3} + \underbrace{|f_N(x) - f(x)|}_{< \varepsilon/3}.$$

Also ist f stetig an der Stelle x . \square

Beweis des Urysohnschen Lemmas (Satz 29.5). Nach Lemma 29.6 gibt es eine offene Teilmenge $P_0 \subseteq X$ mit $A \subseteq P_0$ und Abschluss $\overline{P_0} \subseteq X \setminus B =: P_1$. Rekursiv finden wir für jedes $n \in \mathbb{N}$ offene Teilmengen

$$P_{k/2^n} \quad \text{für } k \in \{0, 1, \dots, 2^n\}$$

von X derart, dass $A \subseteq P_0$, $P_1 = X \setminus B$,

$$\overline{P_{k/2^n}} \subseteq P_{(k+1)/2^n} \quad \text{für alle } k \in \{0, \dots, 2^n - 1\}$$

und zudem die Mengen unabhängig von n sind (also die im Falle $n + 1$ gewählte Menge zum Index $2k/2^{n+1}$ die bereits im n ten Schritt konstruierte Menge $P_{k/2^n}$ ist).

Für $n = 0$ haben wir solche Mengen nämlich schon (siehe oben). Sind die Mengen für n bereits gefunden, so liefert Lemma 29.6 für jedes $k \in \{0, \dots, 2^n - 1\}$ eine offene Teilmenge

$P_{(2k+1)/2^{n+1}} = P_{\frac{k}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}}}$ von X derart, dass

$$\overline{P_{k/2^n}} \subseteq P_{(2k+1)/2^{n+1}} \quad \text{und} \quad \overline{P_{(2k+1)/2^{n+1}}} \subseteq P_{(k+1)/2^n}.$$

Für $n \in \mathbb{N}_0$ definieren wir

$$f_n: X \rightarrow [0, 1], \quad x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{wenn } x \in P_0; \\ k/2^n & \text{wenn } x \in P_{k/2^n} \setminus P_{(k-1)/2^n} \text{ mit} \\ & k \in \{1, \dots, 2^n - 1\}; \\ 1 & \text{wenn } x \in X \setminus P_{(2^n-1)/2^n}. \end{cases}$$

Wir prüfen nun die Voraussetzungen von Lemma 29.8 für die f_n nach. Sind diese erfüllt, so konvergiert die Funktionenfolge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ gleichmäßig gegen eine stetige Funktion $f: X \rightarrow [0, 1]$. Da $f_n|_{P_0} = 0$ für jedes $n \in \mathbb{N}$, ist dann $f|_{P_0} = 0$, insb. also $f|_A = 0$. Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ ist $P_{(2^n-1)/2^n} \subseteq P_1 = X \setminus B$ und somit

$$B \subseteq X \setminus P_{(2^n-1)/2^n},$$

also $f_n|_B = 1$ und somit $f|_B = 1$, wie gewünscht.

(Wenn wir noch f durch $x \mapsto \min\{1, 2f(x)\}$ ersetzen, ist f sogar auf einer Umgebung von B konstant 1).

Oszillation von f_n : Auf der offenen Menge $X \setminus \overline{P_{(2^n-1)/2^n}}$ ist f_n konstant (nämlich 1), also $\text{osc}_x(f_n) = 0$ für alle x in dieser Menge (insbesondere für $x \in B$). Analog für $x \in P_0$, mit $f_n|_{P_0} = 0$. Sei nun $x \in (X \setminus B)/P_0 = P_1 \setminus P_0$. Wir wählen $k \in \{1, \dots, 2^n\}$ mit $x \in P_{k/2^n}$ minimal, so dass also

$$x \in P_{k/2^n} \setminus P_{(k-1)/2^n}.$$

Ist $k = 1$, so ist $V := P_{k/2^n}$ eine offene x -Umgebung derart, dass $f_n(y) \in \{0, 2^{-n}\}$ für alle $y \in V$ und somit

$$\operatorname{osc}_x(f_n) \leq 2^{-n}. \quad (1)$$

Ist $k \geq 2$, so ist $V := P_{k/2^n} \setminus \overline{P_{(k-2)/2^n}}$ eine offene Obermenge von $P_{k/2^n} \setminus P_{(k-1)/2^n}$ und somit eine offene x -Umgebung. Da $V \subseteq P_{k/2^n} \setminus P_{(k-2)/2^n}$, gilt $f(y) \in \{k/2^n, (k-1)/2^n\}$ für alle $y \in V$ und somit wieder (1). Für jedes $x \in X$ ist also $\operatorname{osc}_x(f_n) \leq 2^{-n}$ und somit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{osc}_x(f_n) = 0.$$

Wir behaupten, dass $\|f_{n+1} - f_n\|_\infty \leq 1/2^{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Wenn dies stimmt, ist $\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n - f_{n-1}\|_\infty < \infty$ und somit nach dem Konvergenzssatz von Weierstraß die Funktionenfolge

$$\sum_{k=1}^n (f_k - f_{k-1}) = f_n - f_0$$

für $n \rightarrow \infty$ gleichmäßig konvergent und somit auch die Folge der Funktionen $f_n = (f_n - f_0) + f_0$.

Zum Beweis der Behauptung erinnern wir daran, dass $f_n(x) = f_{n+1}(x) = 0$ für $x \in P_0$ und $f_n(x) = f_{n+1}(x) = 1$ für $x \in B$, somit $|f_{n+1}(x) - f_n(x)| = 0$ in beiden Fällen. Andernfalls ist $x \in P_{k/2^n} \setminus P_{(k-1)/2^n}$ für genau ein $k \in \{1, \dots, 2^n\}$.

Erster Fall: Ist

$$x \in P_{2k/2^{n+1}} \setminus P_{(2k-1)/2^{n+1}},$$

so ist $f_{n+1}(x) = 2k/2^{n+1} = k/2^n = f_n(x)$, also $|f_{n+1}(x) - f_n(x)| = 0$.

Zweiter Fall: Ist $x \in B_{(2k-1)/2^{n+1}} \setminus B_{(2k-2)/2^{n+1}}$, so ist

$$f_{n+1}(x) = (2k-1)/2^{n+1} = k/2^n - 1/2^{n+1} = f_n(x) - 1/2^{n+1},$$

also $|f_{n+1}(x) - f_n(x)| = 1/2^{n+1}$. \square

Definition 29.9

Ein topologischer Raum X heißt **lokalkompakt**, wenn X Hausdorffsch ist und für jedes $x \in X$ jede x -Umgebung $U \subseteq X$ eine kompakte x -Umgebung $K \subseteq X$ enthält.

Beispiele 29.10

(a) \mathbb{R}^n ist lokalkompakt, denn für jedes $x \in \mathbb{R}^n$ und jedes $\varepsilon > 0$ ist die abgeschlossene Kugel $\overline{B}_\varepsilon(x)$ (bezüglich einer gegebenen Norm) kompakt.

(b) Jede offene Teilmenge U eines lokalkompakten Raums X ist lokalkompakt (insb. also jede offene Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}^n$).

Für jedes $x \in U$ ist jede x -Umgebung V in U nämlich auch eine x -Umgebung in X ; es existiert also eine kompakte x -Umgebung $K \subseteq X$ mit $K \subseteq V$. Diese ist auch als Teilmenge von U eine kompakte x -Umgebung.

(c) Jede abgeschlossene Teilmenge A eines lokalkompakten topologischen Raums X ist lokalkompakt.

Ist nämlich $x \in A$ und U eine relativ offene x -Umgebung in A , so ist $U = A \cap V$ mit einer offenen x -Umgebung $V \subseteq X$. Es existiert eine kompakte x -Umgebung $K \subseteq X$ mit $K \subseteq V$. Dann ist $A \cap K$ eine relativ abgeschlossene Teilmenge von K , also kompakt. Weiter ist $A \cap K$ eine x -Umgebung in A mit $A \cap K \subseteq A \cap V = U$.

(d) In jeder Mannigfaltigkeit M (z.B. einer Untermannigfaltigkeit von \mathbb{R}^n) hat jeder Punkt eine offene Umgebung, die zu einer offenen Teilmenge in \mathbb{R}^k homöomorph und somit lokalkompakt ist. Also ist M lokalkompakt.

Im folgenden Beweis benutzen wir, dass in einem Hausdorffraum X für jedes $x \in X$ die einpunktige Menge $\{x\}$ in X abgeschlossen ist. Jedes $y \in X \setminus \{x\}$ hat wegen der Hausdorff-Eigenschaft nämlich eine zu $\{x\}$ disjunkte Umgebung V . Es ist also $V \subseteq X \setminus \{x\}$, somit $X \setminus \{x\}$ eine Umgebung von y . Also ist $X \setminus \{x\}$ offen und somit $\{x\}$ abgeschlossen.

Satz 29.11

Jeder kompakte topologische Raum K ist lokalkompakt.

Beweis. Sei $x \in K$ und $U \subseteq K$ eine offene x -Umgebung. Da K nach Satz 29.4 normal ist und die einpunktige Menge $A := \{x\}$ in K abgeschlossen ist, gibt es nach Lemma 29.6 eine offene Teilmenge $P \subseteq K$ derart, dass $\{x\} \subseteq P$ und $K := \overline{P} \subseteq U$. Dann ist K kompakt und eine x -Umgebung in U . \square

Lemma 29.12

Ist X ein lokalkompakter topologischer Raum, $K \subseteq X$ eine kompakte Teilmenge und $U \subseteq X$ eine offene Teilmenge mit $K \subseteq U$, so gibt es eine kompakte Teilmenge $L \subseteq U$ mit $K \subseteq L^\circ$.

Beweis. Für jedes $x \in K$ existiert eine kompakte x -Umgebung $K_x \subseteq X$ mit $K_x \subseteq U$. Da K kompakt ist, existiert eine endliche Teilmenge $\Phi \subseteq K$ mit

$$K \subseteq \bigcup_{x \in \Phi} (K_x)^\circ.$$

Dann ist $L := \bigcup_{x \in \Phi} K_x$ eine kompakte Teilmenge von U mit $L^\circ \supseteq \bigcup_{x \in \Phi} (K_x)^\circ \supseteq K$. \square

Definition 29.13

Ist X ein topologischer Raum und $f: X \rightarrow E$ eine Abbildung in einen Vektorraum E (z.B. $E = \mathbb{K}$), so nennen wir den Abschluss

$$\operatorname{supp}(f) := \overline{\{x \in X : f(x) \neq 0\}}$$

den **Träger** von f . Ist X lokalkompakt und E ein topologischer Vektorraum, so schreiben wir $C_c(X, E)$ für die Menge aller stetigen Funktionen $f: X \rightarrow E$ mit kompaktem Träger $\operatorname{supp}(f)$.

Da $\operatorname{supp}(\lambda f) \subseteq \operatorname{supp}(f)$ und $\operatorname{supp}(f + g) \subseteq \operatorname{supp}(f) \cup \operatorname{supp}(g)$ für $f, g \in C_c(X, E)$ und $\lambda \in \mathbb{K}$, ist $C_c(X, E)$ ein Untervektorraum von E^X (und von $C(X, E)$).

Satz 29.14 (Urysohnsches Lemma für lokalkompakte Räume)

Ist X ein lokalkompakter topologischer Raum, $K \subseteq X$ eine kompakte Teilmenge und $U \subseteq X$ eine offene Teilmenge mit $K \subseteq U$, so existiert ein $f \in C_c(X, \mathbb{R})$ derart, dass $f(X) \subseteq [0, 1]$, $f|_K = 1$ und $\operatorname{supp}(f) \subseteq U$.

Man kann sogar erreichen, dass $f|_V = 1$ auf einer offenen Teilmenge $V \subseteq X$ mit $K \subseteq V$.

Beweis. Nach Lemma 29.12 gibt es eine kompakte Teilmenge $L \subseteq U$ mit $K \subseteq L^\circ$. Dann sind K und $L \setminus L^\circ$ disjunkte abgeschlossene Teilmengen von L . Da L nach Satz 29.4 normal ist, gibt es nach Satz 29.5 eine stetige Funktion $g: L \rightarrow [0, 1]$ derart, dass $g|_Q = 1$ für eine relativ offene Teilmenge $Q \subseteq L$ mit $K \subseteq Q$ und $g|_P = 0$ für eine relativ offene Teilmenge $P \subseteq L$ mit $L \setminus L^\circ \subseteq P$. Nach Ersetzen von Q durch $Q \cap L^\circ$ dürfen wir annehmen, dass Q auch in X offen ist. Man beachte, dass $\text{supp}(g) \subseteq L \setminus P \subseteq L^\circ$. Als abgeschlossene Teilmenge von L ist $\text{supp}(g)$ kompakt, somit auch in X abgeschlossen. Also ist $X \setminus \text{supp}(g)$ offen, folglich

$$f: X \rightarrow [0, 1], \quad x \mapsto \begin{cases} g(x) & \text{wenn } x \in L^\circ; \\ 0 & \text{wenn } x \in X \setminus \text{supp}(g) \end{cases}$$

eine stetige Funktion. Per Konstruktion gilt $f|_Q = g|_Q = 1$ und $\{x \in X: f(x) \neq 0\} \subseteq \{x \in L^\circ: g(x) \neq 0\} \subseteq \text{supp}(g)$, also $\text{supp}(f) \subseteq \text{supp}(g) \subseteq U$. \square

Folgerung 29.15

Auf jedem lokalkompakten topologischen Raum X trennt $C_c(X, \mathbb{R})$ die Punkte. Auf jedem kompakten topologischen Raum K trennt $C(K, \mathbb{R})$ die Punkte.

Beweis. Sind $x \neq y$ in X , so ist $\{x\}$ eine kompakte Teilmenge von X und $X \setminus \{y\}$ eine offene Teilmenge mit $\{x\} \subseteq X \setminus \{y\}$. Nach dem Urysohnschen Lemma gibt es ein $f \in C_c(X, \mathbb{R})$ derart, dass $f|_{\{x\}} = 1$ (also $f(x) = 1$) und $\text{supp}(f) \subseteq X \setminus \{y\}$, so dass insbesondere $f(y) = 0$. \square

Folgerung 29.16

Ist K ein kompakter topologischer Raum und $(U_j)_{j \in J}$ eine offene Überdeckung von K , so gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ und stetige Funktionen $h_1, \dots, h_n: K \rightarrow [0, 1]$ mit

$$\sum_{k=1}^n h_k = 1$$

derart, dass für jedes $k \in \{1, \dots, n\}$ ein $j(k) \in J$ existiert mit $\text{supp}(h_k) \subseteq U_{j(k)}$.

Mann nennt $(h_k)_{k \in \{1, \dots, n\}}$ eine $(U_j)_{j \in J}$ untergeordnete **Partition der Eins**.²

Beweis von Folgerung 29.16. Für jedes $x \in K$ existiert ein $j_x \in J$ mit $x \in U_{j_x}$. Nach dem Urysohnschen Lemma gibt es ein $f_x \in C(K, \mathbb{R})$ mit $f_x \geq 0$ derart, dass $f_x(x) = 1$ und $\text{supp}(f_x) \subseteq U_{j_x}$. Dann ist $(f_x^{-1}(]0, \infty[))_{x \in K}$ eine offene Überdeckung von K ; es existiert somit eine endliche Teilmenge $\Phi \subseteq K$ mit $K = \bigcup_{x \in \Phi} f_x^{-1}(]0, \infty[)$. Sei $\Phi = \{x_1, \dots, x_n\}$ mit paarweise verschiedenen Elementen x_1, \dots, x_n . Für $k \in \{1, \dots, n\}$ sei $g_k := f_{x_k}$. Dann ist

$$g(x) := \sum_{k=1}^n g_k(x) > 0$$

für alle $x \in K$ und $g: K \rightarrow]0, \infty[$ ist stetig. Für jedes $k \in \{1, \dots, n\}$ ist

$$h_k: K \rightarrow [0, 1], \quad x \mapsto g_k(x)/g(x)$$

stetig und es gilt $\sum_{k=1}^n h_k = (\sum_{k=1}^n g_k)/g = 1$. Weiter ist $\text{supp}(h_k) = \text{supp}(g_k) = \text{supp}(f_{x_k}) \subseteq U_{j(k)}$ mit $j(k) := j_{x_k}$. \square

²Partitionen der Eins existieren allgemeiner für σ -kompakte lokalkompakte Räume und für parakompakte topologische Räume (siehe Seminar):

Folgerung 29.17

Für jeden kompakten topologischen Raum und jeden normierten Raum $(E, \|\cdot\|_E)$ ist $C(K, E)_{\text{fin}} = C(K, \mathbb{K}) \otimes E$ dicht in $(C(K, E), \|\cdot\|_\infty)$.

Beweis. Sei $f \in C(K, E)$ und $\varepsilon > 0$. Für jedes $y \in K$ gibt es eine offene y -Umgebung $U_y \subseteq K$ derart, dass

$$(\forall x \in U_y) \quad \|f(x) - f(y)\|_E < \varepsilon.$$

Sei $(h_k)_{k \in \{1, \dots, n\}}$ eine $(U_y)_{y \in K}$ untergeordnete Partition der Eins. Für $k \in \{1, \dots, n\}$ sei $y(k) \in K$ mit $\text{supp}(h_k) \subseteq U_{y(k)}$. Dann ist

$$g := \sum_{k=1}^n h_k f(y(k)) \in C(K, \mathbb{K}) \otimes E.$$

Sei $x \in K$ und $k \in \{1, \dots, n\}$. Ist $h_k(x) \neq 0$, so ist $x \in \text{supp}(h_k) \subseteq U_{y(k)}$ und somit $\|f(x) - f(y_k)\|_E < \varepsilon$, folglich

$$\|f(x) - f(y_k)\|_E h_k(x) \leq \varepsilon h_k(x). \quad (2)$$

Ist $h_k(x) = 0$, so gilt (2) trivialerweise. Wegen $1 = \sum_{k=1}^n h_k(x)$ ist

also

$$\begin{aligned}\|f(x) - g(x)\|_E &= \left\| \left(\sum_{k=1}^n h_k(x) \right) f(x) - \sum_{k=1}^n h_k(x) f(y_k) \right\|_E \\ &= \left\| \sum_{k=1}^n h_k(x) (f(x) - f(y_k)) \right\|_E \\ &\leq \sum_{k=1}^n \|f(x) - f(y_k)\|_E h_k(x) \\ &\leq \sum_{k=1}^n \varepsilon h_k(x) = \varepsilon,\end{aligned}$$

somit $\|f - g\|_\infty \leq \varepsilon$. \square

§30 Der Approximationssatz von Stone-Weierstraß

Wir beweisen den Approximationssatz von Stone-Weierstraß.

Definition 30.1

Es sei K ein kompakter topologischer Raum. Eine Teilmenge $A \subseteq C(K, \mathbb{K})$ heißt **Unteralgebra**, wenn gilt:

- (a) A ist ein Untervektorraum von $C(K, \mathbb{K})$;
- (b) $fg \in A$ für alle $f, g \in A$; und
- (c) $1 \in A$ (die konstante Funktion $K \rightarrow \mathbb{K}, x \mapsto 1$).

Im Falle $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ definieren wir für $f \in C(K, \mathbb{C})$ die komplex konjugierte Funktion $\bar{f} \in C(K, \mathbb{C})$ via $\bar{f}(x) := \overline{f(x)}$ für $x \in K$. Gilt $\bar{f} \in A$ für alle $f \in A$, so wird A **konjugationsinvariant** genannt.

Satz 30.2 (Approximationssatz von Stone-Weierstraß – reelle Form)

Es sei K ein kompakter topologischer Raum und $A \subseteq C(K, \mathbb{R})$ eine Unteralgebra, welche die Punkte von K trennt. Dann ist A dicht in $(C(K, \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$.

Bevor wir den Satz beweisen, halten wir zwei Folgerungen fest.

Folgerung 30.3 (Weierstraßscher Approximationssatz)

Für alle reellen Zahlen $a < b$, jede stetige Funktion $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ und jedes $\varepsilon > 0$ gibt es eine Polynomfunktion $p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ derart, dass

$$(\forall x \in [a, b]) \quad |f(x) - p(x)| < \varepsilon.$$

Beweis. Sei A die Menge aller Einschränkungen $p|_{[a,b]}$ von Polynomfunktionen $p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Da A eine Unteralgebra von $C([a, b], \mathbb{R})$ ist und die Punkte von $[a, b]$ trennt, ist A nach Satz 30.2 dicht in $C([a, b], \mathbb{R})$. \square

Folgerung 30.4

Für alle $a < b$ in \mathbb{R} ist die Menge $C^\infty([a, b], \mathbb{R})$ aller glatten reellwertigen Funktionen auf $[a, b]$ dicht in $(C([a, b], \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$.

Beweis. Da $C^\infty([a, b], \mathbb{R})$ eine Unteralgebra von $C([a, b], \mathbb{R})$ ist und die Punkte von $[a, b]$ trennt, ist $C^\infty([a, b], \mathbb{R})$ nach Satz 30.2 dicht in $C([a, b], \mathbb{R})$. \square

Beim Beweis von Satz 30.2 nutzt uns der folgende Sachverhalt.

Satz 30.5 (Satz von Dini)

Es sei K ein kompakter topologischer Raum und $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge stetiger Funktionen $f_n: K \rightarrow [0, \infty[$ derart, dass für jedes $x \in K$

$$f_1(x) \geq f_2(x) \geq \dots.$$

Dann existiert für jedes $x \in K$ der Limes

$f(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \in [0, \infty[$. Ist $f: K \rightarrow [0, \infty[$ stetig, so konvergiert $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ für $n \rightarrow \infty$ gleichmäßig gegen f .

Beweis. O.B.d.A. sei $K \neq \emptyset$. Sei $\varepsilon > 0$. Für jedes $x \in K$ existiert ein $n(x) \in \mathbb{N}$ mit

$$f_{n(x)}(x) \in \left[f(x), f(x) + \frac{\varepsilon}{3} \right].$$

Da $f_{n(x)}$ stetig ist, gibt es eine offene x -Umgebung $U(x) \subseteq K$ mit

$$(\forall y \in U(x)) \quad |f_{n(x)}(y) - f_{n(x)}(x)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Da f stetig ist, gilt nach Verkleinern von $U(x)$ zudem

$$(\forall y \in U(x)) \quad |f(y) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Für alle $n \geq n(x)$ und $y \in U(x)$ ist dann $f_n(y) \in [f(y), f_{n(x)}(y)]$ mit

$$\begin{aligned} |f_{n(x)}(y) - f(y)| &\leq |f_{n(x)}(y) - f_{n(x)}(x)| + |f_{n(x)}(x) - f(x)| + |f(x) - f(y)| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon, \end{aligned}$$

also $f_n(y) \in [f(y), f(y) + \varepsilon[$ und somit $|f(y) - f_n(y)| < \varepsilon$. Es existiert eine endliche Teilmenge $\Phi \subseteq K$ mit $K = \bigcup_{x \in \Phi} U(x)$. Setzen wir $N := \max\{n(x) : x \in \Phi\}$, so gilt nach dem Vorigen $|f(y) - f_n(y)| < \varepsilon$ für alle $n \geq N$ und $y \in K$. \square

Als weitere Hilfsmittel beweisen wir vorab zwei Spezialfälle des Weierstraßschen Approximationssatzes.

Lemma 30.6

Für alle $a < b$ in $]0, \infty[$ gibt es eine Folge $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Polynomfunktionen $p_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ derart, dass

$$p_n(x) \rightarrow \frac{1}{x}$$

für $n \rightarrow \infty$, gleichmäßig für $x \in [a, b]$.

Beweis. Für jedes $x \in [a, b]$ ist

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{b} \frac{1}{1 - (1 - \frac{x}{b})}$$

mit $\frac{a}{b} \leq \frac{x}{b} \leq 1$ und somit $0 \leq 1 - \frac{x}{b} \leq 1 - \frac{a}{b} < 1$. Die geometrische Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} z^k$ ist eine Potenzreihe mit Konvergenzradius 1 und Grenzwert $1/(1 - z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$. Für $|z| \leq 1 - \frac{a}{b}$ ist die Konvergenz somit gleichmäßig. Insbesondere sind

$$f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad t \mapsto \frac{1}{b} \sum_{k=0}^n t^k$$

Polynomfunktionen derart, dass $f_n(x) \rightarrow \frac{1}{b} \frac{1}{1-t} =: f(x)$ für $n \rightarrow \infty$, gleichmäßig in $t \in [0, 1 - \frac{a}{b}]$. Dann sind auch

$$p_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto f_n\left(1 - \frac{x}{b}\right)$$

Polynomfunktionen und nach Beispiel 2.7 gilt

$$p_n(x) \rightarrow f\left(1 - \frac{x}{b}\right) = \frac{1}{b} \frac{1}{1 - (1 - \frac{x}{b})} = \frac{1}{x}$$

für $n \rightarrow \infty$, gleichmäßig in $x \in [a, b]$. \square

Lemma 30.7

Für jedes $r > 0$ existiert eine Folge $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Polynomfunktionen $p_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ derart, dass

$$p_n(x) \rightarrow |x|$$

für $n \rightarrow \infty$, gleichmäßig in $x \in [-r, r]$.

Beweis. Wir konstruieren eine Folge $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ im Falle $r = 1$. Für beliebiges r sind nach Beispiel 2.7 dann $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto rp_n(x/r)$ Polynomfunktionen, die für $n \rightarrow \infty$ gleichmäßig für $x \in [-r, r]$ gegen $r|x/r| = |x|$ konvergieren.

Sei also $r = 1$. Wir definieren rekursiv Polynomfunktionen $p_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ für $n \in \mathbb{N}_0$ via

$$p_0(x) := 1, \quad p_{n+1}(x) := p_n(x) - \frac{1}{2}(p_n(x)^2 - x^2)$$

für $x \in \mathbb{R}$. Dann ist also

$$p_{n+1}(x) = h_x(p_n(x))$$

mit

$$h_x: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad y \mapsto y - \frac{1}{2}(y^2 - x^2).$$

Für alle $x \in [-1, 1]$ und $y \in [|x|, 1]$ gilt hierbei

$$|x| \leq h_x(y) \leq y \leq 1. \quad (1)$$

Es ist nämlich

$$h_x(y) = y - \frac{1}{2} \underbrace{(y^2 - x^2)}_{\geq 0} \leq y$$

mit $y \leq 1$. Zudem ist

$$\begin{aligned} h_x(y) &= |x| + (y - |x|) - \frac{1}{2} \underbrace{(y^2 - x^2)}_{=(y-|x|)(y+|x|)} \\ &= |x| + \underbrace{(y - |x|)}_{\geq 0} \underbrace{\left(1 - \frac{1}{2} \underbrace{(y + |x|)}_{\leq 2}\right)}_{\geq 0} \geq |x|. \end{aligned}$$

Für alle $x \in [-1, 1]$ gilt

$$|x| \leq p_{n+1}(x) \leq p_n(x) \leq 1, \quad (2)$$

per Induktion nach $n \in \mathbb{N}_0$. Wegen $p_0(x) = 1$ ist nämlich $|x| \leq p_0(x) \leq 1$ und nach (1) mit $y := p_0(x)$ folglich

$$|x| \leq h_x(p_0(x)) \leq p_0(x) \leq 1,$$

wobei $h_x(p_0(x)) = p_1(x)$. Gilt (2) für n , so ist nach (1)

$$|x| \leq h_x(p_{n+1}(x)) \leq p_{n+1}(x) \leq 1,$$

wobei $h_x(p_{n+1}(x)) = p_{n+1}(x)$. Also gilt (2) auch für $n + 1$ an Stelle von n .

Nach dem Vorigen ist $(p_n(x))_{n \in \mathbb{N}_0}$ für jedes $x \in [-1, 1]$ eine durch $|x|$ nach unten beschränkte, monoton fallende Folge, also konvergent gegen ein $f(x) \in [|x|, \infty[$. Da h_x stetig ist und

$$p_{n+1}(x) = h_x(p_n(x)),$$

erhalten wir für $n \rightarrow \infty$

$$f(x) = h_x(f(x)) = f(x) - \frac{1}{2}(f(x)^2 - x^2),$$

so dass also $f(x)^2 = x^2$ und somit $f(x) = |x|$ (da $f(x) \geq |x| \geq 0$). Da die Funktion $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto |x|$ stetig ist, konvergiert $p_n|_{[-1,1]}$ für $n \rightarrow \infty$ gleichmäßig gegen f , nach dem Satz von Dini.

Beweis von Satz 30.2. Nach Ersetzen von A durch den Abschluss von A dürfen wir annehmen, dass A in $C(K, \mathbb{R})$ abgeschlossen ist. Es genügt zu zeigen, dass gilt:

(*) Für jedes $x \in K$ und jede x -Umgebung $U \subseteq K$ existiert ein $g \in A$ mit $g(K) \subseteq [0, \infty[$, $g(x) = 1$ und $\text{supp}(g) \subseteq U$.

Ist nämlich $f \in C(K, \mathbb{R})$ und $\varepsilon > 0$, so gibt es für jedes $y \in K$ eine offene y -Umgebung $U_y \subseteq K$ derart, dass

$$(\forall x \in U_y) \quad \|f(x) - f(y)\|_E < \varepsilon.$$

Nach (*) gibt es ein $g_y \in A$ derart, dass $g_y(K) \subseteq [0, \infty[$, $g_y(y) = 1$ und $\text{supp}(g_y) \subseteq U_y$. Dann bilden die Mengen $W_y := (g_y)^{-1}(\frac{1}{2}, \infty[)$ eine offene Überdeckung von K , es gibt also ein $n \in \mathbb{N}$ und $y_1, \dots, y_n \in K$ derart, dass $K = \bigcup_{k=1}^n W_{y_k}$. Dann ist

$$g := \sum_{k=1}^n g_{y_k} : K \rightarrow \mathbb{R}$$

stetig und $g(x) > \frac{1}{2} =: a$ für alle $x \in K$. Sei $b > a$ eine reelle Zahl mit $b \geq \|g\|_\infty$. Nach Lemma 30.6 gibt es eine Folge $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Polynomfunktionen $p_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ derart, dass $p_n(t) \rightarrow \frac{1}{t}$ für $n \rightarrow \infty$, gleichmäßig für $t \in [a, b]$. Nach Beispiel 2.7 gilt dann

$$p_n \circ g \rightarrow \frac{1}{g}$$

gleichmäßig, also in $(C(K, \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$, für $n \rightarrow \infty$. Da A eine Unteralgebra von $C(K, \mathbb{R})$ ist und $g \in A$, ist $p_n \circ g \in A$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Da A in $C(K, \mathbb{R})$ abgeschlossen ist, folgt

$$\frac{1}{g} = \lim_{n \rightarrow \infty} p_n \circ f \in A.$$

Also ist auch $h_k := \frac{1}{g} g_{y_k} \in A$ für alle $k \in \{1, \dots, n\}$. Beachten Sie, dass $(h_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine $(U_y)_{y \in K}$ untergeordnete Partition der Eins ist; es ist $\text{supp}(h_k) = \text{supp}(g_k) \subseteq U_{y_k}$. Dann ist

$$g := \sum_{k=1}^n f(y_k)h_k \in A;$$

wie im Beweis von Folgerung 29.17 sieht man, dass $\|f - g\|_\infty < \varepsilon$.

Für alle $f \in A$ ist $|f| \in A$ und $\min(f, 1) \in A$, das punktweise Minimum $x \mapsto \min(f(x), 1)$. Ebenso ist $\max(f, 0) \in A$.

Sei $r > 0$ mit $f(K) \subseteq [-r, r]$. Sei $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ wie in Lemma 30.7. Da $A \subseteq C(K, \mathbb{R})$ eine Unteralgebra ist, gilt $p_n \circ f \in A$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Nach Beispiel 2.7 gilt $p_n \circ f \rightarrow |f|$ in $(C(K, \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$. Da A in $C(K, \mathbb{R})$ abgeschlossen ist, ist also $|f| \in A$. Für alle $y \in \mathbb{R}$ ist

$$\min(y, 1) = \frac{1}{2}((y + 1) - |y - 1|).$$

Nach dem Vorigen ist also $\min(f, 1) = \frac{1}{2}(f + 1 - |f - 1|) \in A$. Analog folgt aus $\max(f, 0)(x) = \frac{1}{2}(f + |f|)$, dass $\max(f, 0) \in A$.

Für alle $x \neq y$ in K gibt es ein $f \in A$ mit $f(K) \subseteq [0, 1]$ derart, dass $f^{-1}(\{0\})$ eine y -Umgebung ist und $f^{-1}(\{1\})$ eine x -Umgebung.

Da A die Punkte von K trennt, gibt es nämlich ein $f \in A$ mit $f(x) \neq f(y)$. Nach Ersetzen von f durch $(f - f(y))^2$ dürfen wir annehmen, dass $f(K) \subseteq [0, \infty[$, $f(y) = 0$ und $f(x) > 0$. Nach Ersetzen von f durch $f/f(x)$ können wir $f(x) = 1$ annehmen und nach Ersetzen von f durch $\min(f, 1)$, dass $f(K) \subseteq [0, 1]$. Nach Ersetzen von f durch $\min(2f, 1)$ ist weiter $f^{-1}(\{1\})$ eine x -Umgebung. Nach Ersetzen von f durch $\max(1 - 2(1 - f), 0)$ dürfen wir weiter annehmen, dass $f^{-1}(\{0\})$ eine y -Umgebung ist.

Also gilt (*): Sei $x \in K$ und $U \subseteq K$ eine x -Umgebung. Für jedes $y \in K \setminus U^\circ$ gibt es nach dem Vorigen ein $f_y \in A$ derart, dass $f_y(K) \subseteq [0, 1]$, $f_y^{-1}(\{1\})$ eine x -Umgebung ist und $W_y := (f_y^{-1}(\{0\}))^\circ$ eine offene y -Umgebung. Die Mengen W_y bilden eine offene Überdeckung der kompakten Menge $K \setminus U^\circ$, also existieren $y_1, \dots, y_n \in K \setminus U^\circ$ mit $K \setminus U^\circ \subseteq W_{y_1} \cup \dots \cup W_{y_n} =: W$. Dann ist $g := f_{y_1} \cdots f_{y_n} \in A$, $g(K) \subseteq [0, 1]$, $g(x) = 1$ und $g|_W = 0$, also $\text{supp}(g) \subseteq K \setminus W \subseteq U^\circ \subseteq U$. \square

Satz 30.8 (Approximationssatz von Stone-Weierstraß über \mathbb{C})

Es sei K ein kompakter topologischer Raum und $A \subseteq C(K, \mathbb{C})$ eine Unteralgebra, welche die Punkte von K trennt **und konjugationsinvariant ist**. Dann ist A dicht in $(C(K, \mathbb{C}), \|\cdot\|_\infty)$.

Bemerkung 30.9

Es sei $K := \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$ die abgeschlossene Einheitskreisscheibe. Dann ist die Menge A aller Einschränkungen $p|_K$ von Polynomfunktionen $p: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ eine Unteralgebra von $C(K, \mathbb{C})$, welche die Punkte von K trennt. Jedoch ist A nicht dicht in $C(K, \mathbb{C})$, denn die durch komplexes Konjugieren gegebene stetige Funktion

$$f: K \rightarrow \mathbb{C}, \quad z \mapsto \bar{z}$$

ist nicht im Abschluss von A .

Wäre f im Abschluss, so gäbe es eine Folge $p_n \in A$, die gleichmäßig gegen f konvergiert. Nun ist aber $p_n|_{K^\circ}$ holomorph für jedes $n \in \mathbb{N}$ und als gleichmäßiger Grenzwert holomorpher Funktionen wäre dann auch $f|_{K^\circ}$ holomorph, Widerspruch.

Beispiel 30.10 (Polynome in z und \bar{z})

Es sei K eine kompakte Teilmenge von \mathbb{C} . Dann ist die Menge A aller Funktionen $K \rightarrow \mathbb{C}$ der Form

$$z \mapsto \sum_{j,k=0}^n a_{jk} z^j (\bar{z})^k$$

mit $n \in \mathbb{N}_0$ und $a_{jk} \in \mathbb{C}$ eine konjugationsinvariante Unter algebra von $C(K, \mathbb{C})$, welche die Punkte von K trennt. Also ist A dicht in $(C(K, \mathbb{C}), \|\cdot\|_\infty)$.

Beweis von Satz 30.8. Es ist $H := A \cap C(K, \mathbb{R})$ eine Unter algebra der reellen Algebra $C(K, \mathbb{R})$. Für jedes $f \in A$ ist

$$f = \frac{1}{2}(f + \bar{f}) + i \frac{1}{2i}(f - \bar{f})$$

mit $\operatorname{Re}(f) = \frac{1}{2}(f + \bar{f}) \in H$ und $\operatorname{Im}(f) = \frac{1}{2i}(f - \bar{f}) \in H$, da A konjugationsinvariant ist. Gegeben $x \neq y$ in K gibt es ein $f \in A$ mit $f(x) \neq f(y)$, also $\operatorname{Re}(f)(x) \neq \operatorname{Re}(f)(y)$ oder $\operatorname{Im}(f)(x) \neq \operatorname{Im}(f)(y)$. Also trennt H die Punkte von K . Nach der

reellen Fassung des Satzes von Stone-Weierstraß ist H dicht in $C(K, \mathbb{R})$. Gegeben $f \in C(K, \mathbb{C})$ und $\varepsilon > 0$ gibt es also $g, h \in H$ derart, dass

$$\|\operatorname{Re}(f) - g\|_{\infty} < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{und} \quad \|\operatorname{Im}(f) - h\|_{\infty} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Dann ist $g + ih \in A$ und $\|f - (g + ih)\|_{\infty} < \varepsilon$, da für jedes $x \in K$
 $|f(x) - (g(x) + ih(x))| \leq |\operatorname{Re}(f)(x) - g(x)| + |\operatorname{Im}(f)(x) - h(x)| < \varepsilon. \square$

§31 Initiale Topologien, Produkttopologie

Wir beschäftigen uns weiter mit der Erzeugung von Topologien und insbesondere mit der Produkttopologie auch auf Produkten von unendlich vielen Faktoren.

Definition 31.1

Es sei (X, \mathcal{O}) ein topologischer Raum. Eine Menge $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{O}$ offener Mengen wird eine **Subbasis** der Topologie \mathcal{O} genannt, wenn die Menge \mathcal{B} aller endlichen Durchschnitte $\bigcap_{j=1}^n V_j$ mit $n \in \mathbb{N}_0$ und $V_1, \dots, V_n \in \mathcal{S}$ eine Basis für \mathcal{O} (wie in Definition 27.16) ist; hierbei ist $\bigcap_{j=1}^0 V_j := X$.

Satz 31.2

Es sei X eine Menge und \mathcal{S} eine Menge von Teilmengen von X . Dann existiert genau eine Topologie \mathcal{O} auf X , für welche \mathcal{S} eine Subbasis ist. Dies ist die Topologie aus Satz 27.17, für welche die endlichen Durchschnitte $\bigcap_{j=1}^n V_j$ mit $n \in \mathbb{N}_0$ und $V_1, \dots, V_n \in \mathcal{S}$ eine Basis bilden.

Beweis. Die Menge \mathcal{B} der genannten endlichen Durchschnitte erfüllt wegen $X = \bigcap_{j=1}^0 V_j \in \mathcal{B}$ die Bedingung (B1) aus Satz 27.17 und offenbar auch die Bedingung (B2') aus Bemerkung 27.18. Nach Satz 27.17 gibt es eine Topologie \mathcal{O} auf X mit \mathcal{B} als Basis. Da $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{B}$, ist dann $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{O}$ und somit \mathcal{S} eine Subbasis für \mathcal{O} . Nach Satz 27.17 ist \mathcal{O} durch die Basis \mathcal{B} (also durch \mathcal{S}) festgelegt. \square

Man nennt \mathcal{O} aus Satz 31.2 die **von \mathcal{S} erzeugte Topologie** auf X .

Dies ist die kleinste (größte) Topologie auf X , welche \mathcal{S} als Teilmenge enthält. Für jede Topologie \mathcal{T} auf X mit $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{T}$ gilt also $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{T}$.

Satz 31.3

Es seien (X, \mathcal{O}_X) und (Y, \mathcal{O}_Y) topologische Räume. Ist \mathcal{S} eine Subbasis für die Topologie \mathcal{O}_Y auf Y , so sind für eine Abbildung $f: X \rightarrow Y$ äquivalent:

- (a) f ist stetig.
- (b) $f^{-1}(V) \in \mathcal{O}_X$ für alle $V \in \mathcal{S}$.

Beweis. Ist f stetig, so ist $f^{-1}(V) \in \mathcal{O}_X$ für alle $V \in \mathcal{O}_Y$, insbesondere also für alle $V \in \mathcal{S} \subseteq \mathcal{O}_Y$.

Gilt (b), so ist $f^{-1}(V_1 \cap \dots \cap V_n) = f^{-1}(V_1) \cap \dots \cap f^{-1}(V_n) \in \mathcal{O}_X$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $V_1, \dots, V_n \in \mathcal{S}$ und zudem $f^{-1}(Y) = X \in \mathcal{O}_X$. Da X und die Mengen $V_1 \cap \dots \cap V_n$ eine Basis für \mathcal{O}_Y bilden, ist f nach Satz 27.26 stetig. \square

Lemma 31.4

Es sei X eine Menge und $(f_j)_{j \in J}$ eine Familie von Abbildungen $f_j: X \rightarrow X_j$ in topologische Räume X_j . Dann gibt es eine grösste Topologie \mathcal{O}_{in} auf X , welche alle f_j stetig macht.

Man nennt \mathcal{O}_{in} die **initiale Topologie** auf X bezüglich der Familie $(f_j)_{j \in J}$.

Beweis. Sei

$$\mathcal{S} := \{(f_j)^{-1}(W) : j \in J, W \subseteq X_j \text{ offen}\}$$

und \mathcal{O} die von \mathcal{S} erzeugte Topologie auf X . Dann gilt $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{O}$ und somit macht \mathcal{O} jede der Abbildungen f_j stetig. Ist \mathcal{T} eine Topologie auf X , die jedes f_j stetig macht, so ist $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{T}$, also $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{T}$. \square

Beispiel 31.5

Ist (X, \mathcal{O}) ein topologischer Raum, $Y \subseteq X$ eine Teilmenge und $j: Y \rightarrow X$ die Inklusionsabbildung, so ist die bezüglich $\{j\}$ initiale Topologie gleich der auf Y induzierten Topologie \mathcal{O}_Y .

Es ist nämlich

$$\mathcal{S} := \{j^{-1}(W) : W \in \mathcal{O}\} = \{W \cap Y : W \in \mathcal{O}\} = \mathcal{O}_Y$$

bereits eine Topologie auf Y . Die von \mathcal{S} erzeugte Topologie ist die kleinste \mathcal{S} enthaltende Topologie, also gleich \mathcal{O}_Y .

Lemma 31.6

Sei X eine Menge und $(f_j)_{j \in J}$ eine Familie von Abbildungen $f_j: X \rightarrow X_j$ in topologische Räume (X_j, \mathcal{O}_j) . Für $j \in J$ sei \mathcal{S}_j eine Subbasis der Topologie \mathcal{O}_j auf X_j . Dann ist

$$\mathcal{T} := \{f_j^{-1}(W) : j \in J, W \in \mathcal{S}_j\}$$

eine Subbasis für die initiale Topologie \mathcal{O} auf X bezüglich $(f_j)_{j \in J}$.

Beweis. Es sei $\mathcal{O}_{\mathcal{T}}$ die von \mathcal{T} auf X erzeugte Topologie. Setzen wir

$$\mathcal{S} := \{f_j^{-1}(W) : j \in J, W \in \mathcal{O}_j\},$$

so ist $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{S} \subseteq \mathcal{O}$ und somit $\mathcal{O}_{\mathcal{T}} \subseteq \mathcal{O}$. Für $j \in J$ ist

$$\mathcal{B}_j := \left\{ \bigcap_{k=1}^n W_k : n \in \mathbb{N}_0, W_1, \dots, W_n \in \mathcal{S}_j \right\}$$

eine Basis für die Topologie \mathcal{O}_j auf X_j . Sei $V \in \mathcal{B}_j$. Ist $V = Y_j$, so ist $f_j^{-1}(V) = X \in \mathcal{O}_{\mathcal{T}}$. Ist $V = \bigcap_{k=1}^n W_k$ mit $n \in \mathbb{N}$ und $W_1, \dots, W_n \in \mathcal{S}_j$, so ist $(f_j)^{-1}(W_k) \in \mathcal{T} \subseteq \mathcal{O}_{\mathcal{T}}$ für alle $k \in \{1, \dots, n\}$ und somit

$$f_j^{-1}(V) = \bigcap_{k=1}^n f_j^{-1}(W_k) \in \mathcal{O}_{\mathcal{T}}.$$

Ist $U \in \mathcal{O}_j$, so gibt es eine Teilmenge $M \subseteq \mathcal{B}_j$ derart, dass $U = \bigcup_{V \in M} V$. Dann ist

$$f_j^{-1}(U) = \bigcup_{V \in M} f_j^{-1}(V) \in \mathcal{O}_{\mathcal{T}}.$$

Also gilt $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{O}_{\mathcal{T}}$ und somit $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{O}_{\mathcal{T}}$, folglich $\mathcal{O} = \mathcal{O}_{\mathcal{T}}$. \square

Satz 31.7 (Transitivität initialer Topologien)

Es sei X eine Menge und $(f_j)_{j \in J}$ eine Familie von Abbildungen in topologische Räume (X_j, \mathcal{O}_j) . Für jedes $j \in J$ sei die Topologie \mathcal{O}_j auf X_j initial bezüglich einer Familie $(f_{ij})_{i \in I_j}$ von Abbildungen $f_{ij}: X_j \rightarrow X_{ij}$ in topologische Räume $(X_{ij}, \mathcal{O}_{ij})$. Dann ist die initiale Topologie \mathcal{O}_{in} auf X bezüglich der Familie $(f_j)_{j \in J}$ gleich der initialen Topologie \mathcal{O} auf X bezüglich der Familie der Abbildungen $f_{ij} \circ f_j: X \rightarrow X_{ij}$ für $j \in J$ und $i \in I_j$.

Beweis. Da die Topologie \mathcal{O}_j auf X_j initial bzgl. $(f_{ij})_{i \in I_j}$ ist, ist

$$\{f_{ij}^{-1}(W) : i \in I_j, W \in \mathcal{O}_{ij}\}$$

eine Subbasis für \mathcal{O}_j . Nach Lemma 31.6 ist daher

$$\mathcal{T} := \{f_j^{-1}(f_{ij}^{-1}(W)) : j \in J, i \in I_j, W \in \mathcal{O}_{ij}\}$$

eine Subbasis für \mathcal{O}_{in} . Wegen $f_j^{-1}(f_{ij}^{-1}(W)) = (f_{ij} \circ f_j)^{-1}(W)$ ist die von \mathcal{T} erzeugte Topologie jedoch genau \mathcal{O} . \square

Beispiel 31.8

Es sei (X, \mathcal{O}) ein topologischer Raum, \mathcal{O}_Y die auf einer Teilmenge $Y \subseteq X$ induzierte Topologie und $Z \subseteq Y$ eine Teilmenge. Dann stimmt die von (X, \mathcal{O}) auf Z induzierte Topologie \mathcal{O}_Z überein mit der von (Y, \mathcal{O}_Y) auf Z induzierten Topologie $(\mathcal{O}_Y)_Z$.

Sind $j_Y: Y \rightarrow X$ und $j_Z: Z \rightarrow Y$ die Inklusionsabbildungen, so ist \mathcal{O}_Y initial bezüglich $\{j_Y\}$ und $(\mathcal{O}_Y)_Z$ initial bezüglich $\{j_Z\}$. Nach Satz 31.7 ist $(\mathcal{O}_Y)_Z$ auch initial bezüglich $\{j_Y \circ j_Z\}$ und stimmt somit mit \mathcal{O}_Z überein.

Beispiel 31.9

Sind (X, \mathcal{O}_X) sowie (Y, \mathcal{O}_Y) topologische Räume und $f: X \rightarrow Y$ eine bijektive Abbildung, so sind äquivalent:

- (a) f ist ein Homöomorphismus.
- (b) \mathcal{O}_X ist initial bezüglich $\{f\}$.

Sei nämlich $\mathcal{S} := \{f^{-1}(W) : W \in \mathcal{O}_Y\}$. Ist f ein Homöomorphismus, so ist $\mathcal{S} = \mathcal{O}_X$ eine Topologie auf X . Die

kleinste \mathcal{S} enthaltende Topologie \mathcal{O}_{in} auf X ist also \mathcal{O}_X . Gilt umgekehrt (b), so ist f stetig. Nach Satz 31.3 ist f^{-1} stetig, denn \mathcal{S} ist eine Subbasis für \mathcal{O}_X und ist $V \in \mathcal{S}$, so ist $V = f^{-1}(W)$ für ein $W \in \mathcal{O}_Y$ und somit
 $(f^{-1})^{-1}(V) = f(V) = f(f^{-1}(W)) = W \in \mathcal{O}_Y$.

Beispiel 31.10

Sind (X, \mathcal{O}_X) sowie (Y, \mathcal{O}_Y) topologische Räume und $f: X \rightarrow Y$ eine injektive Abbildung, so sind äquivalent:

- (a) f ist eine topologische Einbettung.
- (b) \mathcal{O}_X ist initial bezüglich $\{f\}$.

Es sei \mathcal{O}_{in} die bezüglich $\{f\}$ initiale Topologie auf X . Die von Y auf $f(X)$ induzierte Topologie \mathcal{O} ist initial bzgl. der Inklusion $j: f(X) \rightarrow Y$. Da $f = j \circ f|^{f(X)}$, ist \mathcal{O}_{in} nach Satz 31.7 auch initial bzgl. $\{f|^{f(X)}\}$. Da $f|^{f(X)}$ bijektiv ist, ist mit Beispiel 31.9

f Einbettung $\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} f|^{f(X)}$ Homöomorphismus

$\stackrel{31.9}{\Leftrightarrow} \mathcal{O}_X$ initial bzgl. $\{f|^{f(X)}\} \Leftrightarrow \mathcal{O}_X = \mathcal{O}_{\text{in}}$

Satz 31.11

Es seien (X, \mathcal{O}_X) und (Y, \mathcal{O}_Y) topologische Räume. Ist die Topologie auf Y initial bezüglich einer Familie $(f_j)_{j \in J}$ von Abbildungen $f_j: Y \rightarrow Y_j$ in topologische Räume (Y_j, \mathcal{O}_j) , so ist eine Abbildung $f: X \rightarrow Y$ genau dann stetig, wenn $f_j \circ f: X \rightarrow Y_j$ stetig ist für alle $j \in J$.

Beweis. Die Menge

$$\mathcal{S} := \{f_j^{-1}(W) : j \in J, W \in \mathcal{O}_j\}$$

ist eine Subbasis für die Topologie \mathcal{O}_Y auf Y . Nach Satz 31.3 ist also f genau dann stetig, wenn

$$f^{-1}(f_j^{-1}(W)) \in \mathcal{O}_X$$

für alle $j \in J$ und alle $W \in \mathcal{O}_j$. Da $f^{-1}(f_j^{-1}(W)) = (f_j \circ f)^{-1}(W)$, ist letztere Bedingung für festes j äquivalent zur Stetigkeit von $f_j \circ f$. \square

Definition 31.12

Es sei $(X_j)_{j \in J}$ eine Familie topologischer Räume. Die initiale Topologie \mathcal{O} auf $X := \prod_{j \in J} X_j$ bezüglich der Familie $(\text{pr}_j)_{j \in J}$ der Projektionen $X \rightarrow X_j$, $(x_i)_{i \in J} \mapsto x_j$ wird die **Produkttopologie** auf X genannt.

Per Definition ist \mathcal{O} also die größte Topologie auf X , welche jede der Projektionen pr_j stetig macht.

Wenn nichts anderes gesagt wird, verstehen wir Produkte topologischer Räume immer mit der Produkttopologie.

In der vorigen Situation gilt:

Satz 31.13

- (a) Für einen topologischen Raum Y ist eine Abbildung $f = (f_j)_{j \in J}: Y \rightarrow \prod_{j \in J} X_j$ genau dann stetig, wenn jede ihrer Komponenten f_j stetig ist.
- (b) Ist jeder der Räume X_j Hausdorffsch, so ist auch $X := \prod_{j \in J} X_j$ Hausdorffsch.

Beweis. (a) Nach Satz 31.11 ist f genau dann stetig, wenn $\text{pr}_j \circ f = f_j$ stetig ist für jedes $j \in J$.

(b) Sind $x = (x_j)_{j \in J}$ und $y = (y_j)_{j \in J}$ zwei verschiedene Elemente von X , so existiert ein $j \in J$ mit $x_j \neq y_j$. Da X_j Hausdorffsch ist, gibt es eine offene x_j -Umgebung $U \subseteq X_j$ und eine offene y_j -Umgebung $V \subseteq X_j$ derart, dass $U \cap V = \emptyset$. Dann ist $\text{pr}_j^{-1}(U)$ eine offene x -Umgebung und $\text{pr}_j^{-1}(V)$ eine offene y -Umgebung in X und es gilt $\text{pr}_j^{-1}(U) \cap \text{pr}_j^{-1}(V) = \emptyset$. \square

Satz 31.14

Es sei $(X_j)_{j \in J}$ eine Familie topologischer Räume und $Y_j \subseteq X_j$ eine Teilmenge für $j \in J$. Dann stimmen auf $Y := \prod_{j \in J} Y_j$ die folgenden Topologien überein:

- Die von $X := \prod_{j \in J} X_j$ auf Y induzierte Topologie \mathcal{O}_Y ;
- Die Produkttopologie \mathcal{T} , wenn wir Y_j mit der von X_j induzierten Topologie \mathcal{O}_j versehen und Y als Produkt der Familie $(Y_j, \mathcal{O}_j)_{j \in J}$ topologischer Räume betrachten.

Beweis. Es seien $\lambda_j: Y_j \rightarrow X_j$ und $\lambda: Y \rightarrow X$ die Inklusionsabbildungen. Weiter seien $\text{pr}_j: X \rightarrow X_j$ und $\pi_j: Y \rightarrow Y_j$ die jeweiligen Projektionen auf die j te Komponente. Nach Beispiel 31.5 ist \mathcal{O}_Y initial bzgl. $\{\lambda\}$. Da die Topologie auf X initial ist bzgl. $(\text{pr}_j)_{j \in J}$, zeigt Satz 31.7, dass \mathcal{O}_Y initial ist bzgl. der Familie der Abbildungen $\text{pr}_j \circ \lambda = \lambda_j \circ \pi_j$ für $j \in J$. Nun ist \mathcal{T} initial bzgl. $(\pi_j)_{j \in J}$. Da \mathcal{O}_j initial bzgl. $\{\lambda_j\}$ ist, ist \mathcal{T} nach Satz 31.7 initial bzgl. der Familie der Abbildungen $\lambda_j \circ \pi_j$. Also ist $\mathcal{O} = \mathcal{T}$. \square

Satz 31.15

Ist $(E_j)_{j \in J}$ eine Familie topologischer Vektorräume, so ist $E := \prod_{j \in J} E_j$ ein topologischer Vektorraum mit der Addition $(x_j)_{j \in J} + (y_j)_{j \in J} := (x_j + y_j)_{j \in J}$ und Multiplikation $\lambda(x_j)_{j \in J} := (\lambda x_j)_{j \in J}$ mit Skalaren $\lambda \in \mathbb{K}$.

Beweis. Die Projektionen $\text{pr}_j: E \rightarrow E_j$ sind stetig für $j \in J$ und ebenso die Projektionen $\pi_k: E \times E \rightarrow E$, $(x_1, x_2) \mapsto x_k$ für $k \in \{1, 2\}$. Sei $\alpha: E \times E \rightarrow E$ die Additionsabbildung. Für jedes $j \in J$ ist die Additionsabbildung $\alpha_j: E_j \times E_j \rightarrow E_j$ stetig, also auch

$$\text{pr}_j \circ \alpha = \alpha_j \circ (\text{pr}_j \circ \pi_1, \text{pr}_j \circ \pi_2).$$

Nach Satz 31.13 (a) ist α also stetig. Auch die Projektionen $\Pi_1: \mathbb{K} \times E \rightarrow \mathbb{K}$ und $\Pi_2: \mathbb{K} \times E \rightarrow E$ sind stetig sowie für jedes $j \in J$ die Multiplikation $\mu_j: \mathbb{K} \times E_j \rightarrow E_j$ mit Skalaren. Für die Multiplikation $\mu: \mathbb{K} \times E \rightarrow E$ ist

$$\text{pr}_j \circ \mu = \mu_j \circ (\Pi_1, \text{pr}_j \circ \Pi_2)$$

stetig für alle $j \in J$; also ist μ stetig. \square

Beispiel 31.16. Mit $E_j := F$ erhalten wir:

Für jeden topologischen Vektorraum F und jede Menge J ist der Raum

$$F^J = \prod_{j \in J} F$$

aller Funktionen $f: J \rightarrow F$ ein topologischer Vektorraum, wenn wir ihn mit der Produkttopologie \mathcal{O} versehen. Wir nennen \mathcal{O} auch die **Topologie der punktweisen Konvergenz** auf F^J .

Insbesondere ist \mathbb{K}^J ein topologischer Vektorraum.

Ziel:

Satz 32.1 (Satz von Tychonoff)

Für jede Familie $(K_j)_{j \in J}$ quasikompakter topologischer Räume ist $\prod_{j \in J} K_j$ quasikompakt.

Mit Satz 31.13 (b) folgt: Ist K_j kompakt für jedes $j \in J$, so ist auch $\prod_{j \in J} K_j$ kompakt.

Beweis möglich unter Benutzung von Netzen; schöner mit Filtern.

Definition 32.2

Sei X eine Menge. Eine nicht leere Menge \mathcal{F} von Teilmengen $A \subseteq X$ heißt **Filter** in X , wenn gilt:

$$(F1) \quad (\forall A \in \mathcal{F}) \quad A \neq \emptyset;$$

$$(F2) \quad (\forall A, B \in \mathcal{F}) \quad A \cap B \in \mathcal{F};$$

$$(F3) \quad (\forall A \in \mathcal{F}) (\forall B \subseteq X) \quad A \subseteq B \Rightarrow B \in \mathcal{F}.$$

Eine nicht leere Menge \mathcal{B} von Teilmengen $A \subseteq X$ heißt **Filterbasis** in X , wenn

(B1) $(\forall A \in \mathcal{B}) \quad A \neq \emptyset$ und

(B2) $(\forall A, B \in \mathcal{B}) (\exists C \in \mathcal{B}) \quad C \subseteq A \cap B.$

Bemerkung 32.3

Ist \mathcal{B} eine Filterbasis in X , so ist

$$\langle \mathcal{B} \rangle_X := \{A \subseteq X : (\exists B \in \mathcal{B}) B \subseteq A\}$$

ein Filter in X , der **von \mathcal{B} erzeugte Filter**.

Beispiel 32.4

Ist X ein topologischer Raum und $x \in X$, so ist die Menge $\mathcal{U}_x(X)$ aller Umgebungen U von x in X ein Filter, der sogenannte **Umgebungsfilter** von x .

Schreibe auch \mathcal{U}_x statt $\mathcal{U}_x(X)$.

Beispiel 32.5

Ist (X, d) ein metrischer Raum und $x \in X$, so bilden die offenen Kugeln $B_\varepsilon(x)$ eine Filterbasis

$$\mathcal{B} := \{B_\varepsilon(x) : \varepsilon > 0\}.$$

Diese erzeugt den Umgebungsfilter, also $\mathcal{U}_x = \langle \mathcal{B} \rangle_X$ (denn jede Umgebung ist Obermenge einer ε -Umgebung)

Definition 32.6

Sei \mathcal{F} ein Filter in einer Menge X . Wird \mathcal{F} von einer Filterbasis \mathcal{B} erzeugt (also $\mathcal{F} = \langle \mathcal{B} \rangle_X$), so nenne \mathcal{B} eine **Basis für \mathcal{F}** .

Zum Beispiel ist in einem metrischen Raum X für jedes $x \in X$ die Menge der ε -Umgebungen von x eine Basis des Umgebungsfilters von x (eine **Umgebungsbasis**). In einem lokalkompakten topologischen Raum X bilden für jedes $x \in X$ die kompakten x -Umgebungen eine Basis des Umgebungsfilters von x .

Definition 32.7

Sei X ein topologischer Raum, $x \in X$ und \mathcal{B} eine Filterbasis in X . Wir nennen \mathcal{B} **konvergent gegen x** und schreiben $\mathcal{B} \rightarrow x$, wenn

$$(\forall U \in \mathcal{U}_x) (\exists A \in \mathcal{B}) A \subseteq U,$$

d.h. $\mathcal{U}_x \subseteq \langle \mathcal{B} \rangle_x$.

Ist \mathcal{F} ein Filter in X , so gilt $\mathcal{F} \rightarrow x$ genau dann, wenn $\mathcal{U}_x \subseteq \mathcal{F}$.

Beispiel 32.8

Ist $(x_j)_{j \in J}$ ein Netz in einer Menge X , so nennen wir für $j \in J$

$$x_{\geq j} := \{x_i : i \geq j\}$$

das in j startende **Endstück** des Netzes. Es ist

$$\mathcal{E} := \{x_{\geq j} : j \in J\}$$

eine Filterbasis in X (Übung). Ist X ein topologischer Raum und $x \in X$, so gilt genau dann $\mathcal{E} \rightarrow x$, wenn $x_j \rightarrow x$ (Übung).

Definition 32.9

Sei $f: X \rightarrow Y$ eine Abbildung und \mathcal{F} ein Filter in X . Dann ist

$$f_*(\mathcal{F}) := \{A \subseteq Y: f^{-1}(A) \in \mathcal{F}\}$$

ein Filter in Y , der **Bildfilter** unter f .

Wegen $f^{-1}(Y) = X \in \mathcal{F}$ ist $Y \in f_*(\mathcal{F})$, somit $f_*(\mathcal{F}) \neq \emptyset$. Für jedes $A \in f_*(\mathcal{F})$ ist $f^{-1}(A) \in \mathcal{F}$, also $f^{-1}(A) \neq \emptyset$, also $A \neq \emptyset$. Für alle $A, B \in f_*(\mathcal{F})$ ist $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) \in \mathcal{F}$, also $A \cap B \in f_*(\mathcal{F})$. Ist schließlich $A \in f_*(\mathcal{F})$ und $B \subseteq Y$ mit $A \subseteq B$, so ist $f^{-1}(A) \in \mathcal{F}$ und $f^{-1}(A) \subseteq f^{-1}(B)$, also $f^{-1}(B) \in \mathcal{F}$ und folglich $B \in f_*(\mathcal{F})$.

Satz 32.10

Eine Abbildung f ist genau dann an einer Stelle $x \in X$ stetig, wenn $f_*(\mathcal{U}_x(X)) \rightarrow f(x)$.

Beweis. $f_*(\mathcal{U}_x(X)) \rightarrow f(x) \Leftrightarrow \mathcal{U}_{f(x)}(Y) \subseteq f_*(\mathcal{U}_x(X)) \Leftrightarrow (\forall U \in \mathcal{U}_{f(x)}(Y)) f^{-1}(U) \in \mathcal{U}_x(X). \quad \square$

Definition 32.11

Ein Filter \mathcal{F} in einer Menge X heißt **Ultrafilter**, wenn er maximal ist, also für jeden Filter \mathcal{G} in X gilt:

$$\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G} \Rightarrow \mathcal{F} = \mathcal{G}.$$

Satz 32.12

Ein Filter \mathcal{F} in einer Menge X ist genau dann ein Ultrafilter, wenn

$$(\forall A \subseteq X) \quad A \in \mathcal{F} \text{ oder } X \setminus A \in \mathcal{F}. \quad (1)$$

Beweis. Ist \mathcal{F} ein Ultrafilter und $A \subseteq X$ mit $A \notin \mathcal{F}$, so muss ein $B \in \mathcal{F}$ mit $A \cap B = \emptyset$ existieren. Andernfalls wäre nämlich $\{A \cap B : B \in \mathcal{F}\}$ eine Filterbasis und

$$\mathcal{F} \cup \{A\} \subseteq \langle \{A \cap B : B \in \mathcal{F}\} \rangle_X,$$

im Widerspruch zur Maximalität von \mathcal{F} . Dann ist also $B \subseteq X \setminus A$ für ein $B \in \mathcal{F}$ und somit $X \setminus A \in \mathcal{F}$.

Ist umgekehrt \mathcal{F} ein Filter, der (1) erfüllt und $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$ für einen Filter \mathcal{G} in X . Für alle $A \in \mathcal{G}$ ist nach (1) $A \in \mathcal{F}$ oder $X \setminus A \in \mathcal{F}$.

Im zweiten Fall wäre aber $X \setminus A \in \mathcal{G}$ und somit $\emptyset = A \cap (X \setminus A) \in \mathcal{G}$, Widerspruch. Also gilt stets $A \in \mathcal{F}$ und somit $\mathcal{G} = \mathcal{F}$. \square

Satz 32.13

Für jeden Filter \mathcal{F} in einer Menge X existiert ein Ultrafilter \mathcal{G} in X mit $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$.

Beweis. Sei M die Menge aller Filter \mathcal{H} in X mit $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{H}$. Dann ist (M, \subseteq) eine geordnete Menge. Diese ist induktiv geordnet: Es ist $M \neq \emptyset$, weil $\mathcal{F} \in M$. Sei Γ eine Kette in M . Ist $\Gamma = \emptyset$, so ist \mathcal{F} eine obere Schranke für Γ . Ist $\Gamma \neq \emptyset$, so setzen wir

$$\mathcal{S} := \bigcup_{\mathcal{H} \in \Gamma} \mathcal{H}.$$

Dann ist \mathcal{S} ein Filter in X : Für jedes $\mathcal{H} \in \Gamma$ ist $\mathcal{H} \neq \emptyset$, also $\mathcal{S} \neq \emptyset$. Für jedes $A \in \mathcal{S}$ existiert ein $\mathcal{H} \in \Gamma$ mit $A \in \mathcal{H}$, es ist also $A \neq \emptyset$. Sind $A_1, A_2 \in \mathcal{S}$, so existieren $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2 \in \Gamma$ mit $A_1 \in \mathcal{H}_1$ und $A_2 \in \mathcal{H}_2$. Sei etwa $\mathcal{H}_1 \subseteq \mathcal{H}_2$. Dann sind $A_1, A_2 \in \mathcal{H}_2$, somit $A_1 \cap A_2 \in \mathcal{H}_2 \subseteq \mathcal{S}$. Ist $A \in \mathcal{S}$ und $B \subseteq X$ mit $A \subseteq B$, so existiert

ein $\mathcal{H} \in \Gamma$ mit $A \in \mathcal{H}$. Dann ist $B \in \mathcal{H} \subseteq \mathcal{S}$.

Es existiert ein $\mathcal{H} \in \Gamma$; dann ist $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{H} \subseteq \mathcal{S}$, also $\mathcal{S} \in M$. Für jedes $\mathcal{H} \in \Gamma$ gilt $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{S}$; also ist \mathcal{S} eine obere Schranke für Γ . Nach dem Zornschen Lemma hat M ein maximales Element \mathcal{G} . Dann ist \mathcal{G} auch maximal in der Menge aller Filter in X (also ein Ultrafilter), denn ist $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{H}$ für einen Filter \mathcal{H} in X , so folgt aus $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G} \subseteq \mathcal{H}$, dass $\mathcal{H} \in M$; folglich ist $\mathcal{G} = \mathcal{H}$. \square

Definition 32.14

Es sei X ein topologischer Raum und \mathcal{B} eine Filterbasis in X . Ein Punkt $x \in X$ wird **Häufungspunkt** von \mathcal{B} genannt, wenn

$$(\forall A \in \mathcal{B}) (\forall U \in \mathcal{U}_x) A \cap U \neq \emptyset,$$

also $x \in \overline{A}$ für alle $A \in \mathcal{B}$.

Lemma 32.15

Es sei X ein topologischer Raum und \mathcal{F} ein Ultrafilter in X . Für $x \in X$ sind äquivalent:

- (a) x ist ein Häufungspunkt von \mathcal{F} ;
- (b) $\mathcal{F} \rightarrow x$.

Beweis. Sei x ein Häufungspunkt von \mathcal{F} . Ist $U \subseteq X$ eine x -Umgebung, so gilt nach Satz 32.12 $U \in \mathcal{F}$ oder $X \setminus U \in \mathcal{F}$. Im zweiten Fall wäre per Definition eines Häufungspunkts jedoch

$$(X \setminus U) \cap U \neq \emptyset,$$

Widerspruch. Also ist stets $U \in \mathcal{F}$ und somit $\mathcal{U}_x \subseteq \mathcal{F}$. Folglich gilt $\mathcal{F} \rightarrow x$.

Gilt $\mathcal{F} \rightarrow x$, so gilt $\mathcal{U}_x \subseteq \mathcal{F}$, somit für alle $U \in \mathcal{U}_x$ und alle $A \in \mathcal{F}$

$$A \cap U \in \mathcal{F},$$

woraus $A \cap U \neq \emptyset$ folgt. Also ist x ein Häufungspunkt von \mathcal{F} . \square

Satz 32.16

Für einen topologischen Raum X sind äquivalent:

- (a) X ist quasikompakt;
- (b) X hat die endliche Durchschnittseigenschaft: Für jede Menge $\mathcal{M} \neq \emptyset$ von abgeschlossenen Teilmengen von X mit

$$A_1 \cap \dots \cap A_n \neq \emptyset$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ und $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{M}$ ist $\bigcap_{A \in \mathcal{M}} A \neq \emptyset$;

- (c) Für jede Filterbasis \mathcal{B} in X , welche aus abgeschlossenen Teilmengen von X besteht, ist $\bigcap_{A \in \mathcal{B}} A \neq \emptyset$;
- (d) Jeder Ultrafilter in X ist konvergent.

Beweis. (a) \Rightarrow (b): Sei \mathcal{M} eine nicht leere Menge abgeschlossener Teilmengen von X derart, dass $A_1 \cap \dots \cap A_n \neq \emptyset$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{M}$. Wäre $\bigcap_{A \in \mathcal{M}} A = \emptyset$, so wäre

$$X = \bigcup_{A \in \mathcal{M}} (X \setminus A),$$

also $(X \setminus A)_{A \in \mathcal{M}}$ eine offene Überdeckung von X . Aufgrund der Quasikompaktheit gäbe es $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{M}$ derart, dass $X = \bigcup_{j=1}^n (X \setminus A_j)$ und somit $\bigcap_{j=1}^n A_j = \emptyset$, Widerspruch.

(b) \Rightarrow (a): Sei $(U_j)_{j \in J}$ eine offene Überdeckung von X . Gäbe es keine endliche Teilüberdeckung, so wäre $X \neq \emptyset$, also $J \neq \emptyset$ und es hätte $\mathcal{M} := \{X \setminus U_j : j \in J\}$ die endliche Durchschnittseigenschaft. Nach (b) wäre dann $\bigcap_{j \in J} (X \setminus U_j) \neq \emptyset$ und somit, indem wir zu Komplementen übergehen, $\bigcup_{j \in J} U_j \neq X$, Widerspruch.

(b) \Rightarrow (c): Ist \mathcal{B} eine Filterbasis abgeschlossener Mengen, so gibt es für jedes $n \in \mathbb{N}$ und alle $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{B}$ ein $A \in \mathcal{B}$ mit $A \subseteq A_1 \cap \dots \cap A_n$. Da $A \neq \emptyset$, folgt

$$A_1 \cap \dots \cap A_n \neq \emptyset;$$

nach (b) ist also $\bigcap_{A \in \mathcal{B}} A \neq \emptyset$.

(c) \Rightarrow (b): Ist \mathcal{M} wie in (b), so ist

$\mathcal{B} := \{A_1 \cap \dots \cap A_n : n \in \mathbb{N}, A_1, \dots, A_n \in \mathcal{M}\}$ eine Filterbasis aus abgeschlossenen Mengen, somit

$$\emptyset \neq \bigcap_{A \in \mathcal{B}} A = \bigcap_{A \in \mathcal{M}} A.$$

(a) \Rightarrow (d), d.h. $\neg(d) \Rightarrow \neg(a)$: Sei \mathcal{F} ein Ultrafilter in X , der nicht konvergiert, nach Lemma 32.15 also keinen Häufungspunkt hat. Für alle $x \in X$ gilt also: x ist kein Häufungspunkt von \mathcal{F} , somit existiert eine offene x -Umgebung U_x und ein $A_x \in \mathcal{F}$ derart, dass

$$U_x \cap A_x = \emptyset.$$

Wäre X quasikompakt, so gäbe es $x_1, \dots, x_n \in X$ mit

$X = U_{x_1} \cup \dots \cup U_{x_n}$. Dann wäre $A := A_{x_1} \cap \dots \cap A_{x_n} \in \mathcal{F}$, also $A \neq \emptyset$. Jedoch ist

$A = A \cap X = \bigcup_{j=1}^n (A \cap U_{x_j}) \subseteq \bigcup_{j=1}^n (A_{x_j} \cap U_{x_j}) = \emptyset$, Widerspruch.

(d) \Rightarrow (c): Sei \mathcal{B} eine Filterbasis in X aus abgeschlossenen Mengen.

Nach Satz 32.13 existiert ein Ultrafilter \mathcal{F} in X mit $\langle \mathcal{B} \rangle_X \subseteq \mathcal{F}$.

Nach (d) existiert ein $x \in X$ mit $\mathcal{F} \rightarrow x$. Folglich ist x ein Häufungspunkt von \mathcal{F} und somit auch von \mathcal{B} . Für jedes $A \in \mathcal{B}$ ist also

$$x \in \overline{A} = A$$

und somit $x \in \bigcap_{A \in \mathcal{B}} A$. \square

Beweis des Satzes von Tychonoff

Sei \mathcal{F} ein Ultrafilter in $K := \prod_{j \in J} K_j$. Sei $\text{pr}_j: K \rightarrow K_j$ die Projektion auf die j te Komponente. Dann ist $(\text{pr}_j)_*(\mathcal{F})$ ein Ultrafilter in K_j , denn für jedes $A \subseteq K_j$ ist

$$(\text{pr}_j^{-1})(A) \in \mathcal{F} \quad \text{oder} \quad K \setminus (\text{pr}_j)^{-1}(A) = (\text{pr}_j)^{-1}(K_j \setminus A) \in \mathcal{F},$$

also $A \in (\text{pr}_j)_*(\mathcal{F})$ oder $K_j \setminus A \in (\text{pr}_j)_*(\mathcal{F})$. Da K_j quasikompakt ist, ist $(\text{pr}_j)_*(\mathcal{F})$ konvergent; die Menge L_j aller $y \in K_j$ mit $(\text{pr}_j)_*(\mathcal{F}) \rightarrow y$ ist also nicht leer. Nach dem Auswahlaxiom existiert ein $x = (x_j)_{j \in J} \in \prod_{j \in J} L_j$. Für jedes $j \in J$ konvergiert dann $(\text{pr}_j)_*(\mathcal{F})$ gegen x_j . Dann gilt $\mathcal{F} \rightarrow x$; ist nämlich $U \subseteq K$ eine Umgebung von x , so gibt es ein $n \in \mathbb{N}$, $j_1, \dots, j_n \in J$ und offene x_{j_ℓ} -Umgebungen $U_\ell \subseteq K_{j_\ell}$ für $\ell \in \{1, \dots, n\}$ derart, dass

$$x \in (\text{pr}_{j_1})^{-1}(U_1) \cap \dots \cap (\text{pr}_{j_n})^{-1}(U_n) \subseteq U.$$

Für jedes $\ell \in \{1, \dots, n\}$ ist dann $U_\ell \in \mathcal{U}_{x_{j_\ell}}(K_{j_\ell}) \subseteq (\text{pr}_{j_\ell})_*(\mathcal{F})$, folglich $(\text{pr}_{j_\ell})^{-1}(U_\ell) \in \mathcal{F}$. Also ist $\bigcap_{\ell=1}^n (\text{pr}_{j_\ell})^{-1}(U_\ell) \in \mathcal{F}$ und auch die Obermenge U dieses Durchschnitts ist dann in \mathcal{F} , so dass also $\mathcal{F} \rightarrow x$. Nach (d) \Rightarrow (a) in Satz 32.16 ist K quasikompakt. \square

§33 Vollständige Regularität

Definition 33.1

Ein topologischer Raum (X, \mathcal{O}) wird **vollständig regulär** genannt, wenn er Hausdorffsch ist und \mathcal{O} initial ist bezüglich $C(X, \mathbb{R})$.

Satz 33.2

Für einen Hausdorffschen topologischen Raum X sind äquivalent:

- (a) X ist vollständig regulär;
- (b) Die Topologie auf X ist initial bezüglich einer Teilmenge $M \subseteq C(X, \mathbb{R})$;
- (c) (Existenz von Buckelfunktionen). Für jedes $x \in X$ und jede x -Umgebung $U \subseteq X$ existiert eine stetige Funktion $f: X \rightarrow [0, 1]$ mit $f(x) = 1$ und $f|_{X \setminus U} = 0$;
- (d) (Existenz von Abschneidefunktionen). Für jedes $x \in X$ und jede x -Umgebung $U \subseteq X$ existiert eine stetige Funktion $f: X \rightarrow [0, 1]$ derart, dass $f|_V = 1$ für eine x -Umgebung $V \subseteq U$ und $\text{supp}(f) \subseteq U$.

Beispiel 33.3

Jeder lokalkompakte topologische Raum X ist vollständig regulär.

Nach dem Urysohnschen Lemma (Satz 29.14, angewandt mit $K := \{x\}$) existieren auf X nämlich Abschneidefunktionen.

Beispiel 33.4

Jeder metrisierbare topologische Raum X ist vollständig regulär.

Sei nämlich $d: X \times X \rightarrow [0, \infty[$ eine die Topologie definierende Metrik. Gegeben $x \in X$ und eine x -Umgebung $U \subseteq X$ existiert ein $\varepsilon > 0$ derart, dass $B_\varepsilon(x) \subseteq U$. Dann ist

$$f: X \rightarrow [0, 1], \quad y \mapsto \max \left\{ 1 - \frac{d(x, y)}{\varepsilon}, 0 \right\}$$

eine stetige Funktion mit $f(x) = 1$ und $f|_{X \setminus U} = 0$. Also existieren auf X Buckelfunktionen.

Beweis von Satz 33.2. (a) \Rightarrow (b): Man nehme $M := C(X, \mathbb{R})$.

(b) \Rightarrow (c): Sei $x \in X$ und $U \subseteq X$ eine x -Umgebung. Dann existieren ein $n \in \mathbb{N}_0$, $f_1, \dots, f_n \in M$ und offene Mengen $U_j \subseteq \mathbb{R}$ für $j \in \{1, \dots, n\}$ derart, dass

$$x \in \{y \in X : (\forall j \in \{1, \dots, n\}) f_j(y) \in U_j\} \subseteq U.$$

Dann ist U_j eine offene $f_j(x)$ -Umgebung in \mathbb{R} und nach Verkleinern der Umgebungen dürfen wir annehmen, dass für ein $\varepsilon > 0$ für alle j

$$U_j =]f_j(x) - \varepsilon, f_j(x) + \varepsilon[.$$

Definieren wir $g: X \rightarrow [0, \infty[$ via

$$g(y) := \sum_{j=1}^n |f_j(y) - f_j(x)|,$$

so ist g stetig, $g(x) = 0$ und

$$g^{-1}([0, \varepsilon]) \subseteq U.$$

Dann ist auch $f: X \rightarrow [0, 1]$, $y \mapsto \max\{0, 1 - \frac{g(y)}{\varepsilon}\}$ stetig. Es ist $f(x) = 1$ und $f|_{X \setminus U} = 0$.

(c) \Rightarrow (d): Sind x , U und f wie in (c), so ist $g: X \rightarrow [0, 1]$, $y \mapsto \min\{2f(y), 1\}$ stetig und konstant 1 auf der x -Umgebung $V := \{y \in X: f(y) > \frac{1}{2}\}$. Weiter ist

$$h: X \rightarrow [0, 1], \quad y \mapsto \max\{0, 2g(y) - 1\}$$

konstant 1 auf V und

$$\{y \in X: h(y) > 0\} = \left\{y \in X: g(y) > \frac{1}{2}\right\} \subseteq \left\{y \in X: g(y) \geq \frac{1}{2}\right\} =: A,$$

wobei A in X abgeschlossen ist und $A \subseteq U$. Also ist $\text{supp}(h) \subseteq A$ und somit $\text{supp}(h) \subseteq U$.

(d) \Rightarrow (a): Sei \mathcal{O} die gegebene Topologie auf X und \mathcal{O}_{in} die bezüglich $C(X, \mathbb{R})$ initiale Topologie. Da \mathcal{O} jedes $f \in C(X, \mathbb{R})$ stetig macht, ist $\mathcal{O}_{\text{in}} \subseteq \mathcal{O}$. Um die umgekehrte Inklusion zu zeigen, sei $U \in \mathcal{O}$. Für jedes $x \in U$ gibt es nach (d) ein $f_x \in C(X, [0, 1])$ derart, dass $f_x(x) = 1$ und $f_x|_{X \setminus U} = 0$, also

$$x \in f_x^{-1}(]0, \infty[) \subseteq U.$$

Man beachte, dass $(f_x)^{-1}(]0, \infty[) \in \mathcal{O}_{\text{in}}$. Es ist also

$$U = \bigcup_{x \in U} f_x^{-1}(]0, \infty[) \in \mathcal{O}_{\text{in}}. \quad \square$$

Der Beweis zeigt, dass \mathcal{O} auch bzgl. $C(X, [0, 1])$ initial ist.

Satz 33.5

Es sei X ein topologischer Raum.

- (a) Ist X vollständig regulär, so auch jede Teilmenge $Y \subseteq X$ mit der von X induzierten Topologie.
- (b) Ist $X = \prod_{j \in J} X_j$ mit der Produkttopologie für eine Familie $(X_j)_{j \in J}$ vollständig regulärer topologischer Räume X_j , so ist auch X vollständig regulär.

Beweis. (a) Y ist Hausdorffsch. Die induzierte Topologie \mathcal{O}_Y auf Y ist initial bezüglich der Inklusionsabbildung $j: Y \rightarrow X$. Da die Topologie auf X initial bezüglich $C(X, \mathbb{R})$ ist, ist \mathcal{O}_Y initial bezüglich

$$M := \{f \circ j = f|_Y : f \in C(X, \mathbb{R})\} \subseteq C(Y, \mathbb{R}),$$

wegen der Transitivität initialer Topologien. Nach Satz 33.2 (b) ist Y vollständig regulär.

(b) Die Produkttopologie \mathcal{O} auf X ist Hausdorffsch. Da sie initial bzgl. den Projektionen $\text{pr}_j: X \rightarrow X_j$ und die Topologie auf X_j initial

bezüglich $C(X_j, \mathbb{R})$ ist, ist \mathcal{O} (wegen Transitivität) initial bezüglich

$$M := \{f \circ \text{pr}_j : j \in J, f \in C(X_j, \mathbb{R})\},$$

Nach Satz 33.2 (b) ist X vollständig regulär. \square

Bemerkung 33.6

Ist X vollständig regulär, so trennt $C(X, [0, 1])$ die Punkte auf X .

Für alle $x \neq y$ in X gibt es disjunkte offene Umgebungen U und V . Nach Satz 33.2 (c) gibt es eine stetige Funktion $f: X \rightarrow [0, 1]$ derart, dass $f(x) = 1$ und $f|_{X \setminus U} = 0$, also $f(y) = 0$.

Lemma 33.7

Es sei X eine Menge und \mathcal{O} die initiale Topologie auf X bezüglich einer Familie $(f_j)_{j \in J}$ von Abbildungen $f_j: X \rightarrow X_j$ in topologische Räume X_j . Trennt $(f_j)_{j \in J}$ die Punkte von X , so ist

$$f: X \rightarrow \prod_{j \in J} X_j, \quad x \mapsto (f_j(x))_{j \in J}$$

eine topologische Einbettung von (X, \mathcal{O}) in das kartesische Produkt, versehen mit der Produkttopologie.

Beweis. Da f injektiv ist, macht die bzgl. $\{f\}$ initiale Topologie \mathcal{O}_{in} auf X die Abbildung f zu einer topologischen Einbettung (siehe Beispiel 31.10). Die Topologie auf dem Produkt ist initial bezüglich den Projektionen pr_j ; aufgrund der Transitivität initialer Topologien ist \mathcal{O}_{in} auch initial bezüglich der Familie der Abbildungen $\text{pr}_j \circ f = f_j$ für $j \in J$; es ist also $\mathcal{O}_{\text{in}} = \mathcal{O}$. \square

Beispiel 33.8

Es sei E ein Vektorraum und \mathcal{O} die initiale Topologie auf E bezüglich einer Familie $(\alpha_j)_{j \in J}$ von linearen Abbildungen $\alpha_j: E \rightarrow E_j$ in Hausdorffsche topologische Vektorräume E_j . Trennt $(\alpha_j)_{j \in J}$ die Punkte von E , so ist (E, \mathcal{O}) ein Hausdorffscher topologischer Vektorraum.

$\alpha: E \rightarrow \prod_{j \in J} E_j, x \mapsto (\alpha_j(x))_{j \in J}$ ist linear und injektiv. Da $\prod_{j \in J} E_j$ ein Hausdorffscher topologischer Vektorraum ist, ist auch der Untervektorraum $\alpha(E)$ ein solcher. Da $\alpha|_{\alpha(E)}$ ein Isomorphismus von Vektorräumen und nach Lemma 33.7 ein Homöomorphismus ist, ist auch E ein Hausdorffscher topologischer Vektorraum.

Anhang zu §33: Stone-Čech-Kompaktifizierung

Als eine erste Anwendung des Satzes von Tychonoff lässt sich die Stone-Čech-Kompaktifizierung eines vollständig regulären topologischen Raumes diskutieren. Das Material wurde in der Vorlesung übersprungen und ist nicht prüfungsrelevant.

Satz 33.9 (Existenz einer Stone-Čech-Kompaktifizierung)

Für jeden vollständig regulären topologischen Raum X existiert ein kompakter topologischer Raum βX und eine stetige Abbildung $i_X: X \rightarrow \beta X$ derart, dass für jede stetige Abbildung $f: X \rightarrow K$ in einen kompakten topologischen Raum K genau eine stetige Abbildung $\bar{f}: \beta X \rightarrow K$ mit $\bar{f} \circ i_X = f$ existiert.

Beweis. Da die Topologie auf X bezüglich $C(X, [0, 1])$ initial ist und $C(X, [0, 1])$ die Punkte von X trennt, ist

$$i_X: X \rightarrow \prod_{f \in C(X, [0, 1])} [0, 1] = [0, 1]^{C(X, [0, 1])} =: L, \quad x \mapsto (f(x))_{f \in C(X, [0, 1])}$$

nach Lemma 33.7 eine topologische Einbettung. Wir definieren βX 

als den Abschluss

$$\beta X := \overline{i_X(X)} \subseteq L$$

des Bildes und betrachten i_X im Folgenden als Abbildung nach βX . Da L nach dem Satz von Tychonoff kompakt ist, ist auch βX kompakt und per Konstruktion ist $i_X(X)$ dicht in βX .

Ist K ein kompakter topologischer Raum und $f: X \rightarrow K$ stetig, so gibt es höchstens eine stetige Abbildung $\bar{f}: \beta X \rightarrow K$ mit $\bar{f} \circ i_X = f$, da $i_X(X)$ dicht in βX und K Hausdorffsch ist (siehe Satz 27.24). Wir definieren nun $\beta K \subseteq [0, 1]^{C(K, [0, 1])}$ und $i_K: K \rightarrow \beta K$ analog zum Vorigen. Es ist $i_K(K)$ kompakt und somit abgeschlossen in βK , da βK Hausdorffsch ist; da $i_K(K)$ auch dicht ist, folgt $\beta K = i_K(K)$. Also ist die Abbildung $i_K: K \rightarrow \beta K$ ein Homöomorphismus. Die Abbildung

$$\phi: \beta X \rightarrow \prod_{f \in C(K, [0, 1])} [0, 1], \quad x = (x_h)_{h \in C(X, [0, 1])} \mapsto (x_{g \circ f})_{g \in C(K, [0, 1])}$$

ist stetig. Schreiben wir für $g \in C(K, [0, 1])$ nämlich

$$\text{pr}_g: \prod_{h \in C(K, [0, 1])} [0, 1] \rightarrow [0, 1] \quad (x_h)_{h \in C(K, [0, 1])} \mapsto x_g$$

für die Projektion, so ist $\text{pr}_g \circ \phi$ die entsprechende Projektion $\text{pr}_{g \circ f}: \beta X \rightarrow [0, 1]$ und somit stetig. Für jedes $x \in X$ gilt

$$\phi(i_X(x)) = ((g \circ f)(x))_{g \in C(K, [0, 1])} = i_K(f(x)) \in K; \quad (1)$$

da βK abgeschlossen ist im Hausdorffraum $\prod_{g \in C(K, [0, 1])} [0, 1]$ und $i_X(X)$ dicht in βX , folgt $\phi(\beta X) \subseteq \beta K$. Dann ist

$$\bar{f} := (i_K)^{-1} \circ \phi: \beta X \rightarrow K$$

stetig und

$(\bar{f} \circ i_X)(x) = (i_K)^{-1}(\phi(i_X(x))) = (i_K)^{-1}(i_K(f(x))) = f(x)$ für alle $x \in X$ nach (1), folglich $\bar{f} \circ i_X = f$. \square

Betrachten wir $\prod_{f \in C(X, [0, 1])} [0, 1]$ als den Funktionenraum $[0, 1]^{C(X, [0, 1])}$ aller Funktionen von $C(X, [0, 1])$ nach $[0, 1]$, so ist $i_X(x) \in [0, 1]^{C(X, [0, 1])}$ die Punktauswertung $C(X, [0, 1]) \rightarrow [0, 1]$, $f \mapsto f(x)$.

Bemerkung 33.10

- (a) (Eindeutigkeit) Ist auch $j: X \rightarrow K$ eine Stone-Čech-Kompaktifizierung für X (wie in Satz 33.9), so gibt es einen Homöomorphismus $\alpha: \beta X \rightarrow K$ derart, dass $\alpha \circ i_X = j$; dies zeigt man wie die Eindeutigkeit in Satz 25.2.
- (b) Der Beweis von Satz 33.9 zeigt, dass $i_X(X)$ dicht ist in βX und i_X eine topologische Einbettung.
- (c) Wie im Beweis von Satz 25.3 sieht man, dass eine Stone-Čech-Kompaktifizierung $i_X: X \rightarrow \beta X$ eines vollständig regulären Raums X immer so gewählt werden kann, dass $X \subseteq \beta X$ und $i_X: X \rightarrow \beta X$ die Inklusionsabbildung $x \mapsto x$ ist. Nach (b) ist dann X eine dichte Teilmenge von βX und βX induziert auf X die gegebene Topologie.

Ein topologischer Raum ist also genau dann vollständig regulär, wenn er eine Teilmenge eines kompakten topologischen Raums ist. Er ist dann homöomorph zu einer Teilmenge eines Produkts $[0, 1]^J$.


Satz 34.1

Es sei X eine Menge und $(f_j)_{j \in J}$ eine Familie von Abbildungen $f_j: X_j \rightarrow X$, wobei X_j ein topologischer Raum mit Topologie \mathcal{O}_j ist für $j \in J$. Setzen wir

$$\mathcal{O}_{\text{fin}} := \{U \subseteq X : (\forall j \in J) (f_j)^{-1}(U) \in \mathcal{O}_j\},$$

so gilt:

- (a) \mathcal{O}_{fin} ist eine Topologie auf X , welche f_j stetig macht als Abbildung nach $(X, \mathcal{O}_{\text{fin}})$, für alle $j \in J$.
- (b) Für jede Topologie \mathcal{O} auf X , welche f_j als Abbildung nach (X, \mathcal{O}) stetig macht für alle $j \in J$, folgt $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{O}_{\text{fin}}$.
- (c) Eine Teilmenge $A \subseteq X$ ist genau dann in $(X, \mathcal{O}_{\text{fin}})$ abgeschlossen, wenn $(f_j)^{-1}(A)$ in (X_j, \mathcal{O}_j) abgeschlossen ist für alle $j \in J$.

Man nennt \mathcal{O}_{fin} die **finale Topologie** auf X bzgl. der Familie $(f_j)_{j \in J}$; dies ist also die feinste Topologie auf X , die jedes f_j stetig macht. 

Beweis. (a) Wegen $f_j^{-1}(X) = X_j \in \mathcal{O}_j$ ist $X \in \mathcal{O}_{\text{fin}}$. Ist $(V_i)_{i \in I}$ eine Familie von Mengen $V_i \in \mathcal{O}_{\text{fin}}$ und $V := \bigcup_{i \in I} V_i$, so ist $f_j^{-1}(V_i) \in \mathcal{O}_j$ für jedes $i \in I$ und $j \in J$, also

$$f_j^{-1}(V) = \bigcup_{i \in I} f_j^{-1}(V_i) \in \mathcal{O}_j$$

und somit $V \in \mathcal{O}_{\text{fin}}$. Sind $P, Q \in \mathcal{O}_{\text{fin}}$, so ist $f_j^{-1}(P) \in \mathcal{O}_j$ und $f_j^{-1}(Q) \in \mathcal{O}_j$ für alle $j \in J$, also

$f_j^{-1}(P \cap Q) = f_j^{-1}(P) \cap f_j^{-1}(Q) \in \mathcal{O}_j$ und somit $P \cap Q \in \mathcal{O}_{\text{fin}}$.

Also ist \mathcal{O}_{fin} eine Topologie auf X . Gegeben $j \in J$ ist für jedes $U \in \mathcal{O}_{\text{fin}}$

$$f_j^{-1}(U) \in \mathcal{O}_j,$$

somit f_j stetig von (X_j, \mathcal{O}_j) nach $(X, \mathcal{O}_{\text{fin}})$.

(b) macht die Topologie \mathcal{O} auf X jedes f_j stetig, so ist für jedes $U \in \mathcal{O}$ für jedes $j \in J$

$$f_j^{-1}(U) \in \mathcal{O}_j$$

und somit $U \in \mathcal{O}_{\text{fin}}$, also $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{O}_{\text{fin}}$.

(c) A ist in $(X, \mathcal{O}_{\text{fin}})$ abgeschlossen genau dann, wenn $X \setminus A$ offen ist, also für jedes $j \in J$ das Urbild $f_j^{-1}(X \setminus A) = X_j \setminus f_j^{-1}(A)$ in X_j offen ist, also $f_j^{-1}(A)$ in X_j abgeschlossen ist. \square

Satz 34.2

Ist die Topologie auf einem topologischen Raum (X, \mathcal{O}) final bezüglich einer Familie $(f_j)_{j \in J}$ von Abbildungen $f_j: X_j \rightarrow X$ für topologische Räume (X_j, \mathcal{O}_j) , so gilt: Eine Abbildung $f: X \rightarrow Y$ in einen topologischen Raum (Y, \mathcal{O}_Y) ist genau dann stetig, wenn $f \circ f_j: X_j \rightarrow Y$ stetig ist für jedes $j \in J$.

Beweis. Ist f stetig, so auch $f \circ f_j$, da die finale Topologie jedes f_j stetig macht. Ist $f \circ f_j$ stetig für jedes $j \in J$ und $U \in \mathcal{O}_Y$, so ist $f_j^{-1}(f^{-1}(U)) = (f \circ f_j)^{-1}(U) \in \mathcal{O}_j$, somit $f^{-1}(U) \in \mathcal{O}$. \square

Beispiel 34.3

Ist X ein topologischer Raum, Y eine Menge und $q: X \rightarrow Y$ eine surjektive Abbildung, so ist die finale Topologie auf Y bzgl. $\{q\}$ genau die Quotiententopologie, die schon in §14 diskutiert wurde. Satz 34.2 verallgemeinert Satz 14.4.

Im Rest des Kapitels werden k -Räume (und Varianten) studiert.

Ist X ein Hausdorffscher topologischer Raum, so schreiben wir $\mathcal{K}(X)$ für die Menge aller kompakten Teilmengen $K \subseteq X$.

Definition 34.4

Ein topologischer Raum (X, \mathcal{O}) wird **k -Raum** genannt, wenn er Hausdorffsch ist und \mathcal{O} final ist bezüglich der Familie $(j_K)_{K \in \mathcal{K}(X)}$ der Inklusionsabbildungen $j_K: K \rightarrow X$ für $K \in \mathcal{K}(X)$. Hierbei versteht man jedes $K \in \mathcal{K}(X)$ mit der von X induzierten Topologie.

Bemerkung 34.5

Für einen Hausdorffraum X sind nach Satz 34.1 äquivalent:

- (a) X ist ein k -Raum;
- (b) Eine Teilmenge $U \subseteq X$ ist genau dann offen, wenn $U \cap K$ relativ offen in K ist für jede kompakte Teilmenge $K \subseteq X$;
- (c) Eine Teilmenge $A \subseteq X$ ist genau dann abgeschlossen, wenn $A \cap K$ relativ abgeschlossen in K ist für jedes $K \in \mathcal{K}(X)$, oder äquivalent dazu, abgeschlossen in X (da K in X abgeschlossen ist).

Beispiel 34.6

Jeder lokalkompakte topologische Raum X ist ein k -Raum.

Ist $U \subseteq X$ offen, so ist $U \cap K$ relativ offen für jedes $K \in \mathcal{K}(X)$. Sei, umgekehrt, U eine Teilmenge von X und $U \cap K$ relativ offen für jedes $K \in \mathcal{K}(X)$. Gegeben $x \in U$ sei K eine kompakten Umgebung von x in X , mit dem Inneren U° . Da $U \cap K$ relativ offen in K ist, ist $U \cap (K^\circ)$ relativ offen in K° und somit offen in X . Also ist U eine x -Umgebung in X und somit offen, da $x \in U$ beliebig war.

Beispiel 34.7

Jeder metrisierbare topologische Raum X ist ein k -Raum.

Sei nämlich d eine die Topologie auf X definierende Metrik. Ist A eine abgeschlossene Teilmenge von X , so ist $A \cap K$ relativ abgeschlossen in K für jedes $K \in \mathcal{K}(X)$. Sei umgekehrt A eine Teilmenge von X derart, dass $A \cap K$ abgeschlossen ist für jedes $K \in \mathcal{K}(X)$. Gegeben $x \in \bar{A}$ existiert eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in A derart, dass $x_n \rightarrow x$ in X für $n \rightarrow \infty$. Dann ist

$$K := \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$$

eine kompakte Teilmenge von X . Per Voraussetzung ist $A \cap K$ abgeschlossen in K . Da $x_n \in A \cap K$ und $x_n \rightarrow x$ in K , folgt $x \in A \cap K$. Also ist $\overline{A} \subseteq A$, somit $A = \overline{A}$ abgeschlossen.

Satz 34.8

Ist X ein k -Raum, so ist auch jede abgeschlossene Teilmenge $Y \subseteq X$ ein k -Raum, wenn man sie mit der von X induzierten Topologie \mathcal{O}_Y versieht.

Beweis. (Y, \mathcal{O}_Y) ist Hausdorffsch. Sei A eine Teilmenge von Y . Ist A in Y abgeschlossen, so auch $A \cap K$ für alle $K \in \mathcal{K}(Y)$.

Umgekehrt sei nun angenommen, dass $A \cap K$ in Y abgeschlossen ist für alle $K \in \mathcal{K}(Y)$. Ist $K \in \mathcal{K}(X)$, so ist $Y \cap K$ abgeschlossen in K , also kompakt und somit $Y \cap K \in \mathcal{K}(Y)$. Folglich ist

$$A \cap K = A \cap Y \cap K$$

abgeschlossen in Y und somit auch in X (da Y in X abgeschlossen ist). Also ist A abgeschlossen in X und somit auch in Y . \square

Bemerkung 34.9

Ist X ein k -Raum, so ist nach Satz 34.2 eine Abbildung $f: X \rightarrow Y$ in einen topologischen Raum Y genau dann stetig, wenn $f|_K$ stetig ist für jede kompakte Teilmenge $K \subseteq X$.

Verlangt man dies nur für $Y = \mathbb{R}$, erhält man folgende Variante:

Definition 34.10

Ein topologischer Raum X heißt **$k_{\mathbb{R}}$ -Raum**, wenn X Hausdorffsch ist und für jede Funktion $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ äquivalent sind:

- (a) f ist stetig;
- (b) $f|_K$ ist stetig für jede kompakte Teilmenge $K \subseteq X$.

Bemerkung 34.11

(i) Auch für jede Funktion $f: X \rightarrow Y$ von einem $k_{\mathbb{R}}$ -Raum X in einen vollständig regulären Raum Y sind (a) und (b) aus 34.10 äquivalent, da die Topologie auf Y initial ist bezüglich $C(Y, \mathbb{R})$.

f stetig $\Leftrightarrow (\forall g \in C(Y, \mathbb{R})) g \circ f$ stetig $\Leftrightarrow (\forall g \in C(Y, \mathbb{R})) (\forall K \in \mathcal{K}(X))$
 $g \circ f|_K$ stetig $\Leftrightarrow (\forall K \in \mathcal{K}(X)) f|_K$ stetig.

(ii) Jeder k -Raum ist ein $k_{\mathbb{R}}$ -Raum, nach Bemerkung 34.9.

(iii) Nach einem Satz von Noble ist $\prod_{j \in J} X_j$ ein $k_{\mathbb{R}}$ -Raum für jede Familie $(X_j)_{j \in J}$ lokalkompakter Räume. Jedoch kann man zeigen, dass \mathbb{R}^J kein k -Raum ist, wenn $|J| \geq |\mathbb{R}|$.

(iv) **Vorsicht:** Sind X und Y beides k -Räume, so braucht $X \times Y$ kein k -Raum zu sein und auch kein $k_{\mathbb{R}}$ -Raum.

Für ein Beispiel identifizieren wir $x \in \mathbb{R}^n$ mit $(x, 0) \in \mathbb{R}^{n+1}$. Es ist $X := \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ metrisierbar, $Y := \mathbb{R}^{(\mathbb{N})} := \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{R} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{R}^n$ ein k -Raum mit der finalen Topologie bzgl. den Inklusionen $[-n, n]^n \rightarrow Y$ (Übung). Die Abbildung

$$\beta: \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{R}^{(\mathbb{N})} \rightarrow \mathbb{R}, \quad ((x_n)_{n \in \mathbb{N}}, (y_n)_{n \in \mathbb{N}}) \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n$$

ist stetig auf jedem $K \in \mathcal{K}(X \times Y)$, aber unstetig (Übung). Benutze:

Satz 34.12

Es sei X eine Menge, versehen mit der finalen Topologie \mathcal{O} bezüglich einer Familie $(f_j)_{j \in J}$ von Abbildungen $f_j: X_j \rightarrow X$ mit topologischen Räumen (X_j, \mathcal{O}_j) . Für jede abgeschlossene

Teilmenge $Y \subseteq X$ ist dann die von X auf Y induzierte Topologie \mathcal{O}_Y final bezüglich der Familie $(f_j|_{f_j^{-1}(Y)})_{j \in J}$, wenn man $f_j^{-1}(Y)$ mit der von X_j induzierten Topologie versieht.

Beweis. Ist $A \subseteq Y$ derart, dass $(f_j|_{f_j^{-1}(Y)})^{-1}(A)$ in $f_j^{-1}(Y)$ abgeschlossen ist, so ist $f_j^{-1}(A) = (f_j|_{f_j^{-1}(Y)})^{-1}(A)$ auch in X_j abgeschlossen, da $f_j^{-1}(A)$ in X_j abgeschlossen ist. Also ist A abgeschlossen in X und somit auch in Y . \square

Beispiel 34.13

Sei die Topologie auf X final bzgl. $f_j: X_j \rightarrow X$, $j \in J$, mit Hausdorffräumen X_j . Ist $Y \subseteq X$ derart, dass $f_j^{-1}(Y)$ für alle $j \in J$ endlich ist, so ist Y in X abgeschlossen und die von X auf Y induzierte Topologie \mathcal{O}_Y ist diskret (jede Teilmenge ist offen).

Die endliche Teilmenge $F_j := f_j^{-1}(Y)$ von X_j ist abgeschlossen, also Y abgeschlossen. Nach Satz 34.12 ist \mathcal{O}_Y final bzgl. den $f_j|_{F_j}$. Jedes F_j ist diskret (als endlicher Hausdorffraum), also auch die finale Topologie.

Satz 34.14 (Direkte Limites)

Es sei $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n$ mit Mengen

$$X_1 \subseteq X_2 \subseteq \dots$$

und \mathcal{O}_n eine Topologie auf X_n für $n \in \mathbb{N}$ derart, dass die Inklusion

$$j_{m,n}: X_n \rightarrow X_m$$

stetig ist für alle $n \leq m$. Dann stimmt für jede Folge $n_1 < n_2 < \dots$ die finale Topologie \mathcal{O} auf X bzgl. der Folge $(j_n)_{n \in \mathbb{N}}$ der Inklusionsabbildungen $j_n: X_n \rightarrow X$ überein mit der finalen Topologie \mathcal{T} bzgl. $(j_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$.

Beweis. Sei U eine Teilmenge von X . Ist $U \in \mathcal{O}$, also $U \cap X_n \in \mathcal{O}_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, dann ist $U \cap X_{n_k} \in \mathcal{O}_{n_k}$ für alle $k \in \mathbb{N}$, also $U \in \mathcal{T}$. Ist umgekehrt $U \in \mathcal{T}$, so ist $U \cap X_{n_k} \in \mathcal{O}_{n_k}$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

Gegeben $n \in \mathbb{N}$ existiert ein $k \in \mathbb{N}$ mit $n_k \geq n$. Dann ist $U \cap X_n = U \cap X_{n_k} \cap X_n = (j_{n_k,n})^{-1}(U \cap X_{n_k}) \in \mathcal{O}_n$, also $U \in \mathcal{O}$. \square

Man nennt \mathcal{O} auch die **direkte Limestopologie** auf $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n$ und schreibt

$$X = \lim_{\rightarrow} X_n.$$

§35 Schwach-*-Topologie und Satz von Banach-Alaoglu

In diesem Kapitel sei E ein normierter Raum und E' sein Dualraum, die Menge aller stetigen linearen Funktionale $\lambda: E \rightarrow \mathbb{K}$. Wir versehen die Menge \mathbb{K}^E alle Funktionen $f: E \rightarrow \mathbb{K}$ mit der Topologie der punktweisen Konvergenz, also der initialen Topologie bezüglich der Familie der Punktauswertungen

$$\text{ev}_x: \mathbb{K}^E \rightarrow \mathbb{K}, \quad f \mapsto f(x)$$

für $x \in E$ (also den Projektionen $\mathbb{K}^E = \prod_{x \in E} \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$ auf die jeweilige x -Komponente).

Definition 35.1

Die von \mathbb{K}^E auf E' induzierte Topologie \mathcal{O}_p wird **schwach-*-Topologie** auf E' genannt. Versehen wir E' mit dieser Topologie, schreiben wir in dieser Vorlesung auch $E'_p := (E', \mathcal{O}_p)$.

Andere Bezeichnungen sind $\sigma(E', E) := \mathcal{O}_p$.

Mit den Punktauswertungen $\hat{x} := \text{ev}_x|_{E'}: E' \rightarrow \mathbb{K}$ für $x \in E$ gilt:

Satz 35.2

Die schwach-*-Topologie \mathcal{O}_p macht E' zu einem Hausdorffschen topologischen Vektorraum; sie ist gröber als die durch die Operatornorm $\|\cdot\|_{\text{op}}$ auf E' definierte Topologie \mathcal{O}_b . Es ist \mathcal{O}_p die initiale Topologie auf E' bezüglich der Familie der Punktauswertungen $\hat{x}: E' \rightarrow \mathbb{K}$ für $x \in E$, also die gröbste Topologie, welche jedes $\hat{x}: E' \rightarrow \mathbb{K}$ stetig macht.

Beweis. Es ist \mathbb{K}^E ein Hausdorffscher topologischer Vektorraum. Da E' ein Untervektorraum von \mathbb{K}^E ist, ist auch E' ein Hausdorffscher topologischer Vektorraum mit der von \mathbb{K}^E induzierten Topologie \mathcal{O}_p . Diese ist initial bezüglich der Inklusion $j: E' \rightarrow \mathbb{K}^E$. Wegen der Transitivität initialer Topologien ist \mathcal{O}_p auch initial bezüglich der Familie der Abbildungen $\text{ev}_x \circ j = \hat{x}: E' \rightarrow \mathbb{K}$ für $x \in E$. Da \mathcal{O}_b jedes \hat{x} stetig macht, ist $\mathcal{O}_p \subseteq \mathcal{O}_b$. \square

Satz 35.3 (Satz von Banach-Alaoglu).

Für jeden normierten Raum E ist die duale Einheitskugel

$$B_{E'} := \{\lambda \in E' : \|\lambda\|_{\text{op}} \leq 1\}$$

schwach-*-kompakt (d.h. eine kompakte Teilmenge von E'_p).

Beweis. Als Hilfsmittel für den Beweis betrachten wir den “algebraischen Dual” E^* aller (nicht notwendig stetigen) linearen Abbildungen $\lambda: E \rightarrow \mathbb{K}$. Mit den stetigen Punktauswertungen $ev_x: \mathbb{K}^E \rightarrow \mathbb{K}$ wie oben haben wir

$$E^* = \bigcap_{x,y \in E} \bigcap_{s,t \in \mathbb{K}} \ker(ev_{tx+sy} - t ev_x - s ev_y);$$

es ist also E^* ein **abgeschlossener** Untervektorraum von \mathbb{K}^E . Sei

$$\overline{B}_r^{\mathbb{K}}(0) := \{z \in \mathbb{K} : |z| \leq r\}$$

die Kugel vom Radius $r \in [0, \infty[$ in \mathbb{K} (einschließlich des entarteten Falls $r = 0$). Für ein $\lambda \in E^*$ gilt genau dann $\|\lambda\|_{\text{op}} \leq 1$, wenn $|\lambda(x)| \leq \|x\|$ für alle $x \in E$, d.h.

$$\lambda \in \prod_{x \in E} \overline{B}_{\|x\|}^{\mathbb{K}}(0) =: K.$$

Also ist $B_{E'} = E^* \cap K$ eine abgeschlossene Teilmenge von K mit der von \mathbb{K}^E induzierten Topologie. Nach 31.14 ist diese gleich der Produkttopologie \mathcal{O}_K auf K als Produkt der kompakten Mengen $\overline{B}_{\|x\|}^{\mathbb{K}}(0)$; nach dem Satz von Tychonoff ist (K, \mathcal{O}_K) kompakt. Als abgeschlossene Teilmenge von (K, \mathcal{O}_K) ist $B_{E'}$ kompakt. \square

§36 Gleichgradige Stetigkeit und Satz von Arzela-Ascoli

Es sei (Y, d_Y) ein metrischer Raum und X ein Hausdorffscher topologischer Raum. In diesem Kapitel wollen wir kompakte Teilmengen von $C(X, Y)$ erkennen. Topologien auf $C(X, Y)$?

Definition 36.1

(a) Auf $Y^X = \prod_{x \in X} Y$ haben wir die Topologie der punktweisen Konvergenz, die initial ist bezüglich den Punktauswertungen $ev_x: Y^X \rightarrow Y$ für $x \in X$. Die von Y^X auf Teilmengen $M \subseteq Y^X$ induzierte Topologie nennen wir die **Topologie der punktweisen Konvergenz** auf M ; wir schreiben \mathcal{O}_p für diese.

Insbesondere können wir auf $C(X, Y)$ die Topologie \mathcal{O}_p der punktweisen Konvergenz betrachten; diese ist initial bezüglich den Punktauswertungen $\varepsilon_x: C(X, Y) \rightarrow Y, f \mapsto f(x)$ für $x \in X$.

(b) Für kompakte Teilmengen $K \subseteq X$ ist die Funktion $d_K: C(K, Y) \times C(K, Y) \rightarrow [0, \infty[$,

$$(f, g) \mapsto d_K(f, g) := \sup\{d_Y(f(x), g(x)) : x \in K\}$$

eine Metrik auf $C(K, Y)$. Die initiale Topologie \mathcal{O}_c auf $C(X, Y)$ bezüglich den Einschränkungsabbildungen

$$\rho_K: C(X, Y) \rightarrow C(K, Y), \quad f \mapsto f|_K$$

für $K \in \mathcal{K}(X)$ nennen wir die **Topologie der kompakten Konvergenz** auf X (oder auch die Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf kompakten Teilmengen von X).

Ebenso für die induzierte Topologie auf Teilmengen $M \subseteq C(X, Y)$. Hierbei ist $C(K, Y)$ mit der durch die Metrik d_K definierten Topologie \mathcal{O}_K versehen. (Beachte $\mathcal{O}_K = \mathcal{O}_c$ im Spezialfall $X = K$)

Bemerkung 36.2

Es macht \mathcal{O}_c die Punktauswertung $\varepsilon_x: C(X, Y) \rightarrow Y$ stetig für alle $x \in X$; also ist $\mathcal{O}_p \subseteq \mathcal{O}_c$.

Gegeben $x \in X$ finden wir nämlich eine kompakte Teilmenge $K \subseteq X$ mit $x \in K$ (z.B. $K := \{x\}$); dann ist

$\varepsilon_x = \delta_x \circ \rho_K$ mit der Punktauswertung $\delta_x: C(K, Y) \rightarrow Y$, die auf (K, d_K) Lipschitz-stetig ist mit Lipschitzkonstante 1. In der Tat ist für alle $f, g \in C(K, Y)$

$$d_Y(\delta_x(f), \delta_x(g)) = d_Y(f(x), g(x)) \leq d_K(f, g).$$

Bemerkung 36.3

Ist $f \in C(X, Y)$, $\varepsilon > 0$ und $K \subseteq X$ kompakt, so ist

$$\{g \in C(X, Y): d_K(f|_K, g|_K) < \varepsilon\} = (\rho_K)^{-1}(B_\varepsilon^{C(K, Y)}(f|_K))$$

eine f -Umgebung in $(C(X, Y), \mathcal{O}_c)$. Jede f -Umgebung P in $(C(X, Y), \mathcal{O}_c)$ enthält eine f -Umgebung der vorigen Form.

Per Definition der initialen Topologie existieren nämlich kompakte Teilmengen K_1, \dots, K_n von X und offene Umgebungen U_j von $f|_{K_j}$ in $(C(K_j, Y), d_{K_j})$ für $j \in \{1, \dots, n\}$ derart, dass

$$(\rho_{K_1})^{-1}(U_1) \cap \dots \cap (\rho_{K_n})^{-1}(U_n) \subseteq P.$$

Nach Verkleinern dürfen wir annehmen, dass U_j eine offene

ε_j -Kugel um $f|_{K_j}$ ist für $j \in \{1, \dots, n\}$ bzw. eine ε -Kugel mit ε unabhängig von j , nach Ersetzen von ε_j durch das Minimum von $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$. Setzen wir $K := K_1 \cup \dots \cup K_n$, so ist

$$\begin{aligned} P &\supseteq \bigcap_{j=1}^n \{g \in C(X, Y) : (\forall x \in K_j) d_Y(f(x), g(x)) < \varepsilon\} \\ &= \{g \in C(X, Y) : (\forall x \in K) d_Y(f(x), g(x)) < \varepsilon\} \\ &= (\rho_K)^{-1}(B_\varepsilon^{C(K, Y)}(f|_K)). \end{aligned}$$

Definition 36.4

Eine Teilmenge $M \subseteq Y^X$ heißt **gleichgradig stetig** (oder gleichstetig), wenn für jedes $x \in X$ und jedes $\varepsilon > 0$ eine x -Umgebung $U \subseteq X$ existiert derart, dass

$$(\forall f \in M) (\forall y \in U) d_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

Im Vergleich zu Stetigkeit von f an der Stelle x ist hier U unabhängig von f . Insb. ist jedes $f \in M$ stetig, also $M \subseteq C(X, Y)$.

Beispiel 36.5

Für jeden normierten Raum $(E, \|\cdot\|)$ ist die duale Einheitskugel $B_{E'} \subseteq E' \subseteq C(E, \mathbb{K})$ gleichgradig stetig.

Gegeben $x \in E$ und $\varepsilon > 0$ gilt mit $U := B_\varepsilon^E(x)$ nämlich

$$(\forall \lambda \in B_{E'}) (\forall y \in U) |\lambda(x) - \lambda(y)| < \varepsilon,$$

da $|\lambda(x) - \lambda(y)| = |\lambda(x - y)| \leq \|\lambda\|_{\text{op}} \|x - y\| \leq \|x - y\| < \varepsilon$.

Lemma 36.6

Ist $M \subseteq C(X, Y)$ gleichgradig stetig, so gilt;

- Der Abschluss \overline{M} von M in Y^X (bezüglich der Topologie der punktweisen Konvergenz) ist gleichgradig stetig; insbesondere ist $\overline{M} \subseteq C(X, Y)$.
- Auf M stimmen \mathcal{O}_p und \mathcal{O}_c überein.
- M ist genau dann in $(C(X, Y), \mathcal{O}_c)$ abgeschlossen, wenn M in $(C(X, Y), \mathcal{O}_p)$ abgeschlossen ist. In diesem Fall ist M auch in (Y^X, \mathcal{O}_p) abgeschlossen.

Da $B_{E'}$ nach Beispiel 36.5 gleichgradig stetig ist, stimmt nach Lemma 36.6 (b) darauf \mathcal{O}_c überein mit der schwach-*-Topologie, welche nach Satz 35.3 kompakt ist. Wir erhalten also eine Verschärfung des Satzes von Banach-Alaoglu:

Satz 36.7

Für jeden normierten Raum E ist die duale Einheitskugel $B_{E'}$ in $E'_c := (E', \mathcal{O}_c)$ kompakt.

Beweis von Lemma 36.6. (a) Für jedes $x \in X$ und $\varepsilon > 0$ existiert eine x -Umgebung $U \subseteq X$ derart, dass

$$(\forall f \in M) (\forall y \in U) \quad d_Y(f(x), f(y)) < \frac{\varepsilon}{2},$$

also

$$M \subseteq \bigcap_{y \in U} (\text{ev}_x, \text{ev}_y)^{-1}(A) \quad (1)$$

mit den stetigen Punktauswertungen $\text{ev}_y: Y^X \rightarrow Y, f \mapsto f(y)$ für $y \in X$ und $A := \{(v, w) \in Y \times Y : d_Y(v, w) \leq \frac{\varepsilon}{2}\}$, einer abgeschlossenen Teilmenge von $Y \times Y$. Da die rechte Seite von (1) in Y^X abgeschlossen ist, enthält sie auch den Abschluss \overline{M} ; folglich gilt $(\forall f \in \overline{M}) (\forall y \in U) \quad d_Y(f(x), f(y)) \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$.

(b) Auf M ist $\mathcal{O}_p \subseteq \mathcal{O}_c$ (vgl. Bemerkung 36.2). Sei nun $f \in M$ und P eine Umgebung von f in (M, \mathcal{O}_c) . Nach Bemerkung 36.3 dürfen wir nach Verkleinern von P annehmen, dass

$$P = \{g \in M : d_K(f|_K, g|_K) < \varepsilon\}$$

für ein $\varepsilon > 0$ und eine kompakte Teilmenge $K \subseteq X$. Für jedes $x \in K$ existiert, da M gleichgradig stetig ist, eine offene x -Umgebung U_x in X derart, dass

$$(\forall g \in M) (\forall y \in U_x) \quad d_Y(g(x), g(y)) < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Da K kompakt ist, existiert eine endliche Teilmenge $\Phi \subseteq K$ mit

$$K \subseteq \bigcup_{x \in \Phi} U_x.$$

Nun ist $Q := \{g \in M : (\forall x \in \Phi) g(x) \in B_{\varepsilon/3}^Y(f(x))\}$ eine offene f -Umgebung in (M, \mathcal{O}_p) . Ist $g \in Q$, so gibt es für jedes $y \in K$ ein $x \in \Phi$ mit $y \in U_x$; somit gilt $d_Y(f(y), g(y)) \leq$

$$d_Y(f(y), f(x)) + d_Y(f(x), g(x)) + d_Y(g(x), g(y)) < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon;$$

also ist $Q \subseteq P$.

(c) Es sei \overline{M} der Abschluss von M in Y^X mit punktwieser Konvergenz und A der Abschluss von M in $C(X, Y)$ bezüglich kompakter Konvergenz. Da \overline{M} nach (a) gleichgradig stetig ist, stimmen nach (b) die Topologien \mathcal{O}_p und \mathcal{O}_c auf \overline{M} überein. Somit ist M auch in $(\overline{M}, \mathcal{O}_c)$ dicht und somit $\overline{M} \subseteq A$. Da die Topologie der kompakten Konvergenz auf $C(X, Y)$ feiner ist als die Topologie der punktwieser Konvergenz, ist \overline{M} auch in ersterer abgeschlossen und somit $A \subseteq \overline{M}$, folglich $A = \overline{M}$. Ist M in $(C(X, Y), \mathcal{O}_c)$ abgeschlossen, so ist $M = A$, also $M = \overline{M}$ auch in Y^X abgeschlossen und somit in $(C(X, Y), \mathcal{O}_p)$. Ist M in $(C(X, Y), \mathcal{O}_p)$ abgeschlossen, so ist $M = \overline{M} \cap C(X, Y) = \overline{M} = A$, also M auch in $(C(X, Y), \mathcal{O}_c)$ abgeschlossen. \square

Satz 36.8 (Satz von Arzela-Ascoli)

Es sei X ein Hausdorffscher topologischer Raum, (Y, d_Y) ein metrischer Raum und $M \subseteq C(X, Y)$ eine Teilmenge. Gilt

- (a) M ist gleichgradig stetig;
- (b) M ist punktweise relativ kompakt, d.h. für jedes $x \in X$ ist der Abschluss $\overline{\{f(x) : f \in M\}} \subseteq Y$ kompakt; und
- (c) M ist in $(C(X, Y), \mathcal{O}_c)$ abgeschlossen,

so ist (M, \mathcal{O}_c) kompakt. Ist umgekehrt (M, \mathcal{O}_c) kompakt, so folgt (b) und (c). Ist X ein $k_{\mathbb{R}}$ -Raum (also z.B. ein k -Raum, metrisierbar oder lokalkompakt), so sind (a)–(c) äquivalent zu Kompaktheit von (M, \mathcal{O}_c) .

Beweis. Seien (a)–(c) erfüllt. Nach (b) ist

$K_x := \overline{\{f(x) : f \in M\}} \subseteq Y$ kompakt für jedes $x \in X$, somit

$$K := \prod_{x \in X} K_x$$

kompakt in der Produkttopologie, nach dem Satz von Tychonoff; diese stimmt nach Satz 31.14 mit der von Y^X induzierten

Topologie überein. Nach Lemma 36.6 (c) ist M in Y^X abgeschlossen und somit auch in K . Also ist (M, \mathcal{O}_p) kompakt. Da $\mathcal{O}_p = \mathcal{O}_c$ auf M nach Lemma 36.6 (b), ist (M, \mathcal{O}_c) kompakt.

Ist umgekehrt (M, \mathcal{O}_c) kompakt, so ist $\text{ev}_x(M) = \{f(x) : f \in M\}$ kompakt in Y und somit relativ kompakt, für jedes $x \in X$; also gilt (b). Weiter ist die kompakte Teilmenge M dann abgeschlossen im Hausdorffraum $(C(X, Y), \mathcal{O}_c)$; also gilt (c).


Die folgenden Überlegungen und Hilfsmittel ermöglichen uns, den Beweis abzuschließen. Weiter sei (Y, d_Y) ein metrischer Raum.

Lemma 36.9

Für jeden kompakten topologischen Raum K ist die Auswertungsabbildung

$$\text{ev}: C(K, Y) \times K \rightarrow Y, \quad (f, x) \mapsto f(x)$$

stetig, bezüglich der Topologie der kompakten Konvergenz auf $C(K, Y)$.

Beweis. Wir zeigen, dass ev an jeder Stelle (f, x) stetig ist. 

Gegeben $\varepsilon > 0$ ist

$$U := f^{-1}(B_{\varepsilon/2}^Y(f(x)))$$

eine offene x -Umgebung in K . Weiter ist

$$P := \{g \in C(K, Y) : (\forall y \in K) d_Y(f(y), g(y)) < \varepsilon/2\}$$

eine offene f -Umgebung in $C(K, Y)$. Für alle $(g, y) \in P \times U$ ist $d_Y(f(x), g(y)) \leq d_Y(f(x), f(y)) + d_Y(f(y), g(y)) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$. \square

Lemma 36.10

Ist K kompakt, so ist jede kompakte Teilmenge $M \subseteq C(K, Y)$ gleichgradig stetig.

Beweis. Sei o.B.d.A. $M \neq \emptyset$ (der Fall der leeren Menge ist trivial). Wir zeigen, dass für jedes $x \in K$ und jedes $\varepsilon > 0$ die Menge

$$U := \bigcap_{f \in M} f^{-1}(B_{\varepsilon}^Y(f(x)))$$

eine offene x -Umgebung in K ist (für alle $f \in M$ und $y \in U$ ist

dann $d_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon$, also M gleichgradig stetig). Sei $y \in U$, also $d_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon$ für alle $f \in M$. Die Funktion

$$h: M \times K \rightarrow Y \times Y, \quad (f, z) \mapsto (f(x), f(z))$$

ist nach Lemma 36.9 stetig. Nun ist

$$\Delta_Y^\varepsilon := \{(v, w) \in Y \times Y : d_Y(v, w) < \varepsilon\}$$

eine offene Teilmenge von $Y \times Y$, somit

$$h^{-1}(\Delta_Y^\varepsilon)$$

offen in $M \times K$. Per Wahl von y ist $M \times \{y\} \subseteq h^{-1}(\Delta_Y^\varepsilon)$. Nach dem Wallaceschen Lemma existiert eine offene y -Umgebung $W \subseteq K$ derart, dass

$$M \times W \subseteq h^{-1}(\Delta_Y^\varepsilon).$$

Für jedes $z \in W$ ist dann $d_Y(f(x), f(z)) < \varepsilon$ für alle $f \in M$, somit $z \in U$. Also ist $W \subseteq U$, also U eine y -Umgebung in K . \square

Die Funktion $\theta: [0, \infty[\rightarrow [0, 1[$, $t \mapsto \frac{t}{1+t} = 1 - \frac{1}{1+t}$ ist streng monoton wachsend mit $\theta(0) = 0$ und $\lim_{t \rightarrow \infty} \theta(t) = 1$. Weiter ist θ stetig und auch $\theta^{-1}: s \mapsto \frac{1}{1-s} - 1$ stetig. Es ist

$$D: Y \times Y \rightarrow [0, 1[, \quad (x, y) \mapsto \frac{d_Y(x, y)}{1 + d_Y(x, y)}$$

ein Metrik auf Y , welche die gleiche Topologie auf Y definiert wie d_Y (Übung). Für $\varepsilon \in]0, 1[$ gilt $D(x, y) < \varepsilon$ genau dann, wenn $d_Y(x, y) < \theta^{-1}(\varepsilon)$. Folglich ist genau dann $M \subseteq C(X, Y)$ gleichgradig stetig bezüglich (Y, d_Y) , wenn dies bzgl. (Y, D) der Fall ist (Übung). Nach Ersetzen von d_Y durch D dürfen wir im Folgenden also annehmen, dass $d_Y(Y \times Y) \subseteq [0, 1[$. Für jede Menge J ist dann

$d_\infty: Y^J \times Y^J \rightarrow [0, 1[$, $(f, g) \mapsto \sup\{d_Y(f(j), g(j)): j \in J\}$ eine Metrik auf Y^J (Übung).

Definition 36.11

Wir nennen eine Familie $(f_j)_{j \in J}$ von Funktionen $f_j: X \rightarrow Y$ **gleichgradig stetig**, wenn die Teilmenge $\{f_j: j \in J\} \subseteq C(X, Y)$ gleichgradig stetig ist.

Lemma 36.12

Eine Familie $(f_j)_{j \in J}$ von Funktionen $f_j \in C(X, Y)$ ist genau dann gleichgradig stetig, wenn

$$\Phi: X \rightarrow Y^J, \quad x \mapsto (f_j(x))_{j \in J}$$

stetig nach (Y^J, d_∞) ist.

Beweis. Φ stetig \Leftrightarrow

$$\begin{aligned} & (\forall x \in X) (\forall \varepsilon > 0) (\exists U \in \mathcal{U}_x(X)) (\forall y \in U) d_\infty(\Phi(x), \Phi(y)) \leq \varepsilon \Leftrightarrow \\ & (\forall x \in X) (\forall \varepsilon > 0) (\exists U \in \mathcal{U}_x(X)) (\forall y \in U) (\forall j \in J) d_Y(f_j(x), f_j(y)) \leq \varepsilon. \quad \square \end{aligned}$$

Beweis von 36.8 beenden. Sei X ein $k_{\mathbb{R}}$ -Raum und $M \subseteq C(X, Y)$ kompakt; wir zeigen, dass M gleichgradig stetig ist. Für jede kompakte Teilmenge $K \subseteq X$ ist die Teilmenge $\rho_K(M) = \{f|_K : f \in M\} \subseteq C(K, Y)$ der Einschränkungen kompakt, da ρ_K stetig ist. Nach Lemma 36.10 ist $\rho_K(M)$ gleichgradig stetig, also die Familie $(f|_K)_{f \in M}$ gleichgradig stetig und somit die Abbildung

$$\Phi_K: K \rightarrow Y^M, \quad x \mapsto (f|_K(x))_{f \in M} = (f(x))_{f \in M}$$

nach Lemma 36.12 stetig, wenn wir Y^M mit der Metrik d_∞ versehen. Wir betrachten nun

$$\Phi: X \rightarrow Y^M, \quad x \mapsto (f(x))_{x \in M}.$$

Der dem metrischen Raum (Y^M, d_∞) zugrunde liegende topologische Raum ist vollständig regulär. Da X per Voraussetzung ein $k_{\mathbb{R}}$ -Raum ist und $\Phi|_K = \Phi_K$ stetig ist für jede kompakte Teilmenge $K \subseteq X$, ist Φ stetig, nach Bemerkung 34.11 (i). Also ist M gleichgradig stetig, nach Lemma 36.12. \square

Wir wollen den Satz von Arzela-Ascoli exemplarisch auf Teilmengen von $E'_c = (E', \mathcal{O}_c)$ anwenden und beobachten zunächst:

Lemma 36.13

Ist $(E, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum, so ist E'_c ein Hausdorffscher topologischer Vektorraum.

Beweis. Für jede kompakte Teilmenge $K \subseteq X$ ist $C(K, \mathbb{K})$ ein Banachraum mit der Supremumsnorm $\|\cdot\|_\infty$, also ein Hausdorffscher topologischer Vektorraum mit der Topologie, die durch die Supremumsmetrik $d_K: C(K, \mathbb{K})^2 \rightarrow [0, \infty[$,

$$(f, g) \mapsto \sup\{|f(x) - g(x)| : x \in K\} = \|f - g\|_\infty$$

definiert wird. Die Topologie \mathcal{O}_c der kompakten Konvergenz auf E' ist initial bezüglich den linearen Abbildungen $\rho_K: E' \rightarrow C(K, \mathbb{K})$, $\lambda \mapsto \lambda|_K$, welche auf E' die Punkte trennen; nach Beispiel 33.8 ist $E'_c = (E', \mathcal{O}_c)$ ein Hausdorffscher topologischer Vektorraum. \square

Nach Satz 36.7 ist $B_{E'} := \overline{B}_1^{E'}(0)$ in E'_c kompakt, also $\overline{B}_r^{E'}(0) = rB_{E'}$ für jedes $r > 0$ kompakt (da $E'_c \rightarrow E'_c, y \mapsto ry$ ein Homöomorphismus ist). Jede bzgl. \mathcal{O}_c abgeschlossene Teilmenge $K \subseteq \overline{B}_r^{E'}(0)$ ist dann in E'_c kompakt. Der Satz von Arzela-Ascoli zeigt, dass jede kompakte Teilmenge von E'_c von dieser Form ist:

Folgerung 36.14

Es sei $(E, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum und $M \subseteq E'_c$ eine kompakte Teilmenge. Dann ist $K \subseteq \overline{B}_r^{E'}(0)$ für ein $r > 0$.

Beweis. Da E metrisierbar, also ein k -Raum und somit ein $k_{\mathbb{R}}$ -Raum ist, liefert der Satz von Arzela-Ascoli, dass M gleichgradig stetig ist. Es gibt also eine 0-Umgebung $U \subseteq E$ mit

$$(\forall \lambda \in M) (\forall y \in U) \quad |\lambda(y) - \lambda(0)| < 1.$$

Nach Verkleinern von U dürfen wir annehmen, dass $U = \overline{B}_r^{E'}(0)$ für ein $r > 0$, so dass also für alle $\lambda \in M$ gilt: Für alle $y \in E$ mit $\|y\| \leq r$ ist $|\lambda(y)| \leq 1$. Für alle $y \in E$ mit $\|y\| \leq 1$ ist dann

$$|\lambda(y)| = \frac{1}{r} |\lambda(ry)| \leq \frac{1}{r},$$

also $\|\lambda\|_{\text{op}} \leq \frac{1}{r}$ und somit $M \subseteq \overline{B}_{1/r}^{E'}(0)$. \square

Für die Allgemeinbildung beenden wir das Kapitel mit Ausblicken auf Anwendungen und Verallgemeinerungen (ohne Details).

Bemerkung 36.15

Der Satz von Arzela-Ascoli wird auch benutzt beim Beweis der folgenden Resultate der Analysis:

- **Existenzsatz von Peano:** Ist $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig auf der offenen Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ und $(t_0, y_0) \in U$, so besitzt das Anfangswertproblem

$$y'(t) = f(t, y(t)), \quad y(t_0) = y_0$$

eine (nicht notwendig eindeutige) Lösung auf $]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[$ für ein $\varepsilon > 0$.

(Selbst dann, wenn f keine lokale Lipschitzbedingung erfüllt)

- Riemannscher Abbildungssatz: Für jedes einfach zusammenhängende Gebiet $U \subseteq \mathbb{C}$ mit $U \neq \mathbb{C}$ existiert eine bijektive holomorphe Abbildung $\phi: U \rightarrow \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ mit holomorpher Umkehrfunktion.

Bisher war im Satz von Arzela-Ascoli der topologische Raum X sehr allgemein, aber Y lediglich ein metrischer Raum. Im Folgenden wird angedeutet, wie sich Y weiter verallgemeinern lässt.

Bemerkung 36.16

Ist Y ein Hausdorffscher topologischer Vektorraum und X ein Hausdorffraum, so nennt man eine Teilmenge $M \subseteq Y^X$ **gleichgradig stetig**, wenn für jedes $x \in X$ und jede 0-Umgebung $V \subseteq Y$ eine x -Umgebung $U \subseteq X$ existiert derart, dass

$$(\forall f \in M) (\forall y \in U) \quad f(y) \in f(x) + V.$$

Man kann auch hier auf $C(X, Y)$ eine Topologie der kompakten Konvergenz definieren, mit $\{g \in C(X, Y) : (g - f)(K) \subseteq V\}$ für $K \in \mathcal{K}(X)$ und $V \in \mathcal{U}_0(Y)$ als einer Basis von Umgebungen um $f \in C(X, Y)$. Der Satz von Arzela-Ascoli bleibt wörtlich gültig.

Einen gemeinsamen Rahmen liefern sogenannte **uniforme Räume**. Man hat hier auf einem topologischen Raum Y einen Filter \mathcal{N} von Umgebungen $U \subseteq Y \times Y$ der Diagonalen $\Delta_Y := \{(x, x) : x \in Y\}$ gegeben, der geeignete Axiome erfüllt (den “Nachbarschaftsfilter”).³ Durch $U \in \mathcal{N}$ kann man dann Umgebungen der Punkte $x \in Y$ parametrisieren; es ist

$$U[x] := \{y \in Y : (x, y) \in U\}$$

sozusagen die “Umgebung der Größe U ” um x . Im Falle eines metrischen Raums (Y, d_Y) ist \mathcal{N} der von den Mengen

$$\Delta_Y^\varepsilon := \{(x, y) \in Y \times Y : d_Y(x, y) < \varepsilon\}$$

mit $\varepsilon > 0$ erzeugte Filter; hier ist

$$\Delta_Y^\varepsilon[x] = \{y \in X : d_Y(x, y) < \varepsilon\} = B_\varepsilon^Y(x).$$

Im Falle eines topologischen Vektorraums Y sei \mathcal{N} der Filter, der von den Mengen

$$\Delta_Y^V := \{(x, y) \in Y \times Y : y \in x + V\}$$

mit $V \in \mathcal{U}_0(Y)$ erzeugt wird; hier ist

³Im Falle $Y = \emptyset$ erlaubt man $\mathcal{N} = \{\emptyset\}$.

$$\Delta_Y^V[x] = x + V \quad \text{für alle } x \in Y.$$

Man kann zeigen, dass ein Hausdorffscher topologischer Raum genau dann eine die Topologie definierende uniforme Struktur zulässt, wenn er vollständig regulär ist. Im Folgenden betrachten wir nur Hausdorffsche uniforme Räume.

Bemerkung 36.17

Ist X ein Hausdorffraum und (Y, \mathcal{N}) ein uniformer Raum, so nennt man $M \subseteq Y^X$ **gleichgradig stetig**, wenn für jedes $x \in X$ und jedes $W \in \mathcal{N}$ eine x -Umgebung $U \subseteq X$ existiert derart, dass

$$(\forall f \in M) (\forall y \in U) (f(x), f(y)) \in W$$

(also $f(y) \in W[f(x)]$). Der Satz von Arzela-Ascoli (Satz 36.8) bleibt gültig, wenn man den metrischen Raum durch einen uniformen Raum (Y, \mathcal{N}) ersetzt.

Man kann Y in ein Produkt $\prod_{j \in J} Y_j$ metrischer Räume einbetten und den Beweis dann auf den oben diskutierten Fall metrischer Räume zurückführen.

§37 Kompakte Operatoren


Kompakte Operatoren zwischen Banachräumen (und insbesondere kompakte Operatoren zwischen Hilberträumen) sind besonders einfache Operatoren und dennoch wichtig für viele Anwendungen. Zum Beispiel werden wir später Eigenvektoren für gewisse kompakte Operatoren diskutieren. Im Hinblick auf den Beweis von Satz 37.9 beginnen wir etwas allgemeiner, auch wenn uns vor allem Operatoren zwischen Banachräumen interessieren.

Definition 37.1

Eine Teilmenge B eines topologischen Vektorraums E heißt **beschränkt**, wenn für jede 0-Umgebung $U \subseteq E$ ein $r > 0$ mit $B \subseteq rU$ existiert.

Lemma 37.2

Eine Teilmenge B eines normierten Raums $(E, \|\cdot\|)$ ist genau dann beschränkt, wenn $B \subseteq \overline{B}_r^E(0)$ für ein $r > 0$.

Beweis. Sei B beschränkt. Da $\overline{B}_1^E(0)$ eine 0-Umgebung ist, 

existiert ein $r > 0$ mit $B \subseteq r\overline{B}_1^E(0) = \overline{B}_r^E(0)$. Ist umgekehrt $B \subseteq \overline{B}_r^E(0)$ für ein $r > 0$ und $U \subseteq E$ eine 0-Umgebung, so existiert ein $s > 0$ mit $\overline{B}_s^E(0) \subseteq U$. Dann ist

$$B \subseteq \overline{B}_r^E(0) = \frac{r}{s} \overline{B}_s^E(0) \subseteq \frac{r}{s} U,$$

also B beschränkt. \square

Lemma 37.3

Jede kompakte Teilmenge K eines Hausdorffschen topologischen Vektorraums E ist beschränkt.

Beweis. Sei $U \subseteq E$ eine 0-Umgebung. Die Abbildung $h: \mathbb{K} \times K \rightarrow E$, $(t, x) \mapsto tx$ ist stetig und $h(0, x) = 0 \in U^\circ$, also $\{0\} \times K \subseteq h^{-1}(U^\circ)$. Nach dem Wallaceschen Lemma gibt es ein $r > 0$ mit $B_r^{\mathbb{K}}(0) \times K \subseteq h^{-1}(U^\circ)$. Dann ist $(r/2)K \subseteq U^\circ$ und somit $K \subseteq (2/r)U$. \square

Lemma 37.4

Ist $\alpha: E \rightarrow F$ eine stetige lineare Abbildung zwischen topologischen Vektorräumen, so ist $\alpha(B)$ beschränkt in F für jede beschränkte Teilmenge $B \subseteq E$.

Beweis. Für jede 0-Umgebung $U \subseteq F$ ist $\alpha^{-1}(U)$ eine 0-Umgebung in E . Da B beschränkt ist, existiert ein $r > 0$ derart, dass $B \subseteq r\alpha^{-1}(U)$. Dann ist $\alpha(B) \subseteq rU$, also $\alpha(B)$ beschränkt. \square

Lemma 37.5

Eine lineare Abbildung $\alpha: E \rightarrow F$ zwischen topologischen Vektorräumen ist genau dann stetig, wenn α stetig ist an der Stelle 0.

Beweis. Die Notwendigkeit der Bedingung ist klar. Ist α stetig an der Stelle 0, so ist für jedes $x \in E$

$$\alpha = \tau_{\alpha(x)}^F \circ \alpha \circ \tau_{-x}^E$$

mit den stetigen Translationen $\tau_{-x}^E: E \rightarrow E, y \mapsto y - x$ und $\tau_{\alpha(x)}^F: F \rightarrow F, y \mapsto y + \alpha(x)$. Also ist α stetig an der Stelle x . \square

Eine Teilmenge M eines Hausdorffschen topologischen Raums X heißt **relativ kompakt**, wenn der Abschluss $\overline{M} \subseteq X$ kompakt ist.

Definition 37.6

Eine stetige lineare Abbildung $\alpha: E \rightarrow F$ zwischen Hausdorffschen topologischen Vektorräumen heißt **kompakter Operator**, wenn $\alpha(B)$ in F relativ kompakt ist für jede beschränkte Teilmenge $B \subseteq E$.

Satz 37.7

Es seien E, F und H Hausdorffsche topologische Vektorräume und $\alpha: E \rightarrow F$ ein kompakter Operator.

- (a) Für jede stetige lineare Abbildung $\beta: H \rightarrow E$ ist $\alpha \circ \beta: H \rightarrow F$ ein kompakter Operator.
- (b) Für jede stetige lineare Abbildung $\beta: F \rightarrow H$ ist $\beta \circ \alpha: E \rightarrow H$ ein kompakter Operator.
- (c) Für alle $s, t \in \mathbb{K}$ und jeden kompakten Operator $\beta: E \rightarrow F$ ist auch $s\alpha + t\beta: E \rightarrow F$ ein kompakter Operator.

Beweis. (a) Für jede beschränkte Teilmenge $B \subseteq H$ ist $\beta(B)$ beschränkt in E nach Lemma 37.4, somit $\alpha(\beta(B))$ relativ kompakt.

(b) Ist B eine beschränkte Teilmenge von E , so ist $\overline{\alpha(B)} \subseteq F$

kompakt, also auch $\beta(\overline{\alpha(B)})$ kompakt. Da diese Teilmenge $\beta(\alpha(B))$ enthält, ist $\beta(\alpha(B))$ relativ kompakt, somit $\beta \circ \alpha$ ein kompakter Operator.

(c) Ist B eine beschränkte Teilmenge von E , so sind $\overline{\alpha(B)}$ und $\overline{\beta(B)}$ kompakte Teilmengen von F . Nach dem Satz von Tychonoff ist $\overline{\alpha(B)} \times \overline{\beta(B)}$ eine kompakte Teilmenge von $F \times F$. Die Funktion $h: F \times F \rightarrow F, (x, y) \mapsto sx + ty$ ist stetig, also $h(\overline{\alpha(B)} \times \overline{\beta(B)})$ eine kompakte Teilmenge des Hausdorffraums F . Da diese $(s\alpha + t\beta)(B)$ enthält, ist letztere Menge relativ kompakt in F , also $s\alpha + t\beta$ ein kompakter Operator. \square

Satz 37.8

Sind $(E, \|\cdot\|_E)$ ein normierter Raum, F ein Hausdorffscher topologischer Vektorraum und $\alpha: E \rightarrow F$ linear, so sind äquivalent:

- (a) α ist ein kompakter Operator, also α ist stetig und $\alpha(B)$ relativ kompakt in F für jede beschränkte Teilmenge $B \subseteq E$;
- (b) Für jedes $r > 0$ ist $\alpha(\overline{B}_r^E(0))$ relativ kompakt in F ;
- (c) Das Bild $\alpha(\overline{B}_1^E(0))$ der abgeschlossenen Einheitskugel ist relativ kompakt in F .

Beweis. Die Implikationen (a) \Rightarrow (b) und (b) \Rightarrow (c) sind trivial. Gelte nun (c) und sei $B \subseteq E$ eine beschränkte Teilmenge. Dann ist $B \subseteq \overline{B}_r^E(0) = r\overline{B}_1^E(0)$ für ein $r > 0$, somit

$$\alpha(B) \subseteq r\alpha(\overline{B}_1^E(0)) \subseteq \overline{r\alpha(\overline{B}_1^E(0))}$$

Teilmenge einer kompakten Menge und somit relativ kompakt. Weiter ist α stetig an der Stelle 0 und somit stetig. Sei nämlich $V \subseteq F$ eine beliebige 0-Umgebung. Da der Abschluss K von $\alpha(\overline{B}_1^E(0))$ in F kompakt ist, ist dieser nach Lemma 37.3 beschränkt, also $K \subseteq rV$ für ein $r > 0$. Dann ist $\alpha(\overline{B}_{\frac{1}{r}}^E(0)) = \frac{1}{r}\alpha(\overline{B}_1^E(0)) \subseteq \frac{1}{r}K \subseteq V$. \square

Satz 37.9

Sind $(E, \|\cdot\|_E)$ sowie $(F, \|\cdot\|_F)$ normierte Räume und $\alpha: E \rightarrow F$ ein kompakter Operator, so ist auch die duale lineare Abbildung $\alpha': F' \rightarrow E'$, $\lambda \mapsto \lambda \circ \alpha$ ein kompakter Operator zwischen den Banachräumen $(F', \|\cdot\|_{\text{op}})$ und $(E', \|\cdot\|_{\text{op}})$.

Beweis. Es ist $\alpha' = \beta \circ \gamma$ mit der identischen Abbildung

$$\gamma: (F', \|\cdot\|_{\text{op}}) \rightarrow F'_c, \quad \lambda \mapsto \lambda$$

und der linearen Abbildung

$$\beta: F'_c \rightarrow (E', \|\cdot\|_{\text{op}}), \quad \lambda \mapsto \lambda \circ \alpha.$$

Nach Satz 36.7 ist $\gamma(\overline{B}_1^{F'}(0)) = \overline{B}_1^{F'_c}(0)$ kompakt in F'_c , also γ ein kompakter Operator, nach Satz 37.8. Wir zeigen nun, dass β stetig an der Stelle 0 und somit stetig ist; nach Satz 37.7 (b) ist dann $\alpha' = \beta \circ \gamma$ ein kompakter Operator. Ist U eine 0-Umgebung in $(E', \|\cdot\|_{\text{op}})$, so können wir nach Verkleinern annehmen, dass $U = \overline{B}_\varepsilon^{E'}(0)$ für ein $\varepsilon > 0$. Da α ein kompakter Operator ist, ist der Abschluss K von $\alpha(\overline{B}_1^E(0))$ in F kompakt. Nach Bemerkung 36.3 ist

$$V := \{\lambda \in F': \lambda(K) \subseteq B_\varepsilon^{\mathbb{K}}(0)\} \quad (1)$$

eine 0-Umgebung in F'_c . Für alle $\lambda \in V$ gilt für alle $x \in \overline{B}_1^E(0)$

$$|\beta(\lambda)(x)| = |(\lambda \circ \alpha)(x)| = |\lambda(\alpha(x))| < \varepsilon,$$

also $\|\beta(\lambda)\|_{\text{op}} \leq \varepsilon$ und somit $\beta(V) \subseteq \overline{B}_\varepsilon^{E'}(0) = U$. \square

§38 Charakterisierung reflexiver Banachräume

Definition 38.1

Sei $(E, \|\cdot\|_E)$ ein normierter Raum. Die initiale Topologie \mathcal{O}_w auf E bezüglich E' heißt **schwache Topologie**; schreibe $E_w := (E, \mathcal{O}_w)$.

Nach Beispiel 33.8 ist E_w ein Hausdorffscher topologischer Vektorraum. Die schwach-* Topologie $\sigma(E'', E')$ auf $E'' = (E')'$ ist initial bezüglich den linearen Funktionalen $\hat{\lambda} = \eta_{E'}(\lambda): E'' \rightarrow \mathbb{K}$, $\alpha \mapsto \alpha(\lambda)$. Die bzgl. $\eta_E: E \rightarrow (E')'_p$, $x \mapsto \hat{x}$ initiale Topologie auf E ist initial bzgl. den Abbildungen $\hat{\lambda} \circ \eta_E = \lambda$ für λ in E' und somit gleich \mathcal{O}_w ; benutzt wurde $\hat{\lambda}(\hat{x}) = \hat{x}(\lambda) = \lambda(x)$. Ist E ein reflexiver Banachraum, also η_E bijektiv, ist ergo $\eta_E: E_w \rightarrow (E')'_p$ ein Homöomorphismus. Da $\eta_E(\overline{B}_1^E(0)) = \overline{B}_1^{E''}(0)$ nach dem Satz von Banach-Alaoglu in $(E')'_p$ kompakt ist, ist $\overline{B}_1^E(0)$ in E_w kompakt.

Satz 38.2

Ein Banachraum $(E, \|\cdot\|_E)$ ist genau dann reflexiv, wenn $\overline{B}_1^E(0)$ schwach kompakt ist (also kompakt in E_w).

Für die verbleibende Implikation " \Leftarrow " nutzen folgende Hilfsmittel.

Definition 38.3

Eine Teilmenge U eines \mathbb{K} -Vektorraums E heißt **scheibenförmig**, wenn $zU \subseteq U$ für alle $z \in \mathbb{K}$ mit $|z| \leq 1$. Ist U scheibenförmig und konvex, so wird U auch **absolut konvex** genannt.

Im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ist $U \subseteq E$ genau dann absolut konvex, wenn U konvex ist und symmetrisch (also $U = -U$).

Ist $(E, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum und $U := B_1^E(0)$, so ist $\|x\| = \inf\{t > 0: x \in tU\}$. Allgemeiner kann man Normen bzw. Halbnormen aus geeigneten 0-Umgebungen gewinnen.

Satz 38.4

Ist E ein topologischer Vektorraum und $U \subseteq E$ eine absolut konvexe 0-Umgebung, so ist

$$\mu_U: E \rightarrow [0, \infty[, \quad x \mapsto \inf\{t > 0: x \in tU\} \in [0, \infty[$$

eine Halbnorm auf E (genannt das **Minkowski-Funktional** von U).

Ist U offen, so gilt $\{x \in E: \mu_U(x) < 1\} = U$.

Beweis. Gegeben $t > 0$ ist $x \in tU$ äquivalent zu $(1/t)x \in U$; gilt dies, so ist $(1/s)x = (t/s)(1/t)x \in (t/s)U \subseteq U$ für alle $s \geq t$; wir bilden also das Infimum über ein Intervall.

Für jedes $x \in E$ ist die Abbildung $h: \mathbb{K} \rightarrow E, z \mapsto zx$ stetig und $h(0) = 0$, es existiert somit ein $\varepsilon > 0$ mit $h(B_\varepsilon^{\mathbb{K}}(0)) \subseteq U$. Folglich ist $tx \in U$ und somit $x \in t^{-1}U$ für alle $t \in]0, \varepsilon[$. Das Infimum für $\mu_U(x)$ wird also über eine nicht leere Menge gebildet.

Ist $x = 0$, so ist $x \in tU$ für alle $t > 0$, somit $\mu_U(x) = 0$. Sind $x, y \in E$ und $t, s > 0$ mit $t > \mu_U(x)$ und $s > \mu_U(y)$, so ist

$$\frac{1}{s+t}(x+y) = \frac{t}{s+t} \frac{1}{t}x + \frac{s}{s+t} \frac{1}{s}y \in \frac{t}{s+t}U + \frac{s}{s+t}U \subseteq U,$$

da $t/(s+t) \in [0, 1]$ und $s/(s+t) = 1 - t/(s+t)$. Also ist

$$\mu_U(x+y) \leq t + s.$$

Übergang zum Infimum in t liefert $\mu_U(x+y) \leq \mu_U(x) + s$;

Übergang zum Infimum in s liefert $\mu_U(x+y) \leq \mu_U(x) + \mu_U(y)$.

Nach dem Vorigen ist für $x \in E$

$$\mu_U(0x) = \mu_U(0) = 0 = 0\mu_U(x).$$

Da U scheibenförmig ist, gilt $wU = U$ für alle $w \in \mathbb{K}$ mit $|w| = 1$ (da $wU \subseteq U$ und $w^{-1}U \subseteq U$). Für $z \in \mathbb{K}$ mit $z \neq 0$ ist für $t > \mu_U(x)$

$$x \in tU, \quad \text{also} \quad zx \in tzU = t|z| \frac{z}{|z|} U = t|z|U,$$

also $\mu_U(zx) \leq t|z|$. Übergang zum Infimum in t liefert

$\mu_U(zx) \leq |z|\mu_U(x)$. Ebenso ist

$\mu_U(x) = \mu_U((1/z)zx) \leq (1/|z|)\mu_U(zx)$, also $\mu_U(zx) \geq |z|\mu_U(x)$,
somit $\mu_U(zx) = |z|\mu_U(x)$.

Ist $x \in U$, so gibt es wegen der Stetigkeit der Abbildung $h: \mathbb{K} \rightarrow E$, $z \mapsto zx$ mit $h(1) = x \in U$ ein $\varepsilon > 0$ mit $h(B_\varepsilon^{\mathbb{K}}(1)) \subseteq U$. Für alle $r > 0$ mit $r \in]1, 1 + \varepsilon[$ ist dann $rx \in U$, somit $x \in (1/r)U$ und folglich $\mu_U(x) \leq 1/r < 1$. Ist umgekehrt $x \in E$ mit $\mu_U(x) < 1$, so existiert ein $t \in]\mu_U(x), 1]$ mit $x \in tU \subseteq U$, so dass also $x \in U$. \square

Wir benötigen einen Spezialfall des Hahn-Banachschen Trennungssatzes (siehe kommende Vorlesung "Lokalkonvexe Räume").

Lemma 38.5

Ist $(E, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum, $K \neq \emptyset$ eine kompakte, absolut konvexe Teilmenge von E und $x \in E \setminus K$, so existiert ein $\lambda \in E'$ derart, dass $|\lambda(y)| \leq 1$ für alle $y \in K$ und $\lambda(x) > 1$.

Beweis. Da K kompakt ist und in der offenen Menge $E \setminus \{x\}$ enthalten, existiert ein $\varepsilon > 0$ mit $U := K + B_\varepsilon^E(0) \subseteq E \setminus \{x\}$. Das Minkowski-Funktional $q := \mu_U$ ist dann eine Halbnorm auf E und $x \notin U = \{y \in E : q(y) < 1\}$, somit $q(x) \geq 1$. Wir betrachten nun die Norm $\|\cdot\|_q$ auf $E_q := E/N_q$ mit $N_q := q^{-1}(\{0\})$ wie in Lemma 7.3 und die kanonische Abbildung $\alpha_q: E \rightarrow E_q$, $y \mapsto y + N_q$; die linear ist. Da $\|\alpha_q(y)\|_q = q(y)$ für alle $y \in E$, ist

$$\alpha_q^{-1}(B_r^{E_q}(0)) = \{y \in E : q(y) < r\} = r\{y \in E : q(y) < 1\} = rU$$

eine offene Nullumgebung in E für jedes $r > 0$, somit

$\alpha_q: (E, \|\cdot\|) \rightarrow (E_q, \|\cdot\|_q)$ stetig. Somit ist $\alpha_q(K)$ eine kompakte Teilmenge von $\alpha_q(U) = B_1^{E_q}(0)$ und folglich

$$r := \max\{\|v\|_q : v \in \alpha_q(K)\} < 1.$$

Wir wählen $t \in]r, 1[$. Nach Folgerung 17.1 gibt es ein $\Lambda \in (E_q)'$ derart, dass $\Lambda(\alpha_q(x)) = \|\alpha_q(x)\|_q = q(x)$ und $\|\Lambda\|_{\text{op}} \leq 1$. Dann ist $\lambda := (1/t)\Lambda \circ \alpha_q \in E'$ und

$$\lambda(x) = (1/t)\Lambda(\alpha_q(x)) = (1/t)q(x) \geq 1/t > 1.$$

Für jedes $y \in K$ ist $|\lambda(y)| = (1/t)|\Lambda(\alpha_q(y))| \leq (1/t)r \leq 1$, da $\|\alpha_q(y)\| \leq r$ und $\|\Lambda\|_{\text{op}} \leq 1$. \square

Beweis von Satz 38.2. Für die verbleibende Implikation nehmen wir an, dass $\overline{B}_1^E(0)$ in E_w kompakt ist und somit

$K := \eta_E(\overline{B}_1^E(0)) = \overline{B}_1^{E''}(0) \cap \eta_E(E)$ kompakt in $(E')'_p$. Wäre $\eta_E(E) \neq E''$, so wäre K eine echte Teilmenge von $\overline{B}_1^{E''}(0)$; es gäbe also ein $\alpha \in E''$ mit $\|\alpha\|_{\text{op}} \leq 1$ derart, dass $\alpha \notin K$. Da $E'' \setminus \{\alpha\}$ offen in $(E')'_p$ ist und $h(K \times \{0\}) \subseteq E'' \setminus \{\alpha\}$ für die stetige Abbildung $h: K \times (E')'_p \rightarrow (E')'_p$, $(x, y) \mapsto x + y$, existiert nach dem Wallaceschen Lemma eine offene 0-Umgebung $U \subseteq (E')'_p$ derart, dass

$$K + U \subseteq (E')'_p \setminus \{\alpha\}.$$

Nach Verkleinern von U dürfen wir annehmen, dass für geeignete $\varepsilon > 0$

$\lambda_1, \dots, \lambda_n \in E'$ mit $n \in \mathbb{N}$ und ein $\varepsilon > 0$

$$U = \bigcap_{j=1}^n \{\beta \in E'' : \beta(\lambda_j) = \eta_{E'}(\lambda_j)(\beta) \in B_\varepsilon^{\mathbb{K}}(0)\}.$$

Wir betrachten die stetige lineare Abbildung

$$\Phi = (\eta_{E'}(\lambda_1), \dots, \eta_{E'}(\lambda_n)) : (E')'_p \rightarrow \mathbb{K}^n, \quad \beta \mapsto (\beta(\lambda_1), \dots, \beta(\lambda_n)).$$

Dann ist $F := \Phi(E'')$ ein Untervektorraum von \mathbb{K}^n . Es ist $\Phi(K)$ eine nichtleere, kompakte, absolut konvexe Teilmenge von F .

Weiter ist $\Phi(\alpha) \notin \Phi(K)$, denn wäre $\Phi(\alpha) = \Phi(\beta)$ für ein $\beta \in K$, so wäre $\alpha - \beta \in \ker \Phi \subseteq U$ und somit $\alpha \in \beta + U \subseteq K + U$, im Widerspruch zu $K + U \subseteq E'' \setminus \{\alpha\}$. Nach Lemma 38.5 existiert ein $\lambda \in F'$ derart, dass $|\lambda(\Phi(\beta))| \leq 1$ für alle $\beta \in K$ und $\lambda(\Phi(\alpha)) > 1$.

Nach dem Hahn-Banachschen Fortsetzungssatz gibt es ein

$\Lambda \in (\mathbb{K}^n)'$ mit $\Lambda|_F = \lambda$. Setzen wir $a_j := \Lambda(e_j)$ mit den Standard-Einheitsvektoren e_1, \dots, e_n in \mathbb{K}^n , so ist

$\Lambda(\sum_{j=1}^n x_j e_j) = \sum_{j=1}^n a_j x_j$ für alle $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{K}$, also

$$\lambda \circ \Phi = \sum_{j=1}^n a_j \eta_{E'}(\lambda_j) = \eta_{E'}(\mu)$$

mit $\mu := \sum_{j=1}^n a_j \lambda_j$. Für jedes $x \in \overline{B}_1^E(0)$ ist $\eta_E(x) \in K$, also

$$|\mu(x)| = |\eta_E(x)(\mu)| = |\eta_{E'}(\mu)(\eta_E(x))| = |(\lambda \circ \Phi)(\eta_E(x))| \leq 1$$

und somit $\|\mu\|_{\text{op}} \leq 1$. Folglich ist $|\alpha(\mu)| \leq \|\alpha\|_{\text{op}} \|\mu\|_{\text{op}} \leq 1$.
Jedoch ist

$$\alpha(\mu) = \eta_{E'}(\mu)(\alpha) = (\lambda \circ \Phi)(\alpha) > 1,$$

Widerspruch. Also muss doch $\eta_E(E) = E''$ sein. \square

Hilberträume sind Banachräume, in denen die Norm von einem Skalarprodukt kommt und wir somit u.a. von Orthogonalität sprechen können. Sie sind in vielerlei Hinsicht besonders einfach und dennoch (oder gerade deswegen) besonders wichtig für viele Anwendungen.

Definition 39.1

Ein **unitärer Raum** ist ein komplexer Vektorraum H , zusammen mit einer Abbildung

$$\langle \cdot, \cdot \rangle: H \times H \rightarrow \mathbb{C}, \quad (x, y) \mapsto \langle x, y \rangle$$

(dem "Skalarprodukt") derart, dass für alle $x, y, z \in H$ und $\alpha \in \mathbb{C}$:

- (a) $\langle y, x \rangle = \overline{\langle x, y \rangle}$;
- (b) $\langle x, y + z \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle$;
- (c) $\langle x, \alpha y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$;
- (d) $\langle x, x \rangle \geq 0$;
- (e) $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Bemerkung 39.2

Es sei $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein unitärer Raum.

(i) Für jedes $x \in H$ ist $\langle x, \cdot \rangle: H \rightarrow \mathbb{C}$, $y \mapsto \langle x, y \rangle$ nach (b) und (c) eine \mathbb{C} -lineare Abbildung. Insbesondere ist $\langle x, 0 \rangle = 0$.

(ii) Für alle $x, y \in H$ und $\alpha \in \mathbb{C}$ ist nach (a) und (c):

$$\langle \alpha x, y \rangle = \overline{\langle y, \alpha x \rangle} = \overline{\alpha \langle y, x \rangle} = \bar{\alpha} \langle x, y \rangle.$$

(iii) Nach (a) und (b) gilt für alle $x, y, z \in H$

$$\langle x + y, z \rangle = \overline{\langle z, x + y \rangle} = \overline{\langle z, x \rangle + \langle z, y \rangle} = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle.$$

Eine Abbildung $\lambda: V \rightarrow W$ zwischen komplexen Vektorräumen heißt **antilinear**, wenn λ reell-linear ist und $\lambda(ix) = -i\lambda(x)$ für alle $x \in V$, also

$$\lambda(\alpha x + \beta y) = \bar{\alpha} \lambda(x) + \bar{\beta} \lambda(y)$$

für alle $x, y \in V$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

(iv) Nach (ii) und (iii) ist die Abbildung $\langle \cdot, z \rangle: H \rightarrow \mathbb{C}$ antilinear, für jedes $z \in H$.

Definition 39.3

Ist $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein unitärer Raum, so setzen wir für $x \in H$

$$\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}.$$

Nach (e) ist $\|x\| = 0$ genau dann, wenn $x = 0$. Nach (c) und (ii) ist weiter

$$\|\alpha x\| = \sqrt{\langle \alpha x, \alpha x \rangle} = \sqrt{\alpha \bar{\alpha} \langle x, x \rangle} = \sqrt{|\alpha|^2 \|x\|^2} = |\alpha| \|x\|$$

für alle $x \in H$ und $\alpha \in \mathbb{C}$. Damit $\|\cdot\|$ eine Norm ist, bleibt noch die Subadditivität zu zeigen.

Lemma 39.4 (Cauchy-Schwarzsche Ungleichung).

Ist $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein unitärer Raum, so gilt für alle $x, y \in H$

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|.$$

Beweis. Gegeben $x, y \in H$ seien $A := \|x\|^2$, $B := |\langle x, y \rangle|$ und $C := \|y\|^2$. Wir wählen $\alpha \in \mathbb{C}$ mit $|\alpha| = 1$ und $\alpha \langle x, y \rangle = B$. Für alle $r \in \mathbb{R}$ ist

$$\begin{aligned}
 0 &\leq \langle x - r\alpha y, x - r\alpha y \rangle = \langle x, x \rangle - r\bar{\alpha}\langle y, x \rangle - \underbrace{r\alpha\langle x, y \rangle}_{=B} + r^2|\alpha|^2\langle y, y \rangle \\
 &= \|x\|^2 - 2rB + r^2\|y\|^2 = A - 2rB + r^2C.
 \end{aligned}$$

1. Fall: Ist $C = 0$, so folgt $B = 0$, also $|\langle x, y \rangle| = 0 \leq \|x\| \|y\|$.

2. Fall: Ist $C > 0$, so setzen wir $r := B/C$ und erhalten

$$0 \leq A - 2(B/C)B + B^2/C = A - B^2/C,$$

also $B^2 \leq AC$ und somit $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$. \square

Folgerung 39.5

Ist $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein unitärer Raum, so gilt für alle $x, y \in H$

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

Also ist $\|\cdot\|$ eine Norm auf H .

Beweis. Es ist

$$\|x + y\|^2 = \langle x + y, x + y \rangle = \langle x, x \rangle + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle$$

$$\begin{aligned} &= \|x\|^2 + 2 \operatorname{Re}(\langle x, y \rangle) + \|y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2|\langle x, y \rangle| + \|y\|^2 \\ &\leq \|x\|^2 + 2\|x\| \|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2. \quad \square \end{aligned}$$

Definition 39.6

Ein (komplexer) Hilbertraum ist ein unitärer Raum $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, der bezüglich der durch $\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$ für $x \in H$ gegebenen Norm vollständig ist.

Insbesondere ist also $(H, \|\cdot\|)$ ein Banachraum.

Bemerkung 39.7

Ist H ein reeller Vektorraum und erfüllt $\langle \cdot, \cdot \rangle: H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ die Bedingungen (a)–(e) aus Definition 39.1, so nennt man $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ einen euklidischen Vektorraum. Wie oben sieht man, dass $\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$ eine Norm $\|\cdot\|$ auf H definiert und die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung gültig ist; man nennt $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ einen **reellen Hilbertraum**, wenn $(H, \|\cdot\|)$ ein Banachraum ist.

Beispiel 39.8

(a) \mathbb{C}^n ist ein komplexer Hilbertraum mit dem Skalarprodukt

$$\langle x, y \rangle := \sum_{j=1}^n \bar{x}_j y_j$$

für $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n)$ in \mathbb{C}^n .

(b) $\ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ ist ein komplexer Hilbertraum mit dem Skalarprodukt

$$\langle x, y \rangle := \sum_{n=1}^{\infty} \bar{x}_n y_n$$

für $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $y = (y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$.

Hier ist $(\bar{x}_n y_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^1(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ wegen der Hölderschen Ungleichung.

(c) Unter Benutzung des Lebesgue-Borel-Maßes λ ist $L^2([0, 1], \mathbb{C})$ ein komplexer Hilbertraum mit dem Skalarprodukt

$$\langle [f], [g] \rangle := \int_{[0,1]} \overline{f(x)} g(x) d\lambda(x).$$

Wieder ist $\bar{f}g \in \mathcal{L}^1([0, 1], \mathbb{C})$ wegen der Hölderschen Ungleichung.

Satz 39.9 (Parallelogrammidentität)

In jedem Hilbertraum $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ gilt für alle $x, y \in H$

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2.$$

Beweis. Es ist $\langle x + y, x + y \rangle + \langle x - y, x - y \rangle = 2\langle x, x \rangle + 2\langle y, y \rangle$. \square

Satz 39.10 (Bestapproximation in konvexen Mengen)

Es sei H ein Hilbertraum und $A \subseteq H$ eine abgeschlossene, nichtleere, konvexe Teilmenge. Dann existiert genau ein $x_0 \in A$ derart, dass

$$(\forall x \in A) \quad \|x_0\| \leq \|x\|.$$

Es gibt also ein eindeutiges Element x_0 kleinster Norm in A .

Beweis. Definiere $\delta := \inf\{\|x\| : x \in A\}$. Für alle $x, y \in A$ ist $\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y \in A$, da A konvex ist. Anwendung der Parallelogrammidentität auf die Vektoren $(1/2)x$ und $(1/2)y$ liefert

$\frac{1}{4}\|x - y\|^2 = \frac{1}{2}\|x\|^2 + \frac{1}{2}\|y\|^2 - \left\|\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y\right\|^2 \leq \frac{1}{2}\|x\|^2 + \frac{1}{2}\|y\|^2 - \delta^2$;
es gilt also

$$\|x - y\|^2 \leq 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 - 4\delta^2. \quad (1)$$

Eindeutigkeit: Ist $\|x\| = \|y\| = \delta$, so liefert (1) $\|x - y\| = 0$, also $x = y$.

Existenz: Per Definition von δ gibt es eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in A mit $\|x_n\| \rightarrow \delta$ für $n \rightarrow \infty$. Gegeben $\varepsilon > 0$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$ derart, dass

$$\|x_n\|^2 - \delta^2 < \varepsilon/4 \quad \text{für alle } n \geq N.$$

Mit (1) folgt für alle $n, m \geq N$

$$\|x_n - x_m\|^2 \leq 2\|x_n\|^2 + 2\|x_m\|^2 - 4\delta^2 < \varepsilon;$$

also ist $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge und somit in H konvergent gegen ein $x_0 \in H$. Da A abgeschlossen ist, folgt $x_0 \in A$. Schließlich ist $\|x_0\| = \|\lim_{n \rightarrow \infty} x_n\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\| = \delta$, da $\|\cdot\|$ stetig ist. \square

Bemerkung 39.11

Ist $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, so gilt in der Situation von Satz 39.10

$$\langle x - x_0, x_0 \rangle \geq 0 \quad \text{für alle } x \in A.$$

Beweis. Andernfalls gäbe es ein $x \in A$ mit $\langle x - x_0, x_0 \rangle < 0$. Da A konvex ist, ist $x_0 + t(x - x_0) \in A$ für jedes $t \in [0, 1]$. Man betrachte das Abstandsquadrat dieser Punkte zum Ursprung:

$$f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad t \mapsto \|x_0 + t(x - x_0)\|^2.$$

Dann ist also

$$f(t) = \langle x_0 + t(x - x_0), x_0 + t(x - x_0) \rangle = \|x_0\|^2 + 2t\langle x_0, x - x_0 \rangle + t^2\|x - x_0\|^2.$$

Dies ist eine Polynomfunktion, also C^1 , mit

$$f'(t) = 2\langle x_0, x - x_0 \rangle + 2t\|x - x_0\|^2.$$

Somit ist $f'(0) = 2\langle x_0, x - x_0 \rangle < 0$. Also $\exists \varepsilon \in]0, 1]$ mit $f'(t) < 0$ für alle $t \in [0, \varepsilon]$. Somit $f|_{[0, \varepsilon]}$ streng fallend und $\|x_0 + \varepsilon(x - x_0)\|^2 = f(\varepsilon) < f(0) = \|x_0\|^2$, Widerspruch. \square

Beispiel 39.12

Ist (X, Σ, μ) ein Maßraum, so ist $L^2(X, \mu, \mathbb{K})$ ein Hilbertraum über \mathbb{K} mit

$$\langle [f], [g] \rangle := \int_X \overline{f(x)} g(x) d\mu(x)$$

für $f, g \in \mathcal{L}^2(X, \mu)$.

Dies sieht man wie in Beispiel 39.8 (c); die Vollständigkeit ist ein Spezialfall von Satz 7.5. Hier ist

$$\|[f]\| = \sqrt{\int_X |f(x)|^2 d\mu(x)} = \|[f]\|_{L^2}.$$

Beispiel 39.13

Ist J eine Menge und $\zeta: \mathcal{P}(J) \rightarrow [0, \infty]$ das Zählmaß, so ist nach dem Vorigen

$$\ell^2(J, \mathbb{K}) := \mathcal{L}^2(J, \zeta, \mathbb{K})$$

ein Hilbertraum.

Hier ist $\mathcal{L}^2(J, \zeta, \mathbb{K}) \rightarrow L^2(J, \zeta, \mathbb{K}), f \mapsto [f]$ ein Isomorphismus von Vektorräumen.

Nach Aufgabe 33 ist für jede Funktion $f: J \rightarrow \mathbb{K}$

$$\sum_{j \in J} |f(j)|^2 = \int_J |f(j)|^2 d\zeta(j).$$

Somit ist genau dann $f \in \ell^2(J, \mathbb{K})$, wenn $\sum_{j \in J} |f(j)|^2 < \infty$, also die Familie $(|f(j)|^2)_{j \in J}$ in \mathbb{R} summierbar ist. Weiter ist für alle $f, g \in \ell^2(J, \mathbb{K})$ die Familie $(\overline{f(j)}g(j))_{j \in J}$ in $\mathcal{L}^1(J, \mathbb{K}) = \ell^1(J, \mathbb{K})$, diese also absolut summierbar, und es gilt

$$\langle f, g \rangle = \sum_{j \in J} \overline{f(j)}g(j).$$

Definition 39.14

Ist $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein Hilbertraum, so nennen wir Elemente $x, y \in H$ zueinander **orthogonal** und schreiben $x \perp y$, wenn

$$\langle x, y \rangle = 0 \quad (\text{N.B. } x \perp y \Leftrightarrow y \perp x)$$

Lemma 39.15 (Satz des Pythagoras)

Sind x_1, \dots, x_n paarweise orthogonale Elemente eines Hilbertraums $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, also $x_j \perp x_k$ für alle $j \neq k$ in $\{1, \dots, n\}$, so gilt

$$\|x_1 + \cdots + x_n\|^2 = \sum_{j=1}^n \|x_j\|^2.$$

Beweis. Es ist

$$\begin{aligned}\|x_1 + \cdots + x_n\|^2 &= \left\langle \sum_{j=1}^n x_j, \sum_{k=1}^n x_k \right\rangle = \sum_{j,k=1}^n \langle x_j, x_k \rangle = \sum_{j,k=1}^n \|x_j\|^2 \delta_{j,k} \\ &= \sum_{j=1}^n \|x_j\|^2\end{aligned}$$

unter Benutzung des Kronecker-Deltas $\delta_{j,k}$. \square

Satz 39.16

Ist $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein Hilbertraum über \mathbb{K} und $x \in H$, so sind folgende Abbildungen stetig:

- (a) Die \mathbb{K} -lineare Abbildung $\lambda_x := \langle x, \cdot \rangle: H \rightarrow \mathbb{K}$, $y \mapsto \langle x, y \rangle$; es ist zudem $\|\lambda_x\|_{\text{op}} = \|x\|$.
- (b) $\langle \cdot, x \rangle: H \rightarrow \mathbb{K}$;
- (c) $\|\cdot\|: H \rightarrow [0, \infty[$.

Beweis. (a) Die Abbildung λ_x ist linear und aufgrund der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung ist für jedes $y \in H$

$$|\lambda_x(y)| = |\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|,$$

also $\|\lambda_x\|_{\text{op}} \leq \|x\|$ und insbesondere λ_x stetig. Ist $x = 0$, so ist $\lambda_x = 0$ und $\|\lambda_x\|_{\text{op}} = 0 = \|x\|$. Ist $x \neq 0$, so ist

$$\|x\|^2 = |\lambda_x(x)| \leq \|\lambda_x\|_{\text{op}} \|x\|$$

und somit $\|\lambda_x\|_{\text{op}} \geq \|x\|$, folglich $\|\lambda_x\|_{\text{op}} = \|x\|$.

(b) $\langle y, x \rangle = \overline{\langle x, y \rangle} = \overline{\lambda_x(y)} \in \mathbb{K}$ ist stetig in $y \in H$.

(c) In jedem normierten Raum ist die Norm stetig. \square

Bemerkung 39.17

Wegen $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$ ist im Übrigen die \mathbb{R} -bilineare Abbildung $H \times H \rightarrow \mathbb{K}$, $(x, y) \mapsto \langle x, y \rangle$ stetig mit $\|\langle \cdot, \cdot \rangle\|_{\text{op}} \leq 1$.

Definition 39.18

Ist $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein Hilbertraum und $M \subseteq H$ eine nichtleere Teilmenge, so nennen wir

$$M^\perp := \{y \in H: (\forall x \in M) x \perp y\}$$

den **Orthogonalraum** zu M . Für $x \in H$ kürzen wir ab $x^\perp := \{x\}^\perp$.

Es ist also $M^\perp = \bigcap_{x \in M} x^\perp$.

Satz 39.19

Ist $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein Hilbertraum, so gilt:

- (a) Für jede nichtleere Teilmenge $M \subseteq H$ ist M^\perp ein abgeschlossener Untervektorraum von H .
- (b) Sind $N \subseteq M$ nichtleere Teilmengen von H , so ist $N^\perp \supseteq M^\perp$.
- (c) Für jede nichtleere Teilmenge $M \subseteq H$ ist

$$M^\perp = \left(\overline{\text{span}_{\mathbb{K}}(M)} \right)^\perp.$$

- (d) Für jede nichtleere Teilmenge $M \subseteq H$ ist $(M^\perp)^\perp = \overline{\text{span}_{\mathbb{K}}(M)}$.

(e) Für jeden abgeschlossenen Untervektorraum $F \subseteq H$ ist F^\perp ein topologisches Komplement für F in H im Sinne von Definition 12.4, insbesondere also als Vektorraum

$$H = F \oplus F^\perp.$$

Weiter ist $F = (F^\perp)^\perp$.

Beweis. (a) Es ist

$$M^\perp = \bigcap_{x \in M} x^\perp = \bigcap_{x \in M} \ker \langle x, \cdot \rangle = \bigcap_{x \in M} (\langle x, \cdot \rangle)^{-1}(\{0\})$$

ein Untervektorraum von H und abgeschlossen.

(b) Ist $N \subseteq M$, so ist $N^\perp = \bigcap_{x \in N} x^\perp \supseteq \bigcap_{x \in M} x^\perp = M^\perp$.

(c) Sei $F := \overline{\text{span}_{\mathbb{K}}(M)}$. Aus $M \subseteq F$ folgt $M^\perp \supseteq F^\perp$. Umgekehrt gilt für jedes $y \in M^\perp$ für jedes $x \in M$, dass $x \perp y$, also $x \in y^\perp$. Es ist also $M \subseteq y^\perp$. Mit (a) folgt $\text{span}_{\mathbb{K}}(M) \subseteq y^\perp$ und $\overline{\text{span}_{\mathbb{K}}(M)} \subseteq y^\perp$. Also ist $y \perp x$ für alle $x \in \overline{\text{span}_{\mathbb{K}}(M)} = F$ und somit $y \in F^\perp$. Also gilt $M^\perp \subseteq F^\perp$ und somit Gleichheit.

(e) Ist $x \in F \cap F^\perp$, so ist $\|x\|^2 = \langle x, x \rangle = 0$ wegen $x \perp x$, somit $x = 0$. Sei nun $x \in H$; wir zeigen, dass Elemente $x_{\parallel} \in F$ und $x_{\perp} \in F^\perp$ existieren mit

$$x = x_{\parallel} + x_{\perp}.$$

Da $x + F$ eine konvexe und abgeschlossene Teilmenge von H ist, gibt es nach Satz 39.10 genau ein Element $x_0 \in x + F$ derart, dass

$$\|x_0\| \leq \|x + y\| \quad \text{für alle } y \in F.$$

Im Falle $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ gilt nach Bemerkung 39.11

$$\langle y - x_0, x_0 \rangle \geq 0$$

für alle $y \in x + F$. Schreiben wir $x_0 = x + z$ mit $z \in F$, so ist $y - x_0 = (y - z) - x$, wobei die Elemente $y - z$ ganz F durchlaufen. Es ist also $0 \leq \langle y - x, x_0 \rangle = \langle y, x_0 \rangle - \langle x, x_0 \rangle$ und somit

$$\langle y, x_0 \rangle \geq \langle x, x_0 \rangle$$

für alle $y \in F$. Die Elemente auf der linken Seite bilden einen Untervektorraum von \mathbb{R} und dieser muss trivial sein, also ist $\langle y, x_0 \rangle = 0$ für all $y \in F$, also $x_0 \in F^\perp$, somit

$x = x_0 - z \in F^\perp + F$. Es ist somit

$$H = F \oplus F^\perp$$

als reeller Vektorraum. Ist $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, so macht $\operatorname{Re}(\langle \cdot, \cdot \rangle)$ aus H einen reellen Hilbertraum $H_{\mathbb{R}}$. Bezeichnet $F^{\perp, \mathbb{R}}$ den Orthogonalraum von F in $H_{\mathbb{R}}$, so gilt nach dem Vorigen

$$H_{\mathbb{R}} = F \oplus F^{\perp, \mathbb{R}}$$

als reeller Vektorraum. Offenbar ist $F^\perp \subseteq F^{\perp, \mathbb{R}}$ und wir brauchen nur noch zu zeigen, dass $F^\perp = F^{\perp, \mathbb{R}}$. Ist $y \in F^{\perp, \mathbb{R}}$ und $x \in F$, so existiert ein $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = 1$ derart, dass

$$z\langle y, x \rangle = |\langle y, x \rangle| \in \mathbb{R},$$

somit wegen $zx \in F$

$$0 = \operatorname{Re} \langle y, zx \rangle = \operatorname{Re} z\langle y, x \rangle = |\langle y, x \rangle|,$$

also $x \perp y$. Folglich ist $y \in F^\perp$. Also ist auch im komplexen Fall $H = F \oplus F^\perp$ als Vektorraum. Da H ein Banachraum ist und F sowie F^\perp abgeschlossene Untervektorräume, ist F^\perp nach Satz 12.6 automatisch ein topologisches Komplement.

Da F^\perp ein abgeschlossener Untervektorraum von H ist, gilt nach dem Vorigen

$$H = F^\perp \oplus (F^\perp)^\perp.$$

Es ist aber auch $H = F^\perp \oplus F$ und offenbar ist $F \subseteq (F^\perp)^\perp$. Es folgt $F = (F^\perp)^\perp$.

(d) Sei $F := \overline{\text{span}_{\mathbb{K}}(M)}$. Nach (c) ist

$$M^\perp = F^\perp,$$

somit nach (e) $(M^\perp)^\perp = (F^\perp)^\perp = F$. \square

In Anbetracht von (e) nennt man den Orthogonalraum F^\perp im Falle eines abgeschlossenen Untervektorraums $F \subseteq H$ auch das **orthogonale Komplement** von F in H .

Satz 39.20

Ist $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein Hilbertraum und $F \subseteq H$ ein abgeschlossener Untervektorraum, so gilt:

- (a) Für jedes $x \in H$ existieren eindeutige Elemente $x_{\parallel} \in F$ und $x_{\perp} \in F^\perp$ derart, dass $x = x_{\parallel} + x_{\perp}$.

(b) Die Abbildungen $P: H \rightarrow F$, $x \mapsto x_{\parallel}$ und $Q: H \rightarrow F^{\perp}$,
 $x \mapsto x_{\perp}$ sind linear und stetig, mit $\|P\|_{\text{op}} \leq 1$ und $\|Q\|_{\text{op}} \leq 1$.

Beweis. (a) folgt aus Satz 39.19 (e).

(b) Aus der Eindeutigkeit in (a) folgt die Linearität von P und Q .
Nach dem Satz von Pythagoras ist für jedes $x \in H$

$$\|x\|^2 = \|x_{\parallel}\|^2 + \|x_{\perp}\|^2 = \|P(x)\|^2 + \|Q(x)\|^2,$$

folglich $\|P(x)\| \leq \|x\|$ und $\|Q(x)\| \leq \|x\|$, also $\|P\|_{\text{op}} \leq 1$ und
 $\|Q\|_{\text{op}} \leq 1$. \square

Beispiel 39.21

Ist $x \in H$ mit $\|x\| = 1$, so ist $\mathbb{K}x$ ein abgeschlossener
Untervektorraum von H . Gegeben $y \in H$ ist

$$y = \langle x, y \rangle x + (y - \langle x, y \rangle x),$$

wobei der erste Summand in $\mathbb{K}x$ liegt und

$$\langle x, y - \langle x, y \rangle x \rangle = \langle x, y \rangle - \underbrace{\langle x, y \rangle \langle x, x \rangle}_{=1} = 0,$$

der zweite also in $x^\perp = (\mathbb{K}x)^\perp$ ist. Es ist also

$$y_{\parallel} = \langle x, y \rangle x \quad \text{und} \quad y_{\perp} = y - \langle x, y \rangle x$$

in $H = \mathbb{K}x \oplus (\mathbb{K}x)^\perp$.

Also ist $P = x \otimes \langle x, \cdot \rangle$ und $Q = \text{id}_H - P$.

Satz 39.22 (Rieszscher Darstellungssatz für Hilberträume)

Ist $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein Hilbertraum über \mathbb{K} , so gilt:

- (a) Für jedes $x \in H$ ist $\lambda_x := \langle x, \cdot \rangle: H \rightarrow \mathbb{K}$ ein stetiges lineares Funktional mit $\|\lambda_x\|_{\text{op}} = \|x\|$.
- (b) Für jedes $\lambda \in H'$ existiert genau ein $x \in H$ mit $\lambda = \lambda_x$.
- (c) Ist $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, so ist $\Phi: H \rightarrow H'$, $x \mapsto \lambda_x$ ein isometrischer Isomorphismus.
- (d) Ist $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, so ist $\Phi: H \rightarrow H'$, $x \mapsto \lambda_x$ ein isometrischer Isomorphismus reeller Banachräume und komplex antilinear.

Beweis. (a) ist Satz 39.16 (a).

(b), (c) und (d): Ist $\lambda = 0$, so ist $\lambda = \lambda_0$. Nun ist $F := \ker(\lambda)$ ein abgeschlossener Untervektorraum von H und $\lambda|_{F^\perp} : F^\perp \rightarrow \mathbb{K}$ ist ein Isomorphismus von Vektorräumen, also F^\perp eindimensional. Wir finden ein $z \in F^\perp$ derart, dass

$$\lambda(z) = 1$$

dann ist $F^\perp = \mathbb{K}z$. Sei $\hat{z} := z/\|z\|$; dann ist $\lambda(\hat{z}) = \lambda(z)/\|z\| = 1/\|z\|$. Sei $x := \hat{z}/\|z\| = z/\|z\|^2$. Für jedes $y \in H$ ist

$$\begin{aligned}\lambda(y) &= \lambda(\langle \hat{z}, y \rangle \hat{z} + y_\perp) = \lambda(\langle \hat{z}, y \rangle \hat{z}) = \langle \hat{z}, y \rangle \lambda(\hat{z}) \\ &= \langle \hat{z}, y \rangle / \|z\| = \langle z / \|z\|^2, y \rangle = \lambda_x(y)\end{aligned}$$

mit $y_\perp \in (\mathbb{K}z)^\perp = (F^\perp)^\perp = F$. Also ist $\lambda = \lambda_x$. Die Abbildung

$$\Phi: H \rightarrow H', \quad x \mapsto \lambda_x$$

ist offenbar reell-linear. Nach dem Vorigen ist sie surjektiv und isometrisch, also ein Isomorphismus reeller Vektorräume. Ist $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, so ist $\Phi(ix) = \langle ix, \cdot \rangle = -i \langle x, \cdot \rangle = -i \Phi(x)$, die reell-lineare Abbildung Φ somit komplex antilinear. \square

Definition 39.23

Eine Teilmenge B eines Hilbertraums H wird ein **Orthonormalsystem** genannt (kurz: ONS), wenn für $\|b\| = 1$ für alle $b \in B$ und

$$b \perp c$$

für alle $b \neq c \in B$. Gilt zudem

$$H = \overline{\text{span}_{\mathbb{K}}(B)},$$

so wird B ein **vollständiges Orthonormalsystem** genannt (kurz: VONS).

Satz 39.24

Jeder Hilbertraum hat ein vollständiges Orthonormalsystem.

Beweis. Die Menge M aller Orthonormalsysteme in H ist via Inklusion \subseteq partiell geordnet und nicht leer, da \emptyset ein ONS ist. Ist $\Gamma \subseteq M$ eine total geordnete Teilmenge, so ist $B := \bigcup_{C \in \Gamma} C$ offenbar ein ONS und eine obere Schranke für Γ . Also ist M

induktiv geordnet und nach dem Zornschen Lemma hat (M, \subseteq) ein maximales Element B . Dann ist

$$F := \overline{\text{span}_{\mathbb{K}}(B)} = H$$

und somit B ein VONS. Wäre der abgeschlossene Untervektorraum F nämlich eine echte Teilmenge von H , so müsste wegen

$$H = F \oplus F^{\perp}$$

das orthogonale Komplement $F^{\perp} \neq \{0\}$ sein, es gäbe somit ein $x \in F^{\perp} \setminus \{0\}$. Dann ist auch $c := x/\|x\| \in F^{\perp}$ und $\|c\| = 1$, also $C := B \cup \{c\} \in M$ und C eine echte Obermenge von B , im Widerspruch zur Maximalität von B . \square

Wir werden sehen: Die Mächtigkeit eines VONS B ist durch H eindeutig festgelegt; genau dann ist H separabel, wenn H ein abzählbares VONS hat. Weiter ist $H \cong \ell^2(B, \mathbb{K})$.

Ist $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein Hilbertraum, so ist auch der Dualraum H' ein Hilbertraum mit

$$\langle \lambda, \mu \rangle_{H'} := \langle \Phi_H^{-1}(\mu), \Phi_H^{-1}(\lambda) \rangle,$$

wobei $\Phi_H: H \rightarrow H', x \mapsto \langle x, \cdot \rangle$.

Satz 39.25

Jeder Hilbertraum ist ein reflexiver Banachraum.

Beweis. Wir haben zu zeigen, dass der Auswertungshomomorphismus $\eta_H: H \rightarrow H'', x \mapsto \hat{x}$ surjektiv ist. Sei $\alpha \in H''$. Wir setzen $\lambda := \Phi_{H'}^{-1}(\alpha)$ und $x := \Phi_H^{-1}(\lambda)$. Wir zeigen, dass $\eta_H(x) = \alpha$. Sei hierzu $\mu \in H'$. Setzen wir $y := (\Phi_H)^{-1}(\mu)$, so ist $\mu = \Phi_H(y)$. Nun ist

$$\begin{aligned} \eta_H(x)(\mu) &= \mu(x) = \Phi_H(y)(x) = \langle y, x \rangle = \langle \Phi_H(x), \Phi_H(y) \rangle_{H'} \\ &= \langle \lambda, \mu \rangle_{H'} = \Phi_{H'}(\lambda)(\mu) = \alpha(\mu), \end{aligned}$$

also $\eta_H(x) = \alpha$. \square

Satz 39.26

Es sei $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein Hilbertraum und B ein vollständiges Orthonormalsystem für H . Dann gilt:

- (a) Für jedes $x \in H$ ist $(\langle b, x \rangle)_{b \in B} \in \ell^2(B, \mathbb{K})$.
- (b) Für jedes $(t_b)_{b \in B} \in \ell^2(B, \mathbb{K})$ ist $(t_b b)_{b \in B}$ eine summierbare Familie in H .
- (c) Die Abbildung

$$\Psi_B: H \rightarrow \ell^2(B, \mathbb{K}), \quad x \mapsto (\langle b, x \rangle)_{b \in B}$$

ist ein isometrischer Isomorphismus mit Umkehrabbildung $\ell^2(B, \mathbb{K}) \rightarrow H$, $(t_b)_{b \in B} \mapsto \sum_{b \in B} t_b b$.

- (d) Die Mächtigkeit $|B|$ von B ist durch H eindeutig festgelegt.
- (e) H ist genau dann separabel, wenn B abzählbar ist, also $H \cong \mathbb{K}^n$ für ein $n \in \mathbb{N}$ oder $H \cong \ell^2(\mathbb{N})$.

Beispiel 39.27

Man kann zeigen, dass $L^p[0, 1]$ (bezüglich des Lebesgue-Borel-Maßes) separabel ist für jedes $p \in [1, \infty[$ (siehe Seminar “Reelle Analysis und Topologie”). Insbesondere ist $L^2[0, 1]$ separabel, es gibt somit ein abzählbares VONS.

Im Falle $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ kann man zeigen, dass die Funktionen

$$e_n: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}, \quad t \mapsto e^{2\pi int}$$

für $n \in \mathbb{Z}$ ein VONS für $L^2[0, 1]$ bilden. Wegen Satz 39.26 (c) ist dann die Abbildung

$$L^2[0, 1] \rightarrow \ell^2(\mathbb{Z}, \mathbb{C}), \quad f \mapsto (\langle e_n, f \rangle)_{n \in \mathbb{Z}}$$

mit den “Fourierkoeffizienten”

$$\langle e_n, f \rangle = \int_{[0,1]} e^{-2\pi int} f(t) d\lambda_1(t)$$

ein isometrischer Isomorphismus. Die Umkehrabbildung schickt $(t_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ auf den L^2 -Grenzwert der Fourierreihe $\sum_{n \in \mathbb{Z}} t_n e_n$.

Beweis von Satz 39.26. Gegeben $t := (t_b)_{b \in B} \in \ell^2(B, \mathbb{K})$ ist

$$\infty > (\|t\|_{\ell^2})^2 = \langle t, t \rangle = \sum_{b \in B} |t_b|^2.$$

Nach Lemma 28.2 (angewandt im Banachraum \mathbb{R}) gibt es zu $\varepsilon > 0$ eine endliche Teilmenge $\Phi \subseteq B$ derart, dass

$$\sum_{b \in \Psi} |t_b|^2 < \varepsilon^2$$

für alle endlichen Teilmengen $\Psi \subseteq B$ mit $\Psi \cap \Phi = \emptyset$. Für diese Ψ ist

$$\left\| \sum_{b \in \Psi} t_b b \right\|^2 = \sum_{b \in \Psi} |t_b|^2 < \varepsilon^2$$

nach dem Satz des Pythagoras, also $\left\| \sum_{b \in \Psi} t_b b \right\| < \varepsilon$. Nach Lemma 28.2 (angewandt auf den Banachraum H) ist die Familie $(t_b b)_{b \in B}$ in H summierbar. Wir setzen

$$\Theta(t) := \sum_{b \in B} t_b b$$

und erhalten eine Abbildung $\Theta: \ell^2(B, \mathbb{K}) \rightarrow H$, die offenbar linear ist. Da

$$\|\Theta(t)\|^2 = \lim_{\Phi} \left\| \sum_{b \in \Phi} t_b b \right\|^2 = \lim_{\Phi} \sum_{b \in \Phi} |t_b|^2 = (\|t\|_{\ell^2})^2$$

für jedes $t = (t_b)_{b \in B} \in \ell^2(B, \mathbb{K})$ mit Φ in der gerichteten Menge $(\mathcal{F}(B), \subseteq)$ aller endlichen Teilmengen von B , ist

$$\|\Theta(t)\| = \|t\|_{\ell^2}$$

und somit Θ eine lineare Isometrie. Das Bild von Θ ist also ein abgeschlossener Untervektorraum von H . Dieser ist ganz H , wenn er eine totale Teilmenge von H enthält, etwa B . Dies ist der Fall, da für jedes $c \in B$ die Familie $t := (\delta_{c,b})_{b \in B}$ in $\ell^2(B, \mathbb{K})$ ist und $\Theta(t) = c$. Also ist Θ ein isometrischer Isomorphismus. Gegeben $x \in H$ existiert ein $t = (t_b)_{b \in B} \in \ell^2(B, \mathbb{K})$ mit $x = \Theta(t)$. Für jedes $c \in B$ ist dann

$$\langle c, x \rangle = \langle c, \Theta(t) \rangle = \left\langle c, \sum_{b \in B} t_b b \right\rangle = \sum_{b \in B} t_b \langle c, b \rangle = t_c,$$

also $\Psi_B(x) = t \in \ell^2(B, \mathbb{K})$. Weiter ist $\Psi_B(x) = t = \Theta^{-1}(x)$, also $\Psi_B = \Theta^{-1}$ ein isometrischer Isomorphismus und $(\Psi_B)^{-1} = \Theta$ wie behauptet. Wir halten noch fest, dass für jedes $x \in H$

$$x = \Theta(\Psi_B(x)) = \sum_{b \in B} \langle b, x \rangle b. \quad (2)$$

Ist H endlich-dimensional, so ist $|B|$ die Dimension des \mathbb{K} -Vektorraums H und somit eindeutig festgelegt. Sei nun B eine unendliche Menge und auch C ein VONS (insb. auch C unendlich). Für jedes $c \in C$ ist

$$c = \sum_{b \in B} \langle b, c \rangle b$$

in H , also $B_c := \{b \in B : \langle b, c \rangle \neq 0\}$ eine nicht leere, abzählbare Menge (siehe Satz 28.11). Es gibt somit eine surjektive Abbildung $h_c: \mathbb{N} \rightarrow B_c$. Dann ist

$$C \times \mathbb{N} \rightarrow B, \quad (c, n) \mapsto h_c(n)$$

sukktiv, denn wäre ein $b \in B$ nicht im Bild, so wäre

$$c \subseteq b^\perp$$

für alle $c \in C$ und somit $H = \overline{\text{span}_{\mathbb{K}}(C)} \subseteq b^\perp$, Widerspruch. Nach

Beispiel 15.11 gibt es eine Menge J mit $|C| = |J \times \mathbb{N}|$. Nach dem Vorigen ist dann

$$|B| \leq |C \times \mathbb{N}| = |J \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}| = |J \times \mathbb{N}| = |C|.$$

Analog ist $|C| \leq |B|$ und somit $|C| = |B|$.

Ist B abzählbar, so hat H eine abzählbare totale Teilmenge (nämlich B) und somit ist H separabel (Satz 8.11). Ist umgekehrt H separabel, so hat H eine abzählbare totale Teilmenge T . Ist H endlich-dimensional, finden wir eine Orthonormalbasis. Andernfalls können wir $T = \{v_n : n \in \mathbb{N}\}$ mit linear unabhängigen Vektoren v_n wählen. Setzen wir $b_1 := v_1 / \|v_1\|$ und

$$E_n := \text{span}_{\mathbb{K}}\{v_1, \dots, v_n\}$$

für $n \in \mathbb{N}$, so ist $E_{n+1} \cap (E_n)^\perp$ eindimensional, enthält also einen normierten Vektor b_{n+1} . Dann ist $E_n = \text{span}_{\mathbb{K}}\{b_1, \dots, b_n\}$, somit auch $\{b_n : n \in \mathbb{N}\}$ eine totale Teilmenge und somit $\{b_n : n \in \mathbb{N}\}$ ein abzählbares VONS für H . \square

Bemerkung 39.28

Da Ψ_B ein isometrischer Isomorphismus ist, gilt für jedes $x \in H$, dass $\|x\|^2 = \|\Psi_B(x)\|^2$, also

$$\|x\|^2 = \sum_{b \in B} |\langle b, x \rangle|^2. \quad (3)$$

Man nennt (3) die **Parsevalsche Gleichung**.

Ist C ein Orthonormalsystem in H , so existiert ein vollständiges Orthonormalsystem in H mit $C \subseteq B$. Für jedes $x \in H$ ist dann $\|x\|^2 = \sum_{b \in B} |\langle b, x \rangle|^2 \geq \sum_{c \in C} |\langle c, x \rangle|^2$, also

$$\|x\|^2 \geq \sum_{c \in C} |\langle c, x \rangle|^2. \quad (4)$$

Man nennt (4) die **Besselsche Ungleichung**.

Bemerkung 39.29

P. Dirac folgend schreiben Physiker Elemente x eines Hilbertraums H gern als $|x\rangle$ (“ket”-Vektor) und nennen $\langle x| := \langle x, \cdot \rangle$ einen “bra”-Vektor, so dass sich also

$$\langle x, y \rangle$$

als bra-ket (“bracket”) lesen lässt. Aus (2) wird dann

$$|x\rangle = \sum_{b \in B} |b\rangle \langle b, x \rangle.$$

Betrachten wir kurz noch Operatoren von endlichem Rang, also Elemente aus $\mathcal{L}(H, H)_{\text{fin}} = H \otimes H'$. Schreiben wir ein $\lambda \in H'$ als $\lambda = \langle y, \cdot \rangle = \langle y|$ mit $y \in H$, so ist für jedes $x \in H$

$$x \otimes \lambda = x \otimes \langle y, \cdot \rangle = |x\rangle \langle y|$$

in Physiker-Notation.

Definition 40.1

Es seien $(H_1, \langle \cdot, \cdot \rangle_{H_1})$ und $(H_2, \langle \cdot, \cdot \rangle_{H_2})$ Hilberträume und $T: H_1 \rightarrow H_2$ eine stetige lineare Abbildung. Dann ist

$$T^* := (\Phi_{H_1})^{-1} \circ T' \circ \Phi_{H_2}: H_2 \rightarrow H_1$$

eine stetige lineare Abbildung, der zu T **adjungierte Operator**.

Hierbei ist $T': H_2' \rightarrow H_1'$, $\lambda \mapsto \lambda \circ T$ die duale lineare Abbildung und es sind

$$\Phi_{H_j}: H_j \rightarrow H_j', \quad x \mapsto \langle x, \cdot \rangle_{H_j}$$

für $j \in \{1, 2\}$ die kanonischen isometrischen (Anti-)Isomorphismen.

Bemerkung 40.2

Für alle $x \in H_2$ und $y \in H_1$ gilt

$$\langle T^*x, y \rangle_{H_1} = \langle x, Ty \rangle_{H_2}.$$

Es ist nämlich

$$\begin{aligned}\langle T^*x, y \rangle_{H_1} &= \langle (\Phi_{H_1})^{-1}(T'(\Phi_{H_2}(x))), y \rangle = T'(\Phi_{H_2}(x))(y) \\ &= (\Phi_{H_2}(x) \circ T)(y) = \Phi_{H_2}(x)(Ty) = \langle x, Ty \rangle_{H_2}.\end{aligned}$$

Statt $S \circ T$ schreiben wir auch kurz ST .

Definition 40.3

Es sei $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein Hilbertraum und $\mathcal{L}(H) := \mathcal{L}(H, H)$. Ein Operator $T \in \mathcal{L}(H)$ heißt

- **hermitesch**, wenn $T = T^*$;
- **unitär**, wenn $TT^* = T^*T = \text{id}_H$;
- **normal**, wenn $TT^* = T^*T$.

Jeder hermitesche Operator ist normal; ebenso jeder unitäre.

Elementare Eigenschaften (Übung):

Satz 40.4

Es sei $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein Hilbertraum. Für alle $T, S \in \mathcal{L}(H)$ und $z, w \in \mathbb{K}$ gilt:

- (a) $(\text{id}_H)^* = \text{id}_H$;
- (b) $(S \circ T)^* = T^* \circ S^*$;
- (c) $(zS + wT)^* = \bar{z}S^* + \bar{w}T^*$. \square

Gegeben $T \in \mathcal{L}(H)$ ist der Operator $T^* \in \mathcal{L}(H)$ durch die Bedingung

$$\langle T^*x, y \rangle = \langle x, Ty \rangle \text{ für alle } x, y \in H$$

eindeutig festgelegt (Übung).

Im folgenden sei stets $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein Hilbertraum.

Definition 40.5

Ist $T \in \mathcal{L}(H)$, so nennt man einen Vektor $0 \neq x \in H$ einen **Eigenvektor** für T zum **Eigenwert** $\lambda \in \mathbb{K}$, wenn

$$Tx = \lambda x, \quad \text{also } x \in \ker(T - \lambda \text{id}_H).$$

Für jedes $\lambda \in \mathbb{K}$ setzen wir $H_\lambda := \ker(T - \lambda \text{id}_H)$; ist λ ein Eigenwert, so nennen wir H_λ den zugehörigen **Eigenraum**.

Als Kern einer stetigen linearen Abbildung ist jeder Eigenraum H_λ ein abgeschlossener Untervektorraum von H .

Lemma 40.6

Ist $T \in \mathcal{L}(H)$ hermitesch, so gilt:

- (a) $\langle x, Tx \rangle \in \mathbb{R}$ für alle $x \in H$.
- (b) Alle Eigenwerte von T sind reell.

(c) Sind $\lambda \neq \mu$ Eigenwerte von T , so ist $H_\lambda \perp H_\mu$ (also $x \perp y$ für alle $x \in H_\lambda$ und $y \in H_\mu$).

(d) Es ist $\ker(T) = (T(H))^\perp$ und $\overline{T(H)} = (\ker(T))^\perp$, also

$$H = \ker(T) \oplus \overline{T(H)}.$$

(e) Es ist $\|T\|_{\text{op}} = \sup\{|\langle x, Tx \rangle| : x \in \overline{B}_1^H(0)\}$.

Beweis. (a) Es ist $\langle x, Tx \rangle = \langle T^*x, x \rangle = \langle Tx, x \rangle = \overline{\langle x, Tx \rangle}$, also $\langle x, Tx \rangle$ reell.

(b) Ist $0 \neq x \in H_\lambda$, so gilt $\mathbb{R} \ni \langle x, Tx \rangle = \langle x, \lambda x \rangle = \lambda \langle x, x \rangle = \lambda \|x\|^2$. Folglich ist $\lambda = \langle x, Tx \rangle / \|x\|^2 \in \mathbb{R}$.

(c) Für alle $x \in H_\lambda$ und $y \in H_\mu$ ist

$$\begin{aligned} \mu \langle x, y \rangle &= \langle x, \mu y \rangle = \langle x, Ty \rangle = \langle T^*x, y \rangle \\ &= \langle Tx, y \rangle = \langle \lambda x, y \rangle = \overline{\lambda} \langle x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle, \end{aligned}$$

also $0 = (\mu - \lambda) \langle x, y \rangle$.

Da $\mu - \lambda \neq 0$, folgt $\langle x, y \rangle = 0$, also $x \perp y$.

(d) Für beliebiges $T \in \mathcal{L}(H)$ ist $\ker(T) = (T^*(H))^\perp$, denn für $x \in H$ sind äquivalent:

$$\begin{aligned}x \in \ker(T) &\Leftrightarrow Tx = 0 \Leftrightarrow (\forall y \in H) \langle y, Tx \rangle = 0 \\ &\Leftrightarrow (\forall y \in H) \langle T^*y, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x \in (T^*(H))^\perp.\end{aligned}$$

Im Falle eines hermiteschen Operators ist also $\ker(T) = (T(H))^\perp$ und somit

$$(\ker(T))^\perp = ((T(H))^\perp)^\perp = \overline{T(H)}$$

nach Satz 39.19 (d). Da $\ker(T)$ ein abgeschlossener Untervektorraum von H ist, ist nach Satz 39.19 (e) also

$$H = \ker(T) \oplus (\ker(T))^\perp = \ker(T) \oplus \overline{T(H)}.$$

(e) Sei $s := \sup\{|\langle x, Tx \rangle| : x \in \overline{B}_1^H(0)\}$. Für jedes $y \in H$ gilt dann

$$|\langle y, Ty \rangle| \leq s\|y\|^2; \quad (1)$$

dies ist trivial im Fall $y = 0$ und andernfalls kann man $y = \|y\|x$ schreiben mit dem normierten Vektor $x := y/\|y\| \in \overline{B}_1^H(0)$ und $\|y\|^2$ aus dem Skalarprodukt herausziehen. Für jedes $x \in H$ mit $\|x\| \leq 1$ ist

$$|\langle x, Tx \rangle| \leq \|x\| \|Tx\| \leq \|x\| \|T\|_{\text{op}} \|x\| \leq \|T\|_{\text{op}},$$


also $s \leq \|T\|_{\text{op}}$. Um $\|T\|_{\text{op}} \leq s$ (und somit Gleichheit) zu zeigen, sei $x \in H$ mit $\|x\| \leq 1$; wir wollen sehen, dass

$$\|Tx\| \leq s. \quad (2)$$

Dies ist trivial, wenn $Tx = 0$. Sei nun $Tx \neq 0$ und $\tau := \sqrt{\|Tx\|}$.

Dann gilt

$$\begin{aligned} 4\|Tx\|^2 &= \langle \tau x + \frac{1}{\tau} Tx, T(\tau x + \frac{1}{\tau} Tx) \rangle - \langle \tau x - \frac{1}{\tau} Tx, T(\tau x - \frac{1}{\tau} Tx) \rangle \\ &\leq |\langle \tau x + \frac{1}{\tau} Tx, T(\tau x + \frac{1}{\tau} Tx) \rangle| + |\langle \tau x - \frac{1}{\tau} Tx, T(\tau x - \frac{1}{\tau} Tx) \rangle| \\ &\leq s(\|\tau x + \frac{1}{\tau} Tx\|^2 + \|\tau x - \frac{1}{\tau} Tx\|^2) \\ &= 2s(\|Tx\|^2 + \|\frac{1}{\tau} Tx\|^2) \leq 2s(\underbrace{\tau^2}_{=\|Tx\|} + \underbrace{\frac{1}{\tau^2} \|Tx\|^2}_{=\|Tx\|}) = 4s\|Tx\|, \end{aligned}$$

wobei sich die erste Gleichheit durch Ausmultiplizieren verifizieren lässt und für die zweite Gleichheit die Parallelogrammgleichung 

benutzt wurde; die zweite Ungleichung beruht auf (1). Teilen durch $4\|Tx\|$ liefert (2). \square

In Satz 19.7 haben wir Beziehungen zwischen komplementierten Untervektorräumen in Banachräumen und Projektionen studiert. Als Spezialfall nennen wir im Falle eines Hilbertraums $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ einen Operator $P \in \mathcal{L}(H)$ eine **Projektion**, wenn $P^2 = P$. Wir wissen, dass dann $\ker(P)$ und $P(H)$ abgeschlossene Untervektorräume von H sind und topologisch

$$H = \ker(P) \oplus P(H).$$

Definition 40.7

$P \in \mathcal{L}(H)$ heißt **Orthogonalprojektion**, wenn $P^2 = P$ und $P = P^*$.

Orthogonalprojektionen sind also Projektionen, welche hermitesche Operatoren sind.

Lemma 40.8

Eine Projektion $P \in \mathcal{L}(H)$ ist genau dann eine Orthogonalprojektion, wenn $P(H) \perp \ker(P)$. Dann ist $P(H) = (\ker(P))^\perp$.

Beweis. Ist P eine Orthogonalprojektion, so ist P hermitesch und somit $P(H) \perp \ker(P)$ nach Lemma 40.6 (d). Da das Bild jeder Projektion abgeschlossen ist, ist zudem $P(H) = \overline{P(H)} = (\ker(P))^\perp$ nach Lemma 40.6 (d).

Ist $P(H) \perp \ker(P)$, so können wir alle $x, y \in H$ eindeutig zerlegen als $x = x_1 + x_2$ und $y = y_1 + y_2$ mit $x_1, y_1 \in P(H)$ und $x_2, y_2 \in \ker(P)$, da P eine Projektion ist. Dann ist $P(y_1) = y_1$ und $P(y_2) = 0$, also

$$\langle x, Py \rangle = \langle x_1 + x_2, P(y_1) + P(y_2) \rangle = \langle x_1 + x_2, y_1 \rangle = \langle x_1, y_1 \rangle,$$

wobei $x_2 \perp y_1$ benutzt wurde. Analog ist $\langle Px, y \rangle = \langle x_1, y_1 \rangle$, also $\langle Px, y \rangle = \langle x, Py \rangle$ für alle $x, y \in H$ und somit $P = P^*$. \square

Beispiel 40.9

Ist $F \subseteq H$ ein abgeschlossener Untervektorraum, so existieren für jedes $x \in H$ eindeutige Elemente $P(x) \in F$ und $Q(x) \in F^\perp$ mit

$$x = P(x) + Q(x).$$

Dann sind $P: H \rightarrow H$ und $Q: H \rightarrow H$ Orthogonalprojektionen.

Offenbar sind $P: H \rightarrow H$ und $Q: H \rightarrow H$ linear. Da $H = F \oplus F^\perp$ topologisch, sind P und Q stetig. Da $F = P(H)$ und $\ker(P) = F^\perp$ orthogonal sind bzw. $F^\perp = Q(H)$ und $\ker(Q) = F$, sind P und Q nach Lemma 40.8 Orthogonalprojektionen.

Beispiel 40.10

Für jedes $x \in H$ mit $\|x\| = 1$ ist

$$P := |x\rangle\langle x|: H \rightarrow H, \quad y \mapsto \langle x, y \rangle x$$

eine Orthogonalprojektion.

Es ist nämlich $P(Py) = P(\langle x, y \rangle x) = \langle x, y \rangle P(x) = \langle x, y \rangle \langle x, x \rangle x = \langle x, y \rangle x = P(y)$ für alle $y \in H$, also $P^2 = P$ und somit P eine Projektion. Weiter ist $P(H) = \mathbb{K}x$ orthogonal auf $\ker(P) = x^\perp$, somit P eine Orthogonalprojektion nach Lemma 40.8.

Lemma 40.11

Es sei $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein Hilbertraum und $T \in \mathcal{L}(H)$ ein hermitescher Operator. Dann gilt für jeden abgeschlossenen Untervektorraum $F \subseteq H$ mit $T(F) \subseteq F$:

(a) $T|_F: F \rightarrow F$ ist hermitesch;

(b) $T(F^\perp) \subseteq F^\perp$.

Beweis. (a) Für alle $x, y \in F$ gilt

$\langle x, T|_F(y) \rangle = \langle x, Ty \rangle = \langle T^*(x), y \rangle = \langle Tx, y \rangle = \langle T|_F(x), y \rangle$. Also ist $(T|_F)^* = T|_F$.

(b) Für $y \in F^\perp$ gilt für alle $x \in F$

$$\langle x, Ty \rangle = \langle T^*x, y \rangle = \langle Tx, y \rangle = 0,$$

da $Tx \in F$ und $y \in F^\perp$. Also ist $Ty \in F^\perp$. \square

Wir tragen noch vier Fakten über kompakte Operatoren nach.

Lemma 40.12

Sind $(E, \|\cdot\|_E)$ und $(F, \|\cdot\|_F)$ Banachräume, so gilt:

(a) Die Menge $\mathcal{K}(E, F)$ der kompakten Operatoren ist ein abgeschlossener Untervektorraum von $(\mathcal{L}(E, F), \|\cdot\|_{\text{op}})$.

(b) Ist $T: E \rightarrow F$ ein kompakter Operator und $Y \subseteq E$ ein Untervektorraum, so ist auch $T|_Y: Y \rightarrow F$ ein kompakter Operator.

- (c) Ist $T: E \rightarrow F$ ein kompakter Operator und $Y \subseteq F$ ein abgeschlossener Untervektorraum mit $T(E) \subseteq Y$, so ist auch die Ko-Einschränkung $T|_Y: E \rightarrow Y$ ein kompakter Operator.
- (d) Ist $T \in \mathcal{L}(E, F)$ ein Operator von endlichem Rang (also $T(E)$ endlich-dimensional), so ist T ein kompakter Operator.

Beweis. (a) Sei T im Abschluss von $\mathcal{K}(E, F)$ in $\mathcal{L}(E, F)$; dann gibt es also eine Folge $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ kompakter Operatoren $T_n \in \mathcal{K}(E, F)$ derart, dass $\|T - T_n\|_{\text{op}} \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$. Sei $B := \overline{B_1^E}(0)$; wir haben zu zeigen, dass die Teilmenge $K := \overline{T(B)} \subseteq F$ kompakt ist. Wir erinnern daran, dass ein metrischer Raum genau dann kompakt ist, wenn er vollständig ist und präkompakt (siehe z.B. Satz 14.25 in Prof. Glöckners Skript Analysis 2 vom Sommersemester 2019, frei zugänglich in PANDA). Da F vollständig ist, ist auch die abgeschlossene Teilmenge K vollständig. Um für K noch Präkompaktheit nachzuweisen, sei $\varepsilon > 0$. Es gibt ein $N \in \mathbb{N}$ derart, dass $\|T - T_n\|_{\text{op}} < \varepsilon/3$ für alle $n \geq N$. Da $\overline{T_N(B)}$ kompakt ist, gibt es ein $m \in \mathbb{N}$ und $y_1, \dots, y_m \in \overline{T_N(B)}$ derart, dass

$$\overline{T_N(B)} \subseteq \bigcup_{j=1}^m B_{\varepsilon/6}^F(y_j).$$

Für jedes $j \in \{1, \dots, m\}$ gibt es ein $x_j \in B$ mit $\|y_j - T_N(x_j)\|_F < \varepsilon/6$; dann ist

$$\overline{T_N(B)} \subseteq \bigcup_{j=1}^m B_{\varepsilon/3}^F(T_N(x_j)).$$

Für jedes $x \in B$ gibt es ein $j \in \{1, \dots, m\}$ derart, dass $\|T_N(x) - T_N(x_j)\|_F < \varepsilon/3$. Dann ist

$$\begin{aligned} \|Tx - Tx_j\|_F &\leq \|Tx - T_Nx\|_F + \|T_Nx - T_Nx_j\|_F + \|T_Nx_j - Tx_j\|_F \\ &< \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon, \end{aligned}$$

also $Tx \in B_\varepsilon^F(Tx_j)$. Es ist also

$$T(B) \subseteq \bigcup_{j=1}^m B_\varepsilon^F(Tx_j) \subseteq \bigcup_{j=1}^m \overline{B_\varepsilon^F}(Tx_j)$$

und somit auch $K = \overline{T(B)} \subseteq \bigcup_{j=1}^m \overline{B_\varepsilon^F}(Tx_j)$, da die rechte Seite

abgeschlossen ist. Also ist K präkompakt.

(b) Die Inklusion $j: Y \rightarrow E$ ist stetig und linear, also $T|_Y = T \circ j$ ein kompakter Operator nach Satz 37.7 (a).

(c) Die kompakte Teilmenge $K := \overline{T(\overline{B_1^E}(0))} \subseteq F$ ist in Y enthalten, da Y in F abgeschlossen ist und $T(\overline{B_1^E}(0)) \subseteq Y$. Dann ist $\overline{T|_Y(\overline{B_1^E}(0))} \subseteq K$ kompakt in Y (natürlich gilt sogar Gleichheit).

(d) Es ist $T(E) \cong \mathbb{K}^n$ für ein $n \in \mathbb{N}$ und somit in $T(E)$ (wie in \mathbb{K}^n) jede abgeschlossene, beschränkte Teilmenge kompakt (siehe Analysis 2). Die Teilmenge

$$\overline{T(\overline{B_1^E}(0))}$$

von F ist also kompakt (da sie abgeschlossen ist und beschränkt), somit T ein kompakter Operator. \square

§41 Spektralsatz für kompakte hermitesche Operatoren

Aus der linearen Algebra ist bekannt, dass jeder hermitesche Endomorphismus eines endlich-dimensionalen komplexen Vektorraums diagonalisierbar ist; genauer, es gibt eine Orthogonalbasis von Eigenvektoren. Entsprechendes gilt für symmetrische Endomorphismen endlich-dimensionaler reeller Vektorräume. In diesem Kapitel studieren wir Verallgemeinerungen solcher Resultate für hermitesche kompakte Operatoren auf einem Hilbertraum.

Satz 41.1 (Spektralsatz für hermitesche Operatoren von endlichem Rang)

Sei $T \in \mathcal{L}(H)$ hermitesch mit $n := \dim T(H) < \infty$. Dann existieren eine Orthonormalbasis x_1, \dots, x_n für $T(H)$ und $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ derart, dass

$$T = \sum_{j=1}^n \lambda_j |x_j\rangle \langle x_j|.$$

Beweis. Per Voraussetzung ist $Y := T(E)$ ein n -dimensionaler Untervektorraum von E . Offenbar gilt $T(Y) \subseteq Y$. Nach Lemma 40.11 (a) ist $T|_Y \in \mathcal{L}(Y)$ hermitesch. Gemäß der Linearen Algebra finden wir eine Orthonormalbasis x_1, \dots, x_n in Y aus Eigenvektoren für $T|_Y$ zu Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ (welche nach Lemma 40.6 (b) alle reell sind). Sei nun $S := \sum_{j=1}^n \lambda_j |x_j\rangle \langle x_j|$. Da Y endlich-dimensional und somit in H abgeschlossen ist, ist $Y = \overline{T(H)} = (\ker(T))^\perp$ nach Lemma 40.6 (d), somit

$$H = \ker(T) \oplus Y.$$

Da $x_1, \dots, x_n \in F = (\ker(T))^\perp$, gilt für alle $x \in \ker(T)$

$$T(x) = 0 = \sum_{j=1}^n \lambda_j \langle x_j, x \rangle x_j = S(x).$$

Für $y \in Y$ ist $y = \sum_{k=1}^n t_k x_k$ mit gewissen $t_1, \dots, t_n \in \mathbb{K}$, also

$$Sy = \sum_{j,k=1}^n t_k \lambda_j \underbrace{\langle x_j, x_k \rangle}_{=\delta_{j,k}} x_j = \sum_{j=1}^n t_j \underbrace{\lambda_j x_j}_{=Tx_j} = T\left(\sum_{j=1}^n t_j x_j\right) = Ty.$$

Also ist $T(x+y) = Tx + Ty = Sx + Sy = S(x+y)$, d.h. $S = T$. \square

Satz 41.2 (Spektralsatz für hermitesche kompakte Operatoren)

Sei $T \in \mathcal{L}(H)$ kompakt, hermitesch und $T(H)$ nicht endlich-dimensional. Dann existiert eine Folge $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Eigenwerten $\lambda_n \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ von T und eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ orthogonaler, normierter Vektoren x_n , die Eigenvektor von T sind zum Eigenwert λ_n derart, dass $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \dots$ gilt, $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = 0$ und

$$T = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n |x_n\rangle \langle x_n| = \sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda_n |x_n\rangle \langle x_n|.$$

Die Summe meint die Summe einer in $(\mathcal{L}(H), \|\cdot\|_{\text{op}})$ summierbaren (aber nicht notwendig absolut summierbaren) Familie.

Das folgende Lemma nutzt im Beweis von Satz 41.2.

Lemma 41.3

Ist $H \neq \{0\}$ und der Operator $T \in \mathcal{L}(H)$ kompakt und hermitesch, so ist $\|T\|_{\text{op}}$ oder $-\|T\|_{\text{op}}$ ein Eigenwert von T .

Beweis. Die Aussage ist trivial, wenn $\|T\|_{\text{op}} = 0$, also $T = 0$ ist; dann ist jeder Vektor $x \in H \setminus \{0\}$ ein Eigenvektor für T zum Eigenwert $\lambda = 0$.

Sei nun $\|T\|_{\text{op}} > 0$; nach Ersetzen von T durch $\frac{1}{\|T\|_{\text{op}}} T$ sei o.B.d.A. $\|T\|_{\text{op}} = 1$. Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Vektoren $x_n \in H$ mit $\|x_n\| = 1$ und

$$|\langle x_n, Tx_n \rangle| \rightarrow \|T\|_{\text{op}} = 1$$

(vergleiche Lemma 40.6 (e)). Nach Übergang zu einer Teilfolge dürfen wir annehmen, dass $\langle x_n, Tx_n \rangle \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Da $\langle x_n, Tx_n \rangle \in \mathbb{R}$, ist $\langle x_n, Tx_n \rangle > 0$ für unendlich viele n oder $\langle x_n, Tx_n \rangle < 0$ für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$. Ist Ersteres der Fall, so sei $s := 1$; andernfalls setzen wir $s := -1$. Nach Übergang zu einer Teilfolge dürfen wir nun annehmen, dass

$$s \langle x_n, Tx_n \rangle > 0 \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Da $\overline{T(\overline{B}_1^H(0))}$ kompakt ist und ein metrischer Raum, hat $(Tx_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß eine konvergente Teilfolge. Nach Übergang zu dieser Teilfolge dürfen wir annehmen, dass

$(Tx_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen ein $y \in H$ konvergiert. Wegen $s^2 = 1$ und $\|x_n\| = 1$ gilt dann

$$\begin{aligned} 0 &\leq \|sx_n - Tx_n\|^2 = s^2\|x_n\|^2 - 2s\langle x_n, Tx_n \rangle + \|Tx_n\|^2 \\ &= 1 - 2|\langle x_n, Tx_n \rangle| + \|Tx_n\|^2 \leq 1 - 2|\langle x_n, Tx_n \rangle| + (\|T\|_{\text{op}})^2 \\ &\rightarrow 1 - 2\|T\|_{\text{op}} + (\|T\|_{\text{op}})^2 = 1 - 2 + 1 = 0 \end{aligned} \quad (1)$$

für $n \rightarrow \infty$. Da die Folge $(Tx_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen y konvergiert, konvergiert nach (1) auch $(sx_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen y . Insbesondere ist

$$\|y\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\|sx_n\|}_{=|s|\|x_n\|=1} = 1,$$

also $y \neq 0$. Da T stetig ist, folgt

$$sy = s \lim_{n \rightarrow \infty} Tx_n = \lim_{n \rightarrow \infty} T(sx_n) = T\left(\lim_{n \rightarrow \infty} sx_n\right) = Ty.$$

Also ist y ein Eigenvektor für T zum Eigenwert s mit $|s| = 1 = \|T\|_{\text{op}}$. \square

Ein weiteres Lemma ist von Nutzen.

Lemma 41.4

Ist $x_1, \dots, x_n \in H$ ein endliches Orthonormalsystem und sind $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$, so hat $T := \sum_{j=1}^n \lambda_j |x_j\rangle \langle x_j|$ Operatornorm $\|T\|_{\text{op}} = \max\{|\lambda_1|, \dots, |\lambda_n|\}$.

Beweis. Sei $F := \text{span}_{\mathbb{K}}\{x_1, \dots, x_n\}$. Weil $Tx_j = \lambda_j x_j$, ist

$$\|T\|_{\text{op}} \geq \|Tx_j\| = |\lambda_j| \|x_j\| = |\lambda_j|$$

für alle $j \in \{1, \dots, n\}$, also $\|T\|_{\text{op}} \geq \max\{|\lambda_1|, \dots, |\lambda_n|\} =: s$.

Andererseits können wir $x \in H$ schreiben als $x = y + z$ mit $y \in F$ und $z \in F^\perp$. Wegen $F^\perp \subseteq x_j^\perp$ ist dann $\langle x_j, z \rangle = 0$ für alle $j \in \{1, \dots, n\}$, somit $Tx = Ty$. Schreiben wir $y = \sum_{j=1}^n t_j x_j$ mit $t_1, \dots, t_n \in \mathbb{K}$, so ist nach dem Satz des Pythagoras

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n |t_j|^2 &= \|y\|^2 \leq \|y\|^2 + \|z\|^2 = \|x\|^2. \quad \text{Also ist} \\ \|Tx\|^2 &= \|Ty\|^2 = \sum_{j=1}^n \underbrace{|\lambda_j t_j|^2}_{\leq |\lambda_j|^2 |t_j|^2 \leq s^2 |t_j|^2} \leq s^2 \sum_{j=1}^n |t_j|^2 \leq s^2 \|x\|^2 \end{aligned}$$

und folglich $\|Tx\| \leq s\|x\|$, also $\|T\|_{\text{op}} \leq s$. \square

Beweis von Satz 41.2. Nach Lemma 41.3 existiert ein $x_1 \in H$ mit $\|x_1\| = 1$ und $Tx_1 = \lambda_1 x_1$ für ein $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ mit $|\lambda_1| = \|T\|_{\text{op}}$.
 Rekursiv finden wir eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ paarweise orthogonaler, normierter Eigenvektoren $x_n \in H$ für T zu Eigenwerten $\lambda_n \in \mathbb{R}$ derart, dass mit

$$F_{n-1} := \text{span}_{\mathbb{K}}\{x_1, \dots, x_{n-1}\}$$

gilt $x_n \in (F_{n-1})^\perp$ und

$$|\lambda_n| = \left\| T|_{F_{n-1}^\perp} \right\|_{\text{op}}. \quad (2)$$

In der Tat: Sind x_1, \dots, x_{n-1} schon gefunden, so folgt aus

$T(F_{n-1}) \subseteq F_{n-1}$, dass $T(F_{n-1}^\perp) \subseteq F_{n-1}^\perp$; weiter ist

$T|_{F_{n-1}^\perp} \in \mathcal{L}(F_{n-1}^\perp)$ hermitesch, siehe Lemma 40.11 (b) und (a).

Nach Lemma 40.12 (b) und (c) ist $T|_{F_{n-1}^\perp}$ zudem kompakt. Weiter hat $T|_{F_{n-1}^\perp}$ unendlichen Rang, da

$$TH = T(F_{n-1} + F_{n-1}^\perp) = T(F_{n-1}) + T(F_{n-1}^\perp)$$

mit $T(F_{n-1}) \subseteq F_{n-1}$ von endlicher Dimension, $n-1$. Wie oben finden wir ein $x_n \in F_{n-1}^\perp$ derart, dass x_n ein Eigenvektor von $T|_{F_{n-1}^\perp}$

(und somit von T) ist zu einem Eigenwert $\lambda_n \in \mathbb{R}$ mit (2). Da $H = F_0^\perp \supseteq F_1^\perp \supseteq F_2^\perp \supseteq \dots$, folgt aus (2), dass

$$|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \dots.$$

Also existiert $\theta := \lim_{n \rightarrow \infty} |\lambda_n| \in [0, \infty[$. Wäre $\theta > 0$, so würden wir wie folgt einen Widerspruch erhalten: Da T ein kompakter Operator ist, ist der Abschluss $K := \overline{\{Tx_n : n \in \mathbb{N}\}}$ kompakt, also $(Tx_n)_{n \in \mathbb{N}} = (\lambda_n x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in einem kompakten metrischen Raum. Nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß gibt es eine in K konvergente Teilfolge $(\lambda_{n_k} x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$, die dann insbesondere eine Cauchy-Folge ist. Es gibt somit ein $k_0 \in \mathbb{N}$ derart, dass

$$\Delta_{k,\ell} := \|\lambda_{n_k} x_{n_k} - \lambda_{n_\ell} x_{n_\ell}\| < \theta$$

für alle $k, \ell \geq k_0$. Für $k := k_0$, $\ell := k_0 + 1$ ist jedoch $\lambda_{n_k} x_{n_k} \perp \lambda_{n_\ell} x_{n_\ell}$, somit nach dem Satz des Pythagoras

$$\|\lambda_{n_k} x_{n_k} - \lambda_{n_\ell} x_{n_\ell}\|^2 = \|\lambda_{n_k} x_{n_k}\|^2 + \|\lambda_{n_\ell} x_{n_\ell}\|^2 = |\lambda_{n_k}|^2 + |\lambda_{n_\ell}|^2 \geq \theta^2 + \theta^2,$$

also $\Delta_{k,\ell} \geq \theta\sqrt{2} \geq \theta$, Widerspruch.

Die Familie $(\lambda_n |x_n\rangle \langle x_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ ist somit summierbar: Sei nämlich \mathcal{F}

die Menge aller endlichen Teilmengen von \mathbb{N} . Gegeben $\varepsilon > 0$ gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ derart, dass $|\lambda_n| < \varepsilon$ für alle $n \geq N$. Für jedes $\Phi \in \mathcal{F}$ mit $\Phi \cap \{1, \dots, N\} = \emptyset$ ist dann

$$\left\| \sum_{n \in \Phi} \lambda_n |x_n\rangle \langle x_n| \right\|_{\text{op}} < \varepsilon,$$

nach Lemma 41.4. Nach Lemma 28.2 ist die Familie $(\lambda_n |x_n\rangle \langle x_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ also summierbar in $(\mathcal{L}(H), \|\cdot\|_{\text{op}})$. Wir schreiben

$$S := \sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda_n |x_n\rangle \langle x_n|$$

für die Summe der summierbaren Familie; nach Satz 28.8 ist insb.

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n |x_n\rangle \langle x_n|.$$

Es bleibt nur zu zeigen, dass $T = S$. Für jedes $x \in H$ ist die Abbildung $\mathcal{L}(H) \rightarrow H$, $A \mapsto Ax$ stetig und linear, somit

$$Sx = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x_n, x \rangle x_n. \quad (3)$$

Gegeben $\varepsilon > 0$ sei $N \in \mathbb{N}$ wie oben. Für alle $j \in \{1, \dots, N\}$ ist

$$Tx_j = \lambda_j x_j = Sx_j$$

unter Benutzung von (3). Folglich ist $T|_{F_N} = S|_{F_N}$. Für $x \in F_N^\perp$ ist $\|Tx - Sx\| \leq \|Tx\| + \|Sx\|$ mit

$$\|Tx\| \leq \|T|_{F_N^\perp}\|_{\text{op}} \|x\| = |\lambda_{N+1}| \|x\| \leq \varepsilon \|x\|$$

und

$$\|Sx\| = \left\| \sum_{n=N+1}^{\infty} \lambda_n \langle x_n, x \rangle x_n \right\| \leq \left\| \sum_{n=N+1}^{\infty} \lambda_n |x_n| \langle x_n, x \rangle \right\|_{\text{op}} \|x\| \leq \varepsilon \|x\|$$

durch Anwendung von Lemma 41.4 auf die Anfangssummen und Grenzübergang. Also ist $\|(T - S)x\| \leq 2\varepsilon \|x\|$ für alle $x \in F_N^\perp$. Ist $x \in H$ beliebig, so schreiben wir $x = y + z$ mit $y \in F_N$ und $z \in F_N^\perp$ und erhalten

$$\|(T - S)x\| = \|(T - S)z\| \leq 2\varepsilon \|z\| \leq 2\varepsilon \|x\|,$$

da $\|x\| = \sqrt{\|y\|^2 + \|z\|^2} \geq \|z\|$. Also ist $\|T - S\|_{\text{op}} \leq 2\varepsilon$ und folglich $T = S$, da $\varepsilon > 0$ beliebig war. \square

Satz 41.5

In Satz 41.2 ist $M := \{\lambda_n : n \in \mathbb{N}\}$ die Menge aller von 0 verschiedenen Eigenwerte von T . Weiter ist $\lambda \operatorname{id}_H - T$ für alle $0 \neq \lambda \in \mathbb{K} \setminus M$ invertierbar. Analoges gilt in Satz 41.1 mit $M := \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$.

Beweis. Im Falle von Satz 41.2 sei $N := \infty$; in Falle von Satz 41.1 sei $N := n + 1$ mit n wie dort. Sei $K := \ker(T)$. Dann ist $H = K \oplus K^\perp$ und für $K^\perp = \overline{T(H)}$ bilden die Vektoren x_j mit natürlichen Zahlen $j < N$ ein vollständiges Orthonormalsystem. Ist $x \in \ker(\lambda \operatorname{id}_H - T)$, so existieren eindeutige $y \in K$ und $z \in K^\perp$ mit $x = y + z$. Es gibt eindeutige $t_j \in \mathbb{K}$ mit $\sum_{j < N} |t_j|^2 < \infty$ und

$$z = \sum_{j < N} t_j x_j.$$

Dann ist

$$0 = (\lambda \operatorname{id}_H - T)(x) = \lambda y + \lambda z - \sum_{j < N} \lambda_j t_j x_j = \lambda y + \sum_{j < N} (\lambda - \lambda_j) t_j x_j,$$

also $y = 0$ und $t_j = 0$ für alle j . Somit ist auch $z = 0$ und folglich

$x = 0$, also $\lambda \operatorname{id}_H - T$ injektiv und folglich λ kein Eigenwert von T .
 Da das Bild von $\lambda \operatorname{id}_H - T$ jedes $y \in K$ und jeden der Vektoren x_j enthält, ist das Bild dicht in H . Wir zeigen, dass die injektive lineare Abbildung $S := \lambda \operatorname{id}_H - T$ eine topologische Einbettung ist; dann ist das Bild zu H isomorph, also vollständig und somit abgeschlossen in H , folglich $\lambda \operatorname{id}_H - T$ surjektiv und somit ein topologischer Isomorphismus. Wäre die lineare Abbildung $S^{-1}: S(H) \rightarrow H$ nicht stetig, so wäre S^{-1} an der Stelle 0 unstetig, es gäbe also eine Folge $(y_k)_{k \in \mathbb{N}}$ in $S(H)$ mit $y_k \rightarrow 0$ derart, dass $S^{-1}(y_k)$ nicht gegen 0 konvergiert. Nach Übergang zu einer Teilfolge dürfen wir annehmen, dass ein $\varepsilon > 0$ existiert mit

$$r_k := \|S^{-1}(y_k)\| \geq \varepsilon \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}.$$

Nach Ersetzen von y_k durch $\frac{1}{r_k} y_k$ dürfen wir annehmen, dass

$$\|S^{-1}(y_k)\| = 1 \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}.$$

Sei $v_k := S^{-1}(y_k)$. Da T ein kompakter Operator ist, dürfen wir nach Übergang zu einer Teilfolge annehmen, dass Tv_k gegen ein $w \in H$ konvergiert. Für $k \rightarrow \infty$ konvergiert dann

$$\lambda v_k = S v_k + T v_k = y_k + T v_k$$

gegen $0 + w = w$. Also konvergiert v_k gegen $\frac{1}{\lambda} w$ und folglich ist

$$w = \lim_{k \rightarrow \infty} T v_k = T \lim_{k \rightarrow \infty} v_k = T \frac{1}{\lambda} w.$$

Somit ist $T w = \lambda w$. Da

$$\|w\| = \left\| \lim_{k \rightarrow \infty} \lambda v_k \right\| = \lim_{k \rightarrow \infty} |\lambda| \underbrace{\|v_k\|}_{=1} = |\lambda| \neq 0,$$

ist also w ein Eigenvektor von T zum Eigenwert λ . Wir haben aber schon nachgewiesen, dass λ kein Eigenwert ist, Widerspruch. \square

Definition 41.6

Im Falle eines komplexen Hilbertraums und $T \in \mathcal{L}(H)$ definieren wir das **Spektrum** von T als

$$\sigma(T) := \{ \lambda \in \mathbb{C} : \lambda \text{id}_H - T \text{ ist nicht invertierbar} \} \subseteq \mathbb{C}.$$

Ist T hermitesch und kompakt, so ist $\sigma(T) \setminus \{0\}$ nach Satz 41.5 die Menge aller von 0 verschiedenen Eigenwerte von T . Mit der

Orthogonalprojektion P_0 auf $\ker(T)$ und $P_\lambda := \sum_{j: \lambda_j = \lambda} |x_j\rangle\langle x_j|$ für $0 \neq \lambda \in \sigma(T)$ folgt mit dem Umordnungssatz (Satz 28.6 (a)) aus den Sätzen 41.1 und 41.2:

Satz 41.7 (Spektralsatz für hermitesche kompakte Operatoren).

Es sei $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein komplexer Hilbertraum und $T \in \mathcal{L}(H)$ ein hermitescher, kompakter Operator. Dann ist $(\lambda P_\lambda)_{\lambda \in \sigma(T)}$ eine summierbare Familie in $(\mathcal{L}(H), \|\cdot\|_{\text{op}})$ und

$$T = \sum_{\lambda \in \sigma(T)} \lambda P_\lambda.$$

Bemerkung 41.8

Im Falle eines hermiteschen, nicht notwendig kompakten Operators $T \in \mathcal{L}(H)$ existiert immer noch ein Spektralmaß P auf $\sigma(T)$ (eine σ -additive Abbildung in die Menge der Orthogonalprojektionen mit der Topologie der punktweisen Konvergenz und $P(\sigma(T)) = \text{id}_H$) derart, dass

$$T = \int_{\sigma(T)} \lambda dP(\lambda).$$

Solche Verallgemeinerungen sind Gegenstand von Vorlesungen über Spektraltheorie, Operatortheorie u.ä.

Beispiel 41.9

Sei $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = 0$ und $T: \ell^2 \rightarrow \ell^2$ der Multiplikationsoperator

$$x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \mapsto (\lambda_n x_n)_{n \in \mathbb{N}}.$$

Dann ist T ein kompakter Operator.

Es ist nämlich $\lim_{N \rightarrow \infty} \|T - T_N\|_{\text{op}} \rightarrow 0$ mit den durch $T_N(x) := (\mathbf{1}_{\{1, \dots, N\}} \lambda_n x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definierten Operatoren $T_N: \ell^2 \rightarrow \ell^2$ von endlichem Rang (also Lemma 40.12 (a) anwendbar). Man rechnet direkt nach:

T ist hermitesch. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist der Standard-Einheitsvektor e_n ein Eigenvektor für T zum Eigenwert λ_n .

Da $\text{im}(T)$ alle e_n enthält und somit dicht in ℓ^2 ist, ist T nach Lemma 40.6 (d) injektiv. Also ist 0 kein Eigenwert. Dennoch ist

$0 \in \sigma(T)$, da $0 \operatorname{id}_{\ell^2} - T = -T$ nicht invertierbar ist.

Man verifiziert direkt, dass

$$T = \sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda_n |e_n\rangle \langle e_n|,$$

wobei die Familie $(\lambda_n |e_n\rangle \langle e_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ in $(\mathcal{L}(\ell^2), \|\cdot\|_{\text{op}})$ summierbar ist. Wählen wir $\lambda_n := \frac{1}{n}$, so ist die Familie übrigens nicht absolut summierbar, denn wegen

$$(\lambda_n |e_n\rangle \langle e_n|)(e_n) = \lambda_n e_n = \frac{1}{n} e_n$$

mit $\|\frac{1}{n} e_n\| = \frac{1}{n}$ ist $\|\lambda_n |e_n\rangle \langle e_n|\|_{\text{op}} = \frac{1}{n}$, somit

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \|\lambda_n |e_n\rangle \langle e_n|\|_{\text{op}} = \infty.$$

Definition 42.1

Eine geordnete Menge (M, \leq) heißt **induktiv geordnet**, wenn jede Kette in M eine obere Schranke besitzt. Hat jede Kette eine kleinste obere Schranke, nenne (M, \leq) **vollständig induktiv geordnet**.

Im folgenden setzen wir das Auswahlaxiom als gültig voraus und leiten daraus das Zornsche Lemma ab. Will man betonen, dass ein Resultat vom Auswahlaxiom abhängt, so schreibt man meist "(AC)" hinzu (für "Axiom of Choice").

Satz 42.2 (Zornsches Lemma)


(AC) Jede induktiv geordnete Menge besitzt ein maximales Element.

Beweis. Reduziere auf **vollständig** induktiv geordnete Mengen.

Lemma 42.3

Gilt das Zornsche Lemma für vollständig induktiv geordnete Mengen, so gilt es allgemein.

Beweis des Lemmas. Gegeben eine induktiv geordnete Menge (M, \leq) sei $\mathcal{C} := \{K \subseteq M : K \text{ ist Kette}\}$ die Menge aller Ketten in M . Wir ordnen \mathcal{C} durch Inklusion: $K_1 \leq K_2 :\Leftrightarrow K_1 \subseteq K_2$ für Ketten $K_1, K_2 \subseteq M$. Dann ist (\mathcal{C}, \leq) vollständig induktiv. Um dies einzusehen, sei \mathcal{K} eine Kette in \mathcal{C} . Die Elemente $K \in \mathcal{K}$ sind Ketten in M , und wir vereinigen nun all diese und erhalten so eine neue Teilmenge $S := \bigcup_{K \in \mathcal{K}} K$ von M . Sind $x_1, x_2 \in S$, so gibt es $K_1, K_2 \in \mathcal{K}$ mit $x_1 \in K_1, x_2 \in K_2$. Da \mathcal{K} als Kette in \mathcal{C} total geordnet ist, gilt $K_1 \subseteq K_2$ oder $K_2 \subseteq K_1$. Im ersten dieser Fälle gilt $x_1, x_2 \in K_2$ und somit $x_1 \leq x_2$ oder $x_2 \leq x_1$, da K_2 als Kette total geordnet ist. Im zweiten Fall gilt $x_1, x_2 \in K_1$ und wir kommen zur selben Schlussfolgerung. Somit ist S total geordnet, somit $S \in \mathcal{C}$ eine Kette in M . Per Definition von S gilt $K \subseteq S$ für alle $K \in \mathcal{K}$, somit $K \leq S$. Es ist daher S eine obere Schranke für \mathcal{K} in \mathcal{C} . Ist auch $T \in \mathcal{C}$ eine obere Schranke für \mathcal{K} , so gilt $K \leq T$, also $K \subseteq T$ für alle $K \in \mathcal{K}$. Daher ist $S = \bigcup_{K \in \mathcal{K}} K \subseteq T$, d.h. es ist $S \leq T$ und somit $S = \sup(\mathcal{K})$ die kleinste obere Schranke für \mathcal{K} in \mathcal{C} . Also ist (\mathcal{C}, \leq) tatsächlich vollständig induktiv.

Da \mathcal{C} vollständig induktiv ist, ist per Voraussetzung die Aussage \equiv 

des Zornschen Lemmas für \mathcal{C} gültig: \mathcal{C} besitzt ein maximales Element K . Da (M, \leq) induktiv ist, besitzt K eine obere Schranke s in M . Dann ist s ein maximales Element in M (und somit die Behauptung bewiesen!), denn wäre s nicht maximal, so gäbe es ein Element $x \in M$ mit $x > s$. Für jedes $y \in K$ wäre dann $x > s \geq y$, also $x > y$. Daher wäre auch $K^* := K \cup \{x\}$ eine Kette in M . Diese wäre eine echte Obermenge von K , da $x \neq y$ für alle $y \in K$ (weil $x > y$). Also wäre K in \mathcal{C} nicht maximal, Widerspruch! \square

Der folgende Beweis des Zornschen Lemmas für vollständig induktiv geordnete Mengen basiert auf einem Fixpunktsatz, dessen Beweis wir anschließend nachtragen:

Satz 42.3 (Tarskischer Fixpunktsatz)

Es sei (M, \leq) eine vollständig induktiv geordnete Menge und $f: M \rightarrow M$ eine Selbstabbildung von M derart, dass $x \leq f(x)$ für alle $x \in M$. Dann existiert ein $x_0 \in M$ mit $f(x_0) = x_0$.

Beweis des Zornschen Lemmas für vollständig induktiv geordnete Mengen.

Es sei (M, \leq) vollständig induktiv geordnet. Hätte M kein

maximales Element, so wäre für jedes $x \in M$ die Menge $M_x := \{y \in M : x < y\}$ nicht leer. Nach dem Auswahlaxiom ist daher auch das kartesische Produkt $\prod_{x \in M} M_x$ nicht leer, wir finden also ein Element $(y_x)_{x \in M}$ von $\prod_{x \in M} M_x$. Dann ist $f: M \rightarrow M$, $f(x) = y_x$ eine Selbstabbildung von M mit $f(x) = y_x > x$ für alle $x \in M$. Nach dem Tarskischen Fixpunktsatz besitzt f einen Fixpunkt x_0 . Jedoch ist, wie gerade beobachtet, $f(x_0) > x_0$. Widerspruch. \square

Beweis des Tarskischen Fixpunktsatzes. Es sei (M, \leq) eine vollständig induktiv geordnete Menge und $f: M \rightarrow M$ eine Abbildung mit $x \leq f(x)$ für alle $x \in M$. Für die Zwecke des Beweises nennen wir eine Teilmenge $A \subseteq M$ **abgeschlossen**, falls $f(A) \subseteq A$ und für jede Kette $K \subseteq A$ das in M gebildete Supremum von K in A enthalten ist, $\sup(K) \in A$. Dieses ist dann auch die kleinste obere Schranke von K in A bzgl. der von M auf A induzierten Ordnung \leq_A (für $x, y \in A$ gelte also $x \leq_A y$ genau dann, wenn $x \leq y$). Die Menge M ist abgeschlossen.

Wir stellen nun einige Beobachtungen an.

42.4

\emptyset ist eine Kette in M und besitzt daher eine kleinste obere Schranke $\sup(\emptyset)$. Ist $x \in M$ beliebig, so ist x eine obere Schranke für die Kette \emptyset und daher $\sup(\emptyset) \leq x$. Da $\sup(\emptyset) \leq x$ für alle $x \in M$, ist $\sup(\emptyset) =: \min(M)$ das kleinste Element von M .

42.5

Jede abgeschlossene Menge A enthält $\min(M) = \sup(\emptyset)$ (da \emptyset eine Kette in A ist).

42.6

Der Durchschnitt $M_0 := \bigcap_{A \subseteq M \text{ abg.}} A$
aller abgeschlossenen Teilmengen von M ist abgeschlossen in M .

Begründung: Für jede abgeschlossene Menge $A \subseteq M$ ist

$f(M_0) \subseteq f(A) \subseteq A$, folglich $f(M_0) \subseteq \bigcap_A A = M_0$. Ist weiter $K \subseteq M_0$ eine Kette, so ist $\sup(K) \in A$ für jede abgeschlossene Menge $A \subseteq M$ und somit $\sup(K) \in \bigcap_A A = M_0$.

42.7

Als abgeschlossene Teilmenge von M ist M_0 vollständig induktiv geordnet, und wegen $f(M_0) \subseteq M_0$ ist die Einschränkung $g := f|_{M_0}$ eine Selbstabbildung von M_0 mit $x \leq g(x)$ für alle x . Da jeder Fixpunkt von g auch einer von f ist, genügt es, die Existenz eines Fixpunktes für g zu zeigen. Indem wir M durch M_0 und f durch g ersetzen, dürfen wir nun also o.B.d.A. annehmen, dass M keine echte abgeschlossene Teilmenge $A \subset M$ besitzt.

Unser langfristiges Ziel ist es, zu zeigen, dass M (im jetzt vorliegenden Spezialfall) eine Kette ist. Wir nennen im folgenden ein Element $x \in M$ ein **Dach**, wenn $f(y) \leq x$ für alle $y \in M$ mit $y < x$. Ein Dach 'zerlegt' die Menge:

42.8

Ist $x \in M$ ein Dach und $y \in M$, so gilt $y \leq x$ oder $f(x) \leq y$.

Bemerkung 42.9

Man beachte, dass im Falle $f(x) \leq y$ per Voraussetzung an f insbesondere $x \leq f(x) \leq y$. Ein Dach x ist daher mit jedem Element $y \in M$ vergleichbar. Können wir zeigen, dass jedes Element $x \in M$ ein Dach ist, so ist also M eine Kette und somit existiert $x_0 := \sup(M)$ (weil M vollständig induktiv ist). Da $f(x_0) \in M$ und x_0 eine obere Schranke für M ist, gilt dann $f(x_0) \leq x_0$. Andererseits ist $x_0 \leq f(x_0)$ per Voraussetzung an f . Somit ist $x_0 = f(x_0)$ ein Fixpunkt.

Beweis von 42.8. Wir setzen

$A := \{y \in M : y \leq x \text{ oder } f(x) \leq y\}$. Wenn wir zeigen können, dass A abgeschlossen ist, so folgt $A = M$ per Voraussetzung an M (siehe 42.7). Sei also $K \subseteq A$ eine Kette mit Supremum $\sup(K)$ in M ; wir zeigen $\sup(K) \in A$. Fall 1: Existiert ein $y \in K$ mit $f(x) \leq y$, so ist $f(x) \leq y \leq \sup(K)$, also $\sup(K) \in A$. Fall 2: Existiert kein $y \in K$ mit $f(x) \leq y$, so gilt $y \leq x$ für alle $y \in K$ (weil ja $y \in K \subseteq A$ insbesondere ein Element von A ist und daher $y \leq x$ oder $f(x) \leq y$, per Definition von A). Also ist x eine obere

Schranke für K und somit $\sup(K) \leq x$, also $\sup(K) \in A$. Für die Abgeschlossenheit von A bleibt noch $f(A) \subseteq A$ zu zeigen. Sei hierzu $y \in A$. Dann ist $y \leq x$ oder $f(x) \leq y$. 1. Ist $y < x$, so ist $f(y) \leq x$ (da x ein Dach ist), also $f(y) \in A$. 2. Ist $y = x$, so ist $f(x) \leq f(y)$, also $f(y) \in A$. 3. Ist $f(x) \leq y$, so ist wegen $y \leq f(y)$ auch $f(x) \leq f(y)$, somit $f(y) \in A$. Also ist A tatsächlich abgeschlossen und somit die Behauptung bewiesen.

42.10

Jedes Element $x \in M$ ist ein Dach.

Zum Beweis setzen wir $D := \{x \in M : x \text{ ist ein Dach}\}$ und zeigen, dass D abgeschlossen ist (und daher $D = M$ wegen 42.7). Sei hierzu $K \subseteq D$ eine Kette. Für das Supremum $\sup(K)$ in M haben wir $\sup(K) \in D$ zu zeigen. Ist $K = \emptyset$, so ist $\sup(K) = \min(M)$ und dies ist ein Dach (denn es gibt kein $y \in M$ mit $y < \min(M)$). Sei nun $K \neq \emptyset$ und $y \in M$ gegeben mit $y < \sup(K)$. Da wegen $K \subseteq D$ jedes $x \in K$ mit y vergleichbar ist (siehe Bemerkung 42.9) und y wegen $y < \sup(K)$ keine obere Schranke für K sein kann, muss ein $x \in K$ existieren mit $y < x$. Da x ein Dach ist, folgt

$f(y) \leq x \leq \sup(K)$. Wir haben gezeigt, dass aus $y < \sup(K)$ stets $f(y) \leq \sup(K)$ folgt; somit ist $\sup(K) \in D$ ein Dach. Für die Abgeschlossenheit von D ist noch $f(D) \subseteq D$ nachzuweisen. Dazu sei $x \in D$; um zu sehen, dass $f(x)$ ein Dach ist, sei $y \in M$ mit $y < f(x)$. Da x ein Dach ist, gilt $y \leq x$ oder $f(x) \leq y$ (siehe 42.8), wobei der zweite Fall aufgrund unserer Annahme $y < f(x)$ nicht auftreten kann. Ist $y < x$, so ist $f(y) \leq x \leq f(x)$ (da x ein Dach ist). Ist $y = x$, so ist $f(y) = f(x) \leq f(x)$. Also ist $f(x)$ ein Dach. Dies beendet den Beweis des Tarskischen Fixpunktsatzes und somit auch den Beweis des Zornschen Lemmas. \square

Die meisten der vorgestellten funktionalanalytischen Resultate finden Sie in der einen oder anderen Form auch in den folgenden Werken. Das Buch von Werner ist in der Bibliothek elektronisch verfügbar und für den Anfang recht umfassend und passend. Das auch auf Deutsch erhältliche Buch “Real and Complex Analysis” von Rudin hat nicht direkt Funktionalanalysis als Schwerpunkt, liefert jedoch für viele verwandte Themen der fortgeschrittenen Analysis einen hervorragenden Einstieg.

- Heuser, H., “Funktionalanalysis,” B. G. Teubner, 1992.
- Hirzebruch, F. und W. Scharlau, “Einführung in die Funktionalanalysis,” B.I. Wissenschaftsverlag, 1991.
- Reed, M. and B. Simon, “Functional Analysis,” Methods of Modern Mathematical Physics I, Academic Press, 1980.
- Rudin, W., “Real and Complex Analysis,” McGraw-Hill, 1987.
- Weidmann, J. “Lineare Operatoren in Hilberträumen,” B. G. Teubner, 1976.
- Werner, D., “Funktionalanalysis,” Springer-Verlag, 2007.

Später zur Vertiefung der Funktionalanalysis sehr zu empfehlen ist

- Rudin, W., "Functional Analysis," McGraw-Hill, 1991.

Dort bestehende Lücken fortgeschrittener Themen (z.B. direkte Limites, topologische Tensorprodukte, Tonneliertheit) kann man oft mit Bourbaki oder Trèves schließen, oder weiteren Monographien:

- Bourbaki, N., "Topological Vector Spaces," Springer-Verlag, 1987.
- Jarchow, H., "Locally Convex Spaces," B. G. Teubner, 1981.
- Meise, R. und D. Vogt, "Introduction to Functional Analysis," Clarendon Press, 1997.
- Schaefer H. H. mit M. P. Wolf, "Topological Vector Spaces," Springer-Verlag, 1999.
- Trèves, F., "Topological Vector Spaces, Distributions and Kernels," Academic Press, 1967.

Für den zweiten Themenbereich der mengentheoretischen Topologie sind

- von Querenburg, B., "Mengentheoretische Topologie," Springer-Verlag, 1979

sowie

- Schubert, H., “Topologie,” B. G. Teubner, 1975

gute Lehrbücher für den Anfang. Eine hervorragende Monographie zum Nachschlagen weiterführender technischer Resultate ist

- Engelking, R., “General Topology,” Heldermann-Verlag, 1989.

Weitere Standardwerke sind u.a.

- Bourbaki, N., “General Topology,” Chapters 1–4 bzw. 5–10, Springer-Verlag;
- Dudundji, J., “Topology,” Allyn and Bacon, 1973; und
- Kelley, J. L., “General Topology,” Springer-Verlag, 1975.