Vorlesungsskript zur Vorlesung Unendlichdimensionale Topologie

Prof. Dr. Helge Glöckner

Das vorliegende Skript ist ein Begleittext zur genannten Vorlesung an der Universität Paderborn im Sommersemester 2023, für Studierende in den Masterstudiengängen Mathematik und Technomathematik. Ziel der Vorlesung war es, eine Einführung in elementare Homotopietheorie zu geben im Hinblick auf Anwendungen in der unendlichdimensionalen Topologie (und insbesondere in die Homotopietheorie von Zellenkomplexen einzuführen). Unter anderem wurde ausgewähltes Material aus Allen Hatchers Buch "Algebraic Topology" behandelt, oft mit expliziteren Beweisen. Für Skizzen und Diagramme sei auf die Vorlesung verwiesen, wie auch für die Beweise zum Stoff der ersten vier Vorlesungswochen.

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

Dieses Vorlesungsskript ergänzt eine Vorlesung zum Thema "Unendlich-dimensionale Topologie" vom Sommersemester 2023, indem es alle dort gegebenen Definitionen, Fakten und Beispiele festhält und für den technischeren Hauptteil des Stoffs auch detaillierte Beweise.

Es stellte sich als sinnvoll heraus, zunächst allgemeine topologische Grundlagen bereitzustellen, insbesondere zu finalen Topologien und Quotiententopologien.

Das eigentliche Ziel der Vorlesung war es dann, eine Einführung in Homotopietheorie zu geben (und insbesondere in die Homotopietheorie von Zellenkomplexen) im Hinblick auf Anwendungen in der unendlich-dimensionalen Topologie. Zellenkomplexe spielen dort eine wichtige Rolle, denn ein (hier nicht bewiesenes) Resultat von Palais besagt, dass jede metrisierbare, auf lokal konvexen topologischen Vektorräumen modellierte topologische Mannigfaltigkeit M durch einen simplizialen Komplex dominiert wird und somit durch einen Zellenkomplex. Folglich ist M homotopieäquivalent zu einem Zellenkomplex und daher zum Beispiel genau dann kontrahierbar, wenn

$$\pi_k(M) = \{0\} \quad \text{für alle } \; k \in \mathbb{N}_0.$$

Diese wichtige Tatsache wird in der Literatur häufig benutzt, etwa im Beweis des Satzes von Kuiper, der besagt, dass für jeden unendlich-dimensionalen separablen komplexen Hilbertraum $\mathcal{H}$ die unitäre Gruppe

$$U(\mathcal{H}) := \{T \in B(\mathcal{H}) \colon T^*T = TT^* = \mathrm{id}_{\mathcal{H}}\}$$

kontrahierbar ist.[1] Diese ist eine auf dem reellen Banachraum

$$\{T \in B(\mathcal{H}) \colon T^* = -T\}$$

der schief-hermiteschen Operatoren modellierte topologische Mannigfaltigkeit; sie ist metrisierbar als Teilmenge des Banachraums $(B(\mathcal{H}), \|\cdot\|_{\mathrm{op}})$ der beschränkten linearen Operatoren $T \colon \mathcal{H} \to \mathcal{H}$.

Auch einige klassische Fakten wurden in der Vorlesung bewiesen und Berechnungen durchgeführt, etwa die Berechnung der Homotopiegruppen $\pi_k(\mathbb{S}_n)$ der

[1] Siehe Kuiper, N. H., *The homotopy type of the unitary group of Hilbert space*, Topology **3** (1965), 19–30.

Sphären für $k \leq n$.

Während in der Vorlesung im Wesentlichen alles hier präsentierte Material (außerhalb der Anhänge und ohne Sternchen) auch bewiesen wurde, werden zu Beginn des Skripts (vor allem in den Kapiteln 1 und 2) meist nur Definitionen, Beispiele und Ergebnisse festgehalten. Später, sobald es technischer wird, ist das Skript vollständig.

Das Skript beinhaltet keinerlei Graphiken und Skizzen, die gerade für die Topologie natürlich wichtig und hilfreich sind und an der Tafel häufig gegeben wurden. Ein Blick in das Buch von Hatcher, das für die Vorlesung eine wichtige Quelle war, kann in dieser Hinsicht hilfreich sein (relevant sind vor allem die Seiten 1–10, 14–17, 40–46, 50–51, 337–351, 360–362, 375–377 und Seite 379).

Hatchers Buch verfolgt einen anschaulich-geometrischen Zugang und ist oft recht knapp. Ergänzend zu solchen Kurzbeschreibungen in Worten ist es auch ein Ziel des Skriptes, durchweg (oder jedenfalls meistens) Beweise in konkreten Formeln zu geben.[2]

Die Vorlesung beabsichtigte keine Einführung in Algebraische Topologie über Homotopietheorie hinaus: weder Homologietheorien noch Kohomologie wurden behandelt und aus Zeitgründen auch nicht typische klassische Anwendungen. Aber wenigstens ein Spezialfall von Gebietsinvarianz wurde bewiesen (eine intrinsische Beschreibung der Randpunkte eines Halbraums in $\mathbb{R}^n$). Ersetzt man $\mathbb{R}^n$ durch einen unendlich-dimensionalen Banachraum oder Fréchetraum E, kann es übrigens nichts Entsprechendes geben, denn jede abgeschlossene konvexe Teilmenge $A \subseteq E$ mit nicht-leerem Inneren ist zu E homöomorph.[3]

Die als separates pdf-File ausgelagerten Übungsaufgaben sind ein integraler Bestandteil des Skripts.

[2] Eine Ausnahme bildet die nur oberflächliche Diskussion geschlossener Flächen.

[3] Siehe Theorem 62 in Kapitel VI von C. Bessaga und A. Pełczyński, "Selected Topics in Infinite-Dimensional Topology," PWN, Warschau, 1975.

1 Topologische Grundlagen

Dieses Kapitel ist Grundlagen der mengentheoretischen Topologie gewidmet, die für die algebraische Topologie von Nutzen sind. Das Kapitel umfasst alles, was wir benötigen werden.

Topologische Räume und stetige Funktionen

Definition 1.1 Es sei X eine Menge. Eine Menge $\mathcal{O}$ von Teilmengen $V \subseteq X$ wird eine *Topologie* auf X genannt, wenn gilt:

(O1) Es gilt $\emptyset \in \mathcal{O}$ und $X \in \mathcal{O}$.

(O2) Für jede Familie $(V_j)_{j \in J}$ von Mengen $V_j \in \mathcal{O}$ gilt $\bigcup_{j \in J} V_j \in \mathcal{O}$.

(O3) Für alle $V, W \in \mathcal{O}$ ist $V \cap W \in \mathcal{O}$.

Man nennt dann $(X, \mathcal{O})$ einen *topologischen Raum*; die Mengen $V \in \mathcal{O}$ werden *offene* Teilmengen von X genannt. Gegeben $x \in X$ nennt man eine Teilmenge $V \subseteq X$ eine *offene Umgebung* von x in X, wenn V offen ist und $x \in V$. Eine Teilmenge von X wird *Umgebung* von x genannt, wenn sie eine offene x-Umgebung enthält. Eine Teilmenge $A \subseteq X$ wird *abgeschlossen* genannt, wenn ihr Komplement $X \setminus A$ offen ist. Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{O})$ wird *Hausdorffsch* genannt, wenn für je zwei Punkte in X disjunkte Umgebungen existieren, d.h. für alle $x, y \in X$ mit $x \neq y$ existiert eine x-Umgebung U und eine y-Umgebung V mit $U \cap V = \emptyset$.

Definition 1.2 Eine Funktion $f \colon X \to Y$ zwischen topologischen Räumen wird *stetig* genannt, wenn $f^{-1}(V)$ in X offen ist für jede offene Teilmenge V von Y.

Genau dann ist f stetig, wenn $f^{-1}(A)$ in X abgeschlossen ist für jede abgeschlossene Teilmenge A von Y.

Lemma 1.3 *Sind $f \colon X \to Y$ und $g \colon Y \to Z$ stetige Abbildungen zwischen topologischen Räumen, so ist auch die Komposition*

$$g \circ f \colon X \to Z, \quad x \mapsto g(f(x))$$

stetig.

Induzierte Topologie

Definition 1.4 Ist $(X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum und $Y \subseteq X$ eine Teilmenge, so ist

$$\mathcal{O}_Y := \{Y \cap V : V \in \mathcal{O}\}$$

eine Topologie auf Y. Man nennt diese die von X auf Y *induzierte Topologie*. Wenn nicht anderes gesagt wird, versehen wir Y immer mit der induzierten Topologie $\mathcal{O}_Y$. Die Mengen $W \in \mathcal{O}_Y$ werden *relativ offene* Mengen genannt oder kurz: *offen in* Y. Die abgeschlossenen Teilmengen des topologischen Raums $(Y, \mathcal{O}_Y)$ werden *relativ abgeschlossen* genannt oder kurz: *abgeschlossen in* Y.

Bemerkung 1.5 Per Definition ist eine Teilmenge $W \subseteq Y$ genau dann relativ offen, wenn $W = Y \cap V$ für eine offene Teilmenge $V \subseteq X$. Man kann zeigen, dass eine Teilmenge $A \subseteq Y$ genau dann relativ abgeschlossen ist, wenn $A = Y \cap B$ für eine abgeschlossene Teilmenge B von X (Übung).

Lemma 1.6 *Es sei X ein topologischer Raum und $Y \subseteq X$ eine Teilmenge, versehen mit der induzierten Topologie. Dann gilt:*

(a) *Die Inklusion $i: Y \to X$, $y \mapsto y$ ist stetig.*

(b) *Ist $f: X \to Z$ eine stetige Funktion in einen topologischen Raum Z, so ist auch die Einschränkung $f|_Y: Y \to Z$, $y \mapsto f(y)$ stetig.*

(c) *Ist Z ein topologischer Raum und $f: Z \to X$ eine Funktion mit Bild $f(Z) \subseteq Y$, so ist f genau dann stetig, wenn die Ko-Einschränkung*

$$f|^Y: Z \to Y, \quad z \mapsto f(z)$$

stetig ist.

Lemma 1.7 (*Klebelemma*) *Es seien X und Y topologische Räume und $f: X \to Y$ eine Abbildung. Sind A_1 und A_2 abgeschlossene Teilmengen von X mit $X = A_1 \cup A_2$ und sind die Einschränkungen $f|_{A_1}: A_1 \to Y$ und $f|_{A_2}: A_2 \to Y$ stetig bezüglich der jeweiligen induzierten Topologie, so ist f stetig.*

Produkttopologie

Definition 1.8 Sind $(X_1, \mathcal{O}_1)$ und $(X_2, \mathcal{O}_2)$ topologische Räume, so ist

$$\mathcal{O} := \{V \subseteq X_1 \times X_2 \colon (\forall x \in V)(\exists V_1 \in \mathcal{O}_1)(\exists V_2 \in \mathcal{O}_2)\; x \in V_1 \times V_2 \subseteq V\}$$

eine Topologie auf dem kartesischen Produkt $X_1 \times X_2$. Man nennt $\mathcal{O}$ die *Produkttopologie* auf $X_1 \times X_2$. Wir versehen $X_1 \times X_2$ stets mit dieser Topologie, wenn nichts anderes gesagt wird. Für alle $W_1 \in \mathcal{O}_1$ und $W_2 \in \mathcal{O}_2$ ist die Menge $W_1 \times W_2$ in $\mathcal{O}$; solche Mengen $W_1 \times W_2$ nennt man auch *offene Kästchen.*

Lemma 1.9 *Es seien $(X_1, \mathcal{O}_1)$ und $(X_2, \mathcal{O}_2)$ topologischer Räume. Versehen wir $X_1 \times X_2$ mit der Produkttopologie, so gilt:*

(a) *Die Projektion $\mathrm{pr}_1 \colon X_1 \times X_2 \to X_1$, $(x_1, x_2) \mapsto x_1$ ist stetig und auch die Projektion $\mathrm{pr}_2 \colon X_1 \times X_2 \to X_2$, $(x_1, x_2) \mapsto x_2$.*

(b) *Für jeden topologischen Raum Y ist eine Abbildung*

$$f = (f_1, f_2) \colon Y \to X_1 \times X_2, \quad y \mapsto (f_1(y), f_2(y))$$

genau dann stetig, wenn beide der Komponenten $f_1 \colon Y \to X_1$ und $f_2 \colon Y \to X_2$ stetige Funktionen sind.

(c) *Für alle $x_1 \in X_1$ ist die Funktion $X_2 \to X_1 \times X_2$, $x_2 \mapsto (x_1, x_2)$ stetig. Entsprechend mit vertauschten Rollen von X_1 und X_2.*

Die folgende oft benutzte Tatsache wird in der Übung bewiesen.

Lemma 1.10 *Es seien $(X_1, \mathcal{O}_1)$ und $(X_2, \mathcal{O}_2)$ topologische Räume und $\mathcal{O}$ die Produkttopologie auf $X := X_1 \times X_2$. Gegeben Teilmengen $Y_1 \subseteq X_1$ und $Y_2 \subseteq X_2$ sei $Y := Y_1 \times Y_2$ und $\mathcal{O}_Y$ die von $(X, \mathcal{O})$ auf Y induzierte Topologie. Schreiben wir $(\mathcal{O}_j)_{Y_j}$ für die von X_j auf Y_j induzierte Topologie für $j \in \{1, 2\}$, so können wir Y auch mit der Produkttopologie $\mathcal{T}$ versehen, als Produkt von $(Y_1, (\mathcal{O}_1)_{Y_1})$ und $(Y_2, (\mathcal{O}_2)_{Y_2})$. Dann gilt $\mathcal{O}_Y = \mathcal{T}$.*

Homöomorphismen, topologische Einbettungen, offene und abgeschlossene Abbildungen

Definition 1.11 Es seien X und Y topologische Räume und $f\colon X \to Y$ eine Abbildung.

(a) Ist f bijektiv und sind f sowie die Umkehrfunktion $f^{-1}\colon Y \to X$ stetig, so nennt man f einen *Homöomorphismus*.

(b) Ist $f(U)$ offen in Y für jede offene Teilmenge $U \subseteq X$, so wird f eine *offene Abbildung* genannt.

(c) Ist $f(A)$ abgeschlossen in Y für jede abgeschlossene Teilmenge $A \subseteq X$, so wird f eine *abgeschlossene Abbildung* genannt.

(d) Ist die Ko-Einschränkung $f|^{f(X)}\colon X \to f(X)$, $x \mapsto f(x)$ ein Homöomorphismus, so nennt man f eine *topologische Einbettung* (oder auch: einen Homöomorphismus auf das Bild).

Zwei topologische Räume X und Y werden *homöomorph* genannt (und man schreibt $X \sim Y$), wenn ein Homöomorphismus $f\colon X \to Y$ existiert.

Homöomorph zu sein ist eine Äquivalenzrelation auf der Klasse der topologischen Räume.

Bemerkung 1.12 Für die Zwecke der Topologie sehen zueinander homöomorphe topologische Räume X und Y "gleich aus." Alles, was wir (nur unter Benutzung offener und abgeschlossener Teilmengen) für X zeigen können, gilt auch für Y und umgekehrt.

Beispiel 1.13 Für alle topologischen Räume X_1 und X_2 sind für $j \in \{1, 2\}$ die Projektionen

$$\mathrm{pr}_j\colon X_1 \times X_2 \to X_j, \quad (x_1, x_2) \mapsto x_j$$

offene Abbildungen.

Inneres, Abschluss und Rand einer Teilmenge

Für Teilmengen von $\mathbb{R}^n$ (oder Teilmengen metrischer Räume) sind Ihnen die folgenden Begriffe aus der Analysis 2 bekannt.

Definition 1.14 Es sei $(X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum und $M \subseteq X$.

(a) Das *Innere* M^0 von M ist definiert als die Vereinigung

$$M^0 := \bigcup_{\substack{V \in \mathcal{O}: \\ V \subseteq M}} V$$

aller in M enthaltenen offenen Teilmengen von M.

(b) Der *Abschluss* $\overline{M}$ von M ist definiert als der Durchschnitt

$$\overline{M} := \bigcap_{\substack{A \subseteq X \text{ abg.}: \\ M \subseteq A}} A$$

aller M enthaltenden abgeschlossenen Teilmengen von M.

(c) Der *Rand* ∂M von M ist definiert als

$$\partial M \; := \; \overline{M} \setminus M^0 .$$

Bemerkung 1.15 (a) Als Vereinigung offener Mengen ist M^0 offen; es ist M^0 die größte in M enthaltene offene Teilmenge von X.

(b) Als Durchschnitt abgeschlossener Mengen ist $\overline{M}$ abgeschlossen; es ist $\overline{M}$ die kleinste M enthaltende abgeschlossene Teilmenge von X.

(c) $\partial M = \overline{M} \setminus M^0 = \overline{M} \cap (X \setminus M^0)$ ist abgeschlossen.

Folgende Charakterisierungen beweist man wie im $\mathbb{R}^n$; wir überspringen sie.

Lemma 1.16 *Es sei X ein topologischer Raum, $M \subseteq X$ eine Teilmenge und $x \in X$. Dann gilt:*

(a) *Genau dann ist $x \in M^0$, wenn M eine Umgebung von x ist.*

(b) *Genau dann ist $x \in \overline{M}$, wenn $M \cap V \neq \emptyset$ für jede Umgebung V von x in X.*

(c) *Genau dann ist $x \in \partial M$, wenn $M \cap V \neq \emptyset$ und $(X \setminus M) \cap V \neq \emptyset$ für jede Umgebung V von x in X.*

Beweis. (a) Ist $x \in M^0$, so ist die offene Menge M^0 und somit $M \supseteq M^0$ eine x-Umgebung. Ist M eine x-Umgebung, so existiert eine offene x-Umgebung V in X mit $V \subseteq M$. Dann ist $V \subseteq M^0$, also M^0 eine x-Umgebung.

(b) Ist nicht $x \in \overline{M}$, so ist $x \in X \setminus \overline{M}$, also $V := X \setminus \overline{M}$ eine offene x-Umgebung mit $V \cap M \subseteq V \cap \overline{M} = \emptyset$. Umgekehrt: Gibt es eine x-Umgebung V mit $M \cap V = \emptyset$, so sei $W \subseteq X$ eine offene x-Umgebung mit $W \subseteq V$. Dann ist $M \cap W = \emptyset$, also M in der abgeschlossenen Menge $X \setminus W$ enthalten und folglich $\overline{M} \subseteq X \setminus W$. Da $x \in W$, folgt $x \notin \overline{M}$.

(c) Ist $x \in \partial M$, so ist $x \in \overline{M}$. Nach (b) ist für jede x-Umgebung V also $V \cap M \neq \emptyset$. Da $x \notin M^0$, kann nach (a) nicht $V \subseteq M$ sein, es gilt also $V \cap (X \setminus M) \neq \emptyset$. Gilt für jede x-Umgebung V sowohl $V \cap M \neq \emptyset$ und $V \cap (X \setminus M) \neq \emptyset$, so ist $x \in \overline{M}$ nach (b) und es ist kein V in M enthalten, also $x \notin M^0$ nach (a). Folglich ist $x \in \overline{M} \setminus M^0 = \partial M$. □

Kompakte topologische Räume

Definition 1.17 Es sei X ein topologischer Raum. Eine Familie $(V_j)_{j \in J}$ von Teilmengen $V_j \subseteq X$ wird *offene Überdeckung* von X genannt, wenn jedes V_j eine offene Teilmenge von X ist und $X = \bigcup_{j \in J} V_j$.

Definition 1.18 Ein topologischer Raum K heißt *kompakt*, wenn für jede offene Überdeckung $(V_j)_{j \in J}$ von K eine endliche Teilüberdeckung existiert, d.h. es existiert eine endliche Teilmenge $\Phi \subseteq J$ derart, dass $X = \bigcup_{j \in \Phi} V_j$.

Bemerkung 1.19 Wir folgen hier dem englischen Sprachgebrauch. In Frankreich und Deutschland wird ein topologischer Raum wie in Definition 1.18 üblicherweise *quasikompakt* genannt; nur *Hausdorffsche* quasikompakte topologische Räume werden kompakt genannt. Davon abweichend arbeiten wir mit Definition 1.18 und setzen die Hausdorff-Eigenschaft nicht voraus. Wird die Hausdorff-Eigenschaft verlangt, wird dies explizit gesagt.

Definition 1.20 Es sei X ein topologischer Raum und $K \subseteq X$ eine Teilmenge. Eine Familie $(W_j)_{j \in J}$ von Teilmengen $W_j \subseteq X$ wird eine *offene Überdeckung von K in X* genannt, wenn jedes W_j offen in X ist und $K \subseteq \bigcup_{j \in J} W_j$.

Lemma 1.21 *Es sei X ein topologischer Raum und $K \subseteq X$ eine Teilmenge. Dann sind äquivalent:*

(a) *K ist kompakt in der von X induzierten Topologie.*

(b) *Jede offene Überdeckung $(W_j)_{j\in J}$ von K in X hat eine endliche Teilüberdeckung, d.h. es existiert eine endliche Teilmenge $\Phi \subseteq J$ derart, dass $K \subseteq \bigcup_{j\in\Phi} W_j$.*

Der folgende Satz sammelt wichtige elementare Fakten.

Satz 1.22 *Ist K ein kompakter topologischer Raum, so gilt:*

(a) *Ist $f\colon K \to Y$ eine stetige Abbildung in einen topologischen Raum Y, so ist $f(K)$ kompakt in der von Y induzierten Topologie.* (*Kurz: Stetige Bilder kompakter Räume sind kompakt*).

(b) *Jede abgeschlossene Teilmenge $A \subseteq K$ ist kompakt.*

(c) *Ist K eine Teilmenge eines Hausdorffschen topologischen Raums X, die in der induzierten Topologie kompakt ist, so ist K abgeschlossen in X.*

Satz 1.23 *Es sei $f\colon K \to Y$ eine stetige Abbildung von einem kompakten topologischen Raum K in einen Hausdorffschen topologischen Raum Y. Dann ist f eine abgeschlossene Abbildung.*

Folgerung 1.24 *Es sei $f\colon K \to Y$ eine bijektive stetige Abbildung von einem kompakten topologischen Raum K in einen Hausdorffschen topologischen Raum Y. Dann ist $f^{-1}\colon Y \to X$ stetig, also f ein Homöomorphismus.*

Folgerung 1.25 *Es sei $f\colon K \to Y$ eine injektive stetige Abbildung von einem kompakten topologischen Raum K in einen Hausdorffschen topologischen Raum Y. Dann ist f eine topologische Einbettung.*

Definition 1.26 Im Folgenden bezeichne $\|\cdot\|_2$ die euklidische Norm auf $\mathbb{R}^n$,

$$\|x\|_2 := \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$$

für $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Man nennt

$$\mathbb{S}_{n-1} := \{x \in \mathbb{R}^n \colon \|x\|_2 = 1\}$$

die $(n-1)$-Sphäre. Wir schreiben

$$\mathbb{D}_n := \{x \in \mathbb{R}^n \colon \|x\|_2 \leq 1\}$$

für die abgeschlossene Einheitskugel in $\mathbb{R}^n$ bezüglich der euklidischen Norm.

Beispiel 1.27 Ist $K \subseteq \mathbb{R}^n$ eine kompakte Teilmenge mit nicht-leerem Inneren $K^0 \neq \emptyset$, so ist der Rand ∂K von K homöomorph zur $(n-1)$-Sphäre,

$$\partial K \sim \mathbb{S}_{n-1}.$$

Ist $0 \in K^9$, so ist

$$h \colon \partial K \to \mathbb{S}_{n-1}, \qquad x \mapsto \frac{1}{\|x\|_2} x$$

ein Homöomorphismus.

Wir erwähnen ein weiteres Resultat über kompakte topologische Räume, das Lemma von Wallace (auch Satz von Wallace genannt); in der Vorlesung überspringen wir es zunächst.

Lemma 1.28 *Es seien X_1 und X_2 topologische Räume und $K_1 \subseteq X_1$ sowie $K_2 \subseteq X_2$ kompakte Teilmengen. Ist $V \subseteq X_1 \times X_2$ offen in der Produkttopologie und $K \subseteq V$, so gibt es offene Teilmengen $V_1 \subseteq X_1$ und $V_2 \subseteq X_2$ derart, dass*

$$K_1 \subseteq V_1, \quad K_2 \subseteq V_2 \quad \textit{und} \quad V_1 \times V_2 \subseteq V.$$

Beweis. Die Aussage ist trivial, wenn $K_1 = \emptyset$ oder $K_2 = \emptyset$. Seien nun K_1 und K_2 nicht leer. Da V in $X_1 \times X_2$ mit der Produkttopologie offen ist, gibt es zu $x \in K_1$ und $y \in K_2$ eine offene x-Umgebung $P_{x,y}$ und eine offene y-Umgebung $Q_{x,y}$ derart, dass

$$P_{x,y} \times Q_{x,y} \subseteq V.$$

Für festes x ist $(Q_{x,y})_{y \in K_2}$ eine offene Überdeckung von K_2; es existiert also eine endliche Teilmenge $\Psi(x) \subseteq K_2$ derart, dass

$$K_2 \subseteq \bigcup_{y \in \Psi(x)} Q_{x,y} \;=:\; Q_x\,.$$

Dann ist $\Psi(x) \neq \emptyset$ und es ist

$$P_x := \bigcap_{y \in \Psi(x)} P_{x,y}$$

eine offene x-Umgebung. Da K_1 kompakt ist, gibt es eine endliche Teilmenge $\Phi \subseteq K_1$ mit

$$K_1 \subseteq \bigcup_{x\in\Phi} P_x \;=:\; P\,.$$

Dann ist $\Phi \neq \emptyset$ und $Q := \bigcap_{x\in\Phi} Q_x$ eine offene Teilmenge von X_2 mit $K_2 \subseteq Q$. Per Konstruktion ist

$$\begin{aligned} P \times Q &= \bigcup_{x\in\Phi}(P_x \times Q) \subseteq \bigcup_{x\in\Phi}(P_x \times Q_x) = \bigcup_{x\in\Phi}\bigcup_{y\in\Psi(x)}(P_x \times Q_{x,y}) \\ &\subseteq \bigcup_{x\in\Phi}\bigcup_{y\in\Psi(x)}(P_{x,y} \times Q_{x,y}) \subseteq V. \end{aligned}$$

□

Wir benötigen auch einen Spezialfall des Satzes von Tychonoff.

Satz 1.29 *Sind K_1 und K_2 kompakte topologische Räume, so ist $K_1 \times K_2$ kompakt bezüglich der Produkttopologie.*

Beweis. Die Aussage ist trivial, wenn $K_1 = \emptyset$ oder $K_2 = \emptyset$. Seien nun K_1 und K_2 nicht leer. Ist $(V_j)_{j\in J}$ eine offene Überdeckung von $K_1 \times K_2$, so gibt es für alle $(x, y) \in K_1 \times K_2$ ein $j(x, y) \in J$ mit $(x, y) \in V_{j(x,y)}$. Per Definition der Produkttopologie gibt es eine offene x-Umgebung $P_{x,y} \subseteq K_1$ und eine offene y-Umgebung $Q_{x,y} \subseteq K_2$ derart, dass

$$P_{x,y} \times Q_{x,y} \subseteq V_{j(x,y)}\,.$$

Für festes $x \in K_2$ ist $(Q_{x,y})_{y\in K_2}$ eine offene Überdeckung von K_2. Da K_2 kompakt ist, gibt es also eine endliche Teilmenge $\Psi(x) \subseteq K_2$ derart, dass

$$K_2 = \bigcup_{y\in\Psi(x)} Q_{x,y}\,.$$

Dann ist $P_x := \bigcap_{y\in\Psi(x)} P_{x,y}$ eine offene x-Umgebung in K_1, also $(P_x)_{x\in K_2}$ eine offene Überdeckung von K_1. Da K_1 kompakt ist, gibt es eine endliche Teilmenge $\Phi \subseteq K_1$ mit

$$K_1 = \bigcup_{x\in\Phi} P_x\,.$$

Dann bilden die Mengen $V_{j(x,y)}$ mit $x \in \Phi$ und $y \in \Psi(x)$ eine endliche Teilüberdeckung von $(V_j)_{j\in J}$; es ist nämlich

$$\begin{aligned} K_1 \times K_2 &= \bigcup_{x\in\Phi}(P_x \times K_2) = \bigcup_{x\in\Phi}\bigcup_{y\in\Psi(x)}(P_x \times Q_{x,y}) \\ &\subseteq \bigcup_{x\in\Phi}\bigcup_{y\in\Psi(x)}(P_{x,y} \times Q_{x,y}) \subseteq \bigcup_{x\in\Phi}\bigcup_{y\in\Psi(x)} V_{j(x,y)}\,. \end{aligned}$$

Also ist $K_1 \times K_2$ kompakt. □

Aus Lemma 1.21 folgt sofort:

Lemma 1.30 *Es sei X ein topologischer Raum. Sind $K_1, \ldots, K_n$ endlich viele kompakte Teilmengen von X, so ist auch $K_1 \cup \cdots \cup K_n$ kompakt.*

Lokal kompakte Räume

Definition 1.31 Ein topologischer Raum X heißt *lokal kompakt*, wenn für jedes $x \in X$ jede x-Umgebung eine kompakte x-Umgebung enthält.

Satz 1.32 *Jeder Hausdorffsche, kompakte topologische Raum K ist lokal kompakt.*

Daraus folgert man (siehe Übung): *Ein Hausdorffraum X ist genau dann lokal kompakt, wenn jeder Punkt eine kompakte Umgebung besitzt.*

Aus 1.30 folgt sofort:

Lemma 1.33 *Ist X ein lokal kompakter topologischer Raum, $K \subseteq X$ eine kompakte Teilmenge und $U \subseteq X$ eine offene Teilmenge mit $K \subseteq U$, so gibt es eine kompakte Teilmenge $L \subseteq U$ derart, dass $K \subseteq L^0$ gilt für das Innere L^0 von L in X.*

Also ist $K \subseteq L^0 \subseteq L \subseteq U$.

Definition 1.34 Ein topologischer Raum X heißt σ-kompakt, wenn er eine abzählbare Vereinigung kompakter Teilmengen ist.

Es existiert also eine Folge $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von kompakten Teilmengen $K_n \subseteq X$ derart, dass $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n$.

Lemma 1.35 *Ist X ein σ-kompakter, lokal kompakter topologischer Raum, so existiert eine Folge $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von kompakten Teilmengen $K_n \subseteq X$ derart, dass $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n$ und*

$$K_n \subseteq K_{n+1}^0 \quad \textit{für alle } n \in \mathbb{N},$$

wobei K_n^0 das Innere von K_n in X ist.

Eine Folge $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wie in Lemma 1.35 nennt man eine *kompakte Ausschöpfung* von X. Zum Beispiel bilden die Intervalle $[-n, n]$ für $n \in \mathbb{N}$ eine kompakte Ausschöpfung von $\mathbb{R}$.

Bemerkung 1.36 Die Schlussfolgerung von Lemma 1.35 bleibt gültig, wenn X ein σ-kompakter topologischer Raum ist, in dem jeder Punkt eine kompakte Umgebung besitzt.

Quotientenabbildungen

Definition 1.37 Es sei $(X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum, Y eine Menge und $q\colon X \to Y$ eine surjektive Abbildung. Dann ist

$$\mathcal{T} := \{V \subseteq Y : q^{-1}(V) \in \mathcal{O}\}$$

eine Topologie auf Y. Man nennt $\mathcal{T}$ die *Quotiententopologie.*

Beispiel 1.38 Ist X eine Menge und $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf X. Wir schreiben $[x]$ für die Äquivalenzklasse von $x \in X$ und

$$X/\!\sim\; := \{[x] \colon x \in X\}$$

für die Menge aller Äquivalenzklassen. Wir können dann $X/\!\sim$ versehen mit der Quotiententopologie bezüglich der kanonischen Abbildung

$$q\colon X \to X/\!\sim, \quad x \mapsto [x].$$

Diese macht q zu einer Quotientenabbildung im folgenden Sinn.

Definition 1.39 Es seien $(X, \mathcal{O})$ und $(Y, \mathcal{T})$ topologische Räume. Eine Abbildung $q\colon X \to Y$ wird *Quotientenabbildung* genannt, wenn q surjektiv ist und $\mathcal{T}$ die Quotiententopologie ist.

Jede Quotientenabbildung $q\colon X \to Y$ ist stetig, denn für alle offenen Teilmengen $V \subseteq Y$ ist $q^{-1}(V) \in \mathcal{O}$ per Definition der Quotiententopologie.

Lemma 1.40 *Für eine surjektive Abbildung $q\colon X \to Y$ zwischen topologischen Räumen sind äquivalent:*

(a) *q ist eine Quotientenabbildung.*

(b) *Für jede Teilmenge $V \subseteq Y$ gilt: V ist genau dann offen in Y, wenn $q^{-1}(V)$ in X offen ist.*

(c) *Für jede Teilmenge $A \subseteq Y$ gilt: A ist genau dann abgeschlossen in Y, wenn $q^{-1}(A)$ in X abgeschlossen ist.*

Satz 1.41 *Es sei $q\colon X \to Y$ eine Quotientenabbildung zwischen topologischen Räumen. Für eine Abbildung $f\colon Y \to Z$ in einen topologischen Raum Z sind äquivalent:*

(a) *f ist stetig;*

(b) *$f \circ q\colon X \to Z$ ist stetig.*

Satz 1.42 *Es sei $q\colon X \to Y$ eine surjektive, stetige Abbildung zwischen topologischen Räumen. Ist q eine offene Abbildung oder eine abgeschlossene Abbildung, so ist q eine Quotientenabbildung.*

Folgerung 1.43 *Ist K ein kompakter topologischer Raum, Y ein Hausdorffscher topologischer Raum und $q\colon K \to Y$ eine surjektive, stetige Abbildung. Dann ist q eine Quotientenabbildung.*

Beispiel 1.44 Für $x, y \in [0,1]$ schreiben wir $x \sim y$, wenn $x = y$ oder $\{x, y\} = \{0, 1\}$. Dannn ist $[0,1]/\sim$ homöomorph zu $\mathbb{S}_1$; die Abbildung

$$[0,1]/\sim \to \mathbb{S}_1, \qquad [x] \mapsto (\cos(2\pi x), \sin(2\pi x))$$

ist ein Homöomorphismus.[4] Weiter ist $[0,1] \to \mathbb{S}_1$. $x \mapsto \sin(2\pi x)$ eine Quotientenabbildung.[5]

[4] Das sieht man am einfachsten mit Folgerung 1.24.
[5] Das sieht man am einfachsten mit Folgerung 1.43.

Beispiel 1.45 Für $x := (s_1, t_1)$ und $y := (s_2, t_2)$ in $[0,1]^2$ schreiben wir $x \sim y$, wenn $x = y$ oder $s_1 = s_2 = 0$. Dann ist $[0,1]^2/\sim$ homöomorph zum Dreieck Δ aller $(s,t) \in \mathbb{R}^2$ mit $s \in [0,1]$ und $0 \leq t \leq s$. Die Abbildung

$$[0,1]^2/\sim \to \Delta, \quad (s,t) \mapsto (s, st)$$

ist ein Homöomorphismus. Weiter ist

$$[0,1]^2 \to \Delta, \quad (s,t) \mapsto (s, st)$$

eine Quotientenabbildung.

Beispiel 1.46 Ist $K \subseteq \mathbb{R}^n$ eine kompakte konvexe Teilmenge mit nichtleerem Inneren K^0, so ist $K \sim \mathbb{D}_n$. Im Falle $0 \in K^0$ ist nach Beispiel 1.27

$$h\colon \partial K \to \mathbb{S}_{n-1}, \qquad x \mapsto \frac{1}{\|x\|_2} x$$

ein Homöomorphismus. Weiter ist

$$q\colon [0,1] \times \partial K \to K, \quad (t,x) \mapsto tx$$

eine Quotientenabbildung. Die Abbildung

$$g\colon K \to \mathbb{D}_n, \qquad tx \mapsto th(x) \quad \text{für } x \in \partial K \text{ und } t \in [0,1]$$

ist ein Homöomorphismus mit $g(\partial K) = \partial\mathbb{D}_n = \mathbb{S}_{n-1}$.

Beispiel 1.47 Für $x, y \in \mathbb{D}_n$ mit $n \in \mathbb{N}$ schreiben wir $x \sim y$ wenn $x = y$ oder $x, y \in \mathbb{S}_{n-1} = \partial\mathbb{D}_n$ (als Teilmenge von $\mathbb{R}^n$). Dann ist $\mathbb{D}_n/\sim$ homöomorph zu $\mathbb{S}_n$. Die Abbildung $h\colon \mathbb{D}_n/\sim \to \mathbb{S}_n \subseteq \mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ mit $[0] \mapsto 0$,

$$[x] \mapsto \left(\frac{\sin(\pi\|x\|_2)}{\|x\|_2} x, \cos(\pi\|x\|_2)\right) \quad \text{wenn } x \neq 0$$

ist ein Homöomorphismus.

Beispiel 1.48 Für $x, y \in [0,1]^n$ mit $n \in \mathbb{N}$ schreiben wir $x \sim y$ wenn $x = y$ oder $x, y \in \partial([0,1]^n)$ mit dem Rand als Teilmenge von $\mathbb{R}^n$. Dann ist $[0,1]^n/\sim$ homöomorph zu $\mathbb{S}_n$.

Wir werden später Situationen kennenlernen, in denen Quotiententopologien Hausdorffsch sind. Mengen der folgenden Art nutzen mitunter beim Beweis der Hausdorffeigenschaft.

Definition 1.49 Ist $q\colon X \to Y$ eine surjektive Abbildung, so nennen wir eine Teilmenge $M \subseteq X$ *saturiert*, wenn $M = q^{-1}(q(M))$.

Bemerkung 1.50 (a) Damit M saturiert ist, muss für alle $x \in M$ und alle $y \in X$ mit $q(x) = q(y)$ also $y \in M$ sein.

(b) Ist $Y = X/\sim$ für eine Äquivalenzrelation und q die kanonische Abbildung, so muss also $y \in M$ sein für alle $x \in M$ und alle $y \in X$ mit $y \sim x$.

Lemma 1.51 *Es sei $q\colon X \to Y$ eine Quotientenabbildung zwischen topologischen Räumen. Dann gilt:*

(a) *Ist $U \subseteq X$ offen und saturiert, so ist $q(U)$ offen in Y.*

(b) *Ist $A \subseteq X$ abgeschlossen und saturiert, so ist $q(A)$ abgeschlossen in Y.*

Satz 1.52 (Homomorphiesatz) *Es sei $q\colon X \to Y$ eine Quotientenabbildung zwischen topologischen Räumen und $f\colon X \to Z$ eine stetige Abbildung in einen topologischen Raum Z. Folgt für alle $x_1, x_2 \in X$ aus $q(x_1) = q(x_2)$, dass $f(x_1) = f(x_2)$, so gibt es genau eine Abbildung*

$$\overline{f}\colon Y \to Z$$

derart, dass $\overline{f} \circ q = f$; diese ist stetig. Ist f eine Quotientenabbildung und $q(x_1) = q(x_2)$ zu $f(x_1) = f(x_2)$ äquivalent, so ist $\overline{f}$ ein Homöomorphismus.

Ist $q\colon X \to Y$ und $M \subseteq X$ eine Teilmenge, so hätte man gern Kriterien dafür, dass auch $q|_M^{q(M)}\colon M \to q(M)$ eine Quotientenabbildung ist. Ist M kompakt und Y Hausdorffsch, gilt dies wegen Folgerung 1.43. Weitere Kriterien sind bekannt, wenn M saturiert ist. Wir halten diese für die Allgemeinbildung fest, überspringen sie aber in der Vorlesung.

Satz 1.53 (*Einschränken auf saturierte Teilmengen*). *Es sei $q\colon X \to Y$ eine surjektive, stetige Abbildung zwischen topologischen Räumen und $M \subseteq X$ eine saturierte Teilmenge.*

(a) *Ist q eine offene Abbildung, so ist auch $q|_M^{q(M)}\colon M \to q(M)$ eine offene Abbildung und somit eine Quotientenabbildung.*

(b) *Ist q eine abgeschlossene Abbildung, so ist auch $q|_M^{q(M)}\colon M \to q(M)$ eine abgeschlossene Abbildung und somit eine Quotientenabbildung.*

(c) *Ist M offen oder abgeschlossen in X und ist q eine Quotientenabbildung, so ist $q|_M^{q(M)}\colon M \to q(M)$ eine Quotientenabbildung.*

Beweis. Sei $p := q|_M^{q(M)}$.

(a) Sei $W \subseteq M$ eine relativ offene Menge. Zu zeigen ist, dass $p(W)$ relativ offen in $p(M) = q(M)$ ist. Es ist $W = M \cap V$ mit einer offenen Menge $V \subseteq X$. Da q eine offene Abbildung ist, ist $q(V)$ offen in Y. Wir zeigen, dass

$$q(W) = q(M) \cap q(V);$$

dann ist $q(W)$ also relativ offen in $q(M)$. Die Inklusion $q(W) \subseteq q(M) \cap q(V)$ ist trivial, da $W \subseteq M$ und $W \subseteq V$. Ist nun $q(v) \in q(M)$ für ein $v \in V$, so ist $v \in q^{-1}(q(M)) = M$, da M saturiert ist, also $v \in M \cap V = W$.

(b) Im Beweis von (a) ersetze man offene durch abgeschlossene Mengen und relativ offene durch relativ abgeschlossene Mengen.

(c) Wir betrachten zunächst den Fall, dass M offen in X ist. Da $p := q|_M^{q(M)}$ stetig ist, brauchen wir nach Lemma 1.40 (b) nur für jede Teilmenge $U \subseteq q(M)$ zu zeigen: Ist $p^{-1}(U)$ offen in M, so ist U offen in $q(M)$. Da M in X offen ist, ist die relativ offene Menge $p^{-1}(U)$ auch in X offen. Da $U \subseteq q(M)$ und M bezüglich q saturiert ist, ist $p^{-1}(U) = q^{-1}(U)$ bezüglich q saturiert. Also ist $U = p(p^{-1}(U)) = q(q^{-1}(U))$ offen in Y und somit auch offen in $q(M)$. Der Fall, dass M in X abgeschlossen ist, lässt sich wegen Lemma 1.40 (c) analog behandeln (man ersetze offene durch abgeschlossene Mengen). □

Finale Topologien

Definition 1.54 Es sei Y eine Menge und $(f_j)_{j\in J}$ eine Familie von Abbildungen $f_j\colon X_j \to Y$ mit topologischen Räumen $(X_j, \mathcal{O}_j)$. Dann ist

$$\mathcal{O} := \{V \subseteq Y\colon (\forall j \in J)\ f_j^{-1}(V) \in \mathcal{O}_j\}$$

eine Topologie auf Y. Man nennt $\mathcal{O}$ die *finale Topologie* auf Y bezüglich der Familie $(f_j)_{j\in J}$.

Per Definition macht die finale Topologie jede der Abbildungen f_j stetig.

Lemma 1.55 *Es sei $(Y, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum und $(f_j)_{j\in J}$ eine Familie von Abbildungen $f_j \colon X_j \to Y$ mit topologischen Räumen $(X_j, \mathcal{O}_j)$. Dann sind äquivalent:*

(a) *$\mathcal{T}$ ist die finale Topologie auf Y bezüglich der Familie $(f_j)_{j\in J}$.*

(b) *Für jede Teilmenge $V \subseteq Y$ gilt: V ist genau dann offen in Y, wenn für jedes $j \in J$ das Urbild $f_j^{-1}(V)$ in X_j offen ist.*

(c) *Für jede Teilmenge $A \subseteq Y$ gilt: A ist genau dann abgeschlossen in Y, wenn für jedes $j \in J$ das Urbild $f_j^{-1}(A)$ in X_j abgeschlossen ist.*

Satz 1.56 *Es sei Y ein topologischer Raum, dessen Topologie $\mathcal{O}$ final ist bezüglich einer Familie $(f_j)_{j\in J}$ von Abbildungen $f_j \colon X_j \to Y$ mit topologischen Räumen X_j. Für jeden topologischen Raum Z und jede Abbildung $f \colon Y \to Z$ sind dann äquivalent:*

(a) *f ist stetig;*

(b) *Für jedes $j \in J$ ist die Abbildung $f \circ f_j \colon X_j \to Z$ stetig.*

Beispiel 1.57 Ist X ein topologischer Raum und $q \colon X \to Y$ eine surjektive Abbildung, so ist die finale Topologie auf Y bezüglich der nur aus der einen Abbildung q bestehenden Familie die zuvor diskutierte Quotiententopologie bezüglich q.

Beispiel 1.58 Es sei $(X_j, \mathcal{O}_j)_{j\in J}$ eine Familie topologischer Räume derart, dass $X_i \cap X_j = \emptyset$ für alle $i, j \in I$ mit $i \neq j$. Es sei $\mathcal{O}$ die finale Topologie auf

$$X := \bigcup_{j\in J} X_j$$

bezüglich der Familie $(\lambda_j)_{j\in J}$ der Inklusionsabbildungen

$$\lambda_j \colon X_j \to X, \quad x \mapsto x.$$

Man nennt dann $(X, \mathcal{O})$ die *topologische Summe* der Familie $(X_j, \mathcal{O}_j)_{j\in J}$ topologischer Räume.

Bemerkung 1.59 Für jedes $j \in J$ und jede offene Menge $V \subseteq X_j$ ist $V = \lambda_j(V)$ offen in der topologischen Summe X, denn $\lambda_j^{-1}(V) = V$ ist offen in X_j und $\lambda_i^{-1}(V) = V \cap X_i = \emptyset$ ist offen in X_i für alle Indizes $i \neq j$. Ebenso ist A abgeschlossen in X für jede abgeschlossene Teilmenge $A \subseteq X_j$. Insbesondere ist X_j offen und abgeschlossen in X und λ_j ist eine offene Abbildung und eine topologische Einbettung.

Beispiel 1.60 $\mathbb{R}^\times$ ist die topologische Summe von $]-\infty, 0[$ und $]0, \infty[$.

1.61 Wir betrachten eine topologische Summe $X = \bigcup_{j \in J} X_j$ wie in Beispiel 1.58. Ist Y ein topologischer Raum und $(f_j)_{j \in J}$ eine Familie stetiger Funktionen $f_j \colon X_j \to Y$, so ist

$$f \colon X \to Y, \quad x \mapsto f_j(x) \quad \text{für } j \in J, \text{ wenn } x \in X_j$$

die eindeutige Funktion derart, dass $f|_{X_j} = f_j$ für alle $j \in J$ (also $f \circ \lambda_j = f_j$), und diese ist stetig. Wir schreiben auch

$$\bigcup_{j \in J} f_j \; := \; f,$$

denn der Graph von f ist der Vereinigung der Graphen all der f_j.

Beispiel 1.62 Sei nun $(X_j, \mathcal{O}_j)_{j \in J}$ eine Familie beliebiger (nicht notwendig paarweise disjunkter) topologischer Räume. Es sei $\mathcal{O}$ die finale Topologie auf

$$X := \bigcup_{j \in J} (\{j\} \times X_j)$$

bezüglich der Familie $(\lambda_j)_{j \in J}$ der Abbildungen

$$\lambda_j \colon X_j \to X, \quad x \mapsto (j, x).$$

Man nennt dann $(X, \mathcal{O})$ die *topologische Summe* der Familie $(X_j, \mathcal{O}_j)_{j \in J}$ topologischer Räume und schreibt

$$\coprod_{j \in J} X_j := X\,.$$

1.63 Gegeben eine Familie $(f_j)_{j \in J}$ stetiger Abbildungen in einen topologischen Raum Y gibt es auch hier genau eine Abbildung $f \colon X \to Y$ derart, dass $f \circ \lambda_j = f_j$ für alle $j \in J$ (und diese ist stetig). Man schreibt auch hier $\bigcup_{j \in J} f_j$ für diese Abbildung f.

Bemerkung 1.64 Auch in der Situation von Beispiel 1.58 schreibt man $\coprod_{j\in J} X_j$ für die topologische Summe.

Bemerkung 1.65 Nachdem man notfalls X_j durch $\{j\} \times X_j$ ersetzt und $x \in X_j$ mit $(j,x) \in \{x\} \times X_j$ identifiziert, kann man topologische Summen immer wie in Beispiel 1.58 realisieren und sich jedes X_j als Teilmenge der topologischen Summe vorstellen.

1.66 Es seien $(X_j)_{j\in J}$ und $(Y_j)_{j\in J}$ Familien topologischer Räume mit den topologischen Summen $(X,(\lambda_j)_{j\in J})$ und $(Y,(\mu_j)_{j\in J})$. Ist $(f_j)_{j\in J}$ eine Familie stetiger Abbildungen $f_j\colon X_j \to Y_j$, so schreiben wir

$$\coprod_{j\in J} f_j \;:=\; \bigcup_{j\in J} (\mu_j \circ f_j)$$

für die eindeutige Abbildung $f\colon X \to Y$ derart, dass

$$f \circ \lambda_j = \mu_j \circ f_j$$

für alle $j \in J$. Diese ist stetig.

Weitere Beispiele finaler Topologien erhält man auf direkten Limites.

Beispiel 1.67 Es sei $(X_n, \mathcal{O})_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge topologischer Räume derart, dass

$$X_1 \subseteq X_2 \subseteq \cdots \tag{1}$$

und für alle $m \geq n$ in $\mathbb{N}_0$ die Inklusion $\lambda_{m,n}\colon X_n \to X_m$ stetig ist von $(X_n \mathcal{O}_n)$ nach $(X_m, \mathcal{O}_m)$. Man nennt dann (1) eine *gerichtete Folge* topologischer Räume. Die finale Topologie $\mathcal{O}$ auf

$$X := \bigcup_{n\in\mathbb{N}_0} X_n$$

bezüglich der Folge $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ der Inklusionsabbildungen $\lambda_n\colon X_n \to X$, $x \mapsto x$ wird *direkte Limestopologie* auf X genannt und $(X,\mathcal{O})$ der *direkte Limes* der gerichteten Folge (1). Man schreibt dann auch

$$X \;=\; \lim_{\rightarrow} X_n\,.$$

Stimmt für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Topologie $\mathcal{O}_n$ auf X_n überein mit der von $(X_{n+1}, \mathcal{O}_n)$ auf X_n induzierten Topologie, so spricht man von einer *strikten* gerichteten Folge (also wenn $\lambda_{m,n}$ für alle $m \geq n$ eine topologische Einbettung ist).

Bemerkung 1.68 Nach Satz 1.56 ist eine Abbildung $f\colon X \to Y$ in einen topologischen Raum Y genau dann stetig auf einem direkten Limes $X = \varinjlim X_n$, wenn $f \circ \lambda_n$ stetig ist für alle $n \in \mathbb{N}_0$, also $f|_{X_n}$ stetig ist auf $(X_n, \mathcal{O}_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

Für einen direkten Limes $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n$ wie zuvor gilt:

Lemma 1.69 *Für ein $m \in \mathbb{N}$ sei für jede natürliche Zahl $n \geq m$ eine offene Teilmenge $V_n \subseteq X_n$ gegeben derart, dass*

$$V_m \subseteq V_{m+1} \subseteq \cdots .$$

Dann ist $V := \bigcup_{n\geq m} V_n$ eine offene Teilmenge von $X = \varinjlim X_n$.

1.70 Im Vorgriff auf Definition 1.75 nennen wir einen topologischen Raum X einen T_1-Raum, wenn für jedes $x \in X$ die einpunktige Menge $\{x\}$ in X abgeschlossen ist. Jeder Hausdorffraum ist ein T_1-Raum.[6]

Lemma 1.71 *Wir betrachten eine gerichtete Folge $X_1 \subseteq X_2 \subseteq \cdots$ topologischer Räume $(X_n, \mathcal{O}_n)$ und ihren direkten Limes $(X, \mathcal{O})$. Dann gilt:*

(a) *Ist $(X_n, \mathcal{O}_n)$ ein T_1-Raum für jedes $n \in \mathbb{N}$, so ist auch $(X, \mathcal{O})$ ein T_1-Raum.*

(b) *Ist $(X_n, \mathcal{O}_n)$ ein T_1-Raum für jedes $n \in \mathbb{N}$, so gibt es für jede kompakte Teilmenge $K \subseteq X$ ein $n \in \mathbb{N}$ mit $K \subseteq X_n$.*

(c) *Ist die gerichtete Folge strikt, so stimmt für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Topologie $\mathcal{O}_n$ überein mit der von $(X, \mathcal{O})$ auf X_n induzierten Topologie, d.h. die Inklusionsabbildung $\lambda_n\colon X_n \to X$ ist eine topologische Einbettung.*

(d) *Sei $m \in \mathbb{N}$ und $A \subseteq X$ eine Teilmenge derart, dass $A \cap X_n$ in X_n abgeschlossen ist für alle natürlichen Zahlen $n \geq m$. Dann ist A in X abgeschlossen.*[7] *Insbesondere gilt: Ist $m \in \mathbb{N}$ und $A \subseteq X_m$ eine Teilmenge, die für jede natürliche Zahl $n \geq m$ in X_n abgeschlossen ist. Dann ist A in X abgeschlossen.*

---

[6] Für festes x gibt es für jedes $y \neq x$ nämlich disjunkte offene Umgebungen U_y und V_y von x und y. Dann ist $x \notin V_y$ und $X \setminus \{x\} = \bigcup_{y\in X\setminus\{x\}} V_y$ offen, also $\{x\}$ abgeschlossen.

[7] Für $n \geq m$ ist $\lambda_n^{-1}(A) = A \cap X_n$ abgeschlossen in X_n per Voraussetzung. Für $n \leq m$ ist $\lambda_n^{-1}(A) = X_n \cap A = \lambda_{m,n}^{-1}(A \cap X_m)$ abgeschlossen in X_n wegen der Stetigkeit der Inklusionsabbildung $\lambda_{m,n}\colon X_n \to X_m$.

Ein grundlegender Sachverhalt wird oft benutzt:

Lemma 1.72 (*Transitivität finaler Topologien*) *Es sei* $(Y, \mathcal{O})$ *ein topologischer Raum und* $(f_j)_{j\in J}$ *eine Familie von Abbildungen* $f_j\colon X_j \to Y$ *mit topologischen Räumen* $(X_j, \mathcal{O}_j)$*. Für jedes* $j \in J$ *sei* $(f_{j,i})_{i\in I_j}$ *eine Familie von Abbildungen* $f_{j,i}\colon X_{j,i} \to X_j$ *mit topologischen Räumen* $(X_{j,i}, \mathcal{O}_{j,i})$*. Dann gilt: Ist die Topologie* $\mathcal{O}$ *auf* X *final bezüglich* $(f_j)_{j\in J}$ *und ist für jedes* $j \in J$ *die Topologie* $\mathcal{O}_j$ *auf* X_j *final bezüglich* $(f_{j,i})_{i\in I_j}$*, so ist die Topologie* $\mathcal{O}$ *auf* Y *auch final bezüglich der Familie der Kompositionen* $f_j \circ f_{j,i}\colon X_{j,i} \to X$ *für* $j \in J$ *und* $i \in I_j$*.*

Beweis. Da $\mathcal{O}$ final bzgl. $(f_j)_{j\in J}$ ist, ist eine Teilmenge $V \subseteq Y$ genau dann in $\mathcal{O}$, wenn für jedes $j \in J$ das Urbild $f_j^{-1}(V)$ in X_j offen ist. Da $\mathcal{O}_j$ final bzgl. $(f_{j,i})_{i\in I_j}$ ist, gilt letzteres genau dann, wenn für jedes $i \in I_j$ das Urbild $f_{j,i}^{-1}(f_j^{-1}(V))$ in $X_{j,i}$ offen ist. Dieses Urbild stimmt mit

$$(f_j \circ f_{j,i})^{-1}(V)$$

überein. Die Offenheit letzterer Urbilder bedeutet, dass V offen ist in der finalen Topologie bzgl. der Familie der $f_j \circ f_{j,i}$. □

Ein wichtiger Spezialfall ist wie folgt:

Lemma 1.73 *Es sei* X *eine Menge,* $(f_j)_{j\in J}$ *eine Familie von Abbildungen* $f_j\colon X_j \to X$ *mit topologischen Räumen* $(X_j, \mathcal{O}_j)$*. Weiter sei*

$$S := \coprod_{j\in J} X_j$$

die topologische Summe mit den kanonischen Einbettungen $\lambda_j\colon X_j \to S$ *für* $j \in J$ *und es sei*

$$q := \cup_{j\in J} f_j\colon S \to X$$

die durch $q \circ \lambda_j = f_j$ *festgelegte Abbildung. Ist*

$$X = \bigcup_{j\in J} f_j(X_j),$$

so stimmt die Quotiententopologie $\mathcal{T}$ *auf* X *bezüglich* q *überein mit der finalen Topologie* $\mathcal{O}$ *bezüglich der Familie* $(f_j)_{j\in J}$*.*

Beweis. Die Quotiententopologie $\mathcal{T}$ ist final bezüglich q. Da die Topologie auf S final ist bezüglich der Familie $(\lambda_j)_{j\in J}$, ist wegen der Transitivität finaler Topologien $\mathcal{T}$ auch final bezüglich den Kompositionen $q \circ \lambda_j = f_j$ für $j \in J$. Es ist also $\mathcal{T} = \mathcal{O}$. $\square$

Eine weitere Eigenschaft topologischer Summen ist von Nutzen.

Lemma 1.74 *Es sei $(X_j)_{j\in J}$ eine Familie topologischer Räume und*

$$X := \coprod_{j\in J} X_j = \bigcup_{j\in J} \{j\} \times X_j$$

mit den kanonischen Einbettungen $\lambda_j\colon X_j \to X$, $x \mapsto (j,x)$. Für jeden topologischen Raum Z macht dann die Produkttopologie

$$X \times Z = \bigcup_{j\in J} (\{j\} \times X_j \times Z)$$

zur topologischen Summe $\coprod_{j\in J}(X_j \times Z)$.

Beweis. Als Menge ist bereits $X \times Z = \coprod_{j\in J}(X_j \times Z)$. Für jedes $j \in J$ ist $\lambda_j\colon X_j \to X$ stetig, injektiv und eine offene Abbildung, also auch

$$\lambda_j \times \mathrm{id}_Z\colon X_j \times Z \to X \times Z, \quad (x,z) \mapsto (\lambda_j(x), z)$$

stetig, injektiv und eine offene Abbildung. Wir haben in $X \times Z$ daher die gleichen offenen Mengen wie in $\coprod_{j\in J}(X_j \times Z)$. $\square$

Trennungseigenschaften

Definition 1.75 Es sei X ein topologischer Raum.

(a) Ist X Hausdorffsch, so sagt man auch, X habe die *Trennungseigenschaft* T_2.

(b) X wird T_1 genannt, wenn für jedes $x \in X$ die einpunktige Menge $\{x\}$ abgeschlossen ist.

(c) X wird *regulär* genannt, wenn für jedes $x \in X$ jede x-Umgebung U eine x-Umgebung V enthält, die in X abgeschlossen ist. Reguläre Hausdorffräume werden T_3 genannt.

(d) X wird *normal* genannt, wenn für alle abgeschlossenen Teilmengen $A, B \subseteq X$ mit $A \cap B = \emptyset$ offene Teilmengen $U \subseteq X$ und $V \subseteq X$ existieren derart, dass $A \subseteq U$, $B \subseteq V$ und $U \cap V = \emptyset$. Disjunkte abgeschlossene Teilmengen von X haben in X also stets disjunkte offene Umgebungen. Normale Hausdorffräume werden T_4 genannt.

Manchmal ist folgende Beobachtung nützlich:

Lemma 1.76 *Ein topologischer Raum X ist genau dann Hausdorffsch, wenn die Diagonale*

$$\Delta_X := \{(x, x) \colon x \in X\}$$

in $X \times X$ abgeschlossen ist (bezüglich der Produkttopologie).

Wir überprüfen dies in der Übung.

Regularität eines topologischen Raums kann wie folgt umformuliert werden:

Lemma 1.77 *Ein topologischer Raum X ist genau dann regulär, wenn für jedes $x \in X$ und jede abgeschlossene Teilmenge $A \subseteq X$ mit $x \notin A$ offene Teilmenge $P \subseteq X$ und $Q \subseteq X$ existieren mit $x \in P$, $A \subseteq Q$ und $P \cap Q = \emptyset$.*

Beweis. Ist X regulär und sind x und A wie zuvor, so ist $X \setminus A$ eine x-Umgebung und enthält somit eine abgeschlossene x-Umgebung V. Dann leisten $P := V^0$ und $Q := X \setminus V$ das Gewünschte. Ist umgekehrt die Bedingung erfüllt und U eine offene x-Umgebung, so ist $A := X \setminus U$ abgeschlossen und $x \notin A$, es gibt also disjunkte offene Mengen P und Q mit $x \in P$ und $A \subseteq Q$. Dann ist $V := X \setminus Q$ abgeschlossen und $P \subseteq V$, also V eine x-Umgebung. Aus $X \setminus U = A \subseteq Q$ folgt $U \supseteq X \setminus Q = V$. □

Lemma 1.78 *Für die Trennungseigenschaften eines topologische Raums gelten die Implikationen*

$$T_4 \;\Rightarrow\; T_3 \;\Rightarrow\; T_2 \;\Rightarrow\; T_1 \,.$$

Definition 1.79 Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{O})$ heißt *metrisierbar*, wenn eine Metrik $d \colon X \times X \to [0, \infty[$ existiert mit

$$\mathcal{O} = \{V \subseteq X \colon (\forall x \in V)(\exists \varepsilon > 0)\; B_\varepsilon(x) \subseteq V\}\,.$$

Lemma 1.80 (a) *Jeder kompakte Hausdorffraum ist normal.*

(b) *Jeder metrisierbare topologische Raum ist normal.*

(c) *Jeder lokal kompakte Hausdorffraum ist regulär.*

(d) *Jeder σ-kompakte, lokal kompakte Hausdorffraum ist normal.*

Den Beweis zu (d), der in der Vorlesung übersprungen wurde, finden Sie bei Interesse im Anhang zu Kapitel 1.

1.81 Im Beweis von (b) haben wir benutzt, dass für jede nicht-leere, abgeschlossene Teilmenge $A \subseteq X$ die Funktion

$$d_A \colon X \to [0, \infty[, \quad x \mapsto \inf_{a \in A} d(x, a)$$

Lipschitzstetig ist mit Lipschitzkonstante 1, also

$$|d_A(x) - d_A(y)| \leq d(x, y) \quad \text{für alle } x, y \in X. \tag{2}$$

Wir haben auch benutzt, dass offenbar $d_A(x) = 0$ für alle $x \in A$ (man nehme $a = x$ im Infimum) und

$$d_A(x) > 0 \quad \text{für alle } x \in X \setminus A. \tag{3}$$

Bei Bedarf können die Begründungen hier nachgelesen werden:

Zu Nachweis von (3) sei $x \in X$ mit $d_A(x) = 0$. Es gibt dann eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in A mit $d(x, a_n) \to 0$ für $n \to \infty$, so dass also

$$x = \lim_{n \to \infty} a_n$$

und somit $x \in A$ wegen der Abgeschlossenheit von A.

Zum Nachweis von (2) seien $x, y \in X$. Die Dreiecksungleichung liefert

$$d_A(x) \leq d(x, a) \leq d(x, y) + d(y, a).$$

Übergang zu Infimum in a zeigt, dass

$$d_A(x) \leq d(x, y) + d_A(y)$$

und somit $d_A(x) - d_A(y) \leq d(x, y)$. Analog ist $d_A(y) - d_A(x) \leq d(y, x) = d(x, y)$, also $|d_A(x) - d_A(y)| \leq d(x, y)$.

In der Übung prüfen Sie nach:

Satz 1.82 *Es sei $(X_j)_{j\in J}$ eine Familie topologischer Räume. Ist jedes X_j T_1, Hausdorfsch, T_3, T_4, bzw. lokal kompakt, so auch die topologische Summe $\coprod_{j\in J} X_j$. Hat in jedem X_j jeder Punkt eine kompakte Umgebung, so auch in $\coprod_{j\in J} X_j$.*

Ist jedes X_j ein k-Raum (wie im nächsten Abschnitt), so auch $\coprod_{j\in J} X_j$. Dies ist ein Spezialfall von Lemma 1.136.

Bemerkung 1.83 In der deutschsprachigen Literatur werden (wie in Frankreich) üblicherweise lokal kompakte topologische Räume, reguläre Räume und normale Räume zusätzlich als Hausdorffsch angenommen (und ebenso die k-Räume, die wir im folgenden Abschnitt kennenlernen). Wir setzen die Hausdorff-Eigenschaft nicht voraus.

Lemma 1.84 *Es sei X ein normaler topologischer Raum. Sind A und B abgeschlossene Teilmengen von X mit $A \cap B = \emptyset$, so gibt es abgeschlossene Teilmengen P und Q von X derart, dass $A \subseteq P^0$, $B \subseteq Q^0$ und $P \cap Q = \emptyset$.*

Hierbei meint P^0 und Q^0 das Innere als Teilmenge von X.

Beweis. Wegen der Normalität gibt es offene Teilmengen U und V in X derart, dass $A \subseteq U$, $B \subseteq V$ und $U \cap V = \emptyset$. Dann ist

$$P := X \setminus V$$

eine abgeschlossene Teilmenge von X mit $U \subseteq P$, so dass also $A \subseteq U \subseteq P^0$. Da $B \subseteq V$, ist $P \cap B = \emptyset$. Da X normal ist, gibt es also offene Teilmengen S und T von X mit $P \subseteq S$, $B \subseteq T$ und $S \cap T = \emptyset$. Dann ist $Q := X \setminus S$ eine abgeschlossene Teilmenge von X mit $T \subseteq Q$, also $B \subseteq T \subseteq Q^0$. Wegen $P \subseteq S$ ist weiter $P \cap Q = \emptyset$. $\square$

Lemma 1.85 *Sei $X_1 \subseteq X_2 \subseteq \cdots$ eine strikte gerichtete Folge topologischer Räume derart, dass X_n in X_{n+1} abgeschlossen ist für alle $n \in \mathbb{N}$. Sei*

$$X := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n = \lim_{\rightarrow} X_n$$

mit der direkten Limestopologie. Dann gilt:

(a) *Ist X_n normal für alle $n \in \mathbb{N}$, so ist X normal.*

(b) *Ist X_n normal und Hausdorffsch für alle $n \in \mathbb{N}$, so ist X normal und Hausdorffsch.*

Beweis. Für $n \in \mathbb{N}$ sei $\lambda_n\colon X_n \to X$, $x \mapsto x$ die Inklusionsabbildung; diese ist stetig.

(a) Es seien $A \subseteq X$ und $B \subseteq X$ abgeschlossene Teilmengen mit $A \cap B = \emptyset$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sind dann $A \cap X_n = \lambda_n^{-1}(A)$ und $B \cap X_n = \lambda_n^{-1}(B)$ disjunkte abgeschlossene Teilmengen von X_n.

Nach Lemma 1.84 gibt es abgeschlossene Teilmengen P_1 und Q_1 von X_1 mit $P_1 \cap Q_1 = \emptyset$ derart, dass $A \cap X_1 \subseteq P_1^0$ und $B \cap X_1 \subseteq Q_1^0$ mit den Inneren als Teilmenge von X_1. Sei $P_0 := Q_0 := \emptyset$. Wir zeigen, dass es Folgen $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(Q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von abgeschlossenen Teilmengen P_n und Q_n von X_n gibt derart, dass für alle $n \in \mathbb{N}$

(i) $P_n \cap Q_n = \emptyset$;

(ii) $(A \cap X_n) \cup P_{n-1} \subseteq P_n^0$ und $(B \cap X_n) \cup Q_{n-1} \subseteq Q_n^0$ mit den Inneren von P_n und Q_n als Teilmengen von X_n.

Wir haben P_1 und Q_1 schon gefunden. Sind für eine natürliche Zahl $m \geq 2$ bereits $P_1, \ldots, P_{m-1}$ und $Q_1, \ldots, Q_{m-1}$ gefunden mit (i) und (ii) für alle $n \in \{1, \ldots, m-1\}$, so sind die Teilmengen

$$(A \cap X_m) \cup P_{m-1} \quad \text{und} \quad (B \cap X_m) \cup Q_{m-1}$$

von X_m abgeschlossen und disjunkt. Nach Lemma 1.84 gibt es abgeschlossene Teilmengen P_m und Q_m von X_m mit $P_m \cap Q_m = \emptyset$ derart, dass $(A \cap X_m) \cup P_{m-1} \subseteq P_m^0$ und $(B \cap X_m) \cup Q_{m-1} \subseteq Q_m^0$ mit den Inneren als Teilmenge von X_m. Dies beendet die Konstruktion. Da

$$P_1^0 \subseteq P_2^0 \subseteq \quad \text{und} \quad Q_1^0 \subseteq Q_2^0 \subseteq \cdots$$

per Konstruktion, sind $P := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} P_n$ und $Q := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} Q_n$ nach Lemma 1.69 offene Teilmengen von X. Da $P_n \cap Q_n = \emptyset$ für alle n und die Mengen aufsteigend sind, folgt $P \cap Q = \emptyset$. Da $A \cap X_n \subseteq P_n^0 \subseteq P$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n$, ist $A \subseteq P$. Analog ist $B \subseteq Q$.

(b) Gegeben $x, y \in X$ mit $x \neq y$ gibt es ein $m \in \mathbb{N}$ mit $x, y \in X_m$. Da X nach

Lemma 1.71 (a) ein T_1-Raum ist, sind $A := \{x\}$ und $B := \{y\}$ abgeschlossene Teilmengen von X. Da diese disjunkt sind, gibt es nach dem schon gezeigten Teil (a) des aktuellen Lemmas offene Teilmengen $P, Q \subseteq X$ mit $\{x\} \subseteq P$, $\{y\} \subseteq Q$ und $P \cap Q = \emptyset$. Also ist X Hausdorffsch. $\square$

Zusammenhang und Wegzusammenhang

Zusammenhang und Wegzusammenhang sind ein Stück weit aus den Analysis-Veranstaltungen des Bachelorstudiums bekannt.

Definition 1.86 Ein topologischer Raum X heißt *unzusammenhängend*, wenn offene, nichtleere Teilmengen A und B von X existieren mit

$$X = A \cup B \qquad \text{und} \qquad A \cap B = \emptyset\,.$$

Ist X nicht unzusammenhängend, so wird X *zusammenhängend* genannt.

Bemerkung 1.87 X ist also genau dann zusammenhängend, wenn für alle offenen Teilmengen A und B von X mit

$$X = A \cup B \quad \text{und} \quad A \cap B = \emptyset$$

folgt, dass $A = \emptyset$ oder $B = \emptyset$.

Ist $X = A \cup B$ mit $A \cap B = \emptyset$, so ist $B = X \setminus A$ und somit B genau dann offen, wenn A abgeschlossen ist. Also gilt auch:

Bemerkung 1.88 Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{O})$ ist genau dann zusammenhängend, wenn für jede nicht leere Teilmenge $A \subseteq X$, die offen und abgeschlossen ist, schon $A = X$ sein muss.

Beispiel 1.89 Aus der Analysis 1 ist bekannt, dass die zusammenhängenden Teilmengen von $\mathbb{R}$ genau die Intervalle sind.

Lemma 1.90 *Ist $f\colon X \to Y$ eine stetige Funktion zwischen topologischen Räumen und X zusammenhängend, so ist auch $f(X)$ zusammenhängend mit der von Y induzierten Topologie.*

Beweis. Nach Ersetzen von f durch $f|^{f(X)}$ dürfen wir annehmen, dass f surjektiv ist. Sei $A \subseteq Y$ eine nicht leere Teilmenge, die in Y offen und abgeschlossen ist. Dann ist $f^{-1}(A)$ in X offen und abgeschlossen und nicht leer, ergo $f^{-1}(A) = X$, da X zusammenhängend ist. Also ist $A = f(f^{-1}(A)) = f(X) = Y$. Da A beliebig war, ist Y zusammenhängend. $\square$

Lemma 1.91 *Ist X ein topologischer Raum und $(Y_j)_{j\in J}$ eine Familie zusammenhängender Teilmengen von X derart, dass*

$$Y_i \cap Y_j \neq \emptyset \quad \textit{für alle } i \neq j \textit{ in } I,$$

so ist $Y := \bigcup_{j\in J} Y_j$ zusammenhängend.

Beweis. Es sei $A \subseteq Y$ (relativ) offen und abgeschlossen und nicht leer. Sei $a \in A$; dann ist

$$a \in Y_{j_0}$$

für ein $j_0 \in J$. Für jedes $j \in J$ ist $A \cap Y_j$ in Y_j offen und abgeschlossen, also

$$A \cap Y_j = \emptyset \quad \text{oder} \quad A \cap Y_j = Y_j, \tag{4}$$

da Y_j zusammenhängend ist. Da $A \cap Y_{j_0} \neq \emptyset$, folgt

$$A \cap Y_{j_0} = Y_{j_0},$$

also $Y_{j_0} \subseteq A$. Für jedes $j \in J$ ist somit

$$A \cap Y_j \supseteq Y_{j_0} \cap Y_j \neq \emptyset,$$

unter Benutzung der Voraussetzung des Lemmas. Mit (4) folgt

$$A \cap Y_j = Y_j,$$

so dass also $Y_j \subseteq A$ für alle $j \in J$ und somit $A = \bigcup_{j\in J} Y_j = Y$. Also ist Y zusammenhängend. □

Definition 1.92 Ist X ein topologischer Raum, so schreiben wir $x \sim_c y$, wenn es eine zusammenhängende Teilmenge $Y \subseteq X$ gibt mit $\{x, y\} \subseteq Y$. Mit Lemma 1.91 sehen wir, dass $\sim_c$ eine Äquivalenzrelation auf X ist.[8] Die Äquivalenzklasse X_x von $x \in X$ nennt man die *Zusammenhangskomponente* von x in X.

[8] Symmetrie ist klar und auch Symmetrie (mit der Wahl $Y := \{x\}$). Transitivität: Sind $x, y, z \in X$ mit $\sim_c y$ und $y \sim_c z$, so gibt es zusammenhängende Teilmengen $Y, Z \subseteq X$ mit $\{x, y\} \subseteq Y$ und $\{y, z\} \subseteq Z$. Dann ist $y \in Y \cap Z$, also $Y \cap Z \neq \emptyset$. Nach Lemma 1.91 ist $Y \cup Z$ zusammenhängend. Da $\{x, z\} \subseteq Y \cap Z$, folgt $x \sim_x z$.

Bemerkung 1.93 (a) Nach Lemma 1.91 ist für jedes $x \in X$ seine Zusammenhangskomponente eine zusammenhängende Teilmenge von x. Sie ist die größte zusammenhängende Teilmenge, die x enthält.

(b) Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{O})$ mit $X \neq \emptyset$ ist genau dann zusammenhängend, wenn es in X nur eine Zusammenhangskomponente gibt.

(c) Nach (a) und Lemma 1.105 sind alle Zusammenhangskomponenten abgeschlossene Teilmengen von X.

Definition 1.94 Ein *Weg* in einem topologischen Raum X ist eine stetige Abbildung

$$\gamma\colon [a, b] \to X$$

mit reellen Zahlen $a \leq b$. Man nennt $\gamma(a)$ den Anfangspunkt des Wegs, $\gamma(b)$ seinen Endpunkt. Man spricht dann auch von einem Weg *von* $\gamma(a)$ *nach* $\gamma(b)$. Ist $\gamma(a) = \gamma(b)$, so nennt man γ einen *geschlossenen* Weg (oder auch: eine *Schleife* an der Stelle $\gamma(a)$). Ein Weg heißt *normiert*, wenn $[a, b] = [0, 1]$.

Bemerkung 1.95 Später werden wir fast ausschließlich mit normierten Wegen arbeiten (und Wege stillschweigend normiert annehmen). Wege auf anderen Definitionsintervallen werden in der algebraischen Topologie manchmal "verallgemeinerte Wege" genannt.

Bemerkung 1.96 Für jeden Weg $\gamma\colon [a, b] \to X$ ist

$$[0, 1] \to X, \quad t \mapsto \gamma(a + t(b - a))$$

ein normierter Weg mit dem gleichen Anfangspunkt wie γ und dem gleichen Endpunkt. Wir nennen ihn den *zugehörigen* normierten Weg.

Definition 1.97 Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{O})$ wird *wegzusammenhängend* genannt, wenn für alle $x, y \in X$ in X ein Weg von x nach y existiert.

Lemma 1.98 *Es sei $f\colon X \to Y$ eine stetige Funktion zwischen topologischen Räumen. Ist X wegzusammenhängend, so ist auch $f(X)$ wegzusammenhängend.*

Beweis. Für alle $x', y' \in f(X)$ gibt es $x, y \in X$ mit $x' = f(x)$, $y' = f(y)$. Da X wegzusammenhängend ist, gibt es einen Weg $\gamma\colon [0,1] \to X$ von x nach y. Dann ist

$$f|^{f(X)} \circ \gamma\colon [0,1] \to f(X), \quad t \mapsto f(\gamma(t))$$

ein Weg in $f(X)$ von $f(x) = x'$ nach $f(y) = y'$. □

Lemma 1.99 *Ist ein topologischer Raum X wegzusammenhängend, so ist X zusammenhängend.*

Beweis. Es sei $A \subseteq X$ eine nicht leere Teilmenge, die in X offen und abgeschlossen ist. Es existiert also ein $a \in A$. Da X wegzusammenhängend ist, gibt es für jedes $x \in X$ einen Weg $\gamma\colon [0,1] \to X$ von a nach x. Wegen $0 \in \gamma^{-1}(A)$ ist dann $\gamma^{-1}(A)$ eine nicht leere Teilmenge von $[0,1]$. Diese ist in $[0,1]$ offen und abgeschlossen, da γ stetig ist. Da $[0,1]$ zusammenhängend ist, folgt

$$\gamma^{-1}(A) = [0,1],$$

so dass also $\gamma([0,1]) \subseteq A$ und somit $x = \gamma(1) \in A$. Also ist $A = X$. Da A beliebig war, ist X zusammenhängend. □

Definition 1.100 Es sei X ein topologischer Raum. Für $x, y \in X$ schreiben wir $x \sim_w y$, wenn in X ein Weg γ von x nach y existiert (den man, wenn gewünscht, dann immer auch normiert wählen kann). Auf X ist $\sim_w$ eine Äquivalenzrelation, wie wir gleich nachweisen werden. Die Äquivalenzklasse $X_{(x)}$ eines Punkts $x \in X$ nennt man die *Wegkomponente* von x.

1.101 Um zu sehen, dass $\sim_w$ eine Äquivalenzrelation ist, seien $x, y, z \in X$. Der *konstante Weg*

$$c_x\colon [0,1] \to X, \qquad t \mapsto x$$

ist ein Weg von x nach x; also ist $x \sim_w x$. Ist $\sim_w y$ und $\gamma\colon [0,1] \to X$ ein Weg von x nach y, so ist der *umgekehrte Weg*

$$\gamma^-\colon [0,1] \to X, \quad t \mapsto \gamma(1-t)$$

ein Weg von y nach x, also $y \sim_w x$. Ist $x \sim_w y$ und $y \sim_w z$, so gibt es einen Weg $\gamma\colon [0,1] \to X$ von x nach y und einen Weg $\eta\colon [0,1] \to X$ von y nach z. Dann ist der *zusammengesetzte Weg*

$$\gamma \cdot \eta\colon [0,1] \to X, \quad t \mapsto \begin{cases} \gamma(2t) & \text{wenn } t \in [0, 1/2]; \\ \eta(2t-1) & \text{wenn } t \in [1/2,\, 1] \end{cases}$$

wohldefiniert und nach dem Klebelemma stetig, also ein normierter Weg. Da $(\gamma \cdot \eta)(0) = x$ und $(\gamma \cdot \eta)(1) = z$, ist $x \sim_w z$.

In jedem topologischen Raum $(X, \mathcal{O})$ ist für jedes $x \in X$ die Wegkomponente $X_{(x)}$ wegzusammenhängend. Also ist $X_{(x)}$ zusammenhängend und somit in der Zusammenhangskomponente X_x von x enthalten,

$$X_{(x)} \subseteq X_x \,. \tag{5}$$

Wir halten eine hinreichende Bedingung für Gleichheit fest.

Satz 1.102 *Es sei X ein topologischer Raum. Ist für jedes $x \in X$ die Wegkomponente $X_{(x)}$ offen in X, so stimmen in X Wegkomponenten und Zusammenhangskomponenten überein,*

$$X_{(x)} \; = \; X_x \quad \textit{für alle } x \in X.$$

Beweis. Für jedes $x \in X$ ist die Wegkomponente $A := X_{(x)}$ per Voraussetzung offen. Ihr Komplement

$$X \setminus A = \bigcup_{y \in X \setminus A} X_{(y)}$$

ist ebenfalls offen, also A abgeschlossen. Insbesondere ist $A = X_x \cap A$ relativ offen in X_x und relativ abgeschlossen und wegen $x \in A$ nicht leer. Da X_x zusammenhängend ist, folgt $A = X_x$. □

Es würde genügen, dass jedes $X_{(x)}$ in X_x relativ offen ist.

Definition 1.103 Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{O})$ heißt *lokal wegzusammenhängend*, wenn es für jedes $x \in X$ und jede x-Umgebung $U \subseteq X$ eine wegzusammenhängende x-Umgebung $V \subseteq X$ gibt mit $V \subseteq U$.

Jede Umgebung muss also eine wegzusammenhängende enthalten.

Satz 1.104 *Jeder zusammenhängende, lokal wegzusammenhägende topologische Raum ist wegzusammenhängend.*

Beweis. Da X lokal wegzusammenhängend ist, ist für jedes $x \in X$ die Wegkomponente $X_{(x)}$ eine x-Umgebung in X, also x im Inneren $X^0_{(x)}$. Für jedes $y \in X_{(x)}$ ist $X_{(y)} = X_{(x)}$, somit $y \in X^0_{(y)} = X^0_{(x)}$. Also ist $X_{(x)} = X^0_{(x)}$ und somit $X_{(x)}$ offen und Satz 1.102 anwendbar. □

Die folgenden ergänzenden Resultate wurden in der Vorlesung übersprungen. Die Beweise findet man im Anhang.

Satz 1.105 *Es sei X ein topologischer Raum und $Y \subseteq X$ eine zusammenhängende Teilmenge. Dann ist auch der Abschluss $\overline{Y}$ zusammenhängend.*

Für Produkte mit der Produkttopologie gilt:

Satz 1.106 *Es seien X und Y topologische Räume und es sei $(x, y) \in X \times Y$. Dann ist die Zusammenhangskomponente von (x, y) in $X \times Y$ das Produkt*

$$(X \times Y)_{(x,y)} = X_x \times Y_y$$

der Zusammenhangskomponenten.

Bemerkung 1.107 Insbesondere ist im Falle $X \neq \emptyset$ und $Y \neq \emptyset$ also $X \times Y$ genau dann zusammenhängend, wenn X und Y zusammenhängend sind.

Satz 1.108 *Es seien X und Y topologische Räume; wir versehen $X \times Y$ mit der Produkttopologie. Für alle $z = (x, y) \in X \times Y$ ist dann die Wegkomponente $(X \times Y)_{(z)}$ von z gleich dem Produkt der Wegkomponenten der Komponenten,*

$$(X \times Y)_{(z)} \;=\; X_{(x)} \times Y_{(y)}\,.$$

Bemerkung 1.109 Ist ein topologischer Raum $(X, \mathcal{O})$ lokal wegzusammenhängend, so enthält für jedes $x \in X$ jede x-Umgebung $U \subseteq X$ eine *offene* wegzusammenhängende x-Umgebung.

[Wir dürfen U offen annehmen und behaupten, dass die Wegkomponente

$$U_{(x)}$$

von x in U offen (und somit eine in U enthaltene offene x-Umgebung ist). Für jedes $y \in U_{(x)}$ ist U eine y-Umgebung. Da X lokal wegzusammenhängend ist, gibt es eine wegzusammenhängende y-Umgebung $V \subseteq X$ mit $V \subseteq U$. Dann ist

$$V \subseteq U_{(y)} = U_{(x)},$$

also insbesondere y im Inneren von $U_{(x)}$. Da y beliebig war, folgt $U_{(x)} = U^0_{(x)}$; also ist $U_{(x)}$ offen in X.]

Die kompakt-offene Topologie auf $C(X, Y)$

Definition 1.110 Es sei $(X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum. Eine Menge $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{O}$ von offenen Teilmengen vom X heißt *Basis* der Topologie $\mathcal{O}$, wenn jede offene Menge eine Vereinigung von Basismengen ist.

Für jedes $V \in \mathcal{O}$ muss also eine Familie $(B_j)_{j \in J}$ von Mengen $B_j \in \mathcal{B}$ existieren mit $V = \bigcup_{j \in J} B_j$.

Lemma 1.111 *Es sei X eine Menge und $\mathcal{B}$ eine Menge von Teilmengen von X derart, dass gilt:*

(i) $\bigcup_{B \in \mathcal{B}} B = X$*;*

(ii) *Für alle $B, C \in \mathcal{B}$ ist $B \cap C \in \mathcal{B}$.*

Dann existiert genau eine Topologie $\mathcal{O}$ auf X, für welche $\mathcal{B}$ eine Basis ist.

Beweis. Es ist notwendig

$$\mathcal{O} = \left\{ \bigcup_{V \in M} V : M \subseteq \mathcal{B} \right\},$$

also $\mathcal{O}$ eindeutig festgelegt. Definieren wir $\mathcal{O}$ durch die vorigen Formel, so ist $\emptyset \in \mathcal{O}$ und $X \in \mathcal{O}$ (da wir $M = \emptyset$ und $M = \mathcal{B}$ wählen können). Ist $(W_j)_{j \in J}$ eine Familie von Mengen $W_j \in \mathcal{O}$, so gibt es für jedes $j \in J$ eine Teilmenge $M_j \subseteq \mathcal{B}$ mit $W_j = \bigcup_{V \in M_j} V$. Dann ist

$$\bigcup_{j \in J} V_j = \bigcup_{V \in M} V \in \mathcal{O}$$

mit $M := \bigcup_{j \in J} M_j$. Sind $P, Q \in \mathcal{O}$, so gibt es Mengen $M, N \subseteq \mathcal{B}$ mit $P = \bigcup_{U \in M} V$ und $Q = \bigcup_{V \in N} W$. Dann ist

$$P \cap Q = \bigcup_{U \in M} \bigcup_{V \in N} (U \cap V) = \bigcup_{W \in D} W$$

mit $D := \{U \cap V : U \in M, \, V \in N\} \subseteq \mathcal{B}$. $\square$

Lemma 1.112 *Ist X eine Menge und $\mathcal{S}$ eine Menge von Teilmengen von X, so ist*

$$\mathcal{B} := \{X\} \cup \{V_1 \cap \cdots \cap V_n \colon n \in \mathbb{N},\, V_1, \ldots, V_n \in \mathcal{S}\} \tag{6}$$

eine Basis für genau eine Topologie $\mathcal{O}$ auf X.

Die Voraussetzungen von Lemma 1.111 sind nämlich offensichtlich erfüllt.

Definition 1.113 Man nennt $\mathcal{O}$ die *von $\mathcal{S}$ erzeugte Topologie* und $\mathcal{S}$ eine *Subbasis* für $\mathcal{O}$.

Ist $X \in \mathcal{S}$, so kann "$\{X\}\cup$" in (6) weggelassen werden, ohne $\mathcal{B}$ zu ändern.

Beispiel 1.114 Es sei (X, d) ein metrischer Raum. Für $x \in X$ und $\varepsilon > 0$ nennen wir

$$B_\varepsilon(x) := \{y \in X \colon d(x, y) < \varepsilon\}$$

die offene Kugel vom Radius ε um x. Dann ist $\{B_\varepsilon(x) \colon x \in X,\, \varepsilon > 0\}$ eine Basis der zugehörigen Topologie

$$\mathcal{O} := \{V \subseteq X \colon (\forall x \in V)(\exists \varepsilon > 0)\; B_\varepsilon(x) \subseteq V\}.$$

Lemma 1.115 *Es sei $f \colon X \to Y$ eine Abbildung zwischen topologischen Räumen und $\mathcal{S}$ eine Subbasis der Topologie auf Y. Dann sind äquivalent:*

(a) *f ist stetig;*

(b) *Für jedes $V \in \mathcal{S}$ ist $f^{-1}(V)$ offen in X.*

Beweis. Offenbar folgt (b) aus (a). Ist (b) erfüllt, so ist nach dem vorigen Lemma

$$\mathcal{B} := \{Y\} \cup \{V_1 \cap \cdots \cap V_n \colon n \in \mathbb{N},\, V_1, \ldots, V_n \in \mathcal{S}\}$$

eine Basis für die Topologie auf Y. Dann ist $f^{-1}(W)$ offen in X für alle $W \in \mathcal{B}$, denn $f^{-1}(Y) = X$ ist offen und ist $W = V_1 \cap \cdots \cap V_n$ mit $n \in \mathbb{N}$ und $V_1, \ldots, V_n \in \mathcal{S}$, so ist

$$f^{-1}(W) = f^{-1}(V_1) \cap \cdots \cap f^{-1}(V_n)$$

offen als Durchschnitt endlich vieler offener Mengen. Für jede offene Teilmenge $V \subseteq Y$ ist $V = \bigcup_{W \in M} W$ für eine Teilmenge $M \subseteq \mathcal{B}$ und somit

$$f^{-1}(V) = \bigcup_{W \in M} f^{-1}(W)$$

offen in X. Somit ist f stetig. $\square$

Definition 1.116 Sind X und Y topologische Räume, so schreiben wir $C(X,Y)$ für die Menge aller stetigen Funktionen $f\colon X \to Y$. Gegeben eine kompakte Teilmenge $K \subseteq X$ und eine offene Teilmenge $U \subseteq Y$ schreiben wir

$$\lfloor K,U \rfloor \;:=\; \{f \in C(X,Y)\colon f(K) \subseteq U\}$$

für die Menge aller stetigen Funktionen von X nach Y, welche K in U abbilden. Wir definieren die *kompakt-offene Topologie* auf $C(X,Y)$ als die von den Mengen $\lfloor K,U \rfloor$ erzeugte Topologie, wenn K die Menge aller kompakten Teilmengen von X durchläuft und U die Menge aller offenen Teilmengen von Y. Wird nichts anderes gesagt, versehen wir $C(X,Y)$ immer mit der kompakt-offenen Topologie.

Da $\lfloor \emptyset, Y \rfloor = C(X,Y)$, bilden endliche Durchschnitte

$$\lfloor K_1,U_1 \rfloor \cap \cdots \cap \lfloor K_n,U_n \rfloor$$

eine Basis der kompakt-offenen Topologie auf $C(X,Y)$.

Für topologische Räume X und Y betrachten wir nun die Auswertungsabbildung

$$\mathrm{ev}\colon C(X,Y) \times X \to Y, \quad (f,x) \mapsto f(x)\,.$$

Versehen wir $C(X,Y)$ mit der kompakt-offenen Topologie, so gilt:

Lemma 1.117 *Ist X lokal kompakt, so ist für jeden topologischen Raum Y die Auswertungsabbildung*

$$\mathrm{ev}\colon C(X,Y) \times X \to Y$$

stetig.

Beweis. Es sei $V \subseteq Y$ eine offene Teilmenge. Für $(f,x) \in \mathrm{ev}^{-1}(V)$ ist $f(x) \in V$, also $f^{-1}(V)$ eine offene Umgebung von x in X. Da X lokal kompakt ist, gibt es eine kompakte x-Umgebung K in X mit $K \subseteq f^{-1}(V)$. Dann ist $f(K) \subseteq V$, also $f \in \lfloor K,V \rfloor$ und somit

$$\lfloor K,V \rfloor \times K^0$$

eine offene (f,x)-Umgebung in $C(X,Y) \times X$. Diese ist in $\mathrm{ev}^{-1}(V)$ enthalten, da $g(y) \in V$ für alle $g \in \lfloor K,V \rfloor$ und $y \in K^0$. $\square$

Gegeben Mengen X und Y schreiben wir Y^X für die Menge aller Abbildungen $f\colon X \to Y$.

1.118 Sind X, Y und Z Mengen und

$$f\colon X \times Y \to Z$$

eine Abbildung, so erhalten wir für jedes $x \in X$ eine Abbildung

$$f_x := f(x,\cdot)\colon Y \to Z, \quad y \mapsto f(x,y)$$

und somit eine Abbildung

$$f^\vee\colon X \to Z^Y, \quad x \mapsto f^\vee(x) := f_x\,.$$

Umgekehrt liefert jede Abbildung $g\colon X \to Z^Y$ eine Abbildung

$$g^\wedge\colon X \times Y, \quad (x,y) \mapsto g^\wedge(x,y) := g(x)(y).$$

Per Konstruktion ist $(f^\vee)^\wedge = f$ und $(g^\wedge)^\vee = g$; also sind

$$\Phi\colon Z^{X\times Y} \to (Z^Y)^X, \quad f \mapsto f^\vee$$

und

$$\Psi\colon (Z^Y)^X \to Z^{X\times Y}, \quad g \mapsto g^\wedge$$

zueinander inverse bijektive Abbildungen. Insbesondere haben wir

$$Z^{X\times Y} \cong (Z^Y)^X$$

als Mengen. Unter geeigneten Voraussetzungen erhält man Analoga dieses "Exponentialgesetzes" für topologische Räume.

Satz 1.119 *Es seien X, Y und Z topologische Räume. Versehen wir $C(Y,Z)$ mit der kompakt-offenen Topologie, so gilt:*

(a) *Für jede stetige Abbildung $f\colon X \times Y \to Z$ und jedes $x \in X$ ist*

$$f_x := f(x,\cdot)\colon Y \to Z$$

stetig.

(b) *Für jede stetige Abbildung $f\colon X \times Y \to Z$ ist die Abbildung*

$$f^\vee\colon X \to C(Y,Z), \quad x \mapsto f_x$$

stetig.

(c) *Ist Y lokal kompakt, so ist für jede stetige Abbildung $g\colon X \to C(Y,Z)$ die zugehörige Abbildung*

$$g^\wedge\colon X \times Y \to Z, \quad (x,y) \mapsto g^\wedge(x,y) := g(x)(y)$$

stetig. Die Abbildung $\Phi\colon C(X \times Y, Z) \to C(X, C(Y,Z))$, $f \mapsto f^\vee$ ist dann also eine Bijektion mit Umkehrabbildung $g \mapsto g^\wedge$.

Beweis. (a) Es ist f_x die Komposition von f und der stetigen Abbildung $Y \to X \times Y$, $y \mapsto (x,y)$.

(b) Es sei $K \subseteq Y$ kompakt und $V \subseteq Z$ eine offene Teilmenge. Wir zeigen, dass

$$(f^\vee)^{-1}(\lfloor K, V \rfloor)$$

in X offen ist. Sei hierzu x in diesem Urbild. Dann ist $f_x \in \lfloor K, V \rfloor$, also $f_x(K) \subseteq V$, also

$$f(\{x\} \times K) \subseteq V$$

und somit $\{x\} \times K \subseteq f^{-1}(V)$. Nach dem Lemma von Wallace gibt es offene Teilmengen $P \subseteq X$ und $Q \subseteq Y$ derart, dass $x \in P$, $K \subseteq Q$ und

$$P \times Q \subseteq f^{-1}(V)\,.$$

Insbesondere ist $P \times K \subseteq f^{-1}(V)$, also $f(P \times K) \subseteq V$ und somit

$$(f^\vee)(P) \subseteq \lfloor K, V \rfloor\,,$$

also $P \subseteq (f^\vee)^{-1}(\lfloor K, V \rfloor)$, letztere Menge also eine x-Umgebung.

(c) Ist Y lokal kompakt, so ist die Auswertungsabbildung $\mathrm{ev}\colon C(Y,Z) \times Y \to Z$ stetig, also auch

$$g^\wedge(x,y) = g(x)(y) = \mathrm{ev}(g(x), y)$$

stetig. Da $(g^\wedge)^\vee = g$, ist die injektive Abbildung Φ also auch surjektiv, somit eine Bijektion. $\square$

Bemerkung 1.120 Unter den Voraussetzungen von (c) ist eine Funktion $g\colon X \to C(Y,Z)$ genau dann stetig, wenn $g^\wedge\colon X \times Y \to Z$ stetig ist.[9]

[9]Ist $g^\wedge$ stetig, so nach (b) auch $g = (g^\wedge)^\vee$ stetig.

Die folgenden Anwendung des Exponentialgesetzes wird von Nutzen sein. Wie üblich versehen wir Produkte mit der Produkttopologie.

Satz 1.121 *Sei $q\colon X \to Y$ eine Quotientenabbildung zwischen topologischen Räumen und Z ein topologischer Raum. Ist Z lokal kompakt, so ist*

$$q \times \mathrm{id}_Z\colon X \times Z \to Y \times Z, \quad (x, z) \mapsto (q(x), z)$$

eine Quotientenabbildung.

Beweis. Es sei $\mathcal{O}$ die Produkttopologie auf $Y \times Z$ und $\mathcal{T}$ die Quotiententopologie bezüglich $q \times \mathrm{id}_Z$. Da die Produkttopologie $q \times \mathrm{id}_Z$ stetig macht, ist $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{T}$. Wir schreiben

$$H := (Y \times Z, \mathcal{T}).$$

Da $f := q \times \mathrm{id}_Z\colon X \times Z \to H$ stetig ist, ist nach Satz 1.119 (b) die Abbildung

$$f^\vee\colon X \to C(Z, H), \quad x \mapsto f(x, \cdot)$$

stetig. Für alle $x_1, x_2 \in X$ mit $q(x_1) = q(x_2)$ ist $f^\vee(x_1) = f^\vee(x_2)$ per Konstruktion. Nach dem Homomorphiesatz gibt es also genau eine Abbildung

$$g\colon Y \to C(Z, H)$$

mit $g \circ q = f$, und diese ist stetig. Da Z lokal kompakt ist, ist nach Satz 1.119 (c) die Abbildung

$$g^\wedge\colon Y \times Z \to H, \quad (y, z) \mapsto g(y)(z)$$

stetig. Für $y \in Y$ und $z \in Z$ ist $y = q(x)$ für ein $x \in X$ und wir erhalten

$$g^\wedge(y, z) = g(y)(z) = q(q(x))(z) = f^\vee(x)(z) = f(x, z) = (q(x), z) = (y, z),$$

so dass also $g^\wedge$ die identische Abbildung $Y \times Z \to Y \times Z$, $(y, z) \mapsto (y, z)$ ist. Nach dem Vorigen ist diese stetig als Abbildung von $(Y \times Z, \mathcal{O})$ nach $(Y \times Z, \mathcal{T})$. Es gilt also $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{O}$ und somit $\mathcal{T} = \mathcal{O}$. $\square$

Folgerung 1.122 *Es sei X ein topologischer Raum, dessen Topologie final ist bezüglich einer Familie $(f_j)_{j\in J}$ von Abbildungen $f_j\colon X_j \to X$ mit topologischen Räumen X_j, und es gelte*

$$X = \bigcup_{j\in J} f_j(X_j)\,. \tag{7}$$

Für jeden lokal kompakten topologischen Raum Z ist dann die Produkttopologie auf $X \times Z$ final bezüglich der Familie $(f_j \times \mathrm{id}_Z)_{j\in J}$ der Abbildungen

$$f_j \times \mathrm{id}_Z\colon X_j \times Z \to X \times Z, \quad (x,z) \mapsto (f_j(x), z),$$

wobei man $X_j \times Z$ mit der Produkttopologie versieht.

Beweis. Wir betrachten die topologische Summe $Y := \coprod_{j\in J} X_j$. Die Abbildung

$$q := \cup_{j\in J} f_j\colon Y \to X$$

ist per Voraussetzung surjektiv. Da die Topologie auf X final ist bezüglich der Familie $(f_j)_{j\in J}$, ist nach Lemma 1.73 q eine Quotientenabbildung. Nach Satz 1.121 ist auch $q \times \mathrm{id}_Z$ eine Quotientenabbildung, die Topologie $\mathcal{O}$ auf $X \times Z$ also final bezüglich $q \times \mathrm{id}_Z$. Nun ist $Y \times Z$ die topologische Summe $\coprod_{j\in J}(X_j \times Z)$ (siehe Lemma 1.74). Deren Topologie ist final bezüglich den kanonischen Einbettungen

$$X_j \times Z \to Y \times Z\,.$$

Komponieren wir $q \times \mathrm{id}_Z$ mit diesen, erhalten wir die Abbildungen $f_j \times \mathrm{id}_Z$. Wegen der Transitivität finaler Topologien ist $\mathcal{O}$ auch final bezüglich diesen Kompositionen. □

Bemerkung 1.123 Die Schlussfolgerung von Folgerung 1.122 kann falsch werden, wenn (7) nicht angenommen wird (Aufgabe 25, Übungsblatt 7).

Für die Allgemeinbildung erwähnen wir weitere Eigenschaften der kompakt-offenen Topologie (die nicht prüfungsrelevant sind und nur im Anhang bewiesen werden).

Satz 1.124 *Es seien X und Y topologische Räume. Ist Y Hausdorffsch, so auch $C(X,Y)$.*

Satz 1.125 *Es sei X ein topologischer Raum und $\phi\colon Y_1 \to Y_2$ eine stetige Abbildung zwischen topologischen Räumen. Dann ist die Abbildung*

$$C(X,\phi)\colon C(X,Y_1) \to C(X,Y_2), \quad f \mapsto \phi \circ f$$

stetig.

Satz 1.126 *Es sei Y ein topologischer Raum und $\phi\colon X_1 \to X_2$ eine stetige Abbildung zwischen topologischen Räumen. Dann ist die Abbildung*

$$C(\phi,Y))\colon C(X_2,Y) \to C(X_1,Y), \quad f \mapsto f \circ \phi$$

stetig.

Beispiel 1.127 Es seien X und Y topologische Raume und $X_0 \subseteq X$ eine Teilmenge. Dann ist die Einschränkungsabbildung

$$\rho\colon C(X,Y) \to C(X_0,Y), \quad f \mapsto f|_{X_0}$$

stetig.

Die Inklusionsabbildung $j\colon X_0 \to X$, $x \mapsto x$ ist nämlich stetig und für jedes $f \in C(X,Y)$ ist $f|_{X_0} = f \circ j = C(j,Y)(f)$, also

$$\rho = C(j,Y).$$

Kompakt erzeugte topologische Räume*

Die Zellenkomplexe, die wir später betrachten werden, brauchen nicht lokal kompakt zu sein, sind aber immer sogenannte k-Räume. Solche Räume schauen wir kurz systematisch an. Die Diskussion ist nur für feinere Resultate nötig, in der Vorlesung können wir voraussichtlich den ganzen Abschnitt überspringen.

Definition 1.128 Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{O})$ heißt *kompakt erzeugt* (oder kurz: ein *k-Raum*), wenn seine Topologie $\mathcal{O}$ final ist bezüglich der Familie der Inklusionsabbildungen $\lambda_K \colon K \to X$, $x \mapsto x$, wenn K die Menge der kompakten Teilmengen von X durchläuft.

Lemma 1.129 *Für einen topologischen Raum $(X, \mathcal{O})$ sind äquivalent:*

(a) *$(X, \mathcal{O})$ ist ein k-Raum.*

(b) *Für jede Teilmenge $U \subseteq X$ gilt: Es ist U offen in $(X, \mathcal{O})$ genau dann, wenn $U \cap K$ in K relativ offen ist für jede kompakte Teilmenge $K \subseteq X$.*

(c) *Für jede Teilmenge $A \subseteq X$ gilt: Es ist A abgeschlossen in $(X, \mathcal{O})$ genau dann, wenn $A \cap K$ in K relativ abgeschlossen ist für jede kompakte Teilmenge $K \subseteq X$.*

(d) *Die Topologie $\mathcal{O}$ ist final bezüglich einer Familie $(f_j)_{j \in J}$ von Abbildungen $f_j \colon K_j \to X$ mit kompakten topologischen Räumen $(K_j, \mathcal{O}_j)$.*

Beweis. (b) und (c) sind äquivalent zu (a), denn sie beschreiben die offenen bzw. abgeschlossenen Mengen der finalen Topologie $\mathcal{O}_k$ bezüglich der obigen Inklusionen $\lambda_K \colon K \to X$.

(a) impliziert (d) per Definition eines k-Raums.

Gelte nun (d). Es sei $\mathcal{O}_k$ die finale Topologie auf X bezüglich den obigen λ_K. Für jedes $V \in \mathcal{O}$ ist $\lambda_K^{-1}(V) = V \cap K$ offen in K für jede kompakte Teilmenge $K \subseteq X$, also $V \in \mathcal{O}_k$ und somit $O \subseteq \mathcal{O}_k$. Zum Nachweis der umgekehrten Inklusion sei $W \in \mathcal{O}_k$. Für jedes $j \in J$ ist $K := f_j(K_j)$ eine kompakte Teilmenge von X in der induzierten Topologie. Da $W \in \mathcal{O}_k$, ist $W \cap K$ offen in K und somit

$$f_j^{-1}(W) = (f_j|^K)^{-1}(K \cap W)$$

offen in K_j. Also ist W offen in der finalen Topologie bezüglich $(f_j)_{j \in J}$, also $W \in \mathcal{O}$. □

Beispiel 1.130 Es sei $(X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum, in welchem jeder Punkt $x \in X$ eine kompakte Umgebung hat. Dann ist $(X, \mathcal{O})$ ein k-Raum.[10]

Insbesondere ist jeder lokal kompakte topologische Raum ein k-Raum.

Definition 1.131 Es sei $(X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum, $x \in X$ und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Elementen $x_n \in X$. Wir sagen, dass $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen x konvergiert (und schreiben $x_n \to x$ für $n \to \infty$), wenn für jede Umgebung V von x in X ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert derart, dass $x_n \in V$ für alle $n \geq n_0$.

Konvergiert eine Folge gegen ein x, so wird die Folge *konvergent* genannt und x ein *Grenzwert* der Folge.

Lemma 1.132 *Es sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge in einem topologischen Raum $(X, \mathcal{O})$ und $x \in X$ ein Grenzwert für $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Dann ist*

$$K := \{x_n \colon n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$$

eine kompakte Teilmenge von X.

Beweis. Es sei $(V_j)_{j\in J}$ eine Familie von offenen Teilmengen von X mit $K \subseteq \bigcup_{j\in J} V_j$. Es existiert ein $j_0 \in J$ mit $x \in V_{j_0}$. Da $x_n \to x$, existiert ein $N \in \mathbb{N}$ derart, dass $x_n \in V_{j_0}$ für alle $n > N$. Für alle $k \in \{1, \ldots, N\}$ ist $x_k \in V_{j_k}$ für ein $j_k \in J$. Dann ist also

$$K \subseteq \bigcup_{k=0}^{N} V_{j_k}$$

und somit Kompaktheit nachgewiesen. □

Beispiel 1.133 Jeder metrische Raum ist ein k-Raum.[11]

[10] Ist $\mathcal{O}_k$ die finale Topologie auf X bezüglich den λ_K, so ist wie oben $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{O}_k$. Ist $W \in \mathcal{O}_k$, so gibt es per Voraussetzung für $x \in W$ eine kompakte Umgebung K_x in X. Dann ist $W \cap K_x$ offen in K_x, also $W \cap K_x^0$ (mit dem Inneren als Teilmenge von X) offen in K_x^0 und somit in X. Es ist also W in X eine Umgebung von jedem $x \in W$ und somit W in X offen.

[11] Es sei $A \subseteq X$ eine Teilmenge. Ist A in X abgeschlossen, so ist $A \cap K$ in K abgeschlossen für jede kompakte Teilmenge $K \subseteq X$. Sei umgekehrt $A \cap K$ in K abgeschlossen für alle kompakten Teilmengen $K \subseteq X$. Ist x im Abschluss $\overline{A}$, so gibt es eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in A derart, dass $x_n \to x$ in X. Nach dem Vorigen ist $K := \{x\} \cup \{x_n \colon n \in \mathbb{N}\}$ kompakt. Da $A \cap K$ in K abgeschlossen ist und $x_n \to x$ in A, folgt $x = \lim_{n\to\infty} x_n \in A \cap K \subseteq A$. Also ist $A = \overline{A}$ abgeschlossen.

Wir erwähnen noch:

Satz 1.134 *Für einen topologischen Raum X sind äquivalent:*

(a) *X ist ein k-Raum;*

(b) *Es gibt eine Quotientenabbildung $q\colon Y \to X$ für einen topologischen Raum Y, in welchem jeder Punkt eine kompakte Umgebung besitzt.*

Ist X Hausdorffsch, so ist zudem äquivalent:

(c) *Es gibt eine Quotientenabbildung $q\colon Y \to X$ für einen Hausdorffschen, lokal kompakten topologischen Raum Y.*

Beweis. Gilt (a), so betrachten wir die Menge $\mathcal{K}(X)$ aller kompakten Teilmengen von X. In der topologischen Summe

$$Y := \coprod_{K \in \mathcal{K}(X)} K$$

hat jeder Punkt eine kompakte Umgebung und ist X Hausdorffsch, so ist Y somit lokal kompakt. Die Abbildung $q := \cup_{K \in \mathcal{K}(X)} \lambda_K \colon Y \to X$ ist surjektiv (da alle einpunktigen Teilmengen von X kompakt sind). Da nach (a) die Topologie auf X final ist bezüglich der Familie $(\lambda_K)_{K \in \mathcal{K}(X)}$, ist diese nach Lemma 1.73 gleich der Quotiententopologie bezüglich q.

Aus (c) folgt (b).

Gilt (b), so hat jeder Punkt $y \in Y$ eine kompakte Umgebung L_y in Y. Dann ist $q(L_y)$ eine kompakte Teilmenge von X. Sei nun $V \subseteq X$ eine Teilmenge derart, dass $V \cap K$ in K offen ist für jede kompakte Teilmenge K von X. Für jedes $y \in Y$ ist dann $V \cap q(L_y)$ offen in $q(L_y)$, also

$$L_y \cap q^{-1}(V) = (q|_{L_y})^{-1}(V) = (q|_{L_y}^{q(L_y)})^{-1}(q(L_y) \cap V)$$

offen in L_y. Somit ist $L_y^0 \cap q^{-1}(V)$ offen in Y und folglich $q^{-1}(V)$ offen, somit V offen in X (da X die Quotiententopologie trägt). Also ist X ein k-Raum. □

Da Kompositionen von Quotientenabbildungen wieder Quotientenabbildungen sind, folgt:

Folgerung 1.135 *Ist $q\colon X \to Y$ eine Quotientenabbildung zwischen topologischen Räumen und X ein k-Raum, so ist auch Y ein k-Raum.*

Eine weitere simple Beobachtung ist nützlich:

Lemma 1.136 *Es sei X ein topologischer Raum und $(V_j)_{j\in J}$ eine offene Überdeckung von X. Ist V_j ein k-Raum für alle $j \in J$, so ist X ein k-Raum.*

Bemerkung 1.137 Die Schlussfolgerung gilt auch, wenn jedes V_j ein k-Raum ist und $X = \bigcup_{j\in J} V_j^0$, wobei V_j^0 das Innere von V_j ist als Teilmenge von X.

Beweis. Es sei $V \subseteq X$ eine Teilmenge derart, dass $K \cap V$ offen in K ist für jede kompakte Teilmenge $K \subseteq X$. Für jedes $j \in J$ ist dann für jede kompakte Teilmenge $K \subseteq V_j$

$$K \cap (V_j \cap V) = K \cap V$$

offen in K, also $V_j \cap V$ offen in V_j, da V_j ein k-Raum ist. Folglich ist $V_j^0 \cap V$ offen in V_j^0 und somit in X. Somit ist $V = \bigcup_{j\in J}(V_j^0 \cap V)$ offen in X. □

Sind X und Y beide k-Räume, so braucht $X \times Y$ in der Produkttopologie kein k-Raum zu sein. Sind X und Y zusätzlich hemikompakt und Hausdorffsch, so ist $X \times Y$ jedoch immer ein k-Raum (siehe Satz 1.142). Im Falle allgemeiner k-Räume X und Y kann man wenigstens die Topologie auf $X \times Y$ so verfeinern, dass ein k-Raum $k(X \times Y)$ entsteht (siehe Definition 1.144). Die Beweise dieser etwas technischeren Resultate (bis Satz 1.145) findet man im Anhang zu Kapitel 1.

Definition 1.138 Ein topologischer Raum X heißt *hemikompakt*, wenn es eine Folge $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von kompakten Teilmengen $K_n \subseteq X$ gibt, so dass jede kompakte Teilmenge $K \subseteq X$ in K_n enthalten ist für ein $n \in \mathbb{N}$.

Dann ist insbesondere $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n$; für jedes $x \in X$ ist die einpunktige Menge $\{x\}$ nämlich kompakt, also $\{x\} \subseteq K_n$ für ein n.

Bemerkung 1.139 Da man jedes K_n durch die kompakte Menge $K_1 \cup \cdots \cup K_n$ ersetzen kann, kann immer angenommen werden, dass

$$K_1 \subseteq K_2 \subseteq \cdots$$

in Definition 1.138. Man nennt dann $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine k_ω-*Folge*.

Lemma 1.140 *Es sei $(X, \mathcal{O})$ ein hemikompakter k-Raum und $K_1 \subseteq K_2 \subseteq \cdots$ eine k_ω-Folge in X. Dann ist die Topologie $\mathcal{O}$ final bezüglich der Folge $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ der Inklusionsabbildungen $\lambda_n \colon K_n \to X$, $x \mapsto x$.*

Es ist dann also $X = \lim\limits_{\rightarrow} K_n$ als topologischer Raum.

Beispiel 1.141 Jeder σ-kompakte lokal kompakte topologische Raum ist hemikompakt.

Jede kompakte Ausschöpfung $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist nämlich eine k_ω-Folge.[12]

Satz 1.142 *Sind X und Y Hausdorffsche, hemikompakte k-Räume, so ist das kartesische Produkt $X \times Y$ in der Produkttopologie ein k-Raum (sowie Hausdorffsch und hemikompakt).*

Bemerkung 1.143 Hausdorffsche, hemikompakte k-Räume nennt man auch *k_ω-Räume.* Nach Satz 1.142 ist das Produkt zweier k_ω-Räume mit der Produkttopologie also wieder ein k_ω-Raum.

Definition 1.144 Ist $(X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum, so schreiben wir $\mathcal{K}(X, \mathcal{O})$ (oder einfach $\mathcal{K}(X)$) für die Menge aller kompakten Teilmengen von X. Es sei $\mathcal{O}_k$ die finale Topologie auf X bezüglich den Inklusionsabbildungen $\lambda_K \colon K \to X$ für $K \in \mathcal{K}(X, \mathcal{O})$. Man schreibt kurz $k(X) := (X, \mathcal{O}_k)$ für den so erhaltenen topologischen Raum und nennt $k(X)$ auch die *Kelleyfizierung* von X.

Satz 1.145 *Für jeden topologischen Raum $(X, \mathcal{O})$ gilt:*

(a) *Ist X ein k-Raum, so ist $X = k(X)$;*

(b) *$\mathcal{O} \subseteq \mathcal{O}_k$, d.h. die Inklusion $k(X) \to X$ ist stetig.*

(c) *Ist X Hausdorffsch, so auch $k(X)$;*

(d) *Eine Teilmenge $K \subseteq X$ ist genau dann in X kompakt, wenn K in $k(X)$ kompakt ist; X und $k(X)$ induzieren auf K zudem die selbe Topologie.*

(e) *$k(X)$ ist ein k-Raum;*

[12] Die Inneren $K_1^0 \subseteq K_2^0 \subseteq \cdots$ bilden eine offene Überdeckung von X, jede kompakte Teilmenge von X ist also in einem K_n^0 und somit in K_n enthalten.

(f) *Ist L ein kompakter topologischer Raum und $f\colon L \to X$ eine Abbildung, so ist f genau dann stetig nach X mit der Topologie $\mathcal{O}$, wenn f nach $k(X)$ stetig ist.*

Für k-Räume ist eine Fassung des Exponentialgesetzes verfügbar, analog zu Satz 1.119 (c):

Satz 1.146 *Es seien X, Y und Z topologische Räume. Ist $X \times Y$ ein k-Raum und Y Hausdorffsch, so ist für jede stetige Abbildung $g\colon X \to C(Y,Z)$ die zugehörige Abbildung*

$$g^\wedge\colon X \times Y \to Z, \quad (x,y) \mapsto g^\wedge(x,y) := g(x)(y)$$

stetig. Die Abbildung $\Phi\colon C(X \times Y, Z) \to C(X, C(Y,Z))$, $f \mapsto f^\vee$ ist dann also eine Bijektion mit Umkehrabbildung $g \mapsto g^\wedge$.

Beweis. Wir betrachten eine stetige Abbildung $g\colon X \to C(Y,Z)$, wobei $C(Y,Z)$ mit der kompakt-offenen Topologie versehen ist. Da $X \times Y$ ein k-Raum ist, ist $g^\wedge$ stetig, wenn wir zeigen können, dass $g^\wedge|_K$ stetig ist für jede kompakte Teilmenge $K \subseteq X \times Y$. Da die Projektionen $\mathrm{pr}_1\colon X \times Y \to X$ und $\mathrm{pr}_2\colon X \times Y \to Y$ auf die Komponenten stetig sind, ist $K_1 := \mathrm{pr}_1(K)$ eine kompakte Teilmenge von X und $K_2 := \mathrm{pr}_2(K)$ eine kompakte Teilmenge von Y. Nach dem Satz von Tychonoff ist $K_1 \times K_2$ kompakt. Können wir zeigen, dass $g^\wedge|_{K_1 \times K_2}$ stetig ist, so ist wegen $K \subseteq K_1 \times K_2$ auch $g^\wedge|_K$ stetig. Wir dürfen daher annehmen, dass

$$K = K_1 \times K_2$$

mit kompakten Teilmengen $K_1 \subseteq X$ und $K_2 \subseteq Y$. Nach Beispiel 1.127 ist die Einschränkungsabbildung

$$\rho\colon C(Y,Z) \to C(K_2, Z), \quad f \mapsto f|_{K_2}$$

stetig. Also ist

$$\rho \circ g\colon X \to C(K_2, Z)$$

stetig. Da Y Hausdorffsch ist, ist die kompakte Menge K_2 lokal kompakt. Nach Satz 1.119 (c) ist also

$$(\rho \circ g)^\wedge\colon X \times K_2 \to Z$$

stetig. Man beachte, dass für alle $x \in X$ und $y \in K_2$

$$(\rho \circ g)^\wedge(x,y) = (\rho \circ g)(x)(y) = (\rho(g(x))(y) = g(x)|_{K_2}(y) = g(x)(y) = g^\wedge(x,y).$$

Es ist also $g^\wedge|_{X \times K_2} = (\rho \circ g)^\wedge$ stetig und folglich $g^\wedge|_{K_1 \times K_2} = g^\wedge|_K$ stetig. $\square$

Analog zu Bemerkung 1.120 haben wir:

Bemerkung 1.147 In der Situation von Satz 1.146 ist eine Funktion $g\colon X \to C(Y,Z)$ genau dann stetig, wenn $g^\wedge\colon X \times Y \to Z$ stetig ist.

Benutzen wir Satz 1.146 statt Satz 1.119, so erhalten wir analog zu Satz 1.121:

Satz 1.148 *Es seien X, Y und Z topologische Räume und $q\colon X \to Y$ eine Quotientenabbildung. Ist $Y \times Z$ ein k-Raum und Z Hausdorffsch, so ist auch $q \times \mathrm{id}_Z\colon X \times Z \to Y \times Z$ eine Quotientenabbildung.* $\square$

Folgerung 1.149 *Ist Y ein k-Raum und Z ein Hausdorffscher, lokal kompakter topologischer Raum, so macht die Produkttopologie $Y \times Z$ zu einem k-Raum.*

Beweis. Nach Satz 1.134 gibt es einen topologischen Raum X, in welchem jeder Punkt eine kompakte Umgebung hat und eine Quotientenabbildung $q\colon X \to Y$. Dann hat auch in $X \times Z$ jeder Punkt eine kompakte Umgebung. Da nach Satz 1.148 $q \times \mathrm{id}_Z\colon X \times Z \to Y \times Z$ eine Quotientenabbildung ist, ist $Y \times Z$ nach Satz 1.134 ein k-Raum. $\square$

Bemerkung 1.150 Unabhängig von lokaler Kompaktheit von Y gilt die Schlussfolgerung von Folgerung 1.122 auch, wenn Z Hausdorffsch ist und $X_j \times Z$ ein k-Raum in der Produkttopologie, für alle $j \in J$.

Anhang zu Kapitel 1

Der Vollständigkeit halber beweisen wir Lemma 1.80 (d), Lemma 1.140, die Sätze 1.105, 1.106 und 1.108 sowie 1.124,1.125 und 1.126, ebenso Satz 1.142 und Satz 1.145. Die Beweise sind nicht prüfungsrelevant.

Beweis von Lemma 1.80 (d). Es sei $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine kompakte Ausschöpfung von X. Weiter seien A und B abgeschlossene Teilmengen von X mit $A\cap B = \emptyset$. Wir wollen disjunkte offene Teilmengen $P \subseteq X$ und $Q \subseteq X$ finden mit $A \subseteq P$ und $B \subseteq Q$. Es sei $P_1 := Q_1 := \emptyset$. Wir konstruieren Folgen $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von kompakten Teilmengen von X derart, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt:

(i) $P_n \subseteq K_n^0 \setminus B$ und $Q_n \subseteq K_n^0 \setminus A$ mit dem Inneren als Teilmenge von X;

(ii) $P_n \cap Q_n = \emptyset$;

(iii) Ist $n \geq 2$, so ist

$$(K_{n-1} \cap A) \cup P_{n-1} \subseteq P_n^0 \qquad \text{und} \qquad (K_{n-1} \cap B) \cup Q_{n-1} \subseteq Q_n^0$$

mit den Inneren als Teilmenge von X.

Wir haben P_1 und Q_1 schon gefunden. Sei nun $m \in \mathbb{N}$ mit $m \geq 2$ und seien $P_1, \ldots, P_{m-1}$ und $Q_1, \ldots, Q_{m-1}$ schon gefunden, so dass (i)–(iii) für alle $n \in \{1, \ldots, m-1\}$ gelten. Dann sind

$$(K_{m-1} \cap A) \cup P_{m-1} \qquad \text{und} \qquad (K_{m-1} \cap B) \cup Q_{m-1}$$

zwei kompakte Teilmengen von K_{m-1} und somit von K_m^0, und die zwei Mengen sind disjunkt. Die offene Menge $K_m^0 \setminus B$ enthält nach Lemma 1.33 eine kompakte Teilmenge P_m mit $(K_{m-1} \cap A) \cup P_{m-1} \subseteq P_m^0$ mit dem Inneren als Teilmenge von K_m. Da $P_m \subseteq K_m^0$, stimmt dieses mit dem Inneren als Teilmenge der offenen Menge K_m^0 und somit mit dem Inneren als Teilmenge von X überein. Die offene Teilmenge $(K_m^0 \setminus A) \setminus P_m$ enthält eine kompakte Teilmenge Q_m, so dass $(K_{m-1} \cap B) \cup P_{m-1} \subseteq Q_m^0$, mit dem Inneren als Teilmenge von K_m, welches (wie zuvor) mit dem Inneren als Teilmenge von X übereinstimmt.

Nach dem Vorigen existieren $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Da $P_1 \subseteq P_2^0 \subseteq P_2 \subseteq P_3^0 \subseteq \cdots$ und $Q_1 \subseteq Q_2^0 \subseteq Q_2 \subseteq Q_3^0 \subseteq \cdots$ sind

$$P := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} P_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} P_n^0 \quad \text{und} \quad Q := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} Q_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} Q_n^0$$

offene Teilmengen von X. Da die beteiligten Folgen aufsteigend sind und stets $P_n \cap Q_n = \emptyset$, ist $P \cap Q = \emptyset$. Da stets $K_{n-1} \cap A \subseteq P_n \subseteq P$ und $K_{n-1} \cap B \subseteq B \subseteq Q_n \subseteq B$, ist $A \subseteq P$ und $B \subseteq Q$. $\square$

Beweis von Lemma 1.140. Es sei $\mathcal{T}$ die Topologie auf X, die final ist bezüglich $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Es sei $A \subseteq X$ eine Teilmenge. Ist A in $(X, \mathcal{O})$ abgeschlossen, so ist $A \cap K_n = \lambda_n^{-1}(A)$ in K_n abgeschlossen für alle $n \in \mathbb{N}$ und somit A in $X, \mathcal{T})$ abgeschlossen. Ist A in $(X, \mathcal{T})$ abgeschlossen, so gibt es für jede kompakte Teilmenge $K \subseteq X$ ein $n \in \mathbb{N}$ mit $K \subseteq K_n$. Da $A \cap K_n$ in K_n abgeschlossen ist, ist $A \cap K = (A \cap K_n) \cap K$ in K abgeschlossen. Da $(X, \mathcal{O})$ ein k-Raum ist, folgt, dass A in $(X, \mathcal{O})$ abgeschlossen ist. Da es für beide Topologien die gleichen abgeschlossenen Mengen gibt, ist $\mathcal{O} = \mathcal{T}$. $\square$

Beweis von Satz 1.105. Nach Ersetzen von X durch $\overline{Y}$ dürfen wir annehmen, dass $\overline{Y} = X$. Es sei A eine nicht leere Teilmenge von X, die in X offen und abgeschlossen ist. Dann ist $A \cap Y$ relativ offen und relativ abgeschlossen in Y. Gegeben $a \in A$ ist A eine offene Umgebung von a. Da $X = \overline{Y}$, existiert ein $y \in A \cap Y$. Also ist $A \cap Y \neq \emptyset$ und somit $A \cap Y = Y$, da Y zusammenhängend ist. Da A in X abgeschlossen ist, folgt $A = \overline{A} \supseteq \overline{A \cap Y} = \overline{Y} = X$, also $A = X$. $\square$

Beweis von Satz 1.106. Sei $C := (X \times Y)_{(x,y)}$. Da die Projektion $\mathrm{pr}_1 \colon X \times Y \to X$ auf die erste Komponente stetig ist, ist das Bild

$$\mathrm{pr}_1(C)$$

zusammenhängend. Da $x \in \mathrm{pr}_1(C)$, folgt

$$\mathrm{pr}_1(C) \subseteq X_x \,.$$

Analog ist $\mathrm{pr}_2(C) \subseteq Y_y$ und somit

$$C \;\subseteq\; X_x \times Y_y \,.$$

Sei nun $a \in X_x$ und $b \in Y_y$; wir zeigen, dass $(a, b) \in C$, so dass also

$$C \;=\; X_x \times Y_y \,.$$

Da die Abbildung

$$\ell_x \colon Y \to X \times Y, \quad z \mapsto (x, z)$$

stetig ist, ist $\{x\} \times Y_y = \ell_x(Y_y)$ zusammenhängend. Da diese Menge das Element (x, y) enthält, folgt

$$\{x\} \times Y_y \subseteq C$$

und somit $(x, b) \in C$. Analog sehen wir, dass die Menge $X_x \times \{b\}$ zusammenhängend ist. Da diese das Element (x, b) enthält, ist $X_x \times \{b\}$ Teilmenge der Zusammenhangskomponente C von (x, b). Also ist $(a, b) \in C$. $\square$

Beweis von Satz 1.108. Sei $W := (X \times Y)_{(z)}$. Ist $(a, b) \in W$, so gibt es einen Weg

$$\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)\colon [0, 1] \to X \times Y$$

von $z = (x, y)$ nach (a, b). Dann ist γ_1 ein Weg in X von x nach a und γ_2 ein Weg in Y von y nach b, also

$$a \in X_{(x)} \quad \text{und} \quad b \in Y_{(y)}.$$

Folglich ist $W \subseteq X_{(x)} \times Y_{(y)}$. Ist umgekehrt (a, b) ein Punkt in $X_{(x)} \times Y_{(y)}$, so gibt es einen Weg

$$\gamma_1\colon [0, 1] \to X$$

von x nach a und einen Weg $\gamma_2\colon [0, 1] \to Y$ von y nach b. Dann ist

$$\gamma := (\gamma_1, \gamma_2)\colon [0, 1] \to X \times Y, \quad t \mapsto (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$$

ein Weg in $X \times Y$ von (x, y) nach (a, b), also $(a, b) \in W$. Somit ist $X_{(x)} \times Y_{(y)} \subseteq W$ und folglich $W = X_{(x)} \times Y_{(y)}$. $\square$

Beweis von Satz 1.124. Sind $f, g \in C(X, Y)$ und $f \neq g$, so gibt es ein $x \in X$ mit $f(x) \neq g(x)$. Da Y Hausdorffsch ist, gibt es zu $f(x)$ und $g(x)$ disjunkte offene Umgebungen U und V in Y. Da die einpunktige Teilmenge $\{x\}$ von X kompakt ist, sind

$$\lfloor \{x\}, U \rfloor \qquad \text{und} \qquad \lfloor \{x\}, V \rfloor$$

offene Teilmengen von $C(X, Y)$. Diese sind Umgebungen von f bzw. g und disjunkt. $\square$

Beweis von Satz 1.125. Nach Lemma 1.115 genügt es zu zeigen, dass das Urbild von $\lfloor K, U \rfloor$ offen ist für jede kompakte Teilmenge $K \subseteq X$ und jede offene Menge $U \subseteq Y_2$, denn solche Mengen bilden eine Subbasis der kompakt-offenen Topologie auf $C(X, Y_2)$. Für $f \in C(X, Y)$ ist nun $C(X, \phi)(f) = \phi \circ f$ genau dann in $\lfloor K, U \rfloor$, wenn

$$\phi(f(K)) \subseteq U,$$

also $f(K) \subseteq \phi^{-1}(U)$. Es ist also

$$C(K, \phi)^{-1}(\lfloor K, U \rfloor) = \lfloor K, \phi^{-1}(U) \rfloor;$$

dies ist eine offene Teilmenge von $C(X, Y_1)$, da $\phi^{-1}(U)$ in Y_1 offen ist. □

Beweis von Satz 1.126. Es sei $K \subseteq X_1$ eine kompakte Teilmenge und $U \subseteq Y$ eine offene Teilmenge. Dann ist $\phi(K)$ eine kompakte Teilmenge von X_2. Für $f \in C(X_2, Y)$ ist genau dann $C(\phi, Y)(f) = f \circ \phi$ in $\lfloor K, U \rfloor$, wenn

$$f(\phi(K)) \subseteq U,$$

also $f \in \lfloor \phi(K), U \rfloor$. Folglich ist $C(\phi, Y)^{-1}(\lfloor K, U \rfloor) = \lfloor \phi(K), U \rfloor$. Dies ist eine offene Teilmenge von $C(X_2, Y)$, also $C(\phi, Y)$ stetig. □

Beweis von Satz 1.142. Es seien $\mathrm{pr}_1 \colon X \times Y \to X$ und $\mathrm{pr}_2 \colon X \times Y \to Y$ die Projektionen auf die Komponenten. Wir wählen eine k_ω-Folge $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ für X und eine k_ω-Folge $(L_n)_{n \in \mathbb{N}}$ für Y. Nach dem Satz von Tychonoff ist für jedes $n \in \mathbb{N}$ das kartesische produkt $K_n \times L_n$ kompakt in der Produkttopologie; diese stimmt mit der von $X_n \times Y_n$ induzierten Topologie. Ist $K \subseteq X \times Y$ eine kompakte Teilmenge in der Produkttopologie, so ist $\mathrm{pr}_1(K)$ kompakt in X, also $\mathrm{pr}_1(K) \subseteq K_n$ für ein $n \in \mathbb{N}$. da auch $\mathrm{pr}_2(K)$ kompakt ist, kann nach Vergrößern von n erreicht werden, dass zudem $\mathrm{pr}_2(K) \subseteq L_n$ und mit $K \subseteq K_n \times L_n$. Also ist $X \times Y$ hemikompakt. Sei nun $V \subseteq X \times Y$ eine Teilmenge derart, dass $V \cap (K_n \times L_n)$ in $K_n \times L_n$ offen ist für alle $n \in \mathbb{N}$. Wir zeigen, dass V offen ist in $X \times Y$ mit der Produkttopologie. Wenn das stimmt, ist $X \times Y$ nach Lemma 1.129 (d) ein k-Raum.

Gegeben $(x, y) \in V$ gibt es ein $m \in \mathbb{N}$ derart, dass $(x, y) \in K_m \times L_m$. Da $V \cap (K_m \times L_m)$ offen ist in $K_m \times L_m$, liefert die Definition der Produkttopologie offene Mengen $U_m \subseteq K_m$ und $V_m \subseteq L_m$ derart, dass

$$(x, y) \in U_m \times V_m \subseteq V \cap (K_m \times L_m)\,.$$

Da K_m lokal kompakt ist, enthält U_m eine kompakte x-Umgebung $P_m \subseteq K_m$. Ebenso enthält V_m eine kompakte y-Umgebung $Q_m \subseteq L_m$. Dann ist also

$$(x, y) \in P_m \times Q_m \subseteq V \cap (K_m \times L_m).$$

Wir setzen $P_{m-1} := \{x\}$ und $Q_{m-1} := \{y\}$. Rekursiv finden wir Folgen $(P_n)_{n\geq m}$ und $(Q_n)_{n\geq m}$ von kompakten Teilmengen $P_n \subseteq K_n$ und $Q_n \subseteq L_n$ derart, dass für alle natürlichen Zahlen $n \geq m$

$$P_{n-1} \times Q_{n-1} \subseteq P_n^0 \times Q_n^0 \subseteq P_n \times Q_n \subseteq V \cap (K_n \times L_n)$$

mit dem Inneren bezüglich K_n bzw. L_n. Wir haben nämlich schon P_m und Q_m. Ist $\ell > m$ und sind $P_m, \ldots, P_{\ell-1}$ sowie $Q_m, \ldots, Q_{\ell-1}$ schon konstruiert, so sind $P_{\ell-1}$ und $Q_{\ell-1}$ kompakt und es ist

$$P_{\ell-1} \times Q_{\ell-1} \subseteq V \cap (K_{\ell-1} \times L_{\ell-1}) \subseteq V \cap (K_\ell \times L_\ell)\,.$$

Nach dem Lemma von Wallace gibt es offene Teilmengen $U_\ell \subseteq K_\ell$ und $V_\ell \subseteq L_\ell$ derart, dass

$$P_{\ell-1} \times Q_{\ell-1} \subseteq U_\ell \times V_\ell \subseteq V \cap (K_\ell \times L_\ell)\,.$$

Da K_ℓ lokal kompakt ist, enthält U_ℓ eine kompakte Menge P_ℓ derart, dass $P_{\ell-1} \subseteq P_\ell^0$ mit dem Inneren als Teilmenge von K_ℓ. Ebenso enthält V_ℓ eine kompakte Menge Q_ℓ derart, dass $Q_{\ell-1} \subseteq Q_\ell^0$ mit dem Inneren als Teilmenge von L_ℓ. Dies beendet die rekursive Konstruktion.

Nach Lemma 1.69 sind

$$P := \bigcup_{n\geq m} P_n^0 \qquad \text{und} \qquad Q := \bigcup_{n\geq m} Q_n^0$$

offene Teilmengen von X bzw. Y mit $x \in P$, $y \in Q$ und $P \times Q \subseteq V$. Also ist V eine (x,y)-Umgebung in $X \times Y$ bezüglich der Produkttopologie. □

Beweis von Satz 1.145. (a) Ist X ein k-Raum, so ist per Definition $\mathcal{O} = \mathcal{O}_k$.

(b) Für jede offene Teilmenge V in $(X, \mathcal{O})$ ist für jedes $K \in \mathcal{K}(X, \mathcal{O})$ das Urbild $\lambda_K^{-1}(V) = V \cap K$ offen in K, also $V \in \mathcal{O}_k$. Also gilt $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{O}_k$.

(c) Für $x \neq y$ in X gibt es $U, V \in \mathcal{O}$ mit $x \in U$, $y \in V$ und $U \cap V = \emptyset$. Da $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{O}_k$, ist $U \in \mathcal{O}_k$ und $V \in \mathcal{O}_k$, also $(X, \mathcal{O}_k)$ Hausdorffsch.

(d) Jede in $(X, \mathcal{O}_k)$ kompakte Menge ist auch in $(X, \mathcal{O})$ kompakt, da wegen $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{O}_k$ jede offene Überdeckung in $(X, \mathcal{O})$ auch eine in $(X, \mathcal{O}_k)$ ist. Ist $K \in (X, \mathcal{O}_k)$ kompakt, so sei $\mathcal{O}_K$ die von $\mathcal{O}$ auf K induzierte Topologie und $\mathcal{T}$ die von $\mathcal{O}_k$ auf K induzierte Topologie. Da $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{O}_k$, ist $\mathcal{O}_K \subseteq \mathcal{T}$. Da die Inklusion λ_K als Abbildung von $(K, \mathcal{O}_K)$ nach $(X, \mathcal{O}_k)$ und somit auch nach $(K, \mathcal{T})$ stetig ist, ist $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{O}_K$. Also ist $\mathcal{O}_K = \mathcal{T}$. Insbesondere ist $(K, \mathcal{T})$ kompakt, also K eine kompakte Teilmenge von $(X, \mathcal{O}_k)$.

(e) Nach (d) ist $\mathcal{K}(X, \mathcal{O}) = \mathcal{K}(X, \mathcal{O}_k)$ als Menge und auf jedem Element K induzieren $(X, \mathcal{O})$ und $(X, \mathcal{O}_k)$ die selbe Topologie. Die bezüglich den λ_K mit $K \in \mathcal{K}(X, \mathcal{O}_k)$ finale Topologie auf X ist also gleich der bezüglich den λ_K mit $K \in \mathcal{K}(X, \mathcal{O})$ finalen Topologie. Letztere ist per Definition $\mathcal{O}_k$. Also ist $\mathcal{O}_k$ bezüglich den λ_K mit $K \in \mathcal{K}(X, \mathcal{O}_k)$ final und per Definition somit $(X, \mathcal{O}_k)$ ein k-Raum.

(f) Ist f stetig nach $(X, \mathcal{O}_k)$, so auch nach $(X, \mathcal{O})$, da $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{O}_k$. Ist f nach $(X, \mathcal{O})$ stetig, so ist $f(L)$ eine kompakte Teilmenge von $(X, \mathcal{O})$. Nach (e) ist $K := f(L)$ auch in $(X, \mathcal{O}_k)$ kompakt und die von $\mathcal{O}$ und $\mathcal{O}_k$ auf K induzierten Topologien $\mathcal{O}_K$ bzw. $\mathcal{T}$ stimmen überein. Nun ist $f|^K$ nach $(K\mathcal{O}_K) = (K, \mathcal{T})$ stetig, also f auch als Abbildung nach $(X, \mathcal{O}_k)$ stetig. $\square$

2 Standard-Konstruktionen von Quotienten

Wir diskutieren

- Kollabieren einer Teilmenge (oder mehrerer Teilmengen) zu je einem Punkt (Beispiele: Kegel über einem topologischen Raum, Einhängung, Keilprodukt und Bukette);
- Ankleben (Anheften) eines topologischen Raums an einen anderen (Beispiel: Doppel einer kompakten Mannigfaltigkeit mit Rand)
- Ankleben einer Familie topologischer Räume an einen topologischen Raum

Zum Beispiel werden wir später rekursiv das n-Gerüst X_n eines Zellenkomplexes X durch Ankleben einer Familie $(D_{n,j})_{j\in J_n}$ von Kugeln $D_{n,j} \sim \mathbb{D}_n$ an das $(n-1)$-Gerüst X_n gewinnen,

$$X_n \;=\; X_{n-1} \cup_{\phi_n} \coprod_{j\in J_n} D_{n,j},$$

beginnend mit einem diskreten topologischen Raum X_0. Dann ist

$$X_0 \subseteq X_1 \subseteq X_2 \subseteq \cdots$$

und $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}_0} X_n = \lim\limits_{\to} X_n$.

Kollabieren einer Teilmenge zu einem Punkt

Definition 2.1 Es sei X ein topologischer Raum und A eine Teilmenge von X. Gegeben $x, y \in X$ schreiben wir $x \sim y$, wenn $x = y$ oder $x \in A$ und $y \in A$. Wir versehen

$$X/\!/A \;:=\; X/\!\sim$$

mit der Quotiententopologie bezüglich der kanonischen Abbildung

$$q\colon X \to X/\!/A, \quad x \mapsto [x],$$

wobei $[x]$ die $\sim$-Äquivalenzklasse von x ist. Ist $A \neq \emptyset$, so sagen wir, $X/\!/A$ entstehe aus X durch *Kollabieren der Teilmenge A zu einem Punkt.*[13]

[13] Man sagt auch, $X/\!/A$ entstehe aus X durch *Zusammenschlagen* von A zu einem Punkt.

In den meisten Anwendungen ist A in X abgeschlossen.

Lemma 2.2 *Ist $A \subseteq X$ eine abgeschlossene Teilmenge, so gilt:*

(a) *$q\colon X \to X/\!/A$, $x \mapsto [x]$ ist eine abgeschlossene Abbildung.*

(b) *Es ist $q(X \setminus A)$ offen in $X/\!/A$ und $q|_{X\setminus A}\colon X \setminus A \to X/\!/A$ ist eine topologische Einbettung.*

(c) *$X/\!/A$ ist Hausdorffsch, wenn*

 (i) *X Hausdorffsch ist und regulär (also T_3); oder*

 (ii) *X Hausdorffsch ist und A kompakt.*

(d) *Ist X normal, so auch $X/\!/A$.*

Bemerkung 2.3 Identifizieren wir $x \in X \setminus A$ mit $q(x) \in X/\!/A$, so haben wir also eine disjunkte Vereinigung

$$X/\!/A \;=\; (X \setminus A) \cup \{A\}$$

(die natürlich nicht notwendig eine topologische Summe ist).

Beispiel 2.4 Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt $\mathbb{D}_n/\!/\mathbb{S}_{n-1} \sim \mathbb{S}_n$ und $[0,1]^n/\!/\partial([0,1]^n) \sim \mathbb{S}_n$ (siehe Beispiele 1.47 und 1.48).

Beispiel: Kegel über einem topologischen Raum

Definition 2.5 Der *Kegel* über einem topologischen Raum X ist definiert als[14]

$$\operatorname{cone}(X) \;:=\; ([0,1] \times X)/\!/(\{0\} \times X)\,.$$

Mit Identifizierungen wie in Bemerkung 2.3 ist dann also

$$\operatorname{cone}(X) \;=\; (]0,1] \times X) \;\cup\; \{A\}$$

als disjunkte Vereinigung, mit $A := \{0\} \times X$.

Es sei $[0,1] \to \operatorname{cone}(X)$, $x \mapsto [x]$ die kanonische Quotientenabbildung.

[14] Hatchers Notation ist $C(X)$.

Beispiel 2.6 Ist $K \subseteq \mathbb{R}^n$ eine kompakte Teilmenge, so ist die kompakte Teilmenge
$$L := \{(t, tx)\colon t \in [0,1],\ x \in K\}$$
von $\mathbb{R}^{n+1}$ homöomorph zum Kegel $\mathrm{cone}(K)$ über K, also die Menge
$$L \;=\; \bigcup_{t\in[0,1]} t\,(\{1\}\times K)\,.$$
Die Abbildung
$$\phi\colon\ \mathrm{cone}(K) \to L, \quad [(t,x)] \mapsto (t, tx)$$
ist nämlich wohldefiniert und eine Bijektion. Sie ist zudem stetig, da
$$\phi \circ q\colon [0,1]\times K \to L \subseteq \mathbb{R}^{n+1}, \quad (t,x) \mapsto (t,tx)$$
stetig ist. Die stetige Bijektion ϕ ein Homöomorphismus, weil
$$\mathrm{cone}(K) = ([0,1]\times K)//(\{0\}\times K)$$
kompakt ist und L Hausdorffsch.

Bemerkung 2.7 Für jede Teilmenge $X \subseteq \mathbb{R}^n$ ist
$$\phi\colon\ \mathrm{cone}(X) \to L, \quad [(t,x)] \mapsto (t, tx)$$
eine stetige bijektive Abbildung auf die Teilmenge
$$L := \{(t, tx)\colon t \in [0,1],\ x \in X\}$$
von $\mathbb{R}^{n+1}$. Ist X nicht kompakt, so braucht ϕ jedoch kein Homöomorphismus zu sein, zum Beispiel wenn $n = 1$ und $X = \mathbb{N}$ (Übung, Aufgabe 10).[15]

Lemma 2.8 *Für jeden topologischen Raum X ist $q(]0,1]\times X)$ offen im Kegel* $\mathrm{cone}(X)$ *über X und die Einschränkung $q|_{]0,1]\times X}\colon]0,1]\times X \to \mathrm{cone}(X)$ ist eine topologische Einbettung. Ist X Hausdorffsch, so auch* $\mathrm{cone}(X)$.

[15] Über die Aufgabe hinaus kann man zeigen, dass $\mathrm{cone}(\mathbb{N})$ nicht metrisierbar ist und nicht lokal kompakt, siehe Beispiel 2.16.

Beispiel: Keilprodukte

Ein Paar $((X, \mathcal{O}), x_0)$ aus einem topologischen Raum $(X, \mathcal{O})$ und einem Punkt $x_0 \in X$ wird *punktierter topologischer Raum* genannt.

Definition 2.9 Für jede Familie $((X_j, \mathcal{O}_j), x_j)_{j\in J}$ punktierter topologischer Räume betrachten wir die topologische Summe $X := \coprod_{j\in J} X_j$ mit den kanonischen Abbildungen $\lambda_j \colon X_j \to X$ und definieren ihr *Keilprodukt*[16] als

$$\bigvee_{j\in J}(X_j, x_j) \;:=\; \left(\coprod_{j\in J} X_j\right) /\!/ \{\lambda_j(x_j) \colon j \in J\}\,.$$

Sind all die X_j paarweise disjunkt, so ist also

$$\bigvee_{j\in J}(X_j, x_j) \;=\; \left(\bigcup_{j\in J} X_j\right) /\!/ \{x_j \colon j \in J\}\,.$$

Definition 2.10 Es seien $((X, \mathcal{O}), x_0)$ und $((Y, \mathcal{T}), y_0)$ punktierte topologische Räume. Eine Abbildung $f \colon X \to Y$ wir ein *Morphismus punktierter topologischer Räume* von $((X, \mathcal{O}), x_0)$ nach $((Y, \mathcal{T}), y_0)$ genannt, wenn f stetig ist und $f(x_0) = y_0$.

Oft unterdrücken wir die Topologien in der Notation und sprechen einfach von einem Morphismus $f \colon (X, x_0) \to (Y, y_0)$ zwischen punktierten topologischen Räumen (X, x_0) und (Y, y_0).

Es sei $q \colon \coprod_{j\in J} X_j \to \bigvee_{j\in J}(X_j, x_j)$ die kanonische Abbildung, $x \mapsto [x]$. Per Konstruktion ist

$$y_0 := [\lambda_i(x_i)] = \{\lambda_j(x_j) \colon j \in J\} \in \bigvee_{j\in J}(X_j, x_j)$$

unabhängig von $i \in J$. Mit y_0 als Basispunkt ist $\bigvee_{j\in J}(X_j, x_j)$ ein punktierter topologischer Raum. In der vorigen Situation gilt:

Lemma 2.11 *Für jeden punktierten topologischen Raum (Z, z_0) und jede Familie $(f_j)_{j\in J}$ von Morphismen $f_j \colon (X_j, x_j) \to (Z, z_0)$ punktierter topologischer Räume gibt es genau eine Abbildung*

$$f \colon \bigvee_{j\in J}(X_j, x_j) \to Z$$

[16] Die englische Bezeichnung ist *wedge* oder *wedge sum*.

mit $f \circ q \circ \lambda_j = f_j$ für alle $j \in J$. Die Abbildung f ist stetig und es ist $f(y_0) = z_0$, d.h. f ist ein Morphismus punktierter topologischer Räume von $\bigvee_{j\in J}(X_j, x_j)$ mit Basispunkt y_0 nach (Z, z_0).

Lemma 2.12 *Ist X_j ein T_1-Raum für alle $j \in J$, so gilt:*

(a) *Für jedes $j \in J$ ist $X'_j := q(\lambda_j(X_j))$ abgeschlossen in $Y := \bigvee_{j\in J}(X_j, x_j)$ und $q \circ \lambda_j\colon X_j \to Y$ eine topologische Einbettung, also*

$$\phi_j := (q \circ \lambda_j)|^{X'_j}\colon X_j \to X'_j$$

ein Homöomorphismus. Weiter ist

$$Y = \bigcup_{j\in J} X'_j \quad \text{und} \quad X'_i \cap X'_j = \{y_0\} \quad \text{für alle } i \neq j \text{ in } J.$$

(b) *Für jedes $j \in J$ ist $X'_j \setminus \{y_0\}$ eine offene Teilmenge von Y.*

(c) *Für jede kompakte Teilmenge $K \subseteq Y$ ist $K \subseteq \bigcup_{j\in\Phi} X'_j$ für eine endliche Teilmenge $\Phi \subseteq J$.*

(d) *Ist X_j Hausdorffsch für alle $j \in J$, so ist $\bigvee_{j\in J}(X_j, x_j)$ Hausdorffsch.*

Identifiziert man $x \in X_j \setminus \{x_j\}$ mit $q(\lambda_j(x)) \in Y$, so ist also Y die disjunkte Vereinigung

$$Y = \{y_0\} \cup \bigcup_{j\in J}(X_j \setminus \{x_j\}).$$

Beweis von (d). Es seien $x, y \in Y$ mit $x \neq y$. Fall 1. Ist $x \in X'_i \setminus \{y_0\} =: U$ und $y \in X'_j \setminus \{y_0\} =: V$ für Indizes $i \neq j$, so sind U und V disjunkte offene Umgebungen von x bzw. y. Fall 2. Sind $x, y \in X'_j \setminus \{y_0\}$ für ein $j \in J$, so finden wir im Hausdorffraum $X'_j \setminus \{y_0\}$ disjunkte offene Umgebungen von x und y. Wegen (b) sind diese auch in Y offen. Fall 3. Sei $y = y_0$ (der Fall $x = x_0$ ist analog). Es existiert ein $i \in J$ mit $x \in X'_i \setminus \{y_0\}$. da X'_i Hausdorffsch ist, gibt es eine offene y_0-Umgebung U_i in X'_i und eine offene x-Umgebung V in X'_i mit $U_i \cap V = \emptyset$. Dann ist $V \subseteq X'_i \setminus \{y_0\}$ und somit offen in Y. Für $j \in J$ mit $j \neq i$ sei $U_j := X'_j$. Dann ist y_0 in

$$U := \bigcup_{j\in J} U_j$$

und $U \cap V = U \cap X_i' \cap V = U_i \cap V = \emptyset$. Für jedes $j \in J$ ist

$$(q \circ \lambda_j)^{-1}(U) = (q \circ \lambda_j)^{-1}(U_j) = (\phi_j)^{-1}(U_j)$$

offen in X_j, also U offen in Y. $\square$

Definition 2.13 Gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ derart, dass $X_j \cong \mathbb{S}_n$ für alle $j \in J$, so nennt man

$$\bigvee_{j \in J} (X_j, x_j)$$

auch ein *Bukett von n-Sphären.*

Bemerkung 2.14 Sind die gewählten Punkte x_j klar aus dem Zusammenhang oder irrelevant, schreibt man auch einfach $\bigvee_{j \in J} X_j$ statt $\bigvee_{j \in J}(X_j, x_j)$.

Wir erwähnen für die Allgemeinbildung:

Satz 2.15 *Es sei $(X_j, x_j)_{j \in J}$ eine Familie punktierter topologischer Räume, so dass jedes X_j ein T_1-Raum ist. Ist die Menge*

$$J_0 := \{j \in J \colon x_j \text{ ist kein isolierter Punkt in } X_j\}$$

unendlich, so ist $\bigvee_{j \in J}(X_j, x_j)$ nicht metrisierbar und nicht lokal kompakt.

Beispiel 2.16 Bukette unendlich vieler Sphären sind weder lokal kompakt noch metrisierbar. Auch

$$\operatorname{cone}(\mathbb{N}) \sim \bigvee_{n \in \mathbb{N}} ([0,1], 0)$$

ist weder lokal kompakt noch metrisierbar. Dies ist recht erstaunlich, denn $\operatorname{cone}(\mathbb{N})$ ist ja ein Quotient der abgeschlossenen Teilmenge $[0,1] \times \mathbb{N}$ von $\mathbb{R}^2$, die in der induzierten Topologie lokal kompakt und metrisierbar ist.

Die folgende Terminologie wurde benutzt.

Definition 2.17 Ist $(X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum, so nennt man ein Element $x \in X$ einen *isolierten Punkt*, wenn die einpunktige Menge $\{x\}$ in X offen ist.

Bemerkung 2.18 Ist x nicht isoliert, so enthält also jede offene x-Umgebung $U \subseteq X$ einen Punkt $y \neq x$. Ist X ein T_1-Raum, so ist $\{y\}$ abgeschlossen in X und somit

$$U \setminus \{y\} = U \cap (X \setminus \{y\})$$

eine echt kleinere offene x-Umgebung.

Satz 2.15 ist nicht prüfungsrelevant und wir überspringen den Beweis (der im Anhang zu Kapitel 2 nachgelesen werden kann).

Kollabieren mehrerer Teilmengen

Definition 2.19 Es sei X ein topologischer Raum, $n \in \mathbb{N}$ und $A_1, \ldots, A_n$ abgeschlossene Teilmengen von X, die paarweise disjunkt sind, also $A_i \cap A_j = \emptyset$ für alle $i < j$ in $\{1, \ldots, n\}$. Für $x, y \in X$ schreiben wir $x \sim y$, wenn $x = y$ oder ein $i \in \{1, \ldots, n\}$ existiert mit $x, y \in A_i$. Wir definieren

$$X//A_1// \cdots //A_n \;:=\; X/\!\sim,$$

versehen mit der Quotiententopologie bezüglich der kanonischen Abbildung $q\colon X \to X/\!\sim$, $x \mapsto [x]$.

Identifizieren wir $X_1 \setminus A_1$ mit einer Teilmenge von $X_1//A_1$ wie oben, so wird $A_i \subseteq X_1 \setminus A_1$ zu einer abgeschlossenen Teilmenge von $X_1//A_1$, für alle $i \in \{2, \ldots, n\}$, und die Teilmengen $A_2, \ldots, A_n$ von $X//A_1$ sind disjunkt. Fahren wir mit Identifizierungen fort, so ist als Menge also

$$X//A_1// \cdots //A_n \;=\; (X \setminus A) \cup \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$$

mit $A := A_1 \cup \cdots \cup A_n$.

Lemma 2.20 *In der vorigen Situation gilt:*

(a) $q\colon X \to X//A_1// \cdots //A_n$, $x \mapsto [x]$ *ist eine abgeschlossene Abbildung.*

(b) *Es ist* $q(X \setminus A)$ *offen in* $X//A_1// \cdots //A_n$ *und*

$$q|_{X \setminus A}\colon X \setminus A \to X//A_1// \cdots //A_n$$

ist eine topologische Einbettung.

(c) $X//A_1// \cdots //A_n$ *ist Hausdorffsch, wenn*

- (i) X *Hausdorffsch ist und normal (also* T_4*); oder*
- (ii) X *Hausdorffsch ist und jede der Mengen* $A_1, \ldots, A_n$ *kompakt.*

(d) *Ist* X *normal, so auch* $X//A_1// \cdots //A_n$.

Einhängung eines topologischen Raums

Definition 2.21 Die *Einhängung* (englisch: *suspension*) eines topologischen Raums X ist der topologische Raum

$$S(X) \;:=\; ([0,1]\times X)//(\{0\}\times X)//(\{1\}\times X)\,.$$

Im Falle $X \neq \emptyset$ werden die disjunkten Teilmengen $A_1 := \{0\}\times X$ und $A_2 := \{1\}\times X$ von $[0,1]\times X$ also jeweils zu einem Punkt kollabiert. Diese sind abgeschlossen in $[0,1]\times X$, denn es ist $A_1 = \mathrm{pr}_1^{-1}(\{0\})$ und $A_2 = \mathrm{pr}_2^{-1}(\{1\})$ mit der stetigen Projektion $\mathrm{pr}_1\colon [0,1]\times X\to[0,1]$.

Beispiel 2.22 Ist K eine kompakte Teilmenge von $\mathbb{R}^n$, so ist die Menge

$$L \;:=\; \bigcup_{t\in[0,1/2]} (\{1\}\times K) \quad\cup\quad \bigcup_{t\in[1/2,1]} (\{t\}\times(1-t)K) \tag{8}$$

von $\mathbb{R}^{n+1}$ kompakt, denn es ist

$$L = \{(t,h(t))\colon (t,x)\in[0,1]\times K\}$$

mit der stetigen Funktion

$$h\colon [0,1]\to\left[0,\frac{1}{2}\right],\quad t\mapsto\begin{cases} t & \text{wenn } 0\leq t\leq 1/2;\\ 1-t & \text{wenn } 1/2\leq t\leq 1.\end{cases}$$

Die Abbildung

$$\phi\colon S(K)\to L,\quad [(t,x)]\mapsto (t,h(t)x)$$

ist bijektiv und stetig und somit ein Homöomorphismus, da $S(K)$ als Quotient von $[0,1]\times K$ kompakt ist und L Hausdorffsch. Man beachte, dass L die Vereinigung zweier Kegel ist; rechts in (8) ist die erste Menge homöomorph zu einem Kegel über K (mit "Spitze" in 0), die zweite ebenso (mit "Spitze" in $e_1=(1,0,\ldots,0)$).

Einhängungen von Sphären sind Sphären (siehe Übung, Aufgabe 11):

Beispiel 2.23 Für alle $n\in\mathbb{N}_0$ ist

$$S(\mathbb{S}_{n-1}) \;\sim\; \mathbb{S}_n\,.$$

Wir halten noch allgemeine Eigenschaften von Einhängungen fest. Es sei $q\colon [0,1]\times X\to S(X)$, $(t,x)\mapsto[(t,x)]$ die kanonische Abbildung.

Lemma 2.24 *Für jeden topologischen Raum X ist $q(]0,1[\times X)$ offen in der Einhängung $S(X)$ und die Einschränkung $q|_{]0,1[\times X}\colon\,]0,1[\times X\to S(X)$ von q ist eine topologische Einbettung. Ist X Hausdorffsch, so auch $S(X)$.*

Anheften eines topologischen Raums

Definition 2.25 Es seien X und Y topologische Räume, $A \subseteq Y$ eine abgeschlossene Teilmenge und $\phi\colon A \to X$ stetig. Wir betrachten die topologische Summe $X \sqcup Y$ mit den kanonischen Abbildungen $\lambda_1\colon X \to X \sqcup Y$ und $\lambda_2\colon Y \to X \sqcup Y$ und schreiben $z \sim w$ für $z, w \in X \sqcup Y$, wenn $z = w$ oder $z = \lambda_2(a)$ für ein $a \in A$ und $w = \lambda_1(\phi(a))$, oder $w = \lambda_2(a)$ für ein $a \in A$ und $z = \lambda_1(\phi(a))$, oder $z = \lambda_2(a)$ und $w = \lambda_2(b)$ mit $a, b \in A$ derart, dass $\phi(a) = \phi(b)$. Wir versehen

$$X \cup_\phi Y \ := \ (X \sqcup Y)/\!\sim$$

mit der Quotiententopologie bzgl. der kanonischen Abbildung

$$q\colon X \sqcup Y \to X \cup_\phi Y, \quad z \mapsto [z].$$

Man sagt dann, dass der topologische Raum $X \cup_\phi Y$ aus X durch *Anheften* (oder "Ankleben") *von Y mittels der Anheftabbildung ϕ* hervorgeht.

Bemerkung 2.26 Ist $X \cap Y = \emptyset$, so ist $X \sqcup Y = X \cup Y$ und die Äquivalenzrelation erklärt $a \in A \subseteq Y$ als äquivalent zu $\phi(a) \in X$. Für $x \in X$ ist

$$[x] = \{x\} \cup \phi^{-1}(\{x\})$$

mit $\phi^{-1}(\{x\}) = \{a \in A\colon \phi(a) = x\} \subseteq A \subseteq Y$. Für $y \in Y \setminus A$ ist

$$[y] = \{y\}.$$

Für $a \in A$ ist

$$[a] = \{\phi(a)\} \cup \{b \in A\colon \phi(b) = \phi(a)\}.$$

Bemerkung 2.27 Es ist $q \circ \lambda_1$ injektiv und $q \circ \lambda_2|_{Y \setminus A}$ injektiv, und

$$q(\lambda_1(X)) \cap q(\lambda_2(Y \setminus A)) = \emptyset\,.$$

Da $q(\lambda_2(A)) \subseteq q(\lambda_1(X))$, folgt, dass

$$X \cup_\phi Y \ = \ q(\lambda_1(X)) \cup q(\lambda_2(Y \setminus A))$$

als Vereinigung disjunkter Mengen. Identifizieren wir $x \in X$ mit $q(\lambda_1(x)) \in X \cup_\phi Y$ und $y \in Y \setminus A$ mit $q(\lambda_2(y)) \in X \cup_\phi Y$, so ist also

$$X \cup_\phi Y \ = \ X \sqcup (Y \setminus A)$$

als Menge bzw. einfach $X \cup_\phi Y = X \cup (Y \setminus A)$ (wenn die zwei Mengen schon disjunkt sind oder wir sie durch die eben genannten Identifizierungen disjunkt machen).

Bemerkung 2.28 Schreiben wir eine Teilmenge $U \subseteq X \sqcup Y$ als

$$U = U_1 \sqcup U_2$$

mit $U_1 := \lambda_1^{-1}(U)$ und $U_2 := \lambda_2^{-1}(U)$, so ist U genau dann q-saturiert, wenn $U_2 \cap A = \phi^{-1}(U_1)$. Mit Identifizierungen wie in Bemerkung 2.27 ist dann

$$q(U) \; = \; U_1 \cup (U_2 \cap A)\,.$$

Teile (a), (d) und (e) des folgenden Satzes sind wichtig, der Rest nicht prüfungsrelevant.

Satz 2.29 *Es seien X und Y topologische Räume, A eine abgeschlossene Teilmenge von Y und $\phi\colon A \to X$ stetig. Wir identifizieren $X \cup_\phi Y$ als Menge mit $X \cup (Y \setminus A)$, wie in Bemerkung* 2.27*. Dann gilt:*

(a) *X ist abgeschlossen in $X \cup_\phi Y$ und $Y \setminus A$ ist offen. Weiter ist $X \setminus \overline{\phi(A)}$ offen in $X \cup_\phi Y$, wobei $\overline{\phi(A)}$ der Abschluss als Teilmenge von X ist. Die Inklusionsabbildungen $X \to X \cup_\phi Y$ und $Y \setminus A \to X \cup_\phi Y$ sind topologische Einbettungen.*

(b) *Ist X regulär und Hausdorffsch und Y normal und Hausdorffsch, so ist $X \cup_\phi Y$ Hausdorffsch.*

(c) *Die Schlussfolgerung von* (b) *gilt auch, wenn A kompakt ist und X sowie Y Hausdorffsch sind.*

(d) *Ist X normal und Hausdorffsch und Y normal und Hausdorffsch, so ist auch $X \cup_\phi Y$ normal und Hausdorffsch.*

(e) *Sind X und Y kompakt, so auch $X \cup_\phi Y$.*

Beweis von Satz 2.29 (a), (d) und (e). (a) Die Topologie $\mathcal{O}$ auf $X \cup_\phi Y$ ist die Quotiententopologie bezüglich $q\colon X \sqcup Y \to X \cup_\phi Y$, $z \mapsto [z]$ und somit final bezüglich q. Da die Topologie auf $X \sqcup Y$ final ist bezüglich den kanonischen Abbildungen $\lambda_1\colon X \to X \sqcup Y$ und $\lambda_2\colon Y \to X \sqcup Y$, ist $\mathcal{O}$ auch final bezüglich den Abbildungen $q \circ \lambda_1$ und $q \circ \lambda_2$ (wegen der Transitivität finaler Topologien). Ist $B \subseteq X$ eine abgeschlossene Teilmenge, so das Urbild

$$(q \circ \lambda_1)^{-1}(B) = B$$

mit den obigen Identifizierungen (und dieses Urbild ist abgeschlossen in X). Weiter ist $(q \circ \lambda_2)^{-1}(B) = \phi^{-1}(B)$ abgeschlossen in A und somit in Y. Also ist B abgeschlossen in $X \cup_\phi Y$. Die stetige injektive Abbildung $q \circ \lambda_1$ (die wir als Inklusion betrachten) ist also eine abgeschlossene Abbildung. Insbesondere ist X abgeschlossen in $X \cup_\phi Y$ und $q \circ \lambda_1$ eine topologische Einbettung. Für jede offene Teilmenge $V \subseteq Y \setminus A$ ist $(q \circ \lambda_1)^{-1}(V) = \emptyset$ offen in X und $(q \circ \lambda_2)^{-1}(V) = V$ offen in Y, also V offen in $X \cup_\phi X$. Insbesondere ist $Y \setminus A$ offen in $X \cup_\phi Y$ und die stetige injektive Abbildung $Y \setminus A \to X \cup_\phi Y$, $y \mapsto q(\lambda_2(y))$ (die wir als die Inklusionsabbildung interpretieren) eine offene Abbildung, also eine topologische Einbettung. Schließlich ist $X \setminus \overline{f(A)}$ offen in $X \cup_\phi Y$, da $(q \circ \lambda_1)^{-1}(X \setminus \overline{f(A)})$ in X offen ist und $(q \circ \lambda_2)^{-1}(X \setminus \overline{f(A)}) = \emptyset$ offen in Y.

(e) Sind X und Y kompakt, so auch $X \sqcup Y$ und folglich auch $X \cup_\phi Y = q(X \sqcup Y)$.

(d) Es seien A_1 und A_2 disjunkte abgeschlossene Teilmengen von $X \cup_\phi Y$. Dann sind $A_1 \cap X$ und $A_2 \cap X$ disjunkte abgeschlossene Teilmengen von X. Da X normal ist, gibt es nach Lemma 1.84 disjunkte abgeschlossene Teilmengen C_1 und C_2 von X derart, dass $A_1 \cap X \subseteq C_1^0$ und $A_2 \cap X \subseteq C_2^0$ (mit den Inneren als Teilmenge von X). Dann sind

$$A_1 \cup C_1 \quad \text{und} \quad A_2 \cup C_2$$

disjunkte abgeschlossene Teilmengen von $X \cup_\phi Y$ und somit

$$B_j := (q \circ \lambda_2)^{-1}(A_j \cup C_j) = \phi^{-1}(C_j) \cup (q \circ \lambda_2)^{-1}(A_j) = \phi^{-1}(C_j) \cup A_j \cap (Y \setminus A)$$

für $j \in \{1, 2\}$ disjunkte, abgeschlossene Teilmengen von Y. Da Y normal ist, gibt es offene Teilmengen $D_1, D_2 \subseteq Y$ mit $D_1 \cap D_2 = \emptyset$ und $B_1 \subseteq D_1$, $B_2 \subseteq D_2$. Da $\phi^{-1}(C_j^0)$ in A relativ offen ist, gibt es eine offene Teilmenge $W_j \subseteq Y$ mit

$$\phi^{-1}(X_j^0) = A \cap W_j$$

für $j \in \{1, 2\}$. Dann sind

$$V_j := (D_j \setminus A) \cup (D_j \cap W_j)$$

disjunkte offene Teilmengen von Y mit

$$\phi^{-1}(C_j^0) \cup A_j \cap (Y \setminus A) \subseteq V_j$$

und $A \cap V_j = \phi^{-1}(C_j^0)$. Also sind

$$\lambda_1(C_j^0) \cup \lambda_2(V_j)$$

für $j \in \{1,2\}$ disjunkte, q-saturierte offene Mengen und somit

$$P_j \;:=\; q(\lambda_1(C_j^0) \cup \lambda_2(V_j)) \;=\; C_j^0 \cup V_j \cap (Y \setminus A)$$

offen in $X \cup_\phi Y$ und disjunkt. Per Konstruktion ist $A_j \subseteq P_j$.

Gegeben $x_1 \neq x_2$ in $X \cup_\phi Y$ können wir die vorige Konstruktion auf $A_1 := \{x_1\}$, $A_2 := \{x_2\}$ anwenden und erhalten disjunkte offene Umgebungen P_1 und P_2 von x_1 bzw. x_2 in $X \cup_\phi Y$. □

Lemma 2.30 *Es entstehe $X \cup_\phi Y$ durch Anheften von Y an X längs $A \subseteq Y$ mittels $\phi\colon A \to X$. Ist Z ein topologischer Raum und sind $f_1\colon X \to Z$ und $f_2\colon Y \to Z$ stetige Abbildungen derart, dass*

$$f_1(\phi(a)) = f_2(a) \quad \textit{für alle } a \in A, \tag{9}$$

so gibt es genau eine Abbildung $f\colon X \cup_\phi Y \to Z$ derart, dass $f \circ q \circ \lambda_1 = f_1$ und $f \circ q \circ \lambda_2 = f_2$, also $f([(1,x)]) = f_1(x)$ für alle $x \in X$ und $f([(2,y)]) = f_2(y)$ für alle $y \in Y$. Die Abbildung f ist stetig.

Beweis. Es seien $q\colon X \sqcup Y \to X \cup_\phi Y$ die kanonische Abbildung und $\lambda_1\colon X \to X \sqcup Y$, $x \mapsto (1,x)$ sowie $\lambda_2\colon Y \to X \sqcup Y$, $y \mapsto (2,y)$ wie oben. Die durch $h(1,x) := f_1(x)$, $h(2,y) := f_2(y)$ festgelegte Abbildung $h := f_1 \cup f_2\colon X \sqcup Y \to Z$ ist stetig (vgl. 1.63) und faktorisiert nach dem Homomorphiesatz (Satz 1.52) zu einer stetigen Abbildung $f\colon X \cup_\phi Y \to Z$; es ist also $f \circ q = h$. Da jedes $z \in X \cup_\phi Y$ im Bild von $q \circ \lambda_1$ oder $q \circ \lambda_2$ ist, ist $f(z)$ durch die Vorgabe von $f \circ q \circ \lambda_1$ und $f \circ q \circ \lambda_2$ festgelegt. □

Bemerkung 2.31 Ist f aus Lemma 2.30 bijektiv, Z Hausdorffsch und sind X sowie Y (und somit auch $X \cup_\phi Y$) kompakt, so ist f ein Homöomorphismus.

Beispiel: Doppel einer Mannigfaltigkeit mit Rand

Definition 2.32 Es sei $n \in \mathbb{N}_0$. Ein Hausdorffscher topologischer Raum M wird *n-dimensionale topologische Mannigfaltigkeit* genannt, wenn er lokal aussieht wie $\mathbb{R}^n$, d.h. für alle $x \in M$ existiert eine offene x-Umgebung $U \subseteq M$ und ein Homöomorphismus

$$\psi\colon U \to V$$

auf eine offene Teilmenge $V \subseteq \mathbb{R}^n$. Kann V lediglich als relativ offene Teilmenge des Halbraums

$$H \ := \ [0, \infty[\, \times \mathbb{R}^{n-1}$$

gewählt werden, nennt man M eine n-dimensionale topologische Mannigfaltigkeit *mit Rand*. Zusammenhängende, kompakte 2-dimensionale Mannigfaltigkeiten (ohne Rand) werden auch *geschlossene Flächen* genannt. Die obigen Homöomorphismen ψ nennt man *Karten* von M.

In $\mathbb{R}^n$ ist

$$\partial H = \{0\} \times \mathbb{R}^{n-1}.$$

Bemerkung 2.33 Es sei M eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit mit Rand. Mit Methoden der algebraischen Topologie werden wir später sehen: Sind $\psi_1\colon U_1 \to V_1 \subseteq H$ und $\psi_2\colon U_2 \to V_2 \subseteq H$ Karten für M, so ist für $x \in U_1 \cap U_2$

$$\psi_1(x) \in \partial H \quad \Leftrightarrow \quad \psi_2(x) \in \partial H\,.$$

Wir schreiben ∂M für die Menge aller $x \in M$ mit der Eigenschaft, dass $\psi(x) \in \partial H$ für eine (und somit jede) Karte $\psi\colon U \to V \subseteq H$ mit $x \in U$.

Bemerkung 2.34 Die Menge $M \backslash \partial M$ ist offen (also ∂M in M abgeschlossen), denn für $x \in M \setminus \partial M$ und eine Karte $\psi\colon U \to V \subseteq H$ mit $x \in U$ ist

$$\psi(x) \in H \setminus \partial H = H^0$$

und somit $\psi^{-1}(H^0)$ eine offene Umgebung von x in M, die in $M \setminus \partial M$ enthalten ist.

Definition 2.35 Es sei M eine n-dimensionale topologische Mannigfaltigkeit mit Rand. Dann ist die Inklusionsabbildung

$$\phi\colon \partial M \to M$$

stetig, wir können also $Y := M$ an $X := M$ anheften mittels der Anheftabbildung $\phi\colon \partial M \to X$. Der so erhaltene topologische Raum

$$D(M) \ := \ M \cup_\phi M$$

wird die *Verdoppelung* (Doppel) von M genannt.

Es sei

$$q\colon M \sqcup M \to D(M)$$

die kanonische Quotientenabbildung, wobei $M \sqcup M$ die topologische Summe

$$\coprod_{j\in\{1,2\}} M \;=\; (\{1\}\times M) \cup (\{2\}\times M)$$

ist. Für $j \in \{1,2\}$ bezeichnet $\lambda_j\colon M \to M \sqcup M$, $x \mapsto (j,x)$ die kanonische Abbildung in die topologische Summe.

Satz 2.36 *Für jede n-dimensionale Mannigfaltigkeit M mit Rand gilt:*

(a) *Der Doppel $D(M)$ ist eine n-dimensionale topologische Mannigfaltigkeit (ohne Rand).*

(b) *Für $j \in \{1,2\}$ ist*

$$q \circ \lambda_j\colon M \to D(M)$$

eine topologische Einbettung mit abgeschlossenem Bild

$$M_j := q(\{j\} \times M);$$

insbesondere ist $M_j \sim M$ und somit M_j eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit mit Rand.

(c) *Der Rand von M_j als Teilmenge des topologischen Raums $D(M)$ stimmt mit dem Rand ∂M_j im Sinne von Mannigfaltigkeiten überein.*

(d) *Es gilt*

$$D(M) = M_1 \cup M_2 \qquad \text{und} \qquad M_1 \cap M_2 = \partial M_1 = \partial M_2\,.$$

(e) *Die Abbildung $\sigma\colon D(M) \to D(M)$ mit*

$$q(\lambda_1(x)) \mapsto q(\lambda_2(x)),$$

$$q(\lambda_2(x)) \mapsto q(\lambda_1(x))$$

für $x \in M$ ist wohldefiniert und ein Homöomorphismus mit $\sigma \circ \sigma = \mathrm{id}_{D(M)}$.

Bevor wir Satz 2.36 beweisen, schauen wir Beispiele an.

Beispiel 2.37 Die abgeschlossene Einheitskugel $\mathbb{D}_n$ ist eine n-dimensionale topologische Mannigfaltigkeit mit Rand

$$\partial(\mathbb{D}_n) = \mathbb{S}_{n-1}$$

(siehe Aufgabe 17 auf Übungsblatt 5). Der Doppel ist

$$D(\mathbb{D}_n) \sim \mathbb{S}_n\,.$$

Die Abbildung

$$D(\mathbb{D}_n) \to \mathbb{S}_n, \quad [(j,x)] \mapsto \begin{cases} \left(x,\ \sqrt{1-(\|x\|_2)^2}\right) & \text{wenn } j=1; \\ \left(x, -\sqrt{1-(\|x\|_2)^2}\right) & \text{wenn } j=2 \end{cases}$$

ist nämlich wohldefiniert und ein Homöomorphismus.

Beispiel 2.38 Ähnlich wie für $\mathbb{D}_2$ sieht man, dass der Kreisring

$$M := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon 1 \leq \sqrt{x^2+y^2} \leq 3\}$$

eine 2-dimensionale topologische Mannigfaltigkeit mit Rand ist, deren Rand als Mannigfaltigkeit übereinstimmt mit dem Rand

$$\partial M = \mathbb{S}_1 \cup 3\,\mathbb{S}_1$$

von M als Teilmenge von $\mathbb{R}^2$. In Aufgabe 18 auf Übungsblatt 5 rechnen wir nach, dass der Doppel $D(M)$ zu einem Torus $T \subseteq \mathbb{R}^3$ homöomorph ist. (In der Vorlesung wurde dies auch anschaulich erklärt).

Als Vorüberlegung für das nächste Beispiel diskutieren wir kurz interessante Quotientenräume des Einheitsquadrats $[0,1]^2 = [0,1] \times [0,1]$. Für vier verschiedene Äquivalenzrelationen $\sim$ auf $[0,1]^2$ versehen wir die Menge $[0,1]^2/\!\sim$ der Äquivalenzklassen mit der Quotiententopologie bezüglich der kanonischen Abbildung[17]

$$[0,1]^2 \to [0,1]^2/\!\sim, \qquad (x,y) \mapsto [(x,y)]\,.$$

[17] Eine fünfte Äquivalenzrelation wird später einen Quotienten liefern, der zur (in Definition 3.13 definierten) reellen projektiven Ebene homöomorph ist, siehe Bemerkung 4.15.

2.39 (Zylindermantel). Für $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in [0,1]^2$ sei $(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2)$ genau dann, wenn $(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$ oder

$$\{x_1, x_2\} = \{0, 1\} \quad \text{und} \quad y_1 = y_2 \,.$$

Dann ist $[0,1]^2/\sim$ homöomorph zum Zylindermantel $\mathbb{S}_1 \times [0,1] \subseteq \mathbb{R}^3$ (vergleiche Teil (a) und (b) von Aufgabe 6 auf Übungsblatt 2).[18]

2.40 (Torus). Für $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in [0,1]^2$ sei $(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2)$ genau dann, wenn $(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$ oder

$$\{x_1, x_2\} = \{0, 1\} \quad \text{und} \quad y_1 = y_2$$

oder

$$\{y_1, y_2\} = \{0, 1\} \quad \text{und} \quad x_1 = x_2 \,.$$

Dann ist $[0,1]^2/\sim$ homöomorph zu einem Torus $T \subseteq \mathbb{R}^3$ (vergleiche (c)–(e) in Aufgabe 6 auf Übungsblatt 2).

2.41 (Kleinsche Flasche). Für $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in [0,1]^2$ sei $(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2)$ genau dann, wenn $(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$ oder

$$\{x_1, x_2\} = \{0, 1\} \quad \text{und} \quad y_1 = y_2$$

oder

$$\{y_1, y_2\} = \{0, 1\} \quad \text{und} \quad x_2 = 1 - x_1 \,.$$

Man nennt $[0,1]^2/\sim$ (und jeden dazu homöomorphen topologischen Raum) eine *Kleinsche Flasche*. Für die Allgemeinbildung sei erwähnt, dass sich die Kleinsche Flasche als Teilmenge (und Untermannigfaltigkeit) von $\mathbb{R}^4$ realisieren lässt. Eine Projektion auf $\mathbb{R}^3$ lässt sich schön zeichnen (siehe Vorlesung),[19] die aber nicht zur Kleinschen Flasche homöomorph ist und fälschlich eine Selbstdurchdringung hat.[20]

2.42 (Möbiusband). Für $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in [0,1]^2$ sei $(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2)$ genau dann, wenn $(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$ oder

$$\{y_1, y_2\} = \{0, 1\} \quad \text{und} \quad x_2 = 1 - x_1 \,.$$

[18] Und auch zur gelochten Kreisscheibe $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon r \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq R\}$ für alle $0 < r < R$.

[19] Oder googlen Sie Bilder der Kleinschen Flasche.

[20] Sie ist das Bild der Kleinschen Flasche unter einer nicht injektiven stetigen Abbildung.

Man nennt $\mathbb{M} := [0,1]^2/\sim$ (und jeden dazu homöomorphen topologischen Raum) ein *Möbiusband*. Das Möbiusband lässt sich als kompakte Teilmenge von $\mathbb{R}^3$ realisieren und ist eine 2-dimensionale topologische Mannigfaltigkeit mit Rand (siehe Aufgabe 19 auf Übungsblatt 5).

Für die Allgemeinbildung erwähnen wir:

Beispiel 2.43 Der Doppel $D(\mathbb{M})$ des Möbiusbands $\mathbb{M}$ ist eine Kleinsche Flasche.[21]

Folgende Vorüberlegungen sind nützlich im Beweis von Satz 2.36.

Bemerkung 2.44 (a) Schreiben wir eine Teilmenge $U \subseteq M \sqcup M$ als $U = U_1 \sqcup U_2$ mit $U_1 = \lambda_1^{-1}(U)$ und $U_2 = \lambda_2^{-1}(U)$, so ist U genau dann q-saturiert, wenn

$$U_1 \cap \partial M \;=\; U_2 \cap \partial M\,.$$

(b) Für jede offene Teilmenge $W \subseteq M$ ist $W \sqcup W$ nach (a) q-saturiert (da $W \cap \partial M = W \cap \partial M$), also

$$q(W \sqcup W) = (q \circ \lambda_1)(W) \cup (q \circ \lambda_2)(W)$$

eine offene Teilmenge von $D(M)$.

Beweis von Satz 2.36. In der Vorlesung beweisen wir (a), (b), (d) und (e); den nicht prüfungsrelevanten Beweis für (c) finden Sie im Anhang zu Kapitel 2.

Als Hilfsmittel betrachten die stetige Abbildung

$$\tau\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \quad (x_1,\ldots,x_n) \mapsto (-x_1, x_2, \ldots, x_n);$$

da $\tau \circ \tau = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}$, ist τ ein Homöomorphismus.

(e) σ ist wohldefiniert. Weiter ist $\sigma \circ q$ stetig, denn

$$\sigma \circ q \circ \lambda_1 = q \circ \lambda_2$$

[21] Zum Nachweis legt man die Kleinsche Flasche auf die Zeichenebene und schneidet mit einer parallelen Ebene hälftig durch. Beide Stücke sind Möbiusbänder (im unteren Stück hebe man die obere dünne Rinne an der Stelle der Selbstdurchdringung etwas nach oben, um die Selbstdurchdringung zu beheben); siehe Skizzen in der Vorlesung. Siehe auch die Illustration im Buch “Topologie” von Jänich.

ist stetig und ebenso $\sigma \circ q \circ \lambda_2 = q \circ \lambda_1$. Da $\sigma \circ \sigma = \mathrm{id}_{D(M)}$ per Definition, ist σ ein Homöomorphismus.

(b) Nach Satz 2.29 (a) ist $q \circ \lambda_1$ eine topologische Einbettung mit abgeschlossenem Bild. Also ist auch $\sigma \circ q \circ \lambda_1 = q \circ \lambda_2$ eine topologische Einbettung mit abgeschlossenem Bild.

(d) Da $M \sqcup M = \lambda_1(M) \cup \lambda_2(M)$, ist $D(M) = q(M \sqcup M) = q(\lambda_1(M)) \cup q(\lambda_2(M)) = M_1 \cup M_2$. Für $x, y \in M$ ist

$$q(1, x) = q(2, y)$$

genau dann, wenn $x, y \in \partial M$ und $x = y$. Also ist $M_1 \cap M_2 = q(\lambda_j(\partial M)) = \partial M_j$ für alle $j \in \{1, 2\}$.

(a) Nach Satz 2.29 (a) ist $q \circ \lambda_2|_{M \setminus \partial M}$ eine topologische Einbettung mit offenem Bild. Also hat jeder Punkt in $q(\lambda_2(M \setminus \partial M)) = M_2 \setminus \partial M_2$ eine offene Umgebung, die zu einer offenen Teilmenge in $\mathbb{R}^n$ homöomorph ist. Ebenso jeder Punkt in $\sigma(q(\lambda_2(M \setminus \partial M))) = q(\lambda_1(M \setminus \partial M)) = M_1 \setminus \partial M_1$, da σ ein Homöomorphismus ist. Gegeben $x \in \partial M$ existiert eine Karte

$$\psi \colon U \to V \cap H$$

von M mit $x \in U$, mit einer offenen Teilmenge $V \subseteq \mathbb{R}^n$. Dann ist $\psi(x) \in \partial H = \{0\} \times \mathbb{R}^{n-1}$ und somit $\psi(x) \in V \cap \tau(V)$. Nach Ersetzen von V durch $V \cap \tau(V)$ und U durch $\psi^{-1}(V \cap \tau(V) \cap H)$ dürfen wir also annehmen, dass $V = \tau(V)$. Dann ist $U \sqcup U$ eine q-saturierte Teilmenge von $M \sqcup M$ und offen, somit $q(U \sqcup U)$ offen in $D(M)$. Wir zeigen, dass die Abbildung $\theta \colon V \to q(U \sqcup U)$,

$$y = (y_1, \ldots, y_n) \mapsto \begin{cases} q(\lambda_1(\psi^{-1}(y))) & \text{wenn } y_1 \geq 0; \\ q(\lambda_2(\psi^{-1}(\tau(y)))) & \text{wenn } y_1 \leq 0 \end{cases}$$

ein Homöomorphismus ist. Zunächst ist θ wohldefiniert, da $\tau(y) = y$ wenn $y_1 = 0$. Nach dem Klebelemma ist θ stetig. Per Konstruktion ist θ surjektiv. Die Bilder $\theta(V \cap H) \subseteq M_1$ und $\theta(V \cap \tau(H^0)) \subseteq M_2 \setminus \partial M_2$ sind in disjunkten Mengen enthalten, also selbst disjunkt. Die Injektivität von θ kann also auf den zwei eingesetzten Mengen getestet werden. Nun ist $\theta|_{V \cap H} = q \circ \lambda_1 \circ \psi^{-1}|_{V \cap H}$ injektiv und auch $\theta|_{V \cap \tau(H^0)} = (q \circ \lambda_2 \circ \psi^{-1} \circ \tau)|_{V \cap \tau(H^0)}$. Also ist θ bijektiv. Da $q \circ \lambda_j|_{M \setminus \partial M}$ eine offene Einbettung ist und ebenso $\psi^{-1}|_{V \cap H^0}$, ist $\theta|_{V \cap H^0}$ eine offene Einbettung und ebenso $\theta|_{V \cap \tau(H^0)}$. Wir müssen nur noch zeigen, dass $\theta(W)$ eine $\theta(y)$-Umgebung ist für jedes $y \in V \cap (\{0\} \times \mathbb{R}^{n-1})$ und jede offene y-Umgebung $W \subseteq V$. Wie bei V dürfen wir annehmen, dass $W = \tau(W)$ und erhalten wie für V, dass $\theta(W) = q(\psi^{-1}(W \cap H) \sqcup \psi^{-1}(W \cap H))$ in $D(M)$ offen ist.

Es muss nur noch gezeigt werden, dass $D(M)$ Hausdorffsch ist. Seien hierzu z und w zwei verschiedene Elemente von $D(M)$. Sind $z, w \in M_j \setminus \partial M_j$ für ein $j \in \{1, 2\}$, so gibt es in der offenen Menge $M_j \setminus \partial M_j$, die zum Hausdorffraum $M \setminus \partial M$ homöomorph ist, disjunkte offene Umgebungen für z und w. Sei nun $z \in M_1$ und $w \in M_2 \setminus \partial M_2$ (analog bei vertauschten Rollen von M_1 und M_2). Dann ist $z = q(\lambda_1(x))$ und $w = q(\lambda_2(y))$ für ein $x \in M$ und ein $y \in M \setminus \partial M$. Wir wählen eine kompakte Umgebung K von y in der offenen Teilmenge $M \setminus \partial M$ von M. Es sei K^0 das Innere von K in M. Dann sind

$$M \sqcup (M \setminus K) \qquad \text{und} \qquad \emptyset \sqcup K^0$$

disjunkte offene Teilmengen von $M \sqcup M$ und q-saturiert, also $q(M \sqcup (M \setminus K))$ und $q(\emptyset \sqcup K^0) = q(\lambda_2(K^0))$ disjunkte offene Teilmengen von $D(M)$; diese enthalten z bzw. w. Sind $z, w \in \partial M_1 = \partial M_2$, so ist $z = q(\lambda_1(x))$ und $w = q(\lambda_1(y))$ mit Elementen $x \neq y$ von ∂M. Da M Hausdorffsch ist, gibt es in M disjunkte offene Umgebungen U und V für x bzw. y. Dann sind

$$U \sqcup U \qquad \text{und} \qquad V \sqcup V$$

disjunkte offene Teilmengen von $M \sqcup M$ und q-saturiert, also $q(U \sqcup U)$ und $q(V \sqcup V)$ disjunkte offene Umgebungen von z und w. $\square$

Abbildungszylinder

Definition 2.45 Gegeben eine stetige Abbildung $f\colon X \to Y$ zwischen topologischen Räumen ist der zugehörige *Abbildungszylinder* definiert als der topologische Raum

$$Z_f \;:=\; Y \cup_\phi ([0,1] \times X),$$

der durch Anheften von $[0,1] \times X$ längs $\{0\} \times X$ an Y erfolgt mit der Anheftabbildung

$$\phi\colon \{0\} \times X \to Y, \quad (0, x) \mapsto f(x)\,.$$

2.46 Es seien $\lambda_1\colon Y \to Y \sqcup ([0,1] \times X)$ und $\lambda_2\colon [0,1] \times X \to Y \sqcup ([0,1] \times X)$ die kanonischen Einbettungen und

$$q\colon Y \sqcup ([0,1] \times X) \to Z_f$$

die kanonische Quotientenabbildung. Nach Satz 2.29 (a) ist $q \circ \lambda_1$ eine abgeschlossene Einbettung, wir können also Y mit einer abgeschlossenen Teilmenge von Z_f identifizieren. Weiter ist $q \circ \lambda_2$ auf

$$([0,1] \times X) \setminus (\{0\} \times X) \;=\;]0,1] \times X$$

eine offene Einbettung, wir können also $]0,1] \times X$ als offene Teilmenge von Z_f betrachten. Identifizieren wir $x \in X$ mit $(1,x) \in \,]0,1] \times X$, so können wir X mit der Teilmenge $q(\lambda_2(\{1\} \times X))$ von Z_f identifizieren.

Dies ist eine abgeschlossene Teilmenge von Z_f, wegen des folgendes Lemmas.

Lemma 2.47 *Für jedes $r \in \,]0,1]$ ist $q(\lambda_2([r,1] \times X))$ eine abgeschlossene Teilmenge des Abbildungszyliners Z_f. Die topologische Einbettung $q \circ \lambda_2|_{[r,1]\times X}$ ist also eine abgeschlossene Abbildung.*

Beweis. Die Teilmenge $\lambda_2([r,1] \times X)$ der topologischen Summe

$$Y \sqcup ([0,1] \times X)$$

ist q-saturiert und abgeschlossen, folglich $q(\lambda_2([r,1] \times X)$ abgeschlossen in Z_f. Da $q \circ \lambda_2|_{]0,1]\times X}$ ein Homöomorphismus auf das Bild ist, gilt dies auch für $q \circ \lambda_2|_{[r,1]\times X}$. □

Beispiel 2.48 Ist X ein topologischer Raum, so können wir den Abbildungszylinder Z_f bilden mit $Y := X$ und $f := \mathrm{id}_X$. Es ist dann

$$q \circ \lambda_2 \colon [0,1] \times X \to Z_f$$

ein Homöomorphismus, insbesondere also

$$Z_f \;\sim\; [0,1] \times X\,.$$

[Da $\phi\colon \{0\} \times X \to X$, $(0,x) \mapsto x$ surjektiv ist, ist $q \circ \lambda_2 \colon [0,1] \times X \to Z_f$ surjektiv. Da ϕ injektiv ist, ist per Definition der Äquivalenzrelation $q \circ \lambda_2$ auch injektiv, also eine stetige Bijektion. Ist $U \subseteq [0,1] \times X$ offen, so ist $V := \{x \in X \colon (0,x) \in U\}$ offen in X, also $W := \lambda_1(V) \cup \lambda_2(U)$ eine offene saturierte Teilmenge von $X \sqcup ([0,1] \times X)$. Da $q(\lambda_2(U)) = q(W)$, ist $q(\lambda_2(U))$ offen in Z_f, also $q \circ \lambda_2$ eine offene Abbildung und somit ein Homöomorphismus.]

Anheften einer Familie topologischer Räume

Nun sei X ein topologischer Raum, $(Y_j)_{j\in J}$ eine Familie topologischer Räume, $A_j \subseteq Y_j$ eine abgeschlossene Teilmenge und $\phi_j\colon A_j \to X$ stetig. Wir betrachten die topologische Summe $Y := \coprod_{j\in J} Y_j$ mit den kanonischen Abbildungen $\lambda_j\colon Y_j \to Y$ und ihre Teilmenge $A := \bigcup_{j\in J} \lambda_j(A_j)$. Diese ist in Y abgeschlossen, da $\lambda_j^{-1}(A) = A_j$ in Y_j abgeschlossen ist für alle $j \in J$. Nach Aufgabe 16 aus der Übung[22] ist die von Y auf A induzierte Topologie final bezüglich den Abbildungen $A_j \to A$, $x \mapsto \lambda_j(x)$; es ist also A gleich der topologischen Summe $A = \coprod_{j\in J} A_j$. Somit ist $\phi := \cup_{j\in J}\phi_j\colon A \to X$ stetig.

Definition 2.49 In der vorigen Situation sagen wir, der topologische Raum

$$X \cup_\phi \coprod_{j\in J} Y_j$$

entstehe aus X durch *Anheften der Familie $(Y_j)_{j\in J}$ topologischer Räume längs ihrer Teilmengen $A_j \subseteq Y_j$ mit den Anheftabbildungen $\phi_j\colon A_j \to X$.*

Mit Identifizierungen wie in Bemerkung 1.65 und Bemerkung 2.27 gilt:

Lemma 2.50 *Ist jedes Y_j ein T_1-Raum, so ist für jede kompakte Teilmenge $K \subseteq X \cup_\phi \coprod_{j\in J} Y_j$ die Menge*

$$J_0 := \{j \in J\colon K \cap (Y_j \setminus A_j) \neq \emptyset\}$$

endlich.

Der Beweis entspricht denjenigen von Lemma 1.71 (b) und Lemma 2.12 (c); wir überspringen ihn daher in der Vorlesung.

Beweis. Für jedes $j \in J_0$ wählen wir ein Element $y_j \in K \cap (A_j \setminus A_j)$ und setzen $D := \{y_j\colon j \in J_0\}$. Wir behaupten, dass jede Teilmenge von D in $X \cup_\phi \coprod_{j\in J} Y_j$ abgeschlossen ist. Somit ist D diskret in der induzierten Topologie. Insbesondere ist D abgeschlossen in $X \cup_\phi \coprod_{j\in J} Y_j$ und somit

[22] Sei $B \subseteq A$. Ist für jedes $j \in J$ das Urbild $\lambda_j^{-1}(B)$ in A_j relativ abgeschlossen, so ist das Urbild in Y_j abgeschlossen (da A_j in Y_j abgeschlossen ist), also B in Y abgeschlossen und folglich in A relativ abgeschlossen. Ist umgekehrt B in A relativ abgeschlossen, so ist B in Y abgeschlossen (da A abgeschlossen ist), also $\lambda_j^{-1}(B)$ abgeschlossen in Y_j und somit relativ abgeschlossen in A_j.

in K abgeschlossen. Folglich ist D kompakt. Wie jeder kompakte diskrete topologische Raum ist D endlich. Folglich ist J_0 endlich. $\square$

Die topologische Summe von endlich vielen kompakten topologischen Räumen ist kompakt. Da jeder Quotient eines kompakten topologischen Raums kompakt ist, folgt:

Lemma 2.51 *Ist in Definition* 2.49 *die Indexmenge J endlich und X sowie jedes Y_j kompakt, so ist der durch Anheften der Familie $(Y_j)_{j\in J}$ an X entstehende topologische Raum $X \cup_\phi \coprod_{j\in J} Y_j$ kompakt.*

Bemerkung 2.52 Es entstehe $X \cup_\phi \coprod_{j\in J} Y_j$ durch Anheften einer Familie $(Y_j)_{j\in J}$ topologischer Räume an X längs abgeschlossenen Teilmengen $A_j \subseteq Y_j$ mittels Anheftabbildungen $\phi_j \colon A_j \to X$ (wobei $\phi := \cup_{j\in J}\phi_j \colon \coprod_{j\in J} A_j \to X$). Es seien $\lambda_1 \colon X \to X \sqcup \coprod_{j\in J} Y_j$ und $\lambda_2 \colon \coprod_{j\in J} Y_j \to X \sqcup \coprod_{j\in J} Y_j$ die kanonischen Abbildungen und $\lambda_i \colon Y_i \to \coprod_{j\in J} Y_j$ die kanonische Abbildung für $i \in J$. Es seien Z ein topologischer Raum und $f_1 \colon X \to Z$ sowie $f_j \colon Y_j \to Z$ für $j \in J$ stetige Abbildungen derart, dass $f_1(\phi_j(a)) = f_j(a)$ für alle $j \in J$ und $a \in A_j$. Aus Lemma 2.30 und 1.63 folgt, dass es genau eine Abbildung

$$f \colon X \cup_\phi \coprod_{j\in J} Y_j \to Z$$

derart gibt, dass $f \circ q \circ \lambda_1 = f_1$ und $f \circ q \circ \lambda_2 \circ \lambda_j = f_j$ für alle $j \in J$, und dieses f ist stetig. Ist f bijektiv, Z Hausdorffsch, J endlich und sind X sowie jedes Y_j kompakt, so ist f nach Bemerkung 2.31 ein Homöomorphismus.

Anhang zu Kapitel 2

Der Vollständigkeit halber geben wir Beweise für Satz 2.15, die Teile (b) und (c) von Satz 2.29, und Satz 2.36 (c). Die Beweise sind nicht prüfungsrelevant.

Beweis für Satz 2.15. (a) Angenommen, in $Y := \bigvee_{j\in J}(X_j, x_j)$ existiert eine kompakte Umgebung K von y_0. Nach Lemma 2.12 (c) ist dann $K \subseteq \bigcup_{j\in\Phi} X'_j$ für eine endliche Teilmenge $\Phi \subseteq J$. Das Innere K^0 ist eine offene y_0-Umgebung in Y, also ist für jedes $j \in J$ das Urbild

$$\phi_j^{-1}(K^0)$$

eine offene x_j-Umgebung in X_j. Da J_0 eine unendliche Menge ist, ist $J_0 \setminus \Phi \neq \emptyset$. Sei $i \in J_0 \setminus \Phi$. Dann ist

$$\phi_i^{-1}(K^0) = \{x_i\}$$

keine x_i-Umgebung, da x_i in X_i kein isolierter Punkt ist, Widerspruch.

(b) Wir adaptieren die Idee aus (f)–(h) in Übungsaufgabe 10. Die unendliche Menge J_0 hat eine abzählbar unendliche Teilmenge $A \subseteq J_0$. Wir schreiben

$$A = \{j_n \colon n \in \mathbb{N}\}$$

mit paarweise verschiedenen Elementen $j_1, j_2, \ldots$. Käme die Topologie auf Y von einer Metrik d, so würde in Y jede y_0-Umgebung die $(1/k)$-Kugel

$$V_k := \{y \in Y \colon d(y, y_0) < 1/k\}$$

enthalten für ein $k \in \mathbb{N}$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist $\phi_{j_n}^{-1}(V_k)$ eine offene x_{j_n}-Umgebung in X_{j_n}. Insbesondere gibt es also eine offene x_j-Umgebung $V_{k,n}$ in X mit

$$V_{k,n} \subseteq \phi_n^{-1}(V_k)\,.$$

Nach Verkleinern von $V_{2,n}, V_{3,n}, \ldots$ dürfen wir annehmen, dass

$$V_{1,n} \supseteq V_{2,n} \supseteq V_{3,n} \supseteq \cdots$$

gilt und zudem

$$V_{k,n} \setminus V_{k+1,n} \neq \emptyset \tag{10}$$

ist (vgl. Bemerkung 2.18). Dann ist

$$V := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \phi_{j_n}(V_{n,n}) \;\cup\; \bigcup_{j\in J\setminus A} X'_j$$

eine offene y_0-Umgebung in Y, denn für $j \in J \setminus A$ ist

$$\phi_j^{-1}(V) = X_j$$

offen in X_j und für $n \in \mathbb{N}$ ist

$$\phi_{j_n}^{-1}(V) = V_{n,n}$$

offen in X_{j_n}. Nach dem Obigen muss es ein $k \in \mathbb{N}$ geben mit

$$V_k \subseteq V.$$

Für alle $n \in \mathbb{N}$ folgt

$$V_{k,n} \subseteq \phi_{j_n}^{-1}(V_k) \subseteq \phi_{j_n}^{-1}(V) = V_{n,n}\,.$$

Für $n := k+1$ ist also

$$V_{k,n} \subseteq V_{k+1,n},$$

im Widerspruch zu (10). $\square$

Beim nicht prüfungsrelevanten Beweis der Teile (b) und (c) von Satz 2.29 nutzt folgendes Lemma (und die anschließende Bemerkung).

Lemma 2.53 *Es seien X und Y topologische Räume, $A \subseteq Y$ eine abgeschlossene Teilmenge und $\phi\colon A \to X$ stetig. Wir identifizieren X wie oben mit einer Teilmenge von $X \cup_\phi Y$. Ist Y normal oder A kompakt und Y Hausdorffsch, so gilt: Sind U und V offene Teilmengen von X, deren Abschlüsse $\overline{U}$ und $\overline{V}$ in X disjunkt sind, so gibt es offene Teilmengen P und Q von $X \cup_\phi Y$ derart, dass $U = X \cap P$, $V = X \cap Q$ und $P \cap Q = \emptyset$.*

Beweis. Die Urbilder $\phi^{-1}(\overline{U})$ und $\phi^{-1}(\overline{V})$ sind disjunkt und in A abgeschlossen, also auch in Y abgeschlossen. Ist Y normal, so finden wir offene Teilmengen $C, D \subseteq Y$ derart, dass

$$\phi^{-1}(\overline{U}) \subseteq C, \quad \phi^{-1}(\overline{V}) \subseteq D \quad \text{und} \quad C \cap D = \emptyset\,.$$

Die gleiche Schlussfolgerung gilt, wenn Y Hausdorffsch ist und A kompakt, also auch $L_1 := \phi^{-1}(\overline{U})$ und $L_2 := \phi^{-1}(\overline{U})$ kompakt sind.[23] Weil $\phi^{-1}(U)$ in A

[23]Weil Y Hausdorffsch ist, ist die Diagonale $\Delta_Y := \{(y,y)\colon y \in Y\}$ in $Y \times Y$ abgeschlossen, also $(Y \times Y) \setminus \Delta_Y$ offen (siehe Aufgabe 12 (a)). Letztere Menge enthält $L_1 \times L_2$, nach dem Lemma von Wallace also auch $C \times D$ mit offenen Teilmengen $C, D \subseteq Y$ derart, dass $L_1 \subseteq C$ und $L_2 \subseteq D$. Da $(C \times D) \cap \Delta_Y = \emptyset$, ist $C \cap D = \emptyset$.

relativ offen ist, gibt es eine offene Teilmenge $C_1 \subseteq Y$ mit $\phi^{-1}(U) = A \cap C_1$. Ebenso finden wir eine offene Teilmenge $D_1 \subseteq Y$ mit $\phi^{-1}(V) = A \cap C_2$. Dann ist

$$P := U \cup (q \circ \lambda_2)(C \cap C_1)$$

eine Teilmenge von $X \cup_\phi Y$ mit $P \cap X = U$, denn es ist $C \cap C_1 \cap A = \phi^{-1}(U)$. Also ist $\lambda_1(U) \cup \lambda_2(C \cap C_1)$ saturiert bezüglich q und somit P offen, als Bild dieser offenen Menge unter q. Analog ist

$$Q := V \cup (q \circ \lambda_2)(D \cap D_1)$$

offen in $X \cup_\phi Y$. Es ist $P \cap Q = \emptyset$, da $P \cap Q \cap X = U \cap V = \emptyset$ und $P \cap Q \cap (Y \setminus A) = ((C \cap C_1) \cap (D \cap D_1)) \setminus A = \emptyset$. □

Bemerkung 2.54 Statt $\overline{U} \cap \overline{V} = \emptyset$ anzunehmen, wäre es genug, $U \cap V = \emptyset$ anzunehmen und zu verlangen, dass die Abschlüsse $\overline{U \cap \phi(A)}$ und $\overline{V \cap \phi(A)}$ als Teilmengen von $\phi(A)$ disjunkt sind. Der Beweis geht analog, mit dem Urbild $\phi^{-1}(\overline{U \cap \phi(A)})$ an Stelle von $\phi^{-1}(\overline{U})$ und $\phi^{-1}(\overline{V \cap \phi(A)})$ statt $\phi^{-1}(\overline{V})$.

Beweis von Satz 2.29 (b) und (c).

(b) Seien $x_1, x_2 \in X \cup_\phi Y$ mit $x_1 \neq x_2$. Sind $x_1, x_2 \in Y \setminus A$, so können wir im Hausdorffraum $Y \setminus A$ offene disjunkte Umgebungen von x_1 und x_2 wählen und diese sind auch in $X \cup_\phi Y$ offen, nach (a). Ist $x_1 \in X$ und $x_2 \in Y \setminus A$, so gibt es wegen der Regularität von Y offene Mengen $U, V \subseteq Y$ mit $A \subseteq U$, $x_2 \in V$ und $U \cap V = \emptyset$; nach Ersetzen von V mit $V \cap (Y \setminus A)$ dürfen wir $V \subseteq Y \setminus A$ annehmen. Also ist V offen in $X \cup_\phi Y$. Die Menge

$$W := X \cup U \cap (Y \setminus A) = q(\lambda_1(X) \cup \lambda_2(U))$$

ist offen in $X \cup_\phi Y$, da $\lambda_1(X) \cup \lambda_2(U)$ in $X \sqcup Y$ offen ist und q-saturiert (da $A \subseteq U$). Zudem ist $x_1 \in W$ und $W \cap V = \emptyset$. Sind schließlich $x_1, x_2 \in X$, so finden wir, da X Hausdorffsch ist, in X disjunkte Umgebungen B und C von x_1 bzw. x_2. Da X regulär ist, finden wir in X abgeschlossene Umgebungen U und V von x_1 bzw. x_2 mit $U \subseteq B$ und $V \subseteq C$. Dann ist $U \cap V \subseteq B \cap C = \emptyset$. Nach Lemma 2.53 existieren offene Mengen $P, Q \subseteq X \cup_\phi Y$ derart, dass $P \cap X = U^0$, $Q \cap X = V^0$ (mit den Inneren als Teilmenge von X) und $P \cap Q = \emptyset$. Es ist $x_1 \in U^0 \subseteq P$ und $x_2 \in V^0 \subseteq Q$.

(c) Seien $x_1 \neq x_2$ in $X \cup_\phi Y$. In den Fällen $x_1, x_2 \in Y \setminus A$ sowie $x_1 \in X$,

$x_2 \in Y \setminus A$ finden wir disjunkte offene Umgebungen wie im Beweis von (b). Man beachte, dass $f(A)$ kompakt und somit in X abgeschlossen ist, da X Hausdorffsch ist. Nach Satz 2.29 (a) ist $X \setminus f(A)$ somit eine offene Teilmenge von $X \cup_\phi Y$. Sind $x_1, x_2 \in X \setminus f(A)$, so finden wir disjunkte offene Umgebungen von x_1 bzw. x_2 im Hausdorffraum $X \setminus f(A)$ und diese sind auch in $X \cup_\phi Y$ offene Umgebungen. Es bleibt nur der Fall, dass $x_1, x_2 \in X$ und mindestsn einer der Punkte in $f(A)$ ist, etwa $x_2 \in f(A)$. Da X Hausdorffsch ist, finden wir disjunkte offene Umgebungen $\widetilde{U}$ und $\widetilde{V}$ von x_1 bzw. x_2 in X. Da der kompakte Hausdorffraum $f(A)$ lokal kompakt ist, finden wir in eine kompakte Umgebung L_2 von x_2 in $f(A)$ mit $L_2 \subseteq f(A) \cap \widetilde{V}$. Das Innere L_2^0 als Teilmenge von $f(A)$ ist relativ offen, also $L_2^0 = f(A) \cap W_2$ für eine offene Teilmenge $W_2 \subseteq X$. Dann ist $V := \widetilde{V} \cap W_2$ eine offene x_2-Umgebung in X mit $V \cap f(A) \subseteq L_2 \subseteq \widetilde{V}$ und $L \cap \widetilde{U} = \emptyset$.

Falls $x_1 \notin f(A)$, ist $U := \widetilde{U} \cap (X \setminus f(A))$ eine offene x_1-Umgebung in X mit $U \cap V = \emptyset$. Weiter ist $\overline{U \cap f(A)} = \emptyset$, der Schnitt mit $\overline{V \cap f(A)} \subseteq L$ also leer. Nach Bemerkung 2.54 gibt es also disjunkte offene Teilmengen P und Q von $X \cup_\phi Y$ mit $x_1 \in U = X \cap P$ und $x_2 \in V = X \cap Q$.

Falls auch $x_1 \in f(A)$, gibt es in $f(A)$ eine kompakte x_1-Umgebung L_1. Deren Inneres L_1^0 als Teilmenge von $f(A)$ von der Form $L_1^0 = X \cap W_1$ ist mit einer offenen Teilmenge $W_1 \subseteq X$. Dann ist $U := \widetilde{U} \cap W_1$ eine offene x_2-Umgebung in X mit $U \cap f(A) \subseteq L_1 \subseteq \widetilde{U}$ und $L_1 \cap L_2 \subset \widetilde{U} \cap \widetilde{V} = \emptyset$. Nach Bemerkung 2.54 gibt es disjunkte offene Teilmengen P und Q von $X \cup_\phi Y$ mit $x_1 \in U = X \cap P$ und $x_2 \in V = X \cap Q$. $\square$

Beweis für Satz 2.36 (c). Es sei R_j der Rand von M_j als Teilmenge des topologischen Raums $D(M)$, für $j \in \{1, 2\}$. Weiter sei $\tau\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ der Homöomorphismus

$$(x_1, \ldots, x_n) \mapsto (-x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Wir wissen aus Satz 2.29 (a), dass M_1 (also auch $\sigma(M_1) = M_2$) in $D(M)$ abgeschlossen ist und

$$q(\lambda_2(M \setminus \partial M)) = M_2 \setminus \partial M_2$$

offen, womit auch $M_1 \setminus \partial M_1 = \sigma(M_2 \setminus \partial M_2)$ offen ist. Da nach dem Vorigen

$$M_j \setminus \partial M_j \subseteq M_j^0 = M_j \setminus R_j,$$

folgt $R_j \subseteq \partial M_j$. Wäre die Inklusion strikt, so wäre M_j^0 eine echte Obermenge von $M_j \setminus \partial M_j$, es gäbe also ein $x \in M_j^0 \cap \partial M_j$. Wir führen diese Annahme zum Widerspruch im Fall $j = 1$ (der Fall $j = 2$ lässt sich analog behandeln). Da $x \in \partial M_1$, können wir eine Karte

$$\theta^{-1} \colon q(U \sqcup U) \to V$$

bauen aus einer Karte $\psi \colon U \to V \cap H$ für M mit $\lambda_1^{-1}(x) \in U$ und einer offenen Teilmenge $V \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $V = \tau(V)$. Da $x \in M_1$, ist $\theta^{-1}(x) \in H \cap V$ und $\theta^{-1}(x) = \psi(x) \in \partial H$. Für alle $k \in \mathbb{N}$ existiert ein

$$y_k \in V \cap (]-\infty, 0[\, \times \mathbb{R}^{n-1})$$

mit $\|y_k - \theta^{-1}(x)\|_2 < 1/k$. Dann gilt also $y_k \to \theta^{-1}(x)$ für $k \to \infty$ und somit $\theta(y_k) \to x$. Nun ist aber

$$\theta(y_k) = q(\lambda_2(\psi^{-1}(\tau(y_k)))) \in M_2 \setminus \partial M_2$$

für alle $k \in \mathbb{N}$ und somit $\theta(y_k) \notin M_1$. Es folgt $x \in R_1 = M_1 \setminus M_1^0$, was $x \in M_1^0$ widerspricht. $\square$

3 Zellenkomplexe

Wir lernen nun eine sehr wichtige Klasse topologischer Räume kennen unter halten erste Eigenschaften fest, zunächst von der Warte der mengentheoretischen Topologie.

Definition 3.1 Für $n \in \mathbb{N}_0$ nennen wir einen topologischen Raum D eine *n-Zelle*, wenn D zur abgeschlossenen Einheitskugel $\mathbb{D}_n$ homöomorph ist. Wir halten einen Homöomorphismus

$$\phi\colon D \to \mathbb{D}_n$$

fest und definieren

$$\partial D \;:=\; \phi^{-1}(\partial \mathbb{D}_n) = \phi^{-1}(\mathbb{S}_{n-1}).$$

Wir werden später sehen, dass ∂D unabhängig von ϕ ist, dies ist momentan aber nicht relevant. Ist ein topologischer Raum e zur offenen Einheitskugel $\mathbb{D}_n^0 \subseteq \mathbb{R}^n$ (und somit zu $\mathbb{R}^n$) homöomorph, so nennen wir e eine *offene n-Zelle*. Für jede n-Zelle D ist $D \setminus \partial D$ eine offene n-Zelle.

Bemerkung 3.2 Jeder einpunktige topologische Raum $\{x\}$ ist sowohl eine 0-Zelle als auch eine offene 0-Zelle.

Wir betrachten nun topologische Räume $(X, \mathcal{O})$, die wie folgt aufgebaut werden können:

3.3 Wir starten mit einem diskreten topologischen Raum $X_0 \neq \emptyset$, dem sogenannten 0-*Gerüst*. Jede Teilmenge von X_0 ist also offen und es ist

$$X_0 = \coprod_{x \in X_0} \{x\}$$

mit den 0-Zellen $\{x\}$, die in X_0 offen sind.

3.4 Rekursiv legen wir topologische Räume X_n für $n \in \mathbb{N}_0$ fest; für jedes $n \in \mathbb{N}$ entsteht X_n aus X_{n-1} durch Anheften einer Familie $(D_{n,j})_{j \in J_n}$ von n-Zellen $D_{n,j} \sim \mathbb{D}_n$ mittels stetigen Anheftabbildungen

$$\phi_{n,j}\colon \partial D_{n,j} \to X_{n-1}\,.$$

Dann ist also

$$X_n \;:=\; X_{n-1} \cup_{\phi_n} \coprod_{j \in J_n} D_{n,j}$$

mit der stetigen Funktion

$$\phi_n := \cup_{j \in J_n} \phi_{n,j} \colon \coprod_{j \in J_n} \partial D_{n,j} \to X_{n-1}$$

auf der abgeschlossenen Teilmenge $A_n := \coprod_{j \in J_n} \partial D_{n,j}$ der topologischen Summe $\coprod_{j \in J_n} D_{n,j}$.

3.5 Wir identifizieren X_{n-1} mit der entsprechenden Teilmenge von X_n, die in X_n abgeschlossen ist und auf welcher X_n die gegebene Topologie induziert (siehe Satz 2.29 (a)). Die gerichtete Folge

$$X_0 \subseteq X_1 \subseteq X_2 \subseteq \cdots$$

topologischer Räume ist also strikt. Wir definieren nun

$$X \;:=\; \bigcup_{n \in \mathbb{N}_0} X_n \;=\; \lim_{\to} X_n$$

als die Vereinigung der X_n, versehen mit der direkten Limestopologie $\mathcal{O}$.

3.6 Wie in jedem strikten direkten Limes induziert X auf X_n die dort gegebene Topologie für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ (siehe Lemma 1.71 (c)). Da—wie gerade festgestellt—für alle $n \in \mathbb{N}_0$ die Teilmenge X_n in X_{n+1} abgeschlossen ist, ist X_n in X_m abgeschlossen für alle $m \geq n$. Nach Lemma 1.71 (d) ist folglich X_n eine abgeschlossene Teilmenge von X, für jedes $n \in \mathbb{N}_0$.

3.7 Für $n \in \mathbb{N}$ sei $q_n \colon X_{n-1} \sqcup \coprod_{j \in J_n} D_{n,j} \to X_n$ die kanonische Quotientenabbildung und $\lambda_{n,i} \colon D_{n,i} \to X_{n-1} \sqcup \coprod_{j \in J_n} D_{n,j}$ die kanonische Abbildung in die topologische Summe für $i \in J_n$. Für $n \in \mathbb{N}_0$ und $j \in J_n$ betrachten wir die Abbildung

$$\Phi_{n,j} \colon D_{n,j} \to X, \quad x \mapsto q_n(\lambda_{n,j}(x)),$$

wobei wir X_n als Teilmenge von X betrachten. Die Abbildungen $\Phi_{n,j}$ werden *charakteristische Abbildungen* genannt. Wir setzen

$$e_{n,j} := \Phi_{n,j}(D_{n,j} \setminus \partial D_{n,j})$$

für $j \in J_n$, mit der von X_n induzierten Topologie; als Menge ist dann

$$X_n = X_{n-1} \cup \bigcup_{j \in J_n} e_{n,j}$$

und dies ist eine Vereinigung disjunkter Mengen.

3.8 Wir setzen noch $J_0 := X_0$ und $e_{0,j} := \{j\}$ für $j \in J_0$. Dann ist also

$$X_0 = \bigcup_{j \in J_0} e_{0,j} .$$

Weiter ist für jedes $n \in \mathbb{N}_0$

$$X_n = \bigcup_{k=0}^{n} \bigcup_{j \in J_k} e_{k,j}$$

und

$$X = \bigcup_{k \in \mathbb{N}_0} \bigcup_{j \in J_k} e_{k,j},$$

jeweils als Vereinigung paarweise disjunkter Mengen.

3.9 Wir nennen $(X, (\Phi_{n,j})_{n \in \mathbb{N}_0, j \in J_n})$ einen *Zellenkomplex*. Für $n \in \mathbb{N}_0$ nennt man den topologischen Raum $X_n = \bigcup_{k=0}^{n} \bigcup_{j \in J_k} \Phi_{k,j}(D_{k,j})$ das *n-Gerüst* des Zellenkomplexes, mit der von X induzierten Topologie (also der oben bereits benutzten). Missbräuchlich bezeichnet man manchmal den topologischen Raum X als Zellenkomplex. Traditionell werden Zellenkomplexe auch *CW-Komplexe* genannt. Ist $X = X_d$ für ein $d \in \mathbb{N}_0$, so nennt man den Zellenkomplex $(X, (\Phi_{n,j})_{n \in \mathbb{N}_0, j \in J_n})$ *endlich-dimensional* und das kleinste solche d die *Dimension* des Zellenkomplexes.

Wir geben nun einige Beispiele von Zellenkomplexen $(X, (\Phi_{n,j})_{n \in \mathbb{N}_0, j \in J_n})$ an bzw. zu X homöomorphe topologische Räume.

Beispiel 3.10 Für $n \in \mathbb{N}$ sei $X_0 := e_{0,1}$ eine einpunktige Menge, $e_{0,1} = \{x_0\}$. Wir setzen

$$X_k := X_0 \quad \text{für } k \in \{1, \ldots, n-1\},$$

heften also eine leere Familie von k-Zellen an. Nun heften wir eine n-Zelle $\mathbb{D}_n$ längs $\mathbb{S}_{n-1}$ an X_{n-1} an mit der Anheftabbildung

$$\phi_{n,1} \colon \mathbb{S}_{n-1} \to X_{n-1}, \quad x \mapsto x_0 .$$

Dann ist

$$X_n := X_{n-1} \cup_{\phi_{n,1}} \mathbb{D}_n \sim \mathbb{D}_n // \mathbb{S}_{n-1} \sim \mathbb{S}_n$$

(vergleiche Bemerkung 2.31). Wir können die n-Sphäre $\mathbb{S}_n$ also als einen n-dimensionalen Zellenkomplex auffassen mit zwei Zellen, nämlich einer 0-Zelle und einer n-Zelle. Es ist

$$\mathbb{S}_n = e_{0,1} \cup e_{n,1} \,.$$

Die 0-Sphäre $\mathbb{S}_0 = \{-1, 1\} = \{-1\} \cup \{1\}$ ist ein Zellenkomplex mit zwei 0-Zellen.

Im Folgenden identifizieren wir $x \in \mathbb{R}^n$ mit $(x, 0) \in \mathbb{R}^{n+1}$, so dass $\mathbb{R}^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$.

Beispiel 3.11 Die 0-Sphäre $\mathbb{S}_0$ ist nach dem Vorigen ein Zellenkomplex mit zwei 0-Zellen,

$$\mathbb{S}_0 = e_{0,1} \cup e_{0,2}$$

mit $e_{0,1} = \{-1\}$, $e_{0,2} = \{1\}$. Durch Anheften des oberen und unteren Halbkreises an $\mathbb{S}_0$ erhalten wir den Einheitskreis $\mathbb{S}_1$; es ist also $\mathbb{S}_1$ ein Zellenkomplex mit zwei 0-Zellen und zwei 1-Zellen,

$$\mathbb{S}_1 = \mathbb{S}_0 \cup e_{1,1} \cup e_{1,2} = e_{0,1} \cup e_{0,2} \cup e_{1,1} \cup e_{1,2} \,.$$

Allgemein entsteht $\mathbb{S}_n$ für $n \in \mathbb{N}$ durch Anheften der oberen und unteren Halbsphäre an $\mathbb{S}_{n-1}$, es ist also $\mathbb{S}_n$ ein Zellenkomplex mit je zwei k-Zellen $e_{k,1}$ und $e_{k,2}$ für $k \in \{0, 1, \dots, n\}$;

$$\mathbb{S}_n = \mathbb{S}_{n-1} \cup e_{n,1} \cup e_{n,2} = \bigcup_{j=0}^{n} (e_{k,1} \cup e_{k,2}) \,.$$

Beispiel 3.12 Die abgeschlossene Einheitskugel (und n-Zelle) $\mathbb{D}_n$ erhalten wir durch Anheften von $\mathbb{D}_n$ an $\mathbb{S}_{n-1}$ längs $\mathbb{S}_{n-1}$ mittels der Anheftabbildung $\mathrm{id}_{\mathbb{S}_{n-1}}$. Mit $X_{n-1} = \mathbb{S}_{n-1}$, $X_n = \mathbb{D}_n$ ist also $\mathbb{D}_n$ ein n-dimensionaler Zellenkomplex

$$\mathbb{D}_n = \mathbb{S}_{n-1} \cup \mathbb{D}_n = \mathbb{S}_{n-1} \cup e_{n,1} = e_{n,1} \cup \bigcup_{k=0}^{n-1} (e_{k,1} \cup e_{k,2})$$

mit einer n-Zelle und je zwei k-Zellen für $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ (wobei Beispiel 3.11 benutzt wurde). Ist $n \geq 2$, so können wir $\mathbb{D}_n$ auch mittels einer 0-Zelle, einer $n-1$-Zelle und einer n-Zelle beschreiben,

$$\mathbb{D}_n = \mathbb{S}_{n-1} \cup e_{n,1} = e_{0,1} \cup e_{n-1,1} \cup e_{n,1},$$

unter Benutzung von Beispiel 3.10.

Definition 3.13 Für $n \in \mathbb{N}_0$ ist der reelle projektive Raum $\mathbb{R}P_n$ der Dimension n definiert also die Menge aller 1-dimensionalen Untervektorräume von $\mathbb{R}^{n+1}$, also

$$\mathbb{R}P_n = \{\mathbb{R}x \colon x \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}\}\,.$$

Die Abbildung

$$q_n \colon \mathbb{S}_n \to \mathbb{R}P_n, \quad x \mapsto \mathbb{R}x$$

ist surjektiv; man versieht $\mathbb{R}P_n$ mit der Quotiententopologie bezüglich q_n. Da $\mathbb{S}_n$ kompakt ist, ist auch $\mathbb{R}P_n$ kompakt. Weiter ist $\mathbb{R}P_n$ Hausdorffsch (siehe Aufgabe 22 auf Übungsblatt 6, wo auch gezeigt wird, dass $\mathbb{R}P_n$ eine n-dimensionale topologische Mannigfaltigkeit ist).

Beachten Sie, dass

$$q_n^{-1}(\{q_n(x)\}) = \{x, -x\} \quad \text{für alle } x \in \mathbb{S}_n. \tag{11}$$

Beispiel 3.14 Der 0-dimensionale reelle projektive Raum ist die Menge aller 1-dimensionalen Untervektorräume in $\mathbb{R}$; davon gibt es nur einen, nämlich $\mathbb{R}$. Mit $e_{0,1} := \{\mathbb{R}\}$ ist also

$$\mathbb{R}P_0 \; = \; e_{0,1}$$

eine 0-Zelle. Wir zeigen per Induktion nach $n \in \mathbb{N}_0$, dass $\mathbb{R}P_n$ zu einem n-dimensionalen Zellenkomplex gemacht werden kann mit je einer k-Zelle für alle $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$, also

$$\mathbb{R}P_n = e_{0,1} \cup e_{1,1} \cup \cdots \cup e_{n,1}\,.$$

Für den Induktionsschritt sei $n \geq 1$ und $\mathbb{R}P_{n-1}$ ein $(n-1)$-dimensionaler Zellenkomplex

$$\mathbb{R}P_{n-1} = e_{0,1} \cup \cdots \cup e_{n-1,1}\,.$$

Die obere Halbsphäre

$$D_{n,1} := \{(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{S}_n \colon x_{n+1} \geq 0\}$$

ist eine n-Zelle, denn

$$D_{n,1} \to \mathbb{D}_n, \quad (x_1, \ldots, x_{n+1}) \mapsto (x_1, \ldots, x_n)$$

ist ein Homöomorphismus mit Umkehrabbildung

$$\mathbb{D}_n \to D_{n,1}, \quad (x_1, \ldots, x_n) \mapsto \left(x_1, \ldots, x_n, \sqrt{1 - x_1^2 - \cdots - x_n^2}\right).$$

Weiter ist
$$\Phi_{n,1} := q_n|_{D_{n,1}} \colon D_{n,1} \to \mathbb{R}P_n \tag{12}$$
eine stetige surjektive Abbildung, welche wegen der Kompaktheit von $D_{n,1}$ und Hausdorff-Eigenschaft von $\mathbb{R}P_n$ eine abgeschlossene Abbildung und Quotientenabbildung ist. Es ist $\partial D_{n,1} = \mathbb{S}_{n-1} \times \{0\} = \mathbb{S}_{n-1}$ mit der vorigen Identifizierung. Sei
$$\phi_n := q_{n-1} \colon \mathbb{S}_{n-1} \to \mathbb{R}P_{n-1}\,.$$
Dann ist
$$\mathbb{R}P_{n-1} \cup_{\phi_n} D_{n,1} \;\sim\; \mathbb{R}P_n = \mathbb{R}P_{n-1} \cup e_{n,1} = e_{0,1} \cup \cdots \cup e_{n,1}$$
mit $e_{n,1} = q(\{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{S}_n \colon x_n > 0\})$ (vergleiche 2.31).

Bemerkung 3.15 (Viualisierung von $\mathbb{R}P_1$ und $\mathbb{R}P_2$).

(a) Die obige Quotientenabbildung ϕ_1 bildet den oberen Halbkreis $D_{1,1}$ auf $\mathbb{R}P_1$ ab. Sie ist auf Punkten (x, y) mit $y > 0$ injektiv und es ist $\phi_1(-1, 0) = \phi_1(1, 0)$. Mit $A := \{(-1, 0), (1, 0)\}$ ist also
$$\mathbb{R}P_1 \;\sim\; D_{1,1}//A \;\sim\; [0, 1]//\{0, 1\} \;\sim\; \mathbb{S}_1\,.$$
(b) Ähnlich wie man sich die Kleinsche Flasche (abgesehen von Selbstdurchdringungen) als Teilmenge von $\mathbb{R}^3$ vorstellen kann, wollen wir auch die *reelle projektive Ebene* $\mathbb{R}P_2$ im $\mathbb{R}^3$ visualisieren. Wir starten mit der obigen Quotientenabbildung $\phi_2 \colon D_{2,1} \to \mathbb{R}P_2$, die auf der oberen Halbsphäre definiert ist. Diese ist auf Punkten (x, y, z) mit $z > 0$ injektiv, jedoch ist $\phi_2(x, y, 0) = \phi_2(-x, -y, 0)$ für $(x, y) \in \mathbb{S}_1$. Wir gehen zunächst zu einem Quotienten von $D_{2,1}$ über, der lediglich $(0, 1, 0)$ und $(0, -1, 0)$ identifiziert. Als Teilmenge von $\mathbb{R}^3$ können wir diesen erhalten, indem wir den Rand einer Halbsphäre aus Gummi an zwei entgegengesetzten Punkten zusammenheften, so dass daraus ein einziger Punkt P wird. Es entsteht eine Art oben geschlossene Hose; die Öffnungen der Hosenbeine sind Kreise, die rechts und links an P grenzen. Durchlaufen wir den rechten Kreis beginnend bei P, so sind dessen Punkte gegenläufig mit den entsprechenden Punkten des linken Kreises zu identifizieren. Wir können dies realisieren, indem wir den linken Kreis um 180 Grad drehen um die durch P laufende Achse (die Front über oben nach hinten) und dann den Kreis unten herum um 180 Grad drehen bei Festhalten von P, so dass die zwei Kreislinien aufeinander zu liegen kommen (Skizzen siehe Vorlesung).

Für schönere Visualisierungen der projektiven Ebene (etwa die sogenannte Boysche Fläche) sei auf das Internet verwiesen.

Beispiel 3.16 Identifizieren wir wie zuvor $\mathbb{R}^n$ jeweils mit $\mathbb{R}^n \times \{0\} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$, so haben wir

$$\mathbb{S}_0 \subseteq \mathbb{S}_1 \subseteq \mathbb{S}_2 \subseteq \cdots$$

und können den direkten Limes

$$\mathbb{S}_\infty := \lim_{\rightarrow} \mathbb{S}_n$$

bilden als topologischer Raum. Nach Beispiel 3.11 ist dies ein Zellenkomplex mit n-Gerüst

$$\mathbb{S}_n = \bigcup_{k=0}^{n} (e_{k,1} \cup e_{k,2})$$

für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

Beispiel 3.17 Ebenso haben wir die aufsteigende Folge

$$\mathbb{R}P_0 \subseteq \mathbb{R}P_1 \subseteq \mathbb{R}P_2 \subseteq \cdots$$

und können den direkten Limes

$$\mathbb{R}P_\infty := \lim_{\rightarrow} \mathbb{R}P_n$$

bilden als topologischer Raum. Nach Beispiel 3.14 ist dies ein Zellenkomplex mit n-Gerüst

$$\mathbb{R}P_n = \bigcup_{k=0}^{n} e_{k,1}$$

für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

In den vorigen Beispielen waren alle n-Gerüste kompakt. Wir kommen zu nicht-kompakten Beispielen.

Beispiel 3.18 Die reelle Gerade $\mathbb{R}$ kann als 1-dimensionaler Zellenkomplex betrachtet werden mit 0-Gerüst

$$X_0 := \mathbb{Z}$$

und der Familie $(D_{1,j})_{j\in\mathbb{Z}}$ der 1-Zellen

$$D_{1,j} := [j, j+1],$$

welche mittels der Anheftabbildungen

$$\phi_{1,j} \colon \{j, j+1\} \to \mathbb{Z}, \quad x \mapsto x$$

an $X_0 = \mathbb{Z}$ angeheftet werden. Die Abbildung

$$f \colon \mathbb{Z} \cup_\phi \coprod_{j\in\mathbb{Z}} [j, j+1] \to \mathbb{R},$$

welche auf $\mathbb{Z}$ und jedem Intervall $[j, j+1]$ die Inklusion nach $\mathbb{R}$ ist, ist stetig und bijektiv. Als Spezialfall eines allgemeinen Arguments (Satz 3.29), das wir im Laufe des Kapitels kennenlernen, ist f ein Homöomorphismus.

Beispiel 3.19 Ebenso sehen wir, dass $\mathbb{R}^2$ als 2-dimensionaler Zellenkomplex betrachtet werden kann (und $\mathbb{R}^3$ als 3-dimensionaler sowie $\mathbb{R}^n$ als n-dimensionaler Zellenkomplex – siehe Übung). Es sei nämlich

$$X_0 \;=\; \mathbb{Z}^2\,.$$

Für $j := (n, k) \in \mathbb{Z}^2 \times \{1, 2\}$ sei

$$D_{1,j} := n + [0, 1]e_k$$

mit dem $k$ten Standard-Einheitsvektor e_k. Dann ist

$$X_0 \sqcup \coprod_{j\in\mathbb{Z}^2\times\{1,2\}} D_{1,j} \sim \bigcup_{m\in\mathbb{Z}} (\{m\} \times \mathbb{R} \,\cup\, \mathbb{R} \times \{m\}) \;=\; X_1$$

(vergleiche Satz 3.29). Für $j \in \mathbb{Z}^2$ sei $D_{2,j} := j + [0, 1]^2$ und $\phi_{2,j} \colon \partial D_{2,j} \to X_1$ die Inklusion. Für $\phi_2 := \cup_{j\in\mathbb{Z}^2}\phi_{2,j}$ betrachten wir die Abbildung

$$f \colon X_1 \cup_{\phi_2} \coprod_{j\in\mathbb{Z}^2} D_{2,j} \to \mathbb{R}^2,$$

die auf X_1 und jedem $D_{2,j}$ die Inklusion nach $\mathbb{R}^2$ ist. Dann ist f stetig und bijektiv; nach Satz 3.29 ist f ein Homöomorphismus.

Wir halten erste Eigenschaften von Zellenkomplexen fest.

Satz 3.20 *Es sei $(X, (\Phi_{n,j})_{n\in\mathbb{N}_0, j\in J_n})$ ein Zellenkomplex und X_n sein n-Gerüst für $n \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt:*

(a) *X_n ist Hausdorffsch und normal, für alle $n \in \mathbb{N}$.*

(b) *X ist Hausdorffsch und normal.*

(c) *Jede kompakte Teilmenge $K \subseteq X$ ist in X_n enthalten für ein $n \in \mathbb{N}$. Es ist*

$$K \cap e_{k,j} \neq 0$$

nur für endlich viele (k, j) mit $k \in \mathbb{N}_0$ und $j \in J_k$.

(d) *Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ und $j \in J_n$ ist $e_{n,j}$ eine offene Teilmenge von X_n und eine offene n-Zelle in der induzierten Topologie.*

(e) *Die Topologie $\mathcal{O}$ auf X ist final bezüglich der Familie $(\Phi_{n,j})_{n\in\mathbb{N}_0, j\in J_n}$ der charakteristischen Abbildungen. Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ ist die Topologie auf X_n final bezüglich der Familie der $\Phi_{k,j}|^{X_n}$ mit $k \in \{0, \ldots, n\}$ und $j \in J_k$.*

(f) *Alle Wegkomponenten von X sind offen und sie stimmen mit den Zusammenhangskomponenten überein.*

(g) *X ist genau dann wegzusammenhängend, wenn sein 1-Gerüst X_1 wegzusammenhängend ist.*

Wir beweisen zunächst (a) und (b).

3.21 Wir zeigen per Induktion, dass X_n Hausdorffsch und normal ist für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Induktionsanfang $n = 0$: Wie jeder diskrete topologische Raum ist X_0 Hausdorffsch und normal. Induktionsschritt: Ist $n \in \mathbb{N}$ und ist X_{n-1} Hausdorffsch und normal, so ist nach Satz 2.29 (d) auch

$$X_n = X_{n-1} \cup_{\phi_n} \coprod_{j\in J_n} D_{n,j}$$

Hausdorffsch und normal, denn jedes $D_{n,j}$ ist als kompakter Hausdorffraum ein normaler topologischer Raum, so dass auch die topologische Summe $\coprod_{j\in J_n} D_{n,j}$ normal und Hausdorffsch ist.

3.22 Da jedes X_n normal und Hausdorffsch ist und abgeschlossen in X_{n+1}, ist nach Lemma 1.85 (b) auch $X = \varinjlim X_n$ normal und Hausdorffsch.

3.23 Zum Beweis von (c) sei $K \subseteq X$ kompakt. Nach Lemma 1.71 (b) ist $K \subseteq X_n$ für ein $n \in \mathbb{N}_0$. Für alle natürlichen Zahlen $m > n$ und alle $j \in J_m$ ist $e_{m,j} \in X_m \setminus X_n$, also $K \cap e_{m,j} = \emptyset$. Nach Lemma 2.50 ist die Menge aller $j \in J_n$ mit $e_{n,j} \cap K \neq \emptyset$ endlich. Für $k \in \{0, \ldots, n-1\}$ ist $X_k \cap K$ eine abgeschlossene Teilmenge von K, also kompakt. Zudem ist $X_k \cap K \subseteq X_k$. Nach dem schon Gezeigten ist die Menge der $j \in J_k$ mit $X_k \cap K \cap e_{k,j} \neq \emptyset$ endlich.

3.24 Beweis von (d). Nach Satz 2.29 (a) können wir die offene Teilmenge

$$Q := \left(\coprod_{j \in J_n} D_{n,j} \right) \setminus \left(\coprod_{j \in J_n} \partial D_{n,j} \right)$$

von $\coprod_{j \in J_n} D_{n,j}$ mit der von $\coprod_{j \in J_n} D_{n,j}$ induzierten Topologie identifizieren mit einer offenen Teilmenge von X_n, so dass als Menge

$$X_n = X_{n-1} \cup Q\,.$$

Da die kanonische Abbildung

$$\lambda_{n,i} \colon D_{n,i} \to \coprod_{j \in J_n} D_{n,j}$$

eine topologische Einbettung mit offenem Bild ist, ist $\lambda_{n,i}(D_{n,i} \setminus \partial D_{n,i})$ offen in Q und somit in X_n, und es ist $\lambda_{n,i}|_{D_{n,i} \setminus \partial D_{n,i}}$ eine topologische Einbettung; ohne die vorigen Identifizierungen ist diese Abbildung $\Phi_{n,i}|_{D_{n,i} \setminus \partial D_{n,i}}$. Ihr Bild $e_{n,i}$ ist also eine offene n-Zelle und offen in X_n.

3.25 Beweis von (e). Wir zeigen zuerst die Aussage über X_n, per Induktion nach $n \in \mathbb{N}_0$. Die diskrete Topologie auf X_0 ist final bezüglich den Inklusionen $\Phi_{0,j} \colon \{j\} \to X_0$. Sei nun $n \geq 1$ und gelte die Aussage für X_{n-1}. Die Topologie auf X_n ist final bezüglich der kanonischen Abbildung

$$q_n \colon X_{n-1} \sqcup \coprod_{j \in J_n} D_{n,j} \to X_n\,.$$

Die Topologie auf der topologischen Summe S im Definitionsbereich ist final bezüglich den kanonischen Abbildungen $X_{n-1} \to S$ und $\coprod_{j \in J_n} D_{n,j} \to S$.

Erstere ist per Induktion final bezüglich den $\Phi_{k,j}|^{X_{n-1}}$ für $k \in \{0, \ldots, n-1\}$ und $j \in J_k$; zweitere ist final bezüglich den kanonischen Abbildungen $D_{n,i} \to \coprod_{j \in J_n} D_{n,j}$ für $i \in J_n$. Wegen der Transitivität finaler Topologien ist die Topologie auf X_n final bezüglich den Kompositionen

$$D_{k,j} \overset{\Phi_{k,j}|^{X_{n-1}}}{\to} X_{n-1} \to S \overset{q}{\to} X_n$$

für $k \in \{0, \ldots, n-1\}$ und $j \in J_k$ (die wegen der gemachten Identifizierungen gleich $\Phi_{k,j}|^{X_n}$ sind) und den Kompositionen

$$D_{n,i} \to \coprod_{j \in J_n} D_{n,j} \to S \overset{q}{\to} X_n$$

für $i \in J_n$, also bezüglich den $\Phi_{n,i}|^{X_n}$.

3.26 Beweis von (f). Gegeben $x \in X$ sei W seine Wegkomponente. Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ und jedes $j \in J_n$ ist $\Phi_{n,j}(D_{n,j})$ wegzusammenhängend als stetiges Bild eines wegzusammenhängenden Raums. Also gilt entweder

$$\Phi_{n,j}(D_{n,j}) \subseteq W$$

(womit $\Phi_{n,j}^{-1}(W) = D_{n,j}$ offen in $D_{n,j}$ ist) oder

$$\Phi_{n,j}(D_{n,j}) \cap W = \emptyset,$$

in welchem Fall $\Phi_{n,j}^{-1}(W) = \emptyset$ ebenfalls offen in $D_{n,j}$ ist. Da nach (e) die Topologie auf X final bezüglich der Familie der $\Phi_{n,j}$ ist, ist W offen in X. Nach Satz 1.102 stimmen Wegkomponenten und Zusammenhangskomponenten also überein.

3.27 Beweis von (g). Sei X_1 wegzusammenhängend. Wir zeigen per Induktion nach $n \in \mathbb{N}$, dass X_n wegzusammenhängend ist. Wir wählen $x_0 \in X_0$. Dann ist auch $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n$ wegzusammenhängend, denn jeder Punkt darin ist mit x_0 verbindbar. Für $n = 1$ gilt die Aussage per Voraussetzung. Sei $n \geq 2$ und X_{n-1} wegzusammenhängend. Jedes $x \in X_n$ liegt in X_{n-1} (ist also in X_{n-1} mit x_0 verbindbar) oder in $\Phi_{n,j}(D_{n,j})$ für ein $j \in J_n$ und ist dann mit jedem Punkt y in $\Phi_{n,j}(\partial D_{n,j})$ durch einen Weg verbindbar, da $\Phi_{n,j}(D_{n,j})$ wegzusammenhängend ist. Da y in X_{n-1} mit x_0 verbindbar ist, ist x in X_n mit x_0 verbindbar.

Sei nun X wegzusammenhängend. Wäre X_1 nicht wegzusammenhängend, so gäbe es $x, y \in X_1$, die nicht in X_1 durch einen Weg verbindbar sind. Es gibt jedoch einen Weg $\gamma\colon [0,1] \to X$ mit $\gamma(0) = x$ und $\gamma(1) = y$. Da $\gamma([0,1])$ kompakt ist, gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\gamma([0,1]) \subseteq X_n$. Nach dem Vorigen muss $n \geq 2$ sein. Für festes γ wählen wir n minimal. Wir wählen nun γ so, dass das zugehörige n minimal ist. Für dieses minimale n wählen wir nun ein γ so, dass die Zahl der $j \in J_n$ mit

$$\gamma([0,1]) \cap e_{n,j} \neq \emptyset$$

minimal ist. Für ein solches j gibt es ein kleinstes $t_* \in [0,1]$ und ein größtes $t^* \in [0,1]$ mit

$$\gamma(t_*), \gamma(t^*) \in \Phi_{n,j}(D_{n,j})\,.$$

Da $e_{n,j}$ in X_n offen ist, muss $t_* < t^*$ sein und

$$\gamma(t_*), \gamma(t^*) \in \Phi_{n,j}(\partial D_{n,j}) \subseteq X_{n-1}\,.$$

Da $\Phi_{n,j}(\partial D_{n,j})$ wegen $n \geq 2$ wegzusammenhängend ist, gibt es einen Weg $\theta\colon [t_*, t^*] \to \Phi_{n,j}(\partial D_{n,j}) \subseteq X_{n-1}$ von $\gamma(t_*)$ nach $\gamma(t^*)$. Dann ist auch

$$\eta\colon [0,1] \to X_n, \quad t \mapsto \begin{cases} \gamma(t) & \text{wenn } t \in [0,t_*] \text{ oder } t \in [t^*,1]; \\ \theta(t) & \text{wenn } t \in [t_*,t^*] \end{cases}$$

ein Weg in X_n von x nach y, der jedoch mindestens eine offene n-Zelle weniger trifft, im Widerspruch zur Minimalitätseigenschaft von γ.

Bemerkung 3.28 Über Satz 3.20 (f) hinaus werden wir später sehen, dass jeder Zellenkomplex X lokal wegzusammenhängend ist und sogar **lokal kontrahierbar** in dem Sinne, dass für jeden Punkt jede Umgebung eine kontrahierbare Umgebung enthält (siehe Satz A.6).

Zwei Sätze ermöglichen uns, Zellenkomplexe (bzw. dazu homöomorphe topologische Räume) zu erkennen.

Satz 3.29 *Es sei $(X, (\Phi_{n,j})_{n\in\mathbb{N}_0, j\in J_n})$ ein Zellenkomplex und $f\colon X \to Y$ eine bijektive stetige Abbildung in einen Hausdorffraum Y derart, dass für jedes $y \in Y$ eine y-Umgebung $W \subseteq Y$ existiert derart, dass*

$$\{(n,j)\colon n \in \mathbb{N} \text{ und } j \in J_n \text{ mit } W \cap f(e_{n,j}) \neq \emptyset\}$$

endlich ist, wobei

$$e_{n,j} := \Phi_{n,j}(D_{n,j} \setminus \partial D_{n,j})\,.$$

Dann ist f ein Homöomorphismus.

Beweis. Gegeben $y \in Y$ sei W wie im Satz; die Menge F aller (n, j) mit $n \in \mathbb{N}_0$ und $j \in J_n$, so dass $W \cap f(e_{n,j}) \neq \emptyset$ sei also endlich. Dann ist

$$K := \bigcup_{(n,j) \in F} \Phi_{n,j}(D_{n,j})$$

eine kompakte Teilmenge von X und $f(K)$ eine kompakte Teilmenge von Y mit $W \subseteq f(K)$. Da K kompakt und Y Hausdorffsch ist, ist

$$\psi := f|_K^{f(K)} \colon K \to f(K)$$

ein Homöomorphismus, also

$$f^{-1}|_W = \psi^{-1}|_W$$

stetig. Somit ist f^{-1} stetig. □

Den folgenden Satz behandeln wir später, zusammen mit Unterkomplexen und Produkten von Zellenkomplexen.

Satz 3.30 *Es sei $(X, \mathcal{O})$ ein Hausdorffscher topologischer Raum mit $X \neq \emptyset$. Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ sei eine Familie $(\Phi_{n,j})_{j \in J_n}$ von Abbildungen $\Phi_{n,j} \colon D_{n,j} \to X$ mit n-Zellen $D_{n,j}$ gegeben derart, dass gilt:*

(a) *Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ und $j \in J_n$ ist $\Phi_{n,j}|_{D_{n,j} \setminus \partial D_{n,j}}$ eine topologische Einbettung.*

(b) *Setzen wir $e_{n,j} := \Phi_{n,j}(D_{n,j} \setminus \partial D_{n,j})$ für $n \in \mathbb{N}_0$ und $j \in J_n$, so ist $(e_{n,j})_{n \in \mathbb{N}_0, j \in J_n}$ eine Familie paarweise disjunkter Mengen und*

$$X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}_0} \bigcup_{j \in J_n} e_{n,j}\,.$$

(c) *Die Topologie $\mathcal{O}$ auf X ist final bezüglich der Familie $(\Phi_{n,j})_{n \in \mathbb{N}_0, j \in J_n}$.*

(d) *Für jedes $n \in \mathbb{N}$ und $j \in J_n$ ist $\Phi_{n,j}(\partial D_{n,j})$ in einer Vereinigung endlich vieler der Zellen $e_{k,j}$ mit $k \in \{0, \ldots, n-1\}$ und $j \in J_k$ enthalten.*

Dann ist $(X, (\Phi_{n,j})_{n \in \mathbb{N}_0, j \in J_n})$ ein Zellenkomplex.

Beweis. Für $n \in \mathbb{N}_0$ sei $X_n := \bigcup_{k=0}^{n} \bigcup_{j \in J_k} e_{k,j}$. Sei $A \subseteq X_0$ eine beliebige Teilmenge. Für $j \in J_0$ ist $\Phi_{0,j}^{-1}(A)$ abgeschlossen, wie jede Teilmenge von $D_{0,j}$. Für $n \in \mathbb{N}$ und $j \in J_n$ ist wegen (d) und (b) die Menge F aller $i \in J_0$ mit $e_{0,i} \subseteq A \cap \Phi_{n,j}(\partial D_{n,j})$ endlich. Wegen $e_{n,j} \cap A \subseteq e_{n,j} \cap X_0 = \emptyset$ ist

$$\Phi_{n,j}(D_{n,j}) \cap A = \Phi_{n,j}(\partial D_{n,j}) \cap A = \bigcup_{i \in F} e_{0,i}$$

eine endliche Menge und somit abgeschossen in X, folglich

$$\Phi_{n,j}^{-1}(A) = \Phi_{n,j}^{-1}\left(\bigcup_{i \in F} e_{0,i}\right)$$

abgeschlossen in $D_{n,j}$. Wegen (c) ist A also abgeschlossen in X. Somit ist X_0 diskret in der von X induzierten Topologie und weiter X_0 in X abgeschlossen.

Für $n \in \mathbb{N}$ ist

$$X_n = X_{n-1} \cup \bigcup_{j \in J_n} e_{n,j}$$

als Menge und somit

$$X_n = X_{n-1} \cup_{\phi_n} \coprod_{j \in J_n} D_{n,j} \tag{13}$$

als Menge mit

$$\phi_n := \cup_{j \in J_n} \Phi_{n,j}|_{\partial D_{n,j}} \colon \coprod_{j \in J_n} \partial D_{n,j} \to X_{n-1}.$$

Wir zeigen nun induktiv für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ die Aussage (A_n):

Die Teilmenge X_n von X ist abgeschlossen und die von X auf X_n induzierte Topologie $\mathcal{O}_n$ ist final bezüglich der Familie der $\Phi_{k,j}|^{X_n}$ mit $k \in \{0, \ldots, n\}$ und $j \in J_k$.

Da die finale Topologie auf X_0 bezüglich der Familie der $\Phi_{0,j}|^{X_0}$ mit $j \in J_0$ diskret ist, gilt (A_0) nach dem bereits Gezeigten. Sei nun $n \in \mathbb{N}$ und gelte bereits (A_{n-1}). Für $j \in J_n$ ist

$$\Phi_{n,j}(D_{n,j}) = e_{n,j} \cup \Phi_{n,j}(\partial D_{n,j}) \subseteq e_{n,j} \cup X_{n-1} \subseteq X_n$$

und somit $(\Phi_{n,j})^{-1}(X_n) = D_{n,j}$ abgeschlossen in $D_{n,j}$. Für $k \in \{0, \ldots, n-1\}$ folgt wegen $X_k \subseteq X_n$ entsprechend $\Phi_{k,j}^{-1}(X_n) = D_{k,j}$ für alle $j \in J_k$. Für $k \in \mathbb{N}$ mit $k > n$ und $j \in J_k$ ist

$$\Phi_{k,j}(D_{n,j}) = e_{k,j} \cup \Phi_{k,j}(\partial D_{k,j})$$

mit $e_{k,j} \cap X_n = \emptyset$, so dass

$$\Phi_{k,j}^{-1}(X_n) = \Phi_{k,j}^{-1}(X_n \cap \Phi_{k,j}(\partial D_{k,j}))\,.$$

Nach (d) ist

$$\Phi_{k,j}(\partial D_{k,j}) \subseteq \bigcup_{(\ell,i)\in F} e_{\ell,i}$$

mit einer endlichen Menge F von Paaren (ℓ, i) mit $\ell \in \{0, \ldots, k-1\}$ und $i \in J_\ell$. Da $e_{\ell,i} \cap X_n = \emptyset$ wenn $\ell > n$, ist

$$X_n \cap \Phi_{k,j}(\partial D_{k,j}) \subseteq \bigcup_{(\ell,i)\in F_0} e_{\ell,i} \subseteq \bigcup_{(\ell,i)\in F_0} \Phi_{\ell,i}(D_{\ell,i})$$

mit $F_0 := \{(\ell, i) \in F \colon \ell \leq n\}$. Da $\Phi_{\ell,i}(D_{\ell,i}) \subseteq X_n$ für alle $(\ell, i) \in F_0$, folgt

$$X_n \cap \Phi_{k,j}(\partial D_{k,j}) = \left(\bigcup_{(\ell,i)\in F_0} \Phi_{\ell,i}(D_{\ell,i}) \right) \cap \Phi_{k,j}(\partial D_{k,j});$$

dies ist eine kompakte Teilmenge von X, somit in X abgeschlossen. Also ist

$$\Phi_{k,j}^{-1}(X_n) = \Phi_{k,j}^{-1}(X_n \cap \Phi_{k,j}(\partial D_{k,j}))$$

abgeschlossen in $D_{k,j}$. Wegen (c) ist also X_n abgeschlossen in X. Nach Aufgabe 16 auf Übungsblatt 4 ist die von X auf X_n induzierte Topologie $\mathcal{O}_n$ final bezüglich der Familie der Abbildungen $\Phi_{k,j}|_{\Phi_{k,j}^{-1}(X_n)}^{X_n}$ für $k \in \mathbb{N}_0$ und $j \in J_k$. Im Falle $k \leq n$ ist die genannte Abbildung gleich $\Phi_{k,j}|^{X_n}$. Es sei $\mathcal{S}_n$ die finale Topologie auf X_n bezüglich der kleineren Familie der $\Phi_{k,j}|^{X_n}$ mit $k \in \{0, \ldots, n\}$ und $j \in J_k$. Dann ist $\mathcal{O}_n \subseteq \mathcal{S}_n$. Für $k > n$ und $j \in J_k$ sei F_0 wie oben. Für $(\ell, i) \in F_0$ ist $\Phi_{\ell,i}(D_{\ell,i})$ kompakt in $(X_n, \mathcal{S}_n)$ und somit auch die endliche Vereinigung

$$K := \bigcup_{(\ell,i)\in F_0} \Phi_{\ell,i}(D_{\ell,i})$$

kompakt. Auf dieser Menge induziert der Hausdorffraum $(X_n, \mathcal{O}_n)$ die gleiche Topologie wie $(X_n, \mathcal{S}_n)$. Da $\Phi_{k,j}|^{X_n}_{\Phi_{k,j}^{-1}(X_n)}$ nur Werte in K annimmt, ist diese Abbildung nicht nur nach $(X_n, \mathcal{O}_n)$, sondern auch nach $(X_n, \mathcal{S}_n)$ stetig. Also ist $\mathcal{S}_n \subseteq \mathcal{O}_n$ und somit $\mathcal{S}_n = \mathcal{O}_n$. Dies beendet den Induktionsbeweis.

Für $n \in \mathbb{N}$ sei nun $\mathcal{T}_n$ die Topologie auf X_n, die final ist bezüglich den $\Phi_{n,j}|^{X_n}$ mit $j \in J_n$ und der Inklusion $X_{n-1} \to X_n$. Wegen (A_{n-1}) und der Transitivität finaler Topologien ist diese auch final bezüglich den $\Phi_{n,j}|^{X_n}$ mit $j \in J_n$ und den $\Phi_{k,j}|^{X_n}$ mit $k \in \{0, \ldots, n-1\}$ und $j \in J_k$. Wegen (A_n) ist also $\mathcal{T}_n = \mathcal{O}_n$. Somit ist $\mathcal{O}_n$ gleich der Topologie $\mathcal{T}_n$, für welche (13) auch als topologischer Raum gilt. Mit der direkten Limestopologie $\mathcal{T}$ ist

$$X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}_0} X_n = \lim_{\rightarrow} X_n$$

dann also ein Zellenkomplex. Da $\mathcal{T}$ nach Satz 3.20 (e) final bezüglich der Familie $(\Phi_{n,j})_{n \in \mathbb{N}_0, j \in J_n}$ ist, folgt $\mathcal{T} = \mathcal{O}$ aus Voraussetzung (c), was den Beweis beendet. □

Definition 3.31 Es sei $(X, (\Phi_{n,j})_{n \in \mathbb{N}_0, j \in J_n})$ ein Zellenkomplex und $e_{n,j} := \Phi_{n,j}(D_{n,j} \setminus \partial D_{n,j})$ für $n \in \mathbb{N}_0$ und $j \in J_n$. Eine nicht leere Teilmenge $A \subseteq X$ wird ein *Unterkomplex* genannt, wenn gilt:

(i) A ist eine abgeschlossene Teilmenge von X.

(ii) A ist eine Vereinigung von Zellen von X. Bezeichnet $J_n(A)$ für $n \in \mathbb{N}_0$ die Menge aller $j \in J_n$ mit $e_{n,j} \subseteq A$, so ist also

$$A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}_0} \bigcup_{j \in J_n(A)} e_{n,j}\,.$$

Ist X ein Zellenkomplex wie zuvor und $A \subseteq X$ ein Unterkomplex, so nennt man (X, A) ein CW-*Paar*.

Beispiel 3.32 Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ ist das n-Gerüst X_n ein Unterkomplex von X.

Beispiel 3.33 Für $m \in \{0, \ldots, n\}$ ist $\mathbb{S}_m = \bigcup_{k=0}^{m} (e_{k,1} \cup e_{k,2})$ ein Unterkomplex von $\mathbb{S}_n = \bigcup_{k=0}^{n} (e_{k,1} \cup e_{k,2})$, mit Notation wie in Beispiel 3.11.

Beispiel 3.34 Für $m \in \{0, \ldots, n\}$ ist $\mathbb{R}P_m = \bigcup_{k=0}^m e_{k,1}$ ein Unterkomplex von $\mathbb{R}P_n = \bigcup_{k=0}^n e_{k,1}$, mit Notation wie in Beispiel 3.14.

Lemma 3.35 *In der Situation von Definition* 3.31 *wird der Unterkomplex A ein Zellenkomplex, wenn wir ihn mit der von X induzierten Topologie versehen; die charakteristischen Abbildungen sind*

$$\Phi_{n,j}|^A \colon D_{n,j} \to A$$

für $n \in \mathbb{N}_0$ und $j \in J_n(A)$.

Beweis. Es ist A Hausdorffsch, da X nach Satz 3.20 (b) Hausdorffsch ist. Wir prüfen nun die Voraussetzungen von Satz 3.30 nach für A statt X, der Teilmenge $J_n(A)$ an Stelle von J_n für $n \in \mathbb{N}_0$ und $\Phi_{n,j}|^A$ an Stelle von $\Phi_{n,j}$ für $n \in \mathbb{N}_0$ und $j \in J_n(A)$.

Voraussetzung (a) von Satz 3.30 ist nach dem in 3.24 gegebenen Beweis für Satz 3.20 (d) (angewandt auf X) erfüllt. Voraussetzung (d) des Satzes ist wegen Satz 3.20 (c) erfüllt. Voraussetzung (b) gilt per Definition eines Unterkomplexes, mit $J_n(A)$ an Stelle von J_n. Es ist nur noch Voraussetzung (c) von Satz 3.30 nachzuweisen, dass also die von X auf A induzierte Topologie final ist bezüglich der Familie $(\Phi_{n,j}|^A)_{n\in\mathbb{N}_0, j\in J_n(A)}$.

Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und $j \in J_n(A)$ ist

$$\Phi_{n,j}(D_{n,j} \setminus \partial D_{n,j}) = e_{n,j} \subseteq A$$

und somit $\Phi_{n,j}(D_{n,j}) \subseteq A$, da $D_{n,j} \setminus \partial D_{n,j}$ in $D_{n,j}$ dicht, $\Phi_{n,j}$ stetig und A in X abgeschlossen ist. Für $n \in \mathbb{N}_0$ versehen wir

$$A_n := A \cap X_n$$

mit der von X (also auch von X_n und von A) induzierten Topologie $\mathcal{T}_n$. Da $X_n \cap e_{m,j} = \emptyset$ wenn $m > n$, ist dann

$$A_n = \bigcup_{k=0}^{n} \bigcup_{j\in J_k(A)} e_{k,j}.$$

Nach Satz 3.20 (e) und Aufgabe 16 auf Übungblatt 4 ist die Topologie $\mathcal{T}_n$ auf A_n final bezüglich den Abbildungen

$$\Phi_{k,j}|^{A_n} \colon \Phi_{k,j}^{-1}(A_n) \to A_n$$

für $k \in \{0,\ldots,n\}$ und $j \in J_k$. Wir zeigen per Induktion nach $n \in \mathbb{N}_0$, dass $\mathcal{T}_n$ final ist bezüglich den $\Phi_{k,j}|^{A_n}$ für $k \in \{0,\ldots,n\}$ und $j \in J_k(A)$. Im Falle $n = 0$ sind $\mathcal{T}_0$ und letztere finale Topologie beide diskret, also gleich. Ist $n \in \mathbb{N}$ und gilt die Aussage schon für $n-1$ statt n, so sei $\mathcal{T}$ die finale Topologie auf A_n bezüglich den $\Phi_{k,j}|^{A_n}$ für $k \in \{0,\ldots,n\}$ und $j \in J_k(A)$. Da $\mathcal{T}_n$ die Abbildung $\Phi_{k,j}|^{A_n}$ stetig macht für alle $k \in \{0,\ldots,n\}$ und $j \in J_k(A)$, ist

$$\mathcal{T}_n \subseteq \mathcal{T}.$$

Ist $B \subseteq A_n$ abgeschlossen bezüglich $\mathcal{T}$, so ist für jedes $k \in \{0,\ldots,n-1\}$ und $j \in J_k(A)$ das Urbild

$$(\Phi_{k,j}|^{A_{n-1}})(B \cap A_{n-1}) = (\Phi_{k,j}|^{A_n})^{-1}(B)$$

abgeschlossen in $D_{k,j}$, also $B \cap A_{n-1}$ abgeschlossen in A_{n-1} per Induktionsvoraussetzung. Nun ist für $j \in J_n(A)$

$$(\Phi_{n,j}|^{A_n})^{-1}(B)$$

abgeschlossen. Für $j \in J_n$ mit $j \notin J_n(A)$ ist $e_{n,j} \cap A = \emptyset$, also $e_{n,j} \cap B = \emptyset$ und folglich

$$\Phi_{n,j}^{-1}(B) = \Phi_{n,j}^{-1}(B \cap X_{n-1}) = \Phi_{n,j}^{-1}(B \cap A_{n-1})$$

abgeschlossen in $D_{n,j}$, da $B \cap A_{n-1}$ (wie gerade beobachtet) abgeschlossen in $A_{n-1} = A \cap X_{n-1}$ und somit in X ist. Also ist B abgeschlossen in X_n und somit in A_n. Es folgt $\mathcal{T} = \mathcal{T}_n$. Wieder nach Aufgabe 16 ist die von $X = \varinjlim X_n$ auf A induzierte Topologie final bezüglich den Inklusionsabbildungen

$$\mu_n \colon A_n = X_n \cap A \to A.$$

Da die Topologie auf A_n nach dem Vorigen final ist bezüglich den $\Phi_{k,j}|^{A_n}$ für $k \in \{0,\ldots,n\}$ und $j \in J_k(A)$, ist wegen der Transitivität finaler Topologien die Topologie auf A final bezüglich den Abbildungen $\mu_n \circ \Phi_{k,j}|^{A_n} = \Phi_{k,j}|^A$ für $n \in \mathbb{N}_0$, $k \in \{0,\ldots,n\}$ und $j \in J_k(A)$. □

Wir erwähnen noch einige Fakten über die Topologie von Zellenkomplexen. Die mit Sternchen markierten Resultate können übersprungen werden und sind nicht prüfungsrelevant (ihre Beweise findet man wenn gewünscht im Anhang zu Kapitel 3).

Satz 3.36 *Sei* $(X, (\Phi_{n,j})_{n\in\mathbb{N}_0, j\in J_n})$ *ein Zellenkomplex.*

(a) *X ist genau dann kompakt, wenn es nur endlich viele Zellen gibt, also die Menge der (n, j) mit $n \in \mathbb{N}_0$ und $j \in J_n$ endlich ist.*

(b)* *X ist genau dann lokal kompakt, wenn der Zellenkomplex* **lokal endlich** *ist, also für jedes $x \in X$ eine Umgebung $W \subseteq X$ existiert derart, dass die Menge alle (n, j) mit $e_{n,j} \cap W \neq \emptyset$ endlich ist.*

(c)* *Ist X metrisierbar, so ist X lokal kompakt.*

Beweis. (a) Gibt es nur endlich viele Zellen, so ist $X = X_n$ für ein $n \in \mathbb{N}_0$. Als endlicher topologischer Raum ist X_0 kompakt. Ist $k \in \{0, \ldots, n-1\}$ und X_k kompakt, so ist auch X_{k+1} kompakt, nach Lemma 2.51. Per Induktion ist also $X = X_n$ kompakt. Ist umgekehrt X kompakt, so hat X nach Satz 3.20 (c) nur endlich viele Zellen. □

Da X die Vereinigung der $\Phi_{n,j}(D_{n,j})$ ist für $n \in \mathbb{N}_0$ und $j \in J_n$ (und X_n die Vereinigung der $\Phi_{k,j}(D_{k,j})$ mit $k \in \{0, \ldots, n\}$ und $j \in J_k$), folgt aus Satz 3.20 (e) und Folgerung 1.122:

Satz 3.37 *Ist* $(X, (\Phi_{n,j})_{n\in\mathbb{N}_0, j\in J_n})$ *ein Zellenkomplex, so gilt für jeden lokal kompakten topologischen Raum Z:*

(a) *Die Produkttopologie auf $X \times Z$ ist final bezüglich den Abbildungen $\Phi_{n,j} \times \mathrm{id}_Z \colon D_{n,j} \times Z \to X \times Z$ mit $n \in \mathbb{N}_0$ und $j \in J_n$.*

(b) *Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ ist die Produkttopologie auf $X_n \times Z$ final bezüglich den Abbildungen $\Phi_{k,j}|^{X_n} \times \mathrm{id}_Z \colon D_{k,j} \times Z \to X_n \times Z$ mit $k \in \{0, \ldots, n\}$ und $j \in J_k$.*

Besonders wichtig ist der Fall $Z := [0, 1]$. Wir schließen:

Folgerung 3.38 *Ist* $(X, (\Phi_{n,j})_{n\in\mathbb{N}_0, j\in J_n})$ *ein Zellenkomplex, so ist für jeden topologischen Raum Y eine Abbildung*

$$f \colon X \times [0, 1] \to Y$$

genau dann stetig, wenn für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und $j \in J_n$ die Abbildungen

$$D_{n,j} \times [0, 1] \to Y, \quad (x, t) \mapsto f(\Phi_{n,j}(x), t)$$

stetig sind. Für $n \in \mathbb{N}_0$ ist eine Abbildung

$$f\colon X_n \times [0,1] \to Y$$

genau dann stetig, wenn für alle $k \in \{0,\ldots,n\}$ und $j \in J_k$ die Abbildungen

$$D_{k,j} \times [0,1] \to Y, \quad (x,t) \mapsto f(\Phi_{k,j}(x),t)$$

stetig sind.

Wir erinnern daran, dass $[0,1]$ ein Zellenkomplex ist mit 0-Gerüst $\{0,1\}$ und 1-Gerüst $[0,1]$. Mit der Produkttopologie ist das in Folgerung 3.38 betrachtete Produkt $X \times [0,1]$ sogar ein Zellenkomplex mit 0-Gerüst

$$(X \times [0,1])_0 \;=\; X_0 \times \{0,1\}$$

und n-Gerüst

$$(X_n \times \{0,1\}) \cup (X_{n-1} \times [0,1])$$

für $n \in \mathbb{N}$. Allgemeiner gilt:

Satz 3.39 *Es seien $(X,(\Phi_{n,j})_{n\in\mathbb{N}_0,j\in J_n})$ und $(Y,(\Psi_{n,i})_{n\in\mathbb{N}_0,i\in I_n})$ Zellenkomplexe, wobei $\Psi_{n,i}\colon B_{n,i} \to Y$ mit n-Zellen $B_{n,i}$. Dann gilt:*

(a) *Ist Y kompakt, so ist $X \times Y$ mit der Produkttopologie ein Zellenkomplex mit n-Gerüst*

$$(X \times Y)_n \;=\; \bigcup_{k=0}^{n} (X_k \times Y_{n-k})$$

und den charakteristischen Abbildungen

$$\Theta_{n,(k,j,i)} := \Phi_{k,j} \times \Psi_{n-k,i}\colon D_{k,j} \times B_{n-k,i} \to X_k \times Y_{n-k} \subseteq (X \times Y)_n \subseteq X \times Y$$

für $n \in \mathbb{N}_0$, $k \in \{0,\ldots,n\}$, $j \in J_k$ und $i \in I_{n-k}$.

(b)* *Die Schlussfolgerung aus* (a) *gilt auch, wenn X und Y beide abzählbar viele Zellen haben.*

(c)* *Die Kelleyfizierung $k(X \times Y)$ ist immer ein Zellenkomplex, mit den in* (a) *angegebenen charakteristischen Abbildungen.*

Beweis. (a) Man sieht leicht, dass $X \times Y$ mit den Abbildungen $\Theta_{n,(k,j,i)}$ die Bedingungen (a), (b) und (d) aus Satz 3.30 erfüllt, da diese für $(X, (\Phi_{n,j})_{n\in\mathbb{N}_0, j\in J_n})$ und $(Y, (\Psi_{n,i})_{n\in\mathbb{N}_0, i\in I_n})$ erfüllt sind. Wir haben noch Bedingung (c) nachzuweisen, also, dass die Produkttopologie $\mathcal{O}$ auf $X \times Y$ final ist bezüglich der Familie der Abbildungen $\Theta_{n,(k,j,i)}$. Da Y kompakt ist und die Topologie auf X final bezüglich den Abbildungen $\Phi_{n,j}$, ist nach Folgerung 1.122 $\mathcal{O}$ final bezüglich den Abbildungen

$$\Phi_{n,j} \times \mathrm{id}_Y \colon D_{n,j} \times Y \to X \times Y$$

mit $n \in \mathbb{N}_0$ und $j \in J_n$. Da $D_{n,j}$ kompakt ist und die Topologie auf Y final bezüglich den $\Psi_{m,i}$, ist (wieder nach Folgerung 1.122) die Topologie auf $D_{n,j} \times Y$ final bezüglich der Familie der Abbildungen

$$\mathrm{id}_{D_{n,j}} \times \Psi_{m,i}$$

für $m \in \mathbb{N}_0$ und $i \in I_m$. Wegen der Transitivität finaler Topologien ist $\mathcal{O}$ also final bezüglich den Kompositionen

$$\Big(\Phi_{n,j} \times \mathrm{id}_Y\Big) \circ \Big(\mathrm{id}_{D_{n,j}} \times \Psi_{m,i}\Big) = \Phi_{n,j} \times \Psi_{m,i} = \Theta_{n+m,(n,j,i)},$$

was den Beweis beendet. □

Für die Allgemeinbildung erwähnen wir noch:

Satz 3.40 *Es sei $(X, (\Phi_{n,j})_{n\in\mathbb{N}_0, j\in J_n})$ ein Zellenkomplex. Dann gilt:*

(a)* *X ist ein k-Raum und ebenso X_n für jedes $n \in \mathbb{N}_0$.*

(b)* *X ist genau dann hemikompakt, wenn J_n für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ abzählbar ist.*

(c)* *Für $n \in \mathbb{N}_0$ ist X_n genau dann hemikompakt, wenn J_k für alle $k \in \{0, \ldots, n\}$ abzählbar ist.*

Anhang zu Kapitel 3

Wir beweisen Teile (b) und (c) von Satz 3.36, Teile (b) und (c) von Satz 3.39 sowie Satz 3.40.

Beweis von Satz 3.36 (b) und (c). (b) Ist X lokal kompakt, so hat jeder Punkt $x \in X$ eine kompakte Umgebung W in X. Nach Satz 3.20 (c) ist die Menge F aller (n, j) mit $e_{n,j} \cap W \neq \emptyset$ endlich. Umgekehrt sei angenommen, dass es für jedes $x \in X$ eine x-Umgebung $W \subseteq X$ gibt, für welche die vorige Menge F endlich ist. Dann ist

$$W \subseteq \bigcup_{(n,j)\in F} e_{n,j} \subseteq \bigcup_{(n,j)\in F} \Phi_{n,j}(D_{n,j} =: K,$$

wobei K kompakt ist. Also ist K eine kompakte x-Umgebung. Nach Aufgabe 15 von Übungsblatt 4 ist der Hausdorffraum X lokal kompakt.

(c) Es sei d eine die Topologie von X definierende Metrik. Wäre X nicht lokal kompakt, so wäre X nach (b) nicht lokal endlich. Es gäbe somit einen Punkt $x \in X$ derart, dass jede Umgebung von x unendlich viele der offenen Zellen $e_{n,j}$ trifft. Insbesondere trifft die offene Kugel $B_{1/k}(x)$ von Radius $1/k$ um x im metrischen Raum (X, d) unendlich viele offene Zellen. Wir können daher eine Folge

$$(n_k, j_k)$$

mit $n_k \in \mathbb{N}_0$ und $j_k \in J_{n_k}$ finden derart, dass

$$B_{1/k}(x) \cap e_{n_k,j_k} \neq \emptyset$$

und $(n_k, j_k) \neq (n_\ell, j_\ell)$ für alle $k, \ell \in \mathbb{N}$ mit $\ell < k$. Wir wählen $(x_k \in B_{1/k}(x) \cap e_{n_k,j_k}$. Dann gilt

$$\lim_{k\to\infty} x_k = x,$$

also ist $K := \{x_k \colon k \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$ kompakt. nach Satz 3.20 (c) ist die Menge aller (n, j) mit $K \cap e_{n,j}$ endlich. Per Konstruktion enthält diese aber die unendliche Menge aller (n_k, j_k) mit $k \in \mathbb{N}$, Widerspruch. □

Beweis von Satz 3.40. (a) Die Topologie auf X ist final bezüglich der Familie aller $\Phi_{k,j} \colon D_{k,j} \to X$ mit $k \in \mathbb{N}_0$ und $j \in J_k$. Da jedes $D_{k,j}$ kompakt ist, ist X nach Lemma 1.129 (d) in k-Raum. Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ gilt die gleiche Schlussfolgerung für X_n, da dessen Topologie final ist bezüglich den $\Phi_{k,j}$ wie zuvor mit $k \leq n$.

(b) Ist X hemikompakt (oder nur σ-kompakt), so wählen wir eine Folge $(K_m)_{m\in\mathbb{N}}$ kompakter Teilmengen mit $X = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} K_m$. Für jedes $m \in \mathbb{N}$ ist die Menge F_m aller (k,j) mit $k \in \mathbb{N}_0$ und $j \in J_k$ mit $K_m \cap e_{k,j} \neq \emptyset$ endlich. Dann gilt

$$X = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} K_m \subseteq \bigcup_{m\in\mathbb{N}} \bigcup_{(k,j)\in F_m} e_{k,j} \subseteq X$$

und somit Gleichheit der Mengen. Es gibt somit nur abzählbar viele Zellen. Ist umgekehrt die Menge A aller (k,j) mit $k \in \mathbb{N}_0$ und $j \in J_k$ abzählbar, so wählen wir eine surjektive Abbildung $\mathbb{N} \to A$, $\ell \mapsto (k_\ell, j_\ell)$ und definieren kompakte Teilmengen von X via

$$K_m := \bigcup_{\ell=1}^{m} \Phi_{k_\ell,j_\ell}(D_{k_\ell,j_\ell})\,.$$

Jede kompakte Teilmenge $K \subseteq X$ trifft wegen Satz 3.20 (c) nur endlich viele der offenen Zellen $e_{k,j}$; es gibt daher ein $m \in \mathbb{N}$ mit $K \subseteq K_m$. Also ist $(K_m)_{m\in\mathbb{N}}$ eine k_ω-Folge für X.

(c) kann wie (b) bewiesen werden, wir haben nur überall X durch X_n zu ersetzen und überall $k \leq n$ anzunehmen. $\square$

Beweis von Satz 3.39 (b) und (c). Unter den Voraussetzungen von (c) verifiziert man die Bedingungen (b) und (d) aus Satz 3.30 für $k(X \times Y)$ mit den $\Theta_{n,(k,j,i)}$ wie im Beweis von (a). Zum Nachweis der Bedingung (a) aus dem zitierten Satz beachten wir, dass die Produkttopologie $\mathcal{O}$ auf $X \times Y$ jede der Abbildungen

$$\Phi_{k,j} \times \Psi_{n,i}|_{(D_{k,j}\times B_{n,i})\setminus\partial(D_{k,j}\times B_{n,i})} \tag{14}$$

zu einer topologischen Einbettung. Da $k(X \times Y)$ auf der kompakten Teilmenge $\Phi_{k,j}(D_{k,j}) \times \Psi_{n,i}(B_{n,i})$ von $(X \times Y, \mathcal{O})$ die gleich Topologie induziert (siehe Satz 1.145 (d)), ist die Abbildung (14) auch eine topologische Einbettung in $k(X \times Y)$. Also ist Bedingung (a) erfüllt. Zum Nachweis der Bedingung (c) aus Satz 3.30 beachten wir, dass jede kompakte Teilmenge K von $(X \times Y, \mathcal{O})$ in $K_1 \times K_2$ enthalten ist für kompakte Teilmengen $K_1 \subseteq X$ und $K_2 \subseteq Y$ (zum Beispiel die Projektionen von K auf die Faktoren des Produkts). Nach Satz 3.20 (c)ist

$$K_1 \subseteq \bigcup_{(k,j)\in F_1} \Phi_{k,j}(D_{k,j})$$

mit einer endlichen Menge F_1 von Paaren (k,j) mit $k \in \mathbb{N}_0$ und $j \in J_n$; entsprechend ist

$$K_2 \subseteq \bigcup_{(n,i)\in F_2} \Psi_{n,i}(B_{n,i})$$

mit einer endlichen Menge F_2. Es ist also

$$K \subseteq \bigcup_{(k,j)\in F_1} \bigcup_{(n,i)\in F_2} \Phi_{k,j}(D_{k,j}) \times \Psi_{n,i}(B_{n,i}) =: L,$$

wobei L in $X \times Y$ kompakt ist. Die Topologie auf $k(X \times Y)$ ist somit final bezüglich den Inklusionsabbildungen $L \to X \times Y$. Die Topologie auf L ist final bezüglich den Inklusionsabbildunge der endlich vielen kompakten Mengen $\Phi_{k,j}(D_{k,j}) \times \Psi_{n,i}(B_{n,i})$ für $(k,j) \in F_1$, $(n,i) \in F_2$. Die surjektive stetige Abbildung

$$\Phi_{k,j} \times \Psi_{n,i} \colon D_{k,j} \times B_{n,i} \to \Phi_{k,j}(D_{k,j}) \times \Psi_{n,i}(B_{n,i})$$

ist jeweils eine Quotientenabbildung, die Topologie rechts also bezüglich dieser final. Wegen der Transitivität finaler Topologien ist die Topologie auf L somit final bezüglich den Abbildungen

$$(\Phi_{k,j} \times \Psi_{n,i})|^L$$

für $(k,j) \in F_1$ und $(n,i) \in F_2$. Wegen der Transitivität finaler Topologien ist die Topologie auf $k(X \times Y)$ also final bezüglich den Abbildungen

$$\Phi_{k,j} \times \Psi_{n,i} = \Theta_{k+n,(k,j,i)}$$

für $k, n \in \mathbb{N}_0$, $j \in J_k$ und $i \in I_n$.

(b) Sind X und Y hemikompakt, so stimmt die Topologie auf $k(X \times Y)$ mit der Produkttopologie überein, denn letztere macht $X \times Y$ nach Satz 1.142 zu einem k-Raum. Somit ist (b) ein Spezialfall von (c).

4 Die geschlossenen Flächen

In diesem Kapitel stellen wir zwei Konstruktionen von geschlossenen Flächen vor.[24] In Anhang B werden wir sehen, dass diese alle voneinander verschieden, also paarweise nicht zueinander homöomorph sind. Die Klassifikation der geschlossenen Flächen (für die wir auf die Literatur verweisen) zeigt, dass wir mit unseren Konstruktionen bereits alle geschlossenen Flächen erfasst haben, also jede solche zu einem der konstruierten Beispiele homöomorph ist.

Zusammenhängende Mannigfaltigkeiten und geschlossene Flächen

In einer n-dimensionalen topologischen Mannigfaltigkeit hat jeder Punkt eine Umgebung, die zu einer Kugel in $\mathbb{R}^n$ homöomorph und somit wegzusammenhängend ist. Also ist M lokal wegzusammenhängend im Sinne von Definition 1.103. Die Wegkomponenten von M sind somit offen und abgeschlossen; folglich ist M genau dann wegzusammenhängend, wenn M zusammenhängend ist (siehe Lemma 1.99 und Satz 1.104).

Definition 4.1 Kompakte, zusammenhängende 2-dimensionale topologische Mannigfaltigkeiten (ohne Rand) nennt man auch *geschlossene Flächen*.

Beispiel 4.2 Die Sphäre $\mathbb{S}_2$ und der Torus aus Aufgabe 6 von Blatt 2 (den wir in 2.40 auch als Quotient des Einheitsquadrats realisiert haben) sind geschlossene Flächen. Ebenso die Kleinsche Flasche (als Doppel des Möbiusbands). Auch die projektive Ebene $\mathbb{R}P_2$ ist eine 2-dimensionale topologische Mannigfaltigkeit (siehe Aufgabe 22 auf Aufgabenblatt 6) und somit eine geschlossene Fläche, da sie als stetiges Bild der Sphäre $\mathbb{S}_2$ wegzusammenhängend und kompakt ist.

Definition 4.3 Eine geschlossene Fläche M wird *nicht orientierbar* genannt, wenn sie eine (mit der induzierten Topologie) zum Möbiusband aus 2.42 homöomorphe Teilmenge enthält. Ist dies nicht der Fall, wird M *orientierbar* genannt.

Wir konstruieren nun systematisch Beispiele geschlossener Flächen.

[24]Dieses Kapitel profitierte insbesondere von Schuberts Buch (siehe Literaturverzeichnis), wo Sie auch hilfreiche Zeichnungen finden können.

Die orientierbaren Flächen $\mathbb{M}_g$ vom Geschlecht g

Für $g \in \mathbb{N}_0$ konstruieren wir nun eine geschlossene Fläche $\mathbb{M}_g$. Man kann zeigen, dass diese orientierbar ist (siehe Bemerkung 4.9).

4.4 Es sei $\mathbb{M}_0 := \mathbb{S}_2$ die 2-Sphäre. Nach Beispiel 3.10 können wir diese als einen Zellenkomplex mit einer 0-Zelle und einer 2-Zelle auffassen (der auch das "Eineck" genannt wird).

4.5 Für $g \in \mathbb{N}$ betrachten wir ein (ausgefülltes) regelmäßiges $4g$-Eck D in der Ebene mit Schwerpunkt 0. Dieses ist eine kompakte konvexe Menge mit dem Ursprung 0 im Inneren, also homöomorph zur Kreisscheibe $\mathbb{D}_2$; der Rand ∂D als Teilmenge von $\mathbb{R}^2$ entspricht dabei $\mathbb{S}_1$. Wir beziffern die Kanten des Polygons D im Gegenuhrzeigersinn mit

$$a_1, b_1, a_1^{-1}, b_1^{-1}, a_2, b_2, a_2^{-1}, b_2^{-1}, \ldots, a_g, b_g, a_g^{-1}, b_g^{-1} .$$

Wir führen eine Äquivalenzrelation $\sim$ ein, welche für $j \in \{1, \ldots, g\}$ die Punkte der Strecke a_j, im Gegenuhrzeigersinn durchlaufen, mit denen von a_j^{-1} identifiziert, wobei letztere im Uhrzeigersinn durchlaufen wird. Ebenso für die Strecken, die mit b_j bzw. b_j^{-1} markiert sind. Wir setzen

$$\mathbb{M}_g \; := \; D/\!\sim$$

und versehen $\mathbb{M}_g$ mit der Quotiententopologie bezüglich der kanonischen Abbildung $D \to \mathbb{M}_g$.

Bemerkung 4.6 Der Fall $g = 1$: Es ist $\mathbb{M}_1$ also genau der 2-dimensionale Torus aus 2.40.

Im Folgenden sei $g \geq 2$. Wir stellen einige Beobachtungen an, um $\mathbb{M}_g$ besser zu verstehen.

4.7 Es sei P_j der Anfangspunkt der Strecke mit Markierung a_j, wenn diese im Gegenuhrzeigersinn durchlaufen wird. Die mit a_j^{-1} bezeichnete Strecke endet in einem zu P_j äquivalenten Punkt und dies ist der Anfangspunkt der Strecke b_j^{-1}, also äquivalent zum Endpunkt von b_j. Dieser ist äquivalent zum Anfangspunkt von a_j^{-1}, der zum Endpunkt der Strecke a_j äquivalent ist, also dem Anfangspunkt der Strecke b_j. Dieser ist äquivalent zum Endpunkt der mit b_j^{-1} bezeichneten Strecke, also P_{j+1} (bzw. P_1, wenn $j = g$). Alle $4g$ Ecken von D sind also zueinander äquivalent.

Wir zeigen nun, dass $\mathbb{M}_g$ ein 2-dimensionaler Zellenkomplex ist mit einer 0-Zelle, $2g$ Stück 1-Zellen und einer 2-Zelle. Insbesondere ist $\mathbb{M}_g$ Hausdorffsch. Wir erläutern auch, warum $\mathbb{M}_g$ eine Mannigfaltigkeit ist.

4.8 Es sei $X_0 := e_{0,1} = \{x_0\}$ ein einpunktiger topologischer Raum. Es seien weiter 1-Zellen $a_1, b_1, \ldots, a_g, b_g$ gegeben; wir heften diese an X_0 an, jeweils mit der konstanten Anheftabbildung von ∂a_j bzw. ∂b_j nach $\{x_0\}$. Wir bauen diese zu einer Abbildung $\phi_1 \colon \coprod_{j=1}^g (\partial a_j \sqcup \partial b_j) \to \{x_0\}$ zusammen und bilden

$$X_1 := X_0 \cup_{\phi_1} \coprod_{j=1}^{g} (a_j \sqcup b_j)\,.$$

Es bilde $\phi_2 \colon \partial D \to X_1$ die Punkte der mit a_i markierten Kante von D auf die 1-Zelle a_i ab, gefolgt von den kanonischen Abbildungen

$$a_i \to X_0 \cup_{\phi_1} \coprod_{j=1}^{g} (a_j \sqcup b_j) \to X_1\,.$$

Die Punkte der mit a_i^{-1} markierten Kante bilde man gegenläufig auf a_i ab, gefolgt von letzteren Abbildungen. Analog verfährt man mit b_i an Stelle von a_i. Wir setzen

$$X_2 := X_1 \cup_{\phi_2} D\,.$$

Nach Satz 3.20 (a) ist X_2 Hausdorffsch; zudem ist X_2 kompakt. Nach Aufgabe 20 auf Übungsblatt 6 ist die kanonische Abbildung

$$p \colon D \to X_2$$

eine Quotientenabbildung. Per Konstruktion gilt für $x, y \in \partial D$ genau dann $p(x) = p(y)$, wenn $x \sim y$. Es ist also

$$D/\!\sim \ \text{homöomorph zu } X_2$$

und insbesondere $D/\sim$ Hausdorffsch. Wir dürfen nun also $\mathbb{M}_g$ mit X_2 identifizieren und betrachten dann p als die kanonische Quotientenabbildung. Nach Satz 2.29 (a) (vgl. auch Satz 3.20 (d)) ist $p(D \setminus \partial D)$ offen in $X_2 = \mathbb{M}_g$ und $p|_{D \setminus \partial D}$ eine topologische Einbettung. Also ist $p(D \setminus \partial D)$ eine 2-dimensionale topologische Mannigfaltigkeit. In der Vorlesung wird erläutert, dass $D/\sim$ eine 2-dimensionale topologische Mannigfaltigkeit ist und somit eine geschlossene Fläche, weil ja D zusammenhängend und kompakt ist und somit auch $D/\sim$. Es wird auch illustriert, wie sich eine zu $\mathbb{M}_g$ homöomorphe Teilmenge des $\mathbb{R}^3$ finden lässt. In Worten erklärt:

(a) Für $j \in \{1, \ldots, g\}$ betrachten wir das ausgefüllte Fünfeck F_j, dessen Kanten die Verbindungsstrecke S_j von P_j und P_{j+1} (bzw. P_1, wenn $j = g$) ist und die durch a_j, b_j, a_j^{-1} sowie b_j^{-1} markierten Kanten. Da F_j kompakt ist, ist $p|_{F_j} : F_j \to p(F_j) \subseteq \mathbb{M}_g$ eine Quotientenabbildung, das Bild also zu $F_j/\sim$ homöomorph. Man überlegt sich anschaulich (und auf Wunsch rechnerisch), dass dieser Quotient homöomorph zum Torus aus 2.40 ist, aus dem wir eine den Punkt $p(P_j)$ berührende offene Kreisscheibe entfernt haben.

(b) Nehmen wir aus F_j die Strecke S_j heraus und alle Ecken, erhalten wir eine offene p-saturierte Teilmenge von D, deren Bild in $\mathbb{M}_g$ offen ist und zudem einer offenen Teilmenge des Torus aus (a) entspricht, also eine 2-dimensionale topologische Mannigfaltigkeit ist.

(c) Wir betrachten nun das ausgefüllte g-Eck E mit den Ecken $P_1, \ldots, P_g$, also deren konvexe Hülle. Alle Ecken werden von p auf den gleichen Punkt abgebildet. Im Falle $g = 3$ oder $g = 4$ (die Fälle $g > 4$ sind analog) stellen wir uns also vor, alle Ecken eines Dreiecktuchs oder quadratischen Küchentuchs in die Hand zu nehmen (wo sie einen einzigen Punkt P bilden) und das Tuch unten durchhängen zu lassen; es entsteht eine 2-Sphäre $\sim \mathbb{S}_2$, aus der g Stück zu offenen Kreisscheiben (oder offenen Dreiecken) homöomorphe Mengen entfernt wurden, die an die Stelle P angrenzen.

(d) Im Falle $g \geq 3$ wird die Familie der Mengen $F_j/\sim$ aus (a), für $j \in \{1, \ldots, g\}$, nun längs der Kreislinie der ausgestanzten Kreisscheibe angeheftet an $E/\sim$, wobei die Anheftabbildung die Kreislinie jeweils homöomorph auf eine der g Stück Kreislinien um die kreisförmigen Löcher aus (c) abbildet. Um die Stelle P herum findet man eine zu einer Kreisscheibe homöomorphe Menge, so dass (da dies für alle anderen Punkte schon erreicht war) $\mathbb{M}_g$ eine zweidimensionale topologische Mannigfaltigkeit ist. Im Falle $g = 2$ wird der gelochte Torus $F_2/\sim$ längs der Kreislinie des Lochs an den gelochten Torus $F_1/\sim$ angeheftet, wobei die Anheftabbildung die Kreislinie homöomorph auf die Kreislinie um das Loch im gelochten Torus $F_1/\sim$ abbildet.

Durch Triangulieren kann man Argumente wie die vorigen mathematisch präzisieren.

Bemerkung 4.9 Man kann zeigen, dass für alle $g \in \mathbb{N}_0$ die Fläche $\mathbb{M}_g$ orientierbar ist. Dies ist jedoch nicht trivial; als nicht prüfungsrelevante Fußnote geben wir eine Begründung mit Methoden der algebraischen Topologie, Differentialgeometrie und der Theorie von niedrig-dimensionalen Mannigfaltigkeiten.[25] In der Argumentation sind tiefere hier unbewiesene Sachverhalte durch "(!)" gekennzeichnet.

Konstruktion nicht-orientierbarer Flächen

Für jedes $g \in \mathbb{N}$ lässt sich eine nicht-orientierbare geschlossene Fläche $\mathbb{N}_g$ konstruieren, wie folgt.

4.10 Da $D_{2,1} \sim \mathbb{D}_2$ in 3.14 mit $n := 2$, ist die projektive Ebene $\mathbb{R}P_2$ homöomorph zu

$$\mathbb{N}_1 := \mathbb{D}_2/\approx$$

mit $(x_1, y_1) \approx (x_2, y_2)$ genau dann, wenn $(x_1, y_2) = (x_2, y_2)$ gilt oder $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{S}_1$ und $(x_2, y_2) = -(x_1, y_1)$. Die Punkte auf der rechten Halbkreislinie werden also mit je einem Punkt des linken Halbkreises identifiziert, wobei man beide Halbkreise im Gegenuhrzeigersinn durchläuft.

4.11 Für $g \in \mathbb{N}$ mit $g \geq 2$ betrachten wir ein (ausgefülltes) regelmäßiges $2g$-Eck D in der Ebene mit Schwerpunkt 0. Dieses ist eine kompakte konvexe Menge mit dem Ursprung 0 im Inneren, also homöomorph zur Kreisscheibe

[25] Angenommen, $\mathbb{M}_g$ würde eine zum Möbiusband homöomorphe Teilmenge M enthalten. Sei ∂M der Rand von M im Sinne von Mannigfaltigkeiten mit Rand. Dann ist $M \setminus \partial M$ offen in M und wegen Gebietsinvarianz (!) $M \setminus \partial$M eine offene Teilmenge von $\mathbb{M}_g$. Da aufgrund der Visualisierung als Teilmenge von $\mathbb{R}^3$ sich $\mathbb{M}_g$ als Rand eines Kompaktums K mit glattem Rand auffassen lässt (z.B. $\mathbb{M}_0$ als Rand $\mathbb{S}_2$ von $\mathbb{D}_3$ und $\mathbb{M}_1$ als Rand eines ausgefüllten Donuts), lässt sich $\mathbb{M}_g$ zu einer C^∞-Mannigfaltigkeit machen und es gäbe (entsprechend dem äußeren Normalenfeld auf ∂K) eine nirgends verschwindene 2-Form (Volumenform) auf $\mathbb{M}_g$. Es wäre also $\mathbb{M}_g$ im Sinne differenzierbarer Mannigfaltigkeiten orientierbar. Dann gäbe es auch auf der offenen Teilmenge $M \setminus \partial M$ eine Volumenform und somit auf $N \setminus \partial N$, wobei N das Möbiusband in $\mathbb{R}^3$ ist und ∂N sein Rand für N als Mannigfaltigkeit mit Rand. Auf einer 2-dimensionalen topologischen Mannigfaltigkeit sind nämlich alle differenzierbaren Mannigfaltigkeitsstrukturen diffeomorph (!), also wäre $N \setminus \partial N$ als Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^3$ diffeomorph zu $M \setminus \partial M$ als offene glatte Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{M}_g$. Somit gäbe es auf der Untermannigfaltigkeit $N \setminus \partial N$ von $\mathbb{R}^3$ ein nirgends verschwindendes Normalenfeld. Mit Methoden der Analysis 2 oder 3 kann man zeigen (und zeigt dort oft als Übung), dass letzteres nicht möglich ist, Widerspruch!

$\mathbb{D}_2$; der Rand ∂D als Teilmenge von $\mathbb{R}^2$ entspricht dabei $\mathbb{S}_1$. Wir beziffern die Kanten des Polygons D im Gegenuhrzeigersinn mit

$$a_1, a_1, a_2, a_2, \ldots, a_g, a_g\,.$$

Wir führen eine Äquivalenzrelation $\sim$ ein, die für $j \in \{1, \ldots, g\}$ die Punkte der zwei mit a_j gekennzeichneten Strecken a_j jeweils im Gegenuhrzeigersinn miteinander identifiziert. Wir setzen

$$\mathbb{N}_g \;:=\; D/\!\sim$$

und versehen $\mathbb{N}_g$ mit der Quotiententopologie bezüglich der kanonischen Abbildung $D \to \mathbb{N}_g$.

4.12 Der Endpunkt der ersten mit a_j bezeichneten Strecke ist gleich dem Anfangspunkt der folgenden, der zum Anfangspunkt der vorigen Strecke äquivalent ist. Er ist zudem zum Endpunkt der zweiten mit a_j bezeichneten Strecke äquivalent. Alle Ecken von D sind also zueinander äquivalent.

Wir zeigen nun, dass $\mathbb{N}_g$ ein 2-dimensionaler Zellenkomplex ist mit einer 0-Zelle, g Stück 1-Zellen und einer 2-Zelle. Insbesondere ist $\mathbb{N}_g$ Hausdorffsch. Wir erläutern auch, warum $\mathbb{N}_g$ eine Mannigfaltigkeit ist.

4.13 Es sei $X_0 := e_{0,1} = \{x_0\}$ ein einpunktiger topologischer Raum. Es seien weiter 1-Zellen $a_1, \ldots, a_n$ gegeben; wir heften diese an X_0 an, jeweils mit der konstanten Anheftabbildung von ∂a_j nach $\{x_0\}$. Wir bauen diese zu einer Abbildung $\phi_1\colon \coprod_{j=1}^{g} \partial a_j \to \{x_0\}$ zusammen und bilden

$$X_1 := X_0 \cup_{\phi_1} \coprod_{j=1}^{g} a_j\,.$$

Es bilde $\phi_2\colon \partial D \to X_1$ die Punkte der mit a_i markierten Kanten von D auf die 1-Zelle a_i ab, gefolgt von den kanonischen Abbildungen

$$a_i \to X_0 \cup_{\phi_1} \coprod_{j=1}^{g} a_j \to X_1\,.$$

Wir setzen

$$X_2 := X_1 \cup_{\phi_2} D\,.$$

Nach Satz 3.20 (a) ist X_2 Hausdorffsch; zudem ist X_2 kompakt. Nach Aufgabe 20 auf Übungsblatt 6 ist die kanonische Abbildung

$$p\colon D \to X_2$$

eine Quotientenabbildung. Per Konstruktion gilt für $x, y \in \partial D$ genau dann $p(x) = p(y)$, wenn $x \sim y$. Es ist also

$$D/\!\sim \text{ homöomorph zu } X_2$$

und insbesondere $D/\sim$ Hausdorffsch. Wir dürfen nun also $\mathbb{N}_g$ mit X_2 identifizieren und betrachten dann p als die kanonische Quotientenabbildung. Nach Satz 2.29 (a) (vgl. auch Satz 3.20 (d)) ist $p(D \setminus \partial D)$ offen in $X_2 = \mathbb{N}_g$ und $p|_{D\setminus\partial D}$ eine topologische Einbettung. Also ist $p(D\setminus\partial D)$ eine 2-dimensionale topologische Mannigfaltigkeit. In der Vorlesung wird erläutert, dass $D/\sim$ eine 2-dimensionale topologische Mannigfaltigkeit ist und somit eine geschlossene Fläche, weil ja D zusammenhängend und kompakt ist und somit auch $D/\!\sim$. In Worten erklärt:

(a) Für $j \in \{1, \ldots, g\}$ sei P_j der Anfangspunkt der im Gegenuhrzeigersinn ersten Kante, die mit a_j bezeichnet ist. Wir betrachten das ausgefüllte Dreieck F_j, dessen Kanten die Verbindungsstrecke S_j von P_j und P_{j+1} (bzw. P_1, wenn $j = g$) sind sowie die zwei durch a_j markierten Kanten. Da F_j kompakt ist, ist $p|_{F_j}\colon F_j \to p(F_j) \subseteq \mathbb{N}_g$ eine Quotientenabbildung, das Bild also zu $F_j/\!\sim$ homöomorph. Man überlegt sich anschaulich (und auf Wunsch rechnerisch), dass dieser Quotient homöomorph zur projektiven Ebene ist, in welcher man eine den Punkt $p(P_j)$ berührende offene Kreisscheibe entfernt hat.

(b) Nehmen wir aus F_j die Strecke S_j heraus und alle Ecken, erhalten wir eine offene p-saturierte Teilmenge von D, deren Bild in $\mathbb{N}_g$ offen ist und zudem einer offenen Teilmenge der projektiven Ebene aus (a) entspricht, also eine 2-dimensionale topologische Mannigfaltigkeit ist.

(c) Wir betrachten nun das ausgefüllte g-Eck E mit den Ecken $P_1, \ldots, P_g$, also deren konvexe Hülle. Alle Ecken werden von p auf den gleichen Punkt abgebildet. Im Falle $g \geq 3$ ist wie oben $E/\sim$ eine 2-Sphäre $\sim \mathbb{S}_2$, aus der g zu offenen Kreisscheiben (oder offenen Dreiecken) homöomorphe Mengen entfernt wurden, die an die Stelle P angrenzen.

(d) Im Falle $g \geq 3$ wird die Familie der Mengen $F_j/\!\sim$ aus (a), für $j \in$

$\{1,\ldots,g\}$, nun längs der Kreislinie der ausgestanzten Kreisscheibe angeheftet an $E/\sim$, wobei die Anheftabbildung die Kreislinie jeweils homöomorph auf eine der g Stück Kreislinien um die kreisförmigen Löcher aus (c) abbildet. Um die Stelle P herum findet man eine zu einer Kreisscheibe homöomorphe Menge, so dass (da dies für alle anderen Punkte schon erreicht war) $\mathbb{N}_g$ eine zweidimensionale topologische Mannigfaltigkeit ist. Im Falle $g=2$ wird die gelochte projektive Ebene $F_2/\sim$ längs der Kreislinie des Lochs an die gelochte projektive Ebene $F_1/\sim$ angeheftet, wobei die Anheftabbildung die Kreislinie homöomorph auf die Kreislinie um das Loch in der gelochten projetiven Ebene $F_1/\sim$ abbildet.

(e) Sei $j\in\{1,\ldots,g\}$ fest (dieser Beweisteil greift auch im Fall $g=1$ der projektiven Ebene, wenn man diese wie in Bemerkung 4.15 als Quotient des Einheitsquadrats $[0,1]^2$ realisiert). In den zwei mit a_j bezeichneten Kanten, ohne ihren Rand, wählen wir jeweils eine gleich lange, aus mehr als einem Punkt bestehende Strecke I_1 bzw. I_2, deren Mittelpunkt mit dem Mittelpunkt der jeweiligen Kante zusammenfällt. Die konvexe Hülle C von $I_1\cup I_2$ in P ist dann ein konvexes Viereck und kompakt. Es ist $C/\sim$ homöomorph zum Möbiusband und dies ist eine Teilmenge von $P/\sim$. Also ist $\mathbb{N}_g$ nicht orientierbar.

Beispiel 4.14 Die Kleinsche Flasche ist zur nicht-orientierbaren Fläche $\mathbb{N}_2$ homöomorph (Übung).

Bemerkung 4.15 Übrigens lässt sich die projektive Ebene auch als Quotient des Einheitsquadrats $[0,1]\times[0,1]$ beschreiben, wie folgt.

Für (x_1,y_1) und (x_2,y_2) in $[0,1]^2$ schreiben wir $(x_1,y_1)\sim(x_2,y_2)$, wenn $(x_1,y_1)=(x_2,y_2)$ oder $\{x_1,x_2\}=\{0,1\}$ und $y_2=1-y_1$ oder $\{y_1,y_2\}=\{0,1\}$ und $x_2=1-x_1$. Wir betrachten

$$P:=[0,1]^2/\sim$$

mit der Quotiententopologie bezüglich $q\colon[0,1]^2\to P$, $(x,y)\mapsto[(x,y)]$. Nun sind die Abbildungen

$$[0,1]^2\to[-1/2,1/2]^2,\quad z\mapsto z-(1/2,1/2)$$

und

$$[-1/2,1/2]^2\to\mathbb{D}_2,\quad tw\mapsto\frac{t}{\|w\|_2}\,w$$

für $w \in \partial[-1/2, 1/2]^2$ und $t \in [0,1]$ Homöomorphismen, die den jeweiligen Rand als Teilmenge von $\mathbb{R}^2$ aufeinander abbilden. Ihre Verkettung liefert einen Homöomorphismus

$$\theta\colon [0,1]^2 \to \mathbb{D}_2,$$

der den Rand des Einheitsquadrats als Teilmenge von $\mathbb{R}^2$ auf denjenigen der Einheitskreisscheibe $\mathbb{D}_2$ abbildet. Für $z, w \in [0,a]^2$ schreiben wir $\theta(z) \approx \theta(w)$ genau dann, wenn $z \sim w$. Für $v, w \in \partial\mathbb{D} = \mathbb{S}_1$ gilt dann

$$v \approx w \quad \Leftrightarrow \quad v = -w\,.$$

Mit der Quotiententopologie ist also $\mathbb{D}_2/\approx$ gleich $\mathbb{N}_1$ aus 4.10 und somit $[0,1]^2/\sim$ zu $\mathbb{N}_1$ und somit zu $\mathbb{R}P_2$ homöomorph.

Klassifikation der geschlossenen Flächen

In Anhang B werden wir sehen, dass all die konstruierten Flächen voneinander verschieden sind (siehe Bemerkung B.32):

Satz 4.16 (a) *Sind $g, h \in \mathbb{N}_0$ mit $\mathbb{M}_g \sim \mathbb{M}_h$, so ist $g = h$.*

(b) *Sind $g, h \in \mathbb{N}$ mit $\mathbb{N}_g \sim \mathbb{N}_h$, so ist $g = h$.*

(c) *Für alle $g \in \mathbb{N}_0$ und $h \in \mathbb{N}$ sind $\mathbb{M}_g$ und $\mathbb{N}_h$ nicht homöomorph.*

Die Klassifikation der geschlossenen Flächen besagt, dass jede geschlossene Fläche M homöomorph ist zu $\mathbb{M}_g$ für ein $g \in \mathbb{N}_0$ oder zu $\mathbb{N}_g$ für ein $g \in \mathbb{N}$. Nur einer der Fälle kann eintreten und g ist dann eindeutig, nach Satz 4.16. Wir erwähnen die Klassifikation nur für die Allgemeinbildung, ein Beweis würde uns zu lange beschäftigen. In Wikipedia finden Sie (wenn gewünscht) eine sehr brauchbare, längere Liste von Lehrbuchliteratur mit verschiedenen Beweisen.

5 Homotopien und Fundamentalgruppen

Wir kommen nun zu einer zentralen Idee der algebraischen Topologie, dem stetigen Umformen einer Abbildung in eine andere.

Definition 5.1 Es seien X und Y topologische Räume und $f\colon X \to Y$ sowie $g\colon X \to Y$ stetige Abbildungen. Eine stetige Abbildung

$$F\colon [0,1] \times X \to Y$$

wird *Homotopie* von f nach g genannt, wenn $F(0,x) = f(x)$ und $F(1,x) = g(x)$ für alle $x \in X$, also

$$F(0,\cdot) = f \quad \text{und} \quad F(1,\cdot) = g\,.$$

Gilt für eine Teilmenge $A \subseteq X$ zudem

$$F(t,a) = f(a) \qquad \text{für alle } t \in [0,1] \text{ und } a \in A,$$

so wird F eine Homotopie *relativ* A genannt. Existiert eine Homotopie von f nach g, so werden f und g *homotop* genannt. Man nennt f und g *homotop relativ* A, wenn eine Homotopie relativ A von f nach g existiert.

In diesem Kapitel studieren wir verschiedenen Aspekte und Anwendungen von Homotopien. Insbesondere benutzen wir Homotopien als ein Hilfsmittel, um jedem punktierten topologischen Raum (X, x_0) eine Gruppe

$$\pi_1(X, x_0)$$

zuzuordnen, seine sogenannte *Fundamentalgruppe*. Jedem Morphismus

$$f\colon (X, x_0) \to (Y, y_0)$$

punktierter topologischer Räume (also einer stetigen Abbildung $f\colon X \to Y$ mit $f(x_0) = y_0$) werden wir zudem einen Gruppenhomomorphismus

$$\pi_1(f)\colon \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)$$

zuordnen (der meist einfach als f_* bezeichnet wird). Es ist dann π_1 eine kovarianter Funktor von der Kategorie Top_0 der punktierten topologischen Räume in die Kategorie Grp der Gruppen, was oft von Nutzen ist.[26] Die Begriffe sind wie folgt.

[26]Später werden wir eine ganze Folge von Funktoren π_k definieren für $k \in \mathbb{N}_0$, wobei $\pi_k(X, x_0)$ die $k$te Homotopiegruppe von (X, x_0) genannt wird.

Kategorien und Funktoren

5.2 Wir sprechen von einer *Kategorie* $\mathcal{A}$, wenn folgende Daten gegeben sind:

- Eine Klasse $\mathrm{ob}(\mathcal{A})$ von Mengen (wobei wir die $X \in \mathrm{ob}(\mathcal{A})$ die *Objekte von* $\mathcal{A}$ nennen);
- Für alle $X, Y \in \mathrm{ob}(\mathcal{A})$ eine Menge $\mathrm{Hom}(X, Y)$ (deren Elemente f wir *Morphismen von* X *nach* Y nennen und wie bei Abbildungen auch die Notation $f\colon X \to Y$ benutzen);
- Weiter sei für alle $X, Y, Z \in \mathrm{ob}(\mathcal{A})$ eine Abbildung

  $$\mathrm{Hom}(Y, Z) \times \mathrm{Hom}(X, Y) \to \mathrm{Hom}(X, Z), \quad (f, g) \mapsto f \circ g$$

  gegeben, so dass folgende Axiome erfüllt sind:

  (i) Für alle $X \in \mathrm{ob}(\mathcal{A})$ existiert ein Morphismus $\mathrm{id}_X \in \mathrm{Hom}(X, Y)$ derart, dass

  $$\mathrm{id}_X \circ f = f \quad \text{für alle } Y \in \mathrm{ob}(\mathcal{A}) \text{ und } f \in \mathrm{Hom}(Y, X), \tag{15}$$

  und

  $$g \circ \mathrm{id}_X = g \quad \text{für alle } Y \in \mathrm{ob}(\mathcal{A}) \text{ und } g \in \mathrm{Hom}(X, Y). \tag{16}$$

  (ii) Für alle $A, B, C, D \in \mathrm{ob}(\mathcal{A})$ gilt

  $$(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$$

  für alle $h \in \mathrm{Hom}(A, B)$, $g \in \mathrm{Hom}(B, C)$ und $f \in \mathrm{Hom}(C, D)$.

Bemerkung 5.3 (a) Man schreibt auch $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X, Y)$ statt $\mathrm{Hom}(X, Y)$, wenn verschiedene Kategorien unterschieden werden müssen.

(b) Üblicherweise verlangt man zusätzlich, dass die Mengen $\mathrm{Hom}(X, Y)$ für verschiedene Paare (X, Y) disjunkt sind. Man kann dies immer erzwingen, indem man $\mathrm{Hom}(X, Y)$ durch $\{(X, Y)\} \times \mathrm{Hom}(X, Y)$ ersetzt.

(c) Für alle $X \in \mathrm{ob}(\mathcal{A})$ ist das Element id_X durch die Bedingungen (15) und (16) eindeutig festgelegt (Übung).

(d) Ist $\mathcal{A}$ eine Kategorie, so wird ein Morphismus $f\colon X \to Y$ ein *Isomorphismus* genannt, wenn ein Morphismus $g\colon Y \to X$ existiert mit $g \circ f = \mathrm{id}_X$

und $f \circ g = \mathrm{id}_Y$. Dann ist g eindeutig festgelegt (Übung) und man schreibt $f^{-1} := g$.

(e) Ist $f\colon X \to Y$ ein Morphismus, so wird ein Morphismus $g\colon Y \to X$ eine *Rechtsinverse* zu f genannt, wenn $f \circ g = \mathrm{id}_Y$. Ein Morphismus $h\colon X \to Y$ mit $h \circ f = \mathrm{id}_X$ wird *Linksinverse* zu f genannt. Ein Morphismus f ist genau dann ein Isomorphismus, wenn er eine Rechtsinverse g und einer Linksinverse h besitzt; in diesem Fall ist $g = h = f^{-1}$ (Übung).

Beispiel 5.4 Die Kategorie Set der Mengen benutzt die Klasse aller Mengen als ob(Set). Gegeben Mengen X und Y ist $\mathrm{Hom}(X,Y) := Y^X$ die Menge aller Abbildungen f von X nach Y. Gegeben Abbildungen $g\colon X \to Y$ und $f\colon Y \to Z$ definiert man $f \circ g\colon X \to Z$ als die übliche Komposition von Abbildungen, $x \mapsto f(g(x))$.

Beispiel 5.5 Es sei Top die Kategorie der topologischen Räume; ihre Objekte sind die topologischen Räume und es ist $\mathrm{Hom}(X,Y) := C(X,Y)$ die Menge aller stetigen Abbildungen $f\colon X \to Y$ für topologische Räume X und Y. Komposition von Morphismen ist Komposition der zu Grunde liegenden Abbildungen.

Beispiel 5.6 Es sei Top_0 die Kategorie der punktierten topologischen Räume; ihre Objekte sind punktierte topologische Räume (X, x_0). Ein Morphismus $f\colon (X,x_0) \to (Y,y_0)$ ist eine stetige Abbildung $f\colon X \to Y$ mit $f(x_0) = y_0$. Komposition von Morphismen ist Komposition der zu Grunde liegenden Abbildungen.

Beispiel 5.7 Es sei Grp die Kategorie der Gruppen. Ihre Objekte sind Gruppen; Morphismen $f\colon G \to H$ sind Gruppenhomomorphismen. Komposition von Morphismen ist Komposition der zu Grunde liegenden Abbildungen.

Definition 5.8 Es seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ Kategorien. Ein *Funktor* von $\mathcal{A}$ nach $\mathcal{B}$ ist eine Abbildung (funktionale Klasse)

$$F\colon\ \mathrm{ob}(\mathcal{A}) \to \mathrm{ob}\,\mathcal{B},$$

zusammen mit Abbildungen

$$F_{X,Y}\colon\ \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X,Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(F(X),F(Y))$$

für alle $X, Y \in \mathrm{ob}(\mathcal{A})$ (für die man auch einfach F schreibt), so dass folgende Bedingungen erfüllt sind:

(i) Für alle $X \in \mathrm{ob}(\mathcal{A})$ ist $F(\mathrm{id}_X) = \mathrm{id}_{F(X)}$.

(ii) Für alle $X, Y, Z \in \mathrm{ob}(\mathcal{A})$ gilt

$$F(f \circ g) = F(f) \circ F(g) \quad \text{für alle } f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(Y, Z) \text{ und } g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X, Y).$$

Bemerkung 5.9 Die hier betrachteten Funktoren werden auch *kovariante Funktoren* genannt.

Beispiel 5.10 Betrachten wir eine Gruppe als ein Paar (G, μ) aus einer nicht-leeren Menge G und der Gruppenmultiplikation $\mu\colon G \times G \to G$, so können wir einen Funktor

$$\mathrm{Grp} \to \mathrm{Set}$$

erhalten, in dem wir (G, μ) auf die zu Grunde liegende Menge G abbilden und einen Gruppen-Homomorphismus $f\colon (G, \mu) \to (H, \nu)$ auf die Abbildung $f\colon G \to H$.

Beispiel 5.11 Analog erhalten wir einen Funktor Top $\to$ Set, indem wir einen topologischen Raum $(X, \mathcal{O})$ auf die zugrunde liegende Menge X abbilden und stetige Funktionen $f\colon (X, \mathcal{O}) \to (Y, \mathcal{T})$ auf die Abbildung

$$f\colon X \to Y.$$

Vergessen des Basispunkts x_0 liefert einen Funktor $\mathrm{Top}_0 \to \mathrm{Top}$, der auf Objekten durch $(X, x_0) \mapsto X$ gegeben ist.

Funktoren dieser Art werden *Vergiss-Funktoren* genannt; sie vergessen einen Teil der gegebenen Struktur.

Beim Verknüpfen von Morphismen können die Klammern weggelassen werden, es gilt ein allgemeines Assoziativgesetz in der folgenden Form. Wir überspringen es in der Vorlesung und benutzen nur Spezialfälle mit wenigen Faktoren.

5.12 Es sei $\mathcal{A}$ eine Kategorie. Gegeben Objekte $X_0, \ldots, X_n$ mit $n \in \mathbb{N}$ und Morphismen $f_j\colon X_j \to X_{j-1}$ für $j \in \{1, \ldots, n\}$ definieren wir

$$f_1 \circ \cdots \circ f_n$$

als f_1, wenn $n = 1$ und rekursiv als

$$(f_1 \circ \cdots \circ f_{n-1}) \circ f_n,$$

wenn $n \geq 2$. Wir nennen $p\colon X_n \to X_0$ ein *Produkt* von $f_1, \ldots, f_n$, wenn $n = 1$ und $p = f_1$ oder $n \geq 2$ und

$$p = p_1 \circ p_2$$

mit einem $k \in \{1, \ldots, n-1\}$, einem Produkt p_1 von $f_1, \ldots, f_k$ und einem Produkt p_2 von $f_{k+1}, \ldots, f_n$.

Satz 5.13 *Für jedes Produkt p von $f_1, \ldots, f_n$ gilt $p = f_1 \circ \cdots \circ f_n$.*

Beweis. Für $n = 1$ und $n = 2$ gibt es nur ein Produkt; für $n = 3$ ist die Aussage das Assoziativgesetz. Sei nun $n \geq 4$ und p ein Produkt von der Form $p = p_1 \circ p_2$ wie oben, mit einem Produkt p_1 von $f_1, \ldots, f_k$ für ein $k \in \{1, \ldots, n-1\}$. Gelte die Aussage für Produkte von $< n$ Faktoren. Per Induktionsannahme ist $p_1 = f_1 \circ \cdots \circ f_k$. Ist $k = n - 1$, so ist also wie gewünscht $p = (f_1 \circ \cdots \circ f_{n-1}) \circ f_n$. Ist $k \leq n-2$, so ist per Induktionsannahme $p_2 = f_{k+1} \circ \cdots \circ f_n = (f_{k+1} \circ \cdots \circ f_{n-1}) \circ f_n$ und somit unter Benutzung des Assoziativgesetzes und der Induktionsannahme $p_1 \circ p_2$ gleich

$$p_1 \circ ((f_{k+1} \circ \cdots \circ f_{n-1}) \circ f_n) = (p_1 \circ (f_{k+1} \circ \cdots \circ f_{n-1}) \circ f_n = (f_1 \circ \cdots \circ f_{n-1}) \circ f_n,$$

wie benötigt. □

Für die Zwecke der Vorlesung benötigen wir keine weitergehende Kategorientheorie, sondern lediglich die Grundbegriffe Kategorie und Funktor.

Homotopien und Homotopieklassen

Wir gehen nun weiter auf die bereits definierten Homotopien (die man auch als Homotopien relativ $\emptyset$ betrachten kann) sowie Homotopien relativ A ein.

Bemerkung 5.14 (a) Ist $F\colon [0,1] \times X \to Y$ eine Homotopie von $f\colon X \to Y$ nach $g\colon X \to Y$, so erhalten wir für jedes $t \in [0,1]$ eine stetige Abbildung

$$F_t := F(t, \cdot)\colon X \to Y, \quad x \mapsto F(t,x)\,.$$

Die Homotopie liefert also eine Familie $(F_t)_{t \in [0,1]}$ von stetigen Abbildungen $F_t\colon X \to Y$ derart, dass $F_0 = f$ und $F_1 = g$.

(b) In der vorigen Situation ist die Homotopie F genau dann eine Homotopie relativ A, wenn

$$F_t|_A = f|_A = g|_A \quad \text{für alle } t \in [0,1].$$

(c) In der Literatur werden Homotopien meist als Abbildungen $X \times [0,1] \to Y$ betrachtet mit dem Parameter als zweitem Argument.

Ein wichtiger Spezialfall ist wie folgt.

Definition 5.15 Es seien X ein topologischer Raum und $\gamma\colon [0,1] \to X$ sowie $\eta\colon [0,1] \to X$ Wege. Homotopien $F\colon [0,1] \times [0,1] \to X$ relativ $\{0,1\}$ von γ nach η werden auch *Homotopien von Wegen* genannt.

Eine Homotopie F von γ nach η ist genau dann eine Homotopie von Wegen, wenn

$$F_t(0) = \gamma(0) = \eta(0) \quad \text{für alle } t \in [0,1]$$

und

$$F_t(1) = \gamma(1) = \eta(1) \quad \text{für alle } t \in [0,1].$$

Alle Wege F_t müssen also den gleichen Anfangspunkt haben und alle Wege F_t den gleichen Endpunkt.

Beispiel 5.16 (Konvexkombinationen im Wertebereich). Es sei X eine konvexe Teilmenge in $\mathbb{R}^n$ (oder in einem reellen topologischen Vektorraum). Sind $\gamma\colon [0,1] \to X$ und $\eta\colon [0,1] \to X$ Wege in X, so ist

$$F\colon [0,1] \times [0,1] \to X, \quad (t,s) \mapsto (1-t)\gamma(s) + t\eta(s)$$

eine Homotopie von γ nach η, denn F ist stetig und offenbar ist $F(0,s) = \gamma(s)$ und $F(1,s) = \eta(s)$ für alle $s \in [0,1]$.

Beispiel 5.17 Ist $\gamma(0) = \eta(0)$ und $\gamma(1) = \eta(1)$ in Beispiel 5.16, so ist F eine Homotopie relativ $\{0,1\}$ von γ nach η, da für alle $t \in [0,1]$

$$F(t,0) = (1-t)\gamma(0) + t\,\underbrace{\eta(0)}_{=\gamma(0)} = ((1-t)+t)\gamma(0) = \gamma(0)$$

und analog $F(t,1) = \gamma(1)$.

Beispiel 5.18 Es sei X eine sternförmige Menge in $\mathbb{R}^n$ (oder einem reellen topologischen Vektorraum); es gibt also ein $x_0 \in X$ derart, dass für alle $x \in X$

$$(1-t)x + tx_0 \in X \quad \text{für alle } t \in [0,1].$$

Sei nun $\gamma\colon [0,1] \to X$ eine Schleife an der Stelle x_0, also ein Weg mit $\gamma(0) = \gamma(1) = x_0$. Dann ist

$$F\colon [0,1] \times [0,1] \to X, \quad (t,s) \mapsto (1-t)\gamma(s) + tx_0$$

eine Homotopie von γ zum konstanten Weg c_{x_0}. Wie in Beispiel 5.17 sieht man, dass diese eine Homotopie relativ $\{0,1\}$ ist.

Beispiel 5.19 (Umparametrisieren von Wegen). Es sei X ein topologischer Raum, $\gamma\colon [0,1] \to X$ ein Weg und $\phi\colon [0,1] \to [0,1]$ eine stetige Funktion. Dann ist

$$F\colon [0,1] \times [0,1] \to X, \quad F(t,s) := \gamma((1-t)s + t\phi(s))$$

eine stetige Abbildung mit $F(0,s) = \gamma(s)$ und $F(1,s) = \gamma(\phi(s))$, als eine Homotopie von γ nach $\gamma \circ \phi$. Ist $\phi(0) = 0$ und $\phi(1) = 1$, so ist F eine Homotopie relative $\{0,1\}$. Für alle $t \in [0,1]$ ist wegen $\phi(0) = 0$ nämlich

$$F(t,0) = \gamma(t0 + (1-t)\phi(0)) = \gamma(0)$$

und wegen $\phi(1) = 1$ ist $F(1,0) = \gamma(t + (1-t)\phi(1)) = \gamma(1)$.

Definition 5.20 Es seien X und Y topologische Räume und $f\colon X \to Y$ sowie $g\colon X \to Y$ stetige Abbildung. Existiert eine Homotopie F von f nach g, so schreibt man

$$f \simeq g\,.$$

Ist $A \subseteq X$ eine Teilmenge und existiert eine Homotopie relativ A von f nach g, so schreibt man

$$f \simeq g \ \ \text{(rel. A)}\,.$$

Satz 5.21 *Für alle topologischen Räume X und Y ist $\simeq$ auf $C(X,Y)$ eine Äquivalenzrelation. Für jede Teilmenge $A \subseteq X$ ist zudem $\simeq$ (rel. A) eine Äquivalenzrelation auf $C(X,Y)$.*

Beweis. Es seien $f,g,h \in C(X,Y)$. *Reflexivität.* Es ist

$$F\colon [0,1] \times X \to Y, \quad F(t,x) := f(x)$$

eine Homotopie von f nach f mit $F(t,\cdot) = f$ und somit $F(t,\cdot)|_A = f|_A$ für alle $t \in [0,1]$, also eine Homotopie relativ A.

Symmetrie. Ist $F\colon [0,1] \times X \to Y$ eine Homotopie relativ A von f nach g so ist

$$F^-\colon [0,1] \times X \to Y, \quad F^-(t,x) := F(1-t,x)$$

eine Homotopie relative A von g nach f.

Transitivität. Ist $F\colon [0,1] \times X \to Y$ eine Homotopie von f nach g und $G\colon [0,1] \times X \to Y$ eine Homotopie relativ A von g nach h, so ist

$$H\colon [0,1] \times X \to Y, \quad (t,x) \mapsto \begin{cases} F(2t,x) & \text{wenn } (t,x) \in [0,\frac{1}{2}] \times X]; \\ G(2t-1,x) & \text{wenn } (t,x) \in [\frac{1}{2},1] \times X \end{cases}$$

wohldefiniert (da $F(1,x) = g(x) = G(0,x)$). Nach dem Klebelemma ist H stetig und somit eine Homotopie von $H(0,\cdot) = F(0,\cdot = f$ nach $H(1,\cdot = G(1,\cdot) = h$. Für $a \in A$ und gilt $H(t,a) = F(2t,a) = f(a) = g(a)$ falls $t \in [0,\frac{1}{2}]$. Ist $t \in [\frac{1}{2},1]$, so ist $H(t,a) = G(2t-1,a) = g(a) = h(a)$. Also ist H eine Homotopie relativ A. □

Definition 5.22 Wir schreiben $[f]_A$ für die Äquivalenzklasse von $f \in C(X,Y)$ bezüglich der Äquivalenzrelation $\simeq$ (rel. A) oder kurz $[f]$, wenn A aus dem Zusammenhang klar ist. Man nennt $[f]$ die *Homotopieklasse von f* (rel. A).

Fundamentalgruppe und Fundamentalgruppoid

Definition 5.23 Ist X ein topologischer Raum, so schreiben wir

$$\pi_1(X) := C([0,1],X)/ \simeq \text{rel. } \{0,1\}$$

für die Menge aller Homotopieklassen von Wegen $\gamma\colon [0,1] \to X$ relativ $\{0,1\}$. Ist (X,x_0) ein punktierter topologischer Raum, so schreiben wir

$$\pi_1(X,x_0) \subseteq \pi_1(X)$$

für die Menge aller Homotopieklassen relativ $\{0,1\}$ von Wegen $\gamma\colon [0,1] \to X$ mit $\gamma(0) = \gamma(1) = x_0$.

Wir zeigen nun, dass sich $\pi_1(X,x_0)$ zu einer Gruppe machen lässt und dass sich $\pi_1(X)$ mit einer partiellen Multiplikation versehen lässt, die $\pi_1(X)$ zu einem Gruppoid macht.

Definition 5.24 Mit diesen Strukturen nennen wir $\pi_1(X, x_0)$ die *Fundamentalgruppe* von (X, x_0) und $\pi_1(X)$ das *Fundamentalgruppoid* von X.

In den folgenden vier Lemmata ist X ein topologischer Raum.

Lemma 5.25 *Es seien $\gamma\colon [0,1] \to X$ und $\gamma_1\colon [0,1] \to X$ Wege, die relativ $\{0,1\}$ homotop sind. Auch $\eta\colon [0,1] \to X$ und $\eta_1\colon [0,1] \to X$ seien homotop relativ $\{0,1\}$. Ist $\gamma(1) = \eta(0)$, so sind der zusammengesetzte Weg*

$$\gamma \cdot \eta\colon [0,1] \to X, \quad s \mapsto \begin{cases} \gamma(2s) & \textit{wenn } s \in [0, \frac{1}{2}]; \\ \eta(2s-1) & \textit{wenn } s \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

und der Weg $\gamma_1 \cdot \eta_1$ homotop relativ $\{0,1\}$, also $[\gamma \cdot \eta] = [\gamma_1 \cdot \eta_1]$.

Somit ist $[\gamma]\,[\eta] := [\gamma \cdot \eta]$ wohldefiniert.

Beweis. Es gibt Homotopien F und G relativ $\{0,1\}$ von γ nach γ_1 bzw. von η nach η_1. Die Abbildung

$$H\colon [0,1] \times [0,1] \to X, \quad (t,s) \mapsto \begin{cases} F(t, 2s) & \text{wenn } (t,s) \in [0,1] \times [0, \frac{1}{2}]; \\ G(t, 2s-1) & \text{wenn } (t,s) \in [0,1] \times [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

ist wohldefiniert, da $F(t,1) = \gamma(1) = \eta(0) = G(t,0)$ für alle $t \in [0,1]$. Nach dem Klebelemma ist H stetig. per Konstruktion ist $H(0,\cdot) = \gamma \cdot \eta$ und $H(1,\cdot) = \gamma_1 \cdot \eta_1$. Für alle $t \in [0,1]$ gilt weiter $H(t,0) = F(t,0) = \gamma(0)$ und $H(t,1) = G(t,1) = \eta(1)$. Also ist H eine Homotopie relativ $\{0,1\}$ von $\gamma \cdot \eta$ nach $\gamma_1 \cdot \eta_1$. □

Lemma 5.26 *Sind $\gamma\colon [0,1] \to X$, $\eta\colon [0,1] \to X$ und $\theta\colon [0,1] \to X$ Wege in X mit $\gamma(1) = \eta(0)$ und $\eta(1) = \theta(0)$, so ist*

$$(\gamma \cdot \eta) \cdot \theta \simeq \gamma \cdot (\eta \cdot \theta) \quad \textit{relativ } \{0,1\},$$

also $([\gamma][\eta])[\theta] = [\gamma]([\eta][\theta])$.

Beweis. Die Abbildung

$$\phi\colon [0,1] \to [0,1], \quad s \mapsto \begin{cases} \frac{1}{2}s & \text{wenn } s \in [0, \frac{1}{2}]; \\ s - \frac{1}{4} & \text{wenn } s \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]; \\ 2s-1 & \text{wenn } s \in [\frac{3}{4}, 1] \end{cases}$$

ist stetig und es ist $\phi(0) = 0$ sowie $\phi(1) = 1$. Weiter ist $(\gamma\cdot\eta)\cdot\theta\circ\phi = \gamma\cdot(\eta\cdot\theta)$. Nach Beispiel 5.19 ist also

$$(\gamma \cdot \eta) \cdot \theta \simeq \Big((\gamma \cdot \eta) \cdot \theta\Big) \circ \phi = \gamma \cdot (\eta \cdot \theta)$$

relativ $\{0, 1\}$. $\square$

Lemma 5.27 *Ist $\gamma\colon [0,1] \to X$ ein Weg von $x := \gamma(0)$ nach $y := \gamma(1)$, so gilt für die jeweiligen konstanten Wege*

$$\gamma \simeq c_x \cdot \gamma \quad \textit{und} \quad \gamma \simeq \gamma \cdot c_y \quad \textit{relativ } \{0,1\},$$

also $[\gamma] = [c_x][\gamma]$ und $[\gamma] = [\gamma][c_y]$.

Beweis. Die Abbildung

$$\phi\colon [0,1] \to [0,1], \quad s \mapsto \begin{cases} 0 & \text{wenn } s \in [0, \frac{1}{2}]; \\ 2s-1 & \text{wenn } s \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

ist stetig und $\phi(0) = 0$ sowie $\phi(1) = 1$. Weiter ist $\gamma \circ \phi = c_x \cdot \gamma$. Nach Beispiel 5.19 ist $\gamma \simeq \gamma \circ \phi = c_x \cdot \gamma$. Definiert man stattdessen $\phi(s) := 2s$ für $s \in [0, \frac{1}{2}]$ und $\phi(s) := 1$ für $s \in [\frac{1}{2}, 1]$, so folgt die Behauptung mit c_y. $\square$

Lemma 5.28 *Es sei $\gamma\colon [0,1] \to X$ ein Weg von x nach y und*

$$\gamma^-\colon [0,1] \to X, \quad t \mapsto \gamma(1-t)$$

der umgekehrte Weg. Dann gilt

$$\gamma^- \cdot \gamma \simeq c_x \quad \textit{und} \quad \gamma \cdot \gamma^- \simeq c_y$$

relativ $\{0,1\}$, also $[\gamma^-][\gamma] = [c_x]$ und $[\gamma][\gamma^-] = [c_y]$.

Beweis. Die Aussage mit c_y, indem wir die erste Aussage auf γ^- statt γ anwenden und beachten, dass $(\gamma^-)^- = \gamma$. Zum Beweis der ersten Aussage betrachten wir die Abbildung $F\colon [0,1] \times [0,1] \to X$,

$$(t,s) \mapsto \begin{cases} \gamma((1-t)2s) & \text{wenn } (t,s) \in [0,1] \times [0, \frac{1}{2}]; \\ \gamma((1-t)(2-2s)) & \text{wenn } (t,s) \in [0,1] \times [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Da $2s = 2 - 2s = 1$ wenn $s = \frac{1}{2}$, ist F wohldefiniert. Nach dem Klebelemma ist F stetig. Weiter ist $F(0,\cdot) = \gamma \cdot \gamma^-$ und $F(1,\cdot) = c_x$. Da zudem $F(t,0) = \gamma(0)$ für alle $t \in [0,1]$ und $F(t,1) = \gamma(0)$, ist F eine Homotopie relativ $\{0,1\}$ von $\gamma \cdot \gamma^-$ nach c_x. $\square$

Satz 5.29 *Für jeden topologischen Raum X und jedes $x_0 \in X$ macht die Verknüpfung*

$$([\gamma], [\eta]) \mapsto [\gamma][\eta] = [\gamma \cdot \eta]$$

aus $\pi_1(X, x_0)$ eine Gruppe mit Neutralelement $[c_{x_0}]$ und Inversem $[\gamma]^{-1} = [\gamma^-]$ für $[\gamma] \in \pi_1(X, x_0)$.

Beweis. Die Verknüpfung ist nach Lemma 5.25 wohldefiniert. Sie ist assoziativ wegen Lemma 5.26. Nach Lemma 5.27 ist $[c_{x_0}]$ ein Neutralelement und nach Lemma 5.28 ist für jedes Element $[\gamma]$ die Homotopieklasse $[\gamma^-]$ ein Inverses. □

Definition 5.30 Eine Kategorie $\mathcal{A}$ heißt *klein*, wenn die Klasse $\mathrm{ob}(\mathcal{A})$ der Objekte eine Menge ist. Eine kleine Kategorie $\mathcal{A}$, in der jeder Morphismus ein Isomorphismus ist, wird ein *Gruppoid* genannt.

Satz 5.31 *Es sei X ein topologischer Raum. Nehmen wir X als Menge von Objekten und für $x, y \in X$ die Menge*

$$\{[\gamma] \in \pi_1(X) \colon \gamma(0) = x \text{ und } \gamma(1) = y\}$$

als $\mathrm{Hom}(x, y)$, so erhalten wir ein Gruppoid mit der Verknüpfung

$$[\eta] \circ [\gamma] := [\gamma][\eta] = [\gamma \cdot \eta]$$

für $x, y, z \in X$ und Morphismen $[\gamma]$ von x nach y und $[\eta]$ von y nach z.

Beweis. Die Verknüpfung ist nach Lemma 5.25 wohldefiniert. Sie ist assoziativ wegen Lemma 5.26. Nach Lemma 5.27 ist für $x \in X$ die Homotopieklasse $[c_x]$ ein Neutralelement id_x in $\mathrm{Hom}(x, x)$ und nach Lemma 5.28 ist für jedes Element $[\gamma]$ die Homotopieklasse $[\gamma^-]$ ein Inverses. □

Man stellt sich ein Gruppoid am besten vor als eine Menge mit einer partiell definierten Verknüpfung (wobei wir die Bemerkung in der Vorlesung überspringen).

Bemerkung 5.32 Es sei $\mathcal{A}$ ein Gruppoid. Wir nehmen an, dass die Mengen $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(x, y)$ für verschiedene Paare (x, y) von Objekten disjunkt sind und bilden die Vereinigung

$$G := \bigcup_{x, y \in \mathrm{ob}(\mathcal{A})} \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(x, y)\,.$$

Die Verknüpfung $(f,g) \mapsto f \circ g$ von Morphismen liefert eine partielle zweistellige Verknüpfung auf G. Genauer: Wir setzen $X := \mathrm{ob}(\mathcal{A})$ und und betrachten die Abbildung

$$\alpha\colon G \to X,$$

die einem Morphismus $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(x,y)$ das Objekt $\alpha(f) := x$ zuordnet und die Abbildung

$$\omega\colon G \to X,$$

die einem Morphismus $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(x,y)$ das Objekt $\omega(f) := y$ zuordnet. Wir setzen

$$D := \{(f,g) \in G \times G\colon \alpha(f) = \omega(g)\} \subseteq G \times G$$

und erhalten die partielle 2-stellige Verknüpfung

$$D \to G, \quad (f,g) \mapsto f \circ g$$

unter Benutzung der in $\mathcal{A}$ gegebenen Verknüpfung

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\alpha(f), \omega(f)) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\alpha(g), \omega(g)) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\alpha(g), \omega(f))$$

von Morphismen. Für alle $x, y \in X$ ist dann also

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(x,y) = \{f \in G\colon \alpha(f) = x \text{ und } \omega(f) = y\} \tag{17}$$

und folgende Bedingungen sind erfüllt:

(a) Für alle $f, g, h \in G$ mit $\alpha(f) = \omega(g)$ und $\alpha(g) = \omega(h)$ sind sowohl $(f \circ g) \circ h$ als auch $f \circ (g \circ h)$ definiert und es ist

$$(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h).$$

(b) Für alle $x \in X$ existiert ein $\mathrm{id}_X \in G$ mit $\alpha(x) = \omega(x) = x$ derart, dass $\mathrm{id}_X \circ f = f$ für alle $f \in G$ mit $\omega(f) = x$ und $g \circ \mathrm{id}_X = g$ für alle $g \in G$ mit $\alpha(g) = x$. (Das Element id_X ist hierbei wegen (a) und (b) eindeutig festgelegt).

(c) Für alle $f \in G$ existiert ein $g \in G$ mit $\omega(g) = \alpha(f) =: x$ und $\alpha(g) = \omega(f) =: y$ derart, dass $g \circ f = \mathrm{id}_x$ und $f \circ g = \mathrm{id}_y$.

Sind umgekehrt G und X Mengen und $\alpha\colon G \to X$ sowie $\omega\colon G \to X$ Abbildungen derart, dass (a), (b) und (c) erfüllt sind, so erhalten wir eine Kategorie $\mathcal{A}$, die ein Gruppoid ist, indem wir $\mathrm{ob}(\mathcal{A}) := X$ setzen, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(x,y)$ für $x, y \in X$ durch (17) definieren und die partielle Verknüpfung $D \to G$ zu einer Abbildung

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(y,z) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(x,y) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(x,z)$$

einschränken für alle $x, y, z \in X$. Ein Gruppoid ist somit durch Angabe von (G, X, α, ω) mit (a)–(c) festgelegt und kann folglich mit (G, X, α, ω) identifiziert werden.

Bemerkung 5.33 Mit der vorigen Sichtweise haben wir für einen topologischen Raum X also das Fundamentalgruppoid

$$(X, \pi_1(X), \alpha, \omega),$$

wobei für jeden Weg $\gamma\colon [0,1] \to X$

$$\alpha([\gamma]) := \gamma(0) \quad \text{und} \quad \omega([\gamma]) := \gamma(1)\,.$$

$\boldsymbol{\pi_1}$ als Funktor

Die folgenden Aussagen rechnet man sofort nach.

Lemma 5.34 *Es seien X, Y und Z topologische Räume, $f\colon X \to Y$ sowie $g\colon X \to Y$ stetige Abbildungen und $F\colon [0,1] \times X \to Y$ eine Homotopie von f nach g.*

(a) *Ist $\phi\colon Y \to Z$ eine stetige Abbildung, so ist $\phi \circ F$ eine Homotopie von $\phi \circ f$ nach $\phi \circ g$. Ist F eine Homotopie relativ einer Teilmenge $A \subseteq X$, so ist auch $\phi \circ F$ eine Homotopie relativ A.*

(b) *Ist $\psi\colon Z \to X$ eine stetige Abbildung, so ist*

$$F \circ (\mathrm{id}_{[0,1]} \times \psi)\colon [0,1] \times Z \to Y, \quad (t,z) \mapsto F(t, \psi(z))$$

eine Homotopie von $f \circ \psi$ nach $g \circ \psi$. Ist F eine Homotopie relativ einer Teilmenge $A \subseteq X$ und $B \subseteq Z$ eine Teilmenge mit $\psi(B) \subseteq A$, so ist $F \circ (\mathrm{id}_{[0,1]} \times \psi)$ eine Homotopie relativ B. $\square$

5.35 Es sei $f\colon (X,x_0) \to (Y,y_0)$ ein Morphismus punktierter topologischer Räume. Für $[\gamma] \in \pi_1(X,x_0)$ ist die Homotopieklasse

$$f_*([\gamma]) := [f \circ \gamma] \in \pi_1(Y,y_0)$$

wohldefiniert, also unabhängig von der Wahl des Repräsentanten γ:

Sind nämlich $\gamma\colon [0,1] \to X$ und $\eta\colon [0,1] \to X$ Wege von x_0 nach x_0 und ist F eine Homotopie relativ $\{0,1\}$ von γ nach η, so ist nach Lemma 5.34 (a) die Abbildung $f \circ F$ eine Homotopie relativ $\{0,1\}$ von $f \circ \gamma$ nach $f \circ \eta$, also $[f \circ \gamma] = [f \circ \eta]$ für die Homotopieklassen relativ $\{0,1\}$.

Wir erhalten also eine Abbildung

$$f_*\colon \pi_1(X,x_0) \to \pi_1(X,y_0), \quad [\gamma] \mapsto f_*([\gamma]) = [f \circ \gamma]\,.$$

Diese ist ein Homomorphismus von Gruppen, denn für $[\gamma], [\eta] \in \pi_1(X,x_0)$ ist

$$(f \circ (\gamma \cdot \eta))(t) = f(\gamma(2t)) \quad \text{für alle } t \in [0, \tfrac{1}{2}]$$

und

$$(f \circ (\gamma \cdot \eta))(t) = f(\eta(2t-1)) \quad \text{für alle } t \in [\tfrac{1}{2}, 1],$$

also $f \circ (\gamma \cdot \eta) = (f \circ \gamma) \cdot (f \circ \eta)$ und somit

$$f_*([\gamma]\,[\eta]) = f_*([\gamma{\cdot}\eta]) = [f{\circ}(\gamma{\cdot}\eta)] = [(f{\circ}\gamma){\cdot}(f{\circ}\eta)] = [f{\circ}\gamma]\,[f{\circ}\eta] = f_*([\gamma])f_*([\eta])\,.$$

Man schreibt auch $\pi_1(f) := f_*$ für den gerade konstruierten Gruppenhomomorphismus $f_*\colon \pi_1(X,x_0) \to \pi_1(Y,y_0)$.

Satz 5.36 *Ordnen wir jedem punktierten topologischen Raum (X,x_0) seine Fundamentalgruppe $\pi_1(X,x_0)$ zu und ordnen wir jedem Morphismus*

$$f\colon (X,x_0) \to (Y,y_0)$$

punktierter topologischer Räume den Gruppenhomomorphismus

$$\pi_1(f) = f_*\colon \pi_1(X,x_0) \to \pi_1(Y,y_0), \quad [\gamma] \mapsto [f \circ \gamma]$$

zu, so erhalten wir einen Funktor π_1 von der Kategorie Top_0 *der punktierten topologischen Räume in die Kategorie* Grp *der Gruppen.*

Beweis. Für $x \in X$ ist $(\mathrm{id}_X)_*([\gamma]) = [\mathrm{id}_X \circ \gamma] = [\gamma]$ für alle $[\gamma] \in \pi_1(X, x)$, also $\pi_1(\mathrm{id}_X) = (\mathrm{id}_X)_*$ gleich der identischen Abbildung $\pi_1(X, x) \to \pi_1(X, x)$. Für alle Morphismen $f\colon (X, x) \to (Y, y)$ und $g\colon (Y, y) \to (Z, z)$ punktierter topologischer Räume ist weiter

$$f_*(g_*([\gamma])) = f_*([g \circ \gamma]) = [f \circ g \circ \gamma]) = (f \circ g)_*([\gamma]) \text{ für alle } [\gamma] \in \pi_1(X, x),$$

also $f_* \circ g_* = (f \circ g)_*$ und somit $\pi_1(f \circ g) = \pi_1(f) \circ \pi_1(g)$. □

Wechsel des Basispunkts

Ist X ein topologischer Raum, so haben wir für jedes $x_0 \in X$ eine Fundamentalgruppe $\pi_1(X, x_0)$. Wir wollen untersuchen, wie diese vom Basispunkt x_0 abhängt (insbesondere, wenn X wegzusammenhängend ist). Wir beginnen mit Beobachtungen über Gruppoide.

Lemma 5.37 *Wir betrachten ein Gruppoid $\mathcal{A}$ mit der Menge X von Objekten. Dann ist $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(x, x)$ eine Gruppe für alle $x \in X$. Für alle $x, y \in X$ und $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(x, y)$ ist*

$$I_g\colon \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(x, x) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(y, y), \quad f \mapsto g \circ f \circ g^{-1}$$

ein Isomorphismus von Gruppen.

Beweis. Für alle $f_1, f_2 \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(x, x)$ ist

$$I_g(f_1 \circ f_2) = g \circ f_1 \circ f_2 \circ g^{-1} = g \circ f_1 \circ g^{-1} \circ g \circ f_2 \circ g^{-1} = I_g(f_1) \circ I_g(f_2)\,,$$

also I_g ein Gruppenhomomorphismus. Offenbar ist $I_{g^{-1}} \circ I_g$ die identische Abbildung auf $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(x, x)$ und $I_g \circ I_{g^{-1}}$ die identische Abbildung auf $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(y, y)$, also I_g ein Isomorphismus. □

Wir folgern direkt:

Satz 5.38 *Ist X ein topologischer Raum, so ist für jeden Weg $\theta\colon [0,1] \to X$ von x nach y die Abbildung*

$$\theta_\sharp := I_{[\theta]}\colon \pi_1(X, x) \to \pi_1(X, y), \quad [\gamma] \mapsto [\theta]^{-1}[\gamma]\,[\theta]$$

ein Gruppenisomorphismus (und sie hängt nur von $[\theta]$ ab). Ist X wegzusammenhängend, so ist

$$\pi_1(X, x) \cong \pi_1(X, y) \quad \text{für alle } x, y \in X.$$

Einfach zusammenhängende Räume

Definition 5.39 Ein topologischer Raum X wird *einfach zusammenhängend* genannt, wenn X wegzusammenhängend ist und $\pi_1(X, x_0) = \{0\}$ für jedes $x_0 \in X$.

Bemerkung 5.40 Ist X wegzusammenhängend und $\pi_1(X, x_0)$ trivial für ein $x_0 \in X$, so ist $\pi_1(X, y_0)$ trivial für alle $y_0 \in X$ (und somit X einfach zusammenhängend), nach Satz 5.38.

Lemma 5.41 *Ein topologischer Raum X ist genau dann einfach zusammenhängend, wenn es für alle $x, y \in X$ genau eine Homotopieklasse $[\gamma]$ von Wegen von x nach y gibt.*

Beweis. Sei X einfach zusammenhängend. Sind γ und η Wege in X von x nach y, so ist $\gamma \cdot \eta^-$ eine Schleife an der Stelle x, also $[c_x] = [\gamma \cdot \eta^-] = [\gamma]\,[\eta]^{-1}$. Multiplikation mit $[\eta]$ von rechts liefert $[\eta] = [\gamma]$. Gibt es für $x \in X$ nur eine Homotopieklasse von Wegen γ von x nach x, so ist $\pi_1(X, x)$ eine Gruppe mit nur einem Element, also $\pi_1(X, x) = \{e\}$. □

Kontrahierbare Räume

Definition 5.42 Ein topologischer Raum X wird *kontrahierbar* genannt, wenn ein $x_0 \in X$ existiert, für das die identische Abbildung $\mathrm{id}_X\colon X \to X$ homotop zur konstanten Abbildung $k_{x_0}\colon X \to X$, $x \mapsto x_0$ ist.

Es existiert also ein $x_0 \in X$ und eine stetige Abbildung

$$F\colon [0,1] \times X \to X$$

derart, dass $F(0, x) = x$ für alle $x \in X$ und $F(1, x) = x_0$ für alle $x \in X$.

Beispiel 5.43 *Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ ist jede sternförmige Teilmenge $X \subseteq \mathbb{R}^n$ kontrahierbar und ebenso jede sternförmige Teilmenge X eines reellen topologischen Vektorraums E.*

Insbesondere ist jede nicht-leere konvexe Teilmenge $X \subseteq \mathbb{R}^n$ kontrahierbar.

[Sei nämlich $x_0 \in X$ derart, dass für alle $x \in X$ und $t \in [0,1]$

$$F(t,x) \ := \ (1-t)\,x \ + \ t\,x_0 \ \in \ X\,.$$

Dann ist $F\colon [0,1] \times X \to X$ stetig und $F(0,x) = x$ sowie $F(1,x) = x_0$ für alle $x \in X$, also F eine Homotopie von id_X zur konstanten Abbildung $k_{x_0}\colon X \to X$.]

Lemma 5.44 *Jeder kontrahierbare topologische Raum X ist wegzusammenhängend.*

Beweis. Sei $F\colon [0,1] \times X \to X$ eine Homotopie von id_X zur konstanten Abbildung k_{x_0} für ein $x_0 \in X$. Für jedes $x \in X$ ist dann $F(0,x) = \mathrm{id}_X(x) = x$ und $F(1,x) = k_{x_0}(x) = x_0$, also $t \mapsto F(t,x)$ ein Weg von x nach x_0. Jedes $x \in X$ ist also in der Wegkomponente W von x_0 enthalten, ergo $W = X$. $\square$

Es gilt sogar:

Satz 5.45 *Jeder kontrahierbare topologische Raum X ist einfach zusammenhängend.*

Das folgende Lemma ist nützlich für den Beweis.

Lemma 5.46 *Sei X ein topologischer Raum und $F\colon [0,1] \times [0,1] \to X$ eine stetige Abbildung. Es seien α, β, γ und δ die Wege in X, die wir erhalten, wenn wir im Ursprung beginnend die Kanten des Quadrats $[0,1] \times [0,1]$ im Gegenuhrzeigersinn durchlaufen und F längs der Kanten betrachten; für $s \in [0,1]$ ist also*

$$\alpha(s) = F(s,0),\ \ \beta(s) = F(1,s),\ \ \gamma(s) = F(1-s,1)\ \ \textit{und}\ \ \delta(s) = F(0,1-s).$$

In $\pi_1(X)$ ist dann

$$[\alpha]\,[\beta]\,[\gamma]\,[\delta] \ = \ [c_x] \ = \ \mathrm{id}_x$$

mit $x := \alpha(0) = \delta(1)$ und folglich

$$[\delta^-] \ = \ [\alpha]\,[\beta]\,[\gamma],$$

also $\delta^- \simeq (\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma$ relativ $\{0,1\}$.

Beweis. Für $t \in [0,1]$ seien die Wege α_t, β_t, γ_t und δ_t analog zu α, β, γ und δ definiert, jedoch unter Benutzung des Quadrats $[0,t] \times [0,t]$ an Stelle von $[0,1] \times [0,1]$. Es ist also

$$\alpha_t(s) = F(ts, 0),\ \beta_t(s) = F(t, ts),\ \gamma_t(s) = F(t(1-s), t) \text{ und } \delta_t(s) = F(0, t(1-s)).$$

Definieren wir

$$G(t,s) := (((\alpha_t \cdot \beta_t) \cdot \gamma_t) \cdot \delta_t)(s)$$

für $(t,s) \in [0,1] \times [0,1]$, so ist $G\colon [0,1] \times [0,1] \to X$ stetig, denn G ist auf jeder der abgeschlossenen Mengen $[0,1] \times [0, \frac{1}{8}]$, $[0,1] \times [\frac{1}{8}, \frac{1}{4}]$, $[0,1] \times [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$ und $[0,1] \times [\frac{1}{2}, 1]$ stetig. Zum Beispiel ist für $(t,s) \in [0,1] \times [0, \frac{1}{8}]$

$$G(t,s) = \alpha_t(8s) = F(8ts, 0)\,.$$

Nun ist $G(0,\cdot) = c_x$ und $G(1,\cdot) = (((\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma) \cdot \delta$, zudem $G(t,0) = \alpha_t(0) = F(0,0) = x$ und $G(t,1) = \delta_t(1) = F(0,0) = x$ für alle $t \in [0,1]$. Also ist G eine Homotopie relativ $\{0,1\}$ von c_x nach $(((\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma) \cdot \delta$ und folglich

$$[c_x] = [(((\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma) \cdot \delta] = [\alpha]\,[\beta]\,[\gamma]\,[\delta],$$

wie behauptet. □

Bemerkung 5.47 Eine entsprechende Schlussfolgerung gilt, wenn wir $[0,1]^2$ durch ein Dreieck ersetzen oder ein regelmäßiges n-Eck, siehe Aufgabe 29 auf Übungsblatt 9.

Beweis von Satz 5.45. Wir wissen bereits, dass X wegzusammenhängend ist. Es sei $F\colon [0,1] \times X \to X$ eine Homotopie von id_X zu einer konstanten Abbildung $k_{x_0}\colon X \to X$, $x \mapsto x_0$. Ist $\gamma\colon [0,1] \to X$ eine Schleife an der Stelle x_0, so ist

$$G\colon [0,1] \times [0,1] \to X, \quad (t,s) \mapsto F(t, \gamma(s))$$

eine Homotopie von γ zum konstanten Weg c_{x_0}. Setzen wir $\alpha(t) := G(t,0) = F(t, x_0)$, so ist weiter

$$G(1-t, 1) = F(1-t, x_0) = \alpha(1-t)\,.$$

Nach Lemma 5.46 ist nun

$$[\gamma] = [\alpha]\,[c_{x_0}]\,[\alpha^-] = [\alpha]\,[\alpha]^{-1} = [c_{x_0}]$$

das Neutralelement von $\pi_1(X, x_0)$, die Gruppe also trivial. □

Retrakte und Deformationsretrakte

Definition 5.48 Es sei X ein topologischer Raum. Eine Teilmenge $A \subseteq X$ wird ein *Retrakt* von X genannt, wenn es eine stetige Abbildung

$$r\colon X \to A$$

gibt mit $r(a) = a$ für alle $a \in A$, also $r|_A = \mathrm{id}_A$ bzw. $r \circ i = \mathrm{id}_A$ mit der Inklusionsabbildung $i\colon A \to X$, $a \mapsto a$. Eine solche Abbildung r wird ein *Retraktion* von X auf A genannt. Kann r so gewählt werden, dass zudem die identische Abbildung id_X zu

$$i \circ r\colon X \to X, \quad x \mapsto i(r(x)) = r(x)$$

homotop ist, so wird A ein *Deformationsretrakt* von X genannt und r eine *Deformationsretraktion.* Kann sogar

$$\mathrm{id}_X \;\simeq\; i \circ r \quad \text{relativ } A$$

erreicht werden, so nennt man A eine *starken Deformationsretrakt* von X und r eine *starke Deformationsretraktion.*

Bemerkung 5.49 Im Falle eines Deformationsretrakts gibt es also eine stetige Abbildung

$$F\colon [0,1] \times X \to X$$

derart, dass $F(0,x) = x$ für alle $x \in X$, $r(x) := F(1,x) \in A$ für alle $x \in X$ und

$$F(1,a) = a \quad \text{für alle } a \in A. \tag{18}$$

Im Falle eines starken Deformationsretrakts gibt es ein F, für das (18) ersetzt werden kann durch

$$F(t,a) = a \quad \text{für alle } t \in [0,1] \text{ und } a \in A.$$

Bemerkung 5.50 Abweichend vom Üblichen werden im Buch von Hatcher starke Deformationsretrakte als Deformationsretrakte bezeichnet.

Beispiel 5.51 Versehen wir $X := \{0,1\}$ mit der diskreten Topologie, so ist $A := \{0\}$ ein Retrakt von $\{0,1\}$, denn die Abbildung

$$r\colon \{0,1\} \to \{0\}, \quad x \mapsto 0$$

ist eine Retraktion. Jedoch ist A kein Deformationsretrakt von X. Dann müsste nämlich obiges r (das die einzige Abbildung von $\{0,1\}$ nach $\{0\}$ ist) eine Deformationsretraktion sein, es gäbe also eine Homotopie

$$F\colon [0,1] \times \{0,1\} \to \{0,1\}$$

von $\mathrm{id}_{\{0,1\}}$ nach r. Dann wäre

$$\gamma\colon [0,1] \to \{0,1\}, \quad t \mapsto F(t,1)$$

ein Weg von $F(0,1) = \mathrm{id}_{\{0,1\}}(1) = 1$ nach $F(1,1) = r(1) = 0$, was dem Zwischenwertsatz widerspricht.

Die Nützlichkeit von Retrakten und Deformationsretrakten deutet sich bereits im folgenden Satz an.

Satz 5.52 *Es sei X ein topologischer Raum, $A \subseteq X$ eine Teilmenge und $i\colon A \to X$, $a \mapsto a$ die Inklusionsabbildung. Dann gilt:*

(a) *Ist A ein Retrakt von X, so ist für jedes $x_0 \in A$ der Gruppenhomomorphismus*

$$i_*\colon \pi_1(A,x_0) \to \pi_1(X,x_0), \quad [\gamma] \mapsto [i \circ \gamma]$$

injektiv.

(b) *Ist A ein Deformationsretrakt von X, so ist $i_*\colon \pi_1(A,x_0) \to \pi_1(X,x_0)$ ein Isomorphismus für alle $x_0 \in A$, also insbesondere*

$$\pi_1(A,x_0) \;\cong\; \pi_1(X,x_0)\,.$$

Beweis. Im Beweis von (a) sein $r\colon X \to A$ eine Retraktion; im Beweis von (b) sei r eine Deformationsretraktion. Da $r(x_0) = x_0$ wegen $x_0 \in A$, können wir

$$r_*\colon \pi_1(X,x_0) \to \pi_1(A,x_0)$$

betrachten.

(a) Da $r \circ i = \mathrm{id}_A$, ist

$$r_* \circ i_* = (r \circ i)_* = (\mathrm{id}_A)_*$$

die identische Abbildung $\pi_1(A,x_0) \to \pi_1(X,x_0)$, folglich i_* injektiv.

(b) Es gibt eine Homotopie $G\colon [0,1]\times X$ von $i\circ r$ nach id_X. Für jede Schleife $\gamma\colon [0,1]\to X$ in X an der Stelle x_0 ist dann

$$F\colon [0,1]\times[0,1]\to X,\quad (t,s)\mapsto G(t,\gamma(s))$$

eine Homotopie von $i\circ r\circ\gamma$ nach γ. Setzen wir $\alpha(t):=F(t,0)=G(t,x_0)$, so ist

$$F(1-t,1)=G(1-t,x_0)=\alpha(1-t)=\alpha^-(t)\,.$$

Nach Lemma 5.46 ist also

$$i\circ r\circ\gamma\;\simeq\;(\alpha\cdot\gamma)\cdot\alpha^-\quad\text{relativ }\{0,1\},$$

somit $(i\circ r)_*([\gamma])=[i\circ r\circ\gamma]=[\alpha]\,[\gamma]\,[\alpha]^{-1}=(\alpha^-)_\sharp([\gamma])$. Da

$$(\alpha^-)_\sharp\colon \pi_1(X,x_0)\to\pi_1(X,x_0)$$

ein Isomorphismus ist, ist auch $(i\circ r)_*=i_*\circ r_*$ ein Isomorphismus von Gruppen, also i_* surjektiv und folglich i_* ein Isomorphismus. □

Beispiel 5.53 *Für jedes $n\in\mathbb{N}$ ist $\mathbb{S}_{n-1}$ ein starker Deformationsretrakt von $\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$.*

Es ist nämlich die stetige Abbildung

$$r\colon \mathbb{R}^n\setminus\{0\}\to\mathbb{S}_{n-1},\quad x\mapsto\frac{1}{\|x\|_2}x$$

eine starke Deformationsretraktion, was man wie folgt einsieht: Zunächst ist offenbar $r(x)=x$ für alle $x\in\mathbb{S}_{n-1}$, also r eine Retraktion. Weiter nimmt die Abbildung

$$F\colon [0,1]\times(\mathbb{R}^n\setminus\{0\})\to\mathbb{R}^n\setminus\{0\},\quad (t,x)\mapsto(1-t)\,x+t\,r(x)\tag{19}$$

tatsächlich nur Werte in $\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ an. Für alle $t\in[0,1]$ und $x\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ ist nämlich

$$F(t,x)\;=\;\left((1-t)+t\frac{1}{\|x\|_2}\right)\,x;$$

mit dem Minimum a von 1 und $\frac{1}{\|x\|_2}$ ist hierbei

$$(1-t)+t\frac{1}{\|x\|_2}\geq(1-t)a+ta=((1-t)+t)a=a>0\,.$$

Weiter ist F stetig und $F(0,\cdot)=\mathrm{id}_X$ sowie $F(1,\cdot)=r$.

Beispiel 5.54 *Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist $\mathbb{S}_{n-1}$ ein starker Deformationsretrakt der gelochten Kreisscheibe $X := \mathbb{D}_n \setminus \{0\}$.*

Die Retraktion $r\colon \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{S}_{n-1}$ aus dem vorigen Beispiel lässt sich nämlich zu einer Retraktion

$$\mathbb{D}_n \setminus \{0\} \to \mathbb{S}_{n-1}$$

einschränken und für F wie in (19) ist dann

$$[0,1] \times (\mathbb{D}_n \setminus \{0\}) \to \mathbb{D}_n \setminus \{0\}, \quad (t,x) \mapsto F(t,x)$$

eine Homotopie von id_X nach $i \circ r|_X$ mit der Inklusion $i\colon \mathbb{S}_{n-1} \to X$.

Allgemeiner gilt:

Beispiel 5.55 *Für jede kompakte konvexe Teilmenge $K \subseteq \mathbb{R}^n$ mit Innerem $K^0 \neq \emptyset$ ist ∂K ein starker Defomationsretrakt von $K \setminus \{w\}$ für jedes $w \in K^0$.*

[Es ist nämlich $L := K - w$ eine kompakte konvexe Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ mit $L^0 = K^0 - w \neq \emptyset$. Wir wissen, dass es einen Homöomorphismus

$$g\colon L \to \mathbb{D}_n$$

gibt mit $g(0) = 0$ und $g(\partial L) = \partial(\mathbb{D}_n) = \mathbb{S}_{n-1}$ (siehe Beispiel 1.46). Weiter ist

$$\tau\colon K \to L, \quad x \mapsto x - w$$

ein Homöomorphismus mit $\tau(w) = 0$ und $\tau(\partial K) = \partial L$. Also ist

$$h := g \circ \tau\colon K \to \mathbb{D}_n$$

ein Homöomorphismus mit $h(w) = 0$ und $h(\partial K) = \mathbb{S}_{n-1}$. Ist

$$R\colon \mathbb{D}_n \setminus \{0\} \to \mathbb{S}_{n-1}$$

eine starke Deformationsretraktion, so ist also auch

$$r \;:=\; (h|_{\partial K}^{\mathbb{S}_{n-1}})^{-1} \circ R \circ h|_{K \setminus \{w\}}$$

eine starke Deformationsretraktion.]

Insbesondere gilt:

Beispiel 5.56 *Für jedes $w \in \mathbb{D}_n^0 = \mathbb{D}_n \setminus \mathbb{S}_{n-1}$ ist $\mathbb{S}_{n-1}$ ein starker Deformationsretrakt von $\mathbb{D}_n \setminus \{w\}$.*

Bemerkung 5.57 Wir werden sehen, dass für jedes x_0 im Einheitskreis $\mathbb{S}_1$

$$\pi_1(\mathbb{S}_1, x_0) \;\cong\; (\mathbb{Z}, +)\,.$$

(a) Da $\mathbb{S}_1$ ein Deformationsretrakt von $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ ist, folgt dann

$$\pi_1(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}, x_0) \;\cong\; (\mathbb{Z}, +)$$

für alle $x_0 \in \mathbb{S}_1$ (und sogar für alle $x_0 \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, da $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ wegzusammenhängend ist).

(b) Wir können dann auch folgern, dass $\mathbb{S}_1$ kein Retrakt der Einheitskreisscheibe $\mathbb{D}_2$ ist. Da $\mathbb{D}_2$ kontrahierbar ist, ist nämlich $\mathbb{D}_2$ einfach zusammenhängend und somit für alle $x_0 \in \mathbb{D}_2$

$$\pi_1(\mathbb{D}_2, x_0) = \{e\}\,.$$

Wäre $\mathbb{S}_1$ ein Retrakt, so wäre für die Inklusionsabbildung $i\colon \mathbb{S}_1 \to \mathbb{D}_2$ und jedes $x_0 \in \mathbb{S}_1$

$$i_*\colon \pi_1(\mathbb{S}_1, x_0) \to \pi_1(\mathbb{D}_2, x_0)$$

injektiv, es gäbe also einen injektiven Gruppenhomomorphismus von $(\mathbb{Z}, +)$ zur trivialen Gruppe $\{e\}$, Widerspruch.

Berechnung von $\pi_1(\mathbb{S}_n, x_0)$ für $n \geq 2$

Wir zeigen nun, dass $\pi_1(\mathbb{S}_n, x_0) = \{e\}$ wenn $n \geq 2$.

Satz 5.58 *Für alle natürlichen Zahlen $n \geq 2$ ist die n-Sphäre $\mathbb{S}_n$ einfach zusammenhängend.*

Das folgende Lemma ist hilfreich.

Lemma 5.59 *Für eine natürliche Zahl $n \geq 2$ sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene konvexe Teilmenge und $\gamma\colon [0,1] \to U$ ein Weg. Dann existiert ein zu γ relativ $\{0,1\}$ homotoper Weg η, dessen Bild $\eta([0,1])$ in U leeres Inneres hat.*

Beweis. Für alle $s \in [0,1]$ ist die Konvexkombination $\eta(s) := (1-s)\,\gamma(0) + s\,\gamma(1)$ in U, also die so definierte Funktion $\eta\colon [0,1] \to U$ ein Weg von $\gamma)(0)$ nach $\gamma(1)$. Für alle $t \in [0,1]$ ist dann auch

$$F(t,s) := (1-t)\gamma(s) + t\eta(s) \in U$$

und die so erhaltene Funktion $F\colon [0,1] \times [0,1] \to U$ ist eine Homotopie von γ nach η. Es ist $\eta([0,1])$ die Verbindungsstrecke von $\gamma(0)$ und $\gamma(1)$; diese hat in $\mathbb{R}^n$ (und somit auch in U) leeres Inneres. $\square$

Es ist auch nützlich, dass Sphären homogene topologische Räume sind.

Definition 5.60 Ein topologischer Raum X heißt *homogen*, wenn für alle $x, y \in X$ ein Homöomorphismus $\phi\colon X \to X$ existiert mit $\phi(x) = y$.

Lemma 5.61 *Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ ist die n-Sphäre $\mathbb{S}_n$ ein homogener topologischer Raum.*

Beweis. Seien $e_1, \ldots, e_{n+1}$ die Standard-Einheitsvektoren in $\mathbb{R}^{n+1}$. Es genügt, zu zeigen, dass es für jedes $y \in \mathbb{S}_n$ einen Homöomorphismus $\phi_y\colon \mathbb{S}_n \to \mathbb{S}_n$ gibt mit

$$\phi_y(e_1) = y\,.$$

Für alle $x, y \in \mathbb{S}_n$ ist dann nämlich $\phi := \phi_y \circ \phi_x^{-1}$ ein Homöomorphismus mit $\phi(x) = y$. Wir ergänzen $v_1 := x$ zu einer Orthonormalbasis $v_1, \ldots, v_{n+1}$ von $\mathbb{R}^{n+1}$ bezüglich des Standard-Skalarprodukts und schreiben A für die $(n+1) \times (n+1)$-Matrix mit den Spalten $v_1, \ldots, v_{n+1}$. Dann ist A eine orthogonale Matrix, die zugehörige lineare Abbildung

$$\psi\colon \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+1}, \quad w \mapsto Aw$$

also eine lineare Isometrie. Folglich ist $\psi(\mathbb{S}_n) = \mathbb{S}_n$ und somit $\phi_x := \psi|_{\mathbb{S}_n}^{\mathbb{S}_n}$ ein Homöomorphismus mit $\phi_x(e_1) = Ae_1 = v_1 = x$. $\square$

Lemma 5.62 *Es sei $n \in \mathbb{N}_0$. Für jedes $w \in \mathbb{S}_n$ ist dann $\mathbb{S}_n \setminus \{w\}$ zu $\mathbb{R}^n$ homöomorph.*

Beweis. Es ist $\mathbb{S}_n = e_{0,1} \cup e_{n,1}$ ein n-dimensionaler Zellenkomplex mit einer 0-Zelle und einer n-Zelle (siehe Beispiel 3.10), also $\mathbb{S}_n$ die Einpunkt-Kompaktifizierung von $e_{n,1}$. Dann ist $e_{0,1} = \{x_0\}$ für ein $x_0 \in \mathbb{S}_n$ und es ist $\mathbb{S}_n \setminus \{x_0\} = e_{n,1} \sim\ ]0,1[^n \sim \mathbb{R}^n$. Nach Lemma 5.61 gibt es einen Homöomorphismus $\phi\colon \mathbb{S}_n \to \mathbb{S}_n$ mit $\phi(w) = x_0$. Dann ist $\mathbb{S}_n \setminus \{w\} \to \mathbb{S}_n \setminus \{x_0\}$, $x \mapsto \phi(x)$ ein Homöomorphismus, also auch $\mathbb{S}_n \setminus \{w\} \sim \mathbb{R}^n$. □

Beweis von Satz 5.58. Als Quotient des wegzusammenhängenden topologischen Raums $\mathbb{D}_n$ ist auch $\mathbb{S}_n \sim \mathbb{D}_n // \mathbb{S}_{n-1}$ wegzusammenhängend. Wir brauchen daher nur noch zu zeigen, dass die Fundamentalgruppe $\pi_1(\mathbb{S}_n, x_0)$ für $x_0 := (0, \ldots, 0, 1)$ trivial ist. Sei hierzu $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{S}_n$ ein Weg mit $\gamma(0) = \gamma(1) = x_0$.

Behauptung. *Es existiert ein Weg $\eta\colon [0,1] \to \mathbb{S}_n$ mit $\gamma \simeq \eta$ relativ $\{0,1\}$ derart, dass $\eta([0,1])$ eine echte Teilmenge von $\mathbb{S}_n$ ist.*

Ist das wahr, so wählen wir ein $w \in \mathbb{S}_n \setminus \eta([0,1])$. Dann ist also

$$\eta([0,1]) \subseteq \mathbb{S}_n \setminus \{w\}\,.$$

Nach Lemma 5.62 ist $\mathbb{S}_n \setminus \{w\} \sim \mathbb{R}^n$, also $\mathbb{S}_n \setminus \{w\}$ (wie $\mathbb{R}^n$) einfach zusammenhängend. Es ist somit[27] $\eta \simeq c_{x_0}$ in $\mathbb{S}_n \setminus \{w\}$ und folglich in $\mathbb{S}_n$. Es ist also $[\gamma] = [\eta] = [c_{x_0}]$ in $\pi_1(\mathbb{S}_n, x_0)$ und somit $\pi_1(\mathbb{S}_n, x_0)$ die triviale Gruppe.

Zum Beweis der Behauptung betrachten wir die Teilmengen

$$U_1 := \{x \in \mathbb{S}_n \colon x_{n+1} > -\frac{1}{2}\}$$

mit $x = (x_1, \ldots, x_{n+1})$ und

$$U_2 := \{x \in \mathbb{S}_n \colon x_{n+1} < 0\}$$

von $\mathbb{S}_n$; diese bilden eine offene Überdeckung von $\mathbb{S}_n$. Folglich bilden die Mengen

$$\gamma^{-1}(U_1) \quad \text{und} \quad \gamma^{-1}(U_2)$$

eine offene Überdeckung von $[0,1]$. Es sei $\delta > 0$ eine Lebesguesche Zahl für dies Überdeckung; für alle $s \in [0,1]$ ist also

$$\{t \in [0,1] \colon |t-s| \leq \delta\} \subseteq \gamma^{-1}(U_k)$$

[27] Es sei $E := \mathbb{S}_n \setminus \{w\}$ und $i\colon E \to \mathbb{S}_n$ die Inklusionsabbildung. Da $E \sim \mathbb{R}^n$ einfach zusammenhängend ist, gilt $[\eta|^E] = [c_{x_0}] = e$ in $\pi_1(E, x_0)$ und folglich $[\eta] = [i \circ \eta|^E] = i_*([\eta|^E]) = i_*(e) = e$.

für ein $k \in \{1, 2\}$. Wir wählen

$$a = s_0 < s_1 < \cdots < s_m = 1$$

mit $s_j - s_{j-1} \leq \delta$ für alle $j \in \{1, \ldots, m\}$. Für jedes $j \in \{1, \ldots, m\}$ ist dann $[s_{j-1}, s_j] \subseteq \gamma^{-1}(U_k)$ für ein $k \in \{1, 2\}$. Es sei Φ die Menge aller $j \in \{1, \ldots, m\}$ mit

$$[s_{j-1}, s_j] \subseteq \gamma^{-1}(U_2)\,.$$

Es ist $U_2 \sim \mathbb{D}_n^0$, was eine offene konvexe Teilmenge von $\mathbb{R}^n$. Als Konsequenz von Lemma 5.59 finden wir für alle $j \in \Phi$ eine Homotopie

$$F_j\colon [0,1] \times [s_{j-1}, s_j] \to U_2 \subseteq \mathbb{S}_n$$

relativ $\{s_{j-1}, s_j\}$ von $\gamma|_{[s_{j-1}, s_j]}$ zu einem Weg $\eta_j\colon [s_{j-1}, s_j] \to X$, dessen Bild leeres Inneres in U_2 hat. Wir definieren $F(t,s) := F_j(t,s)$ für $t \in [0,1]$ und $s \in [s_{j-1}, s_j]$ wie zuvor. Für $j \in \{1, \ldots, m\} \setminus \Phi$ und $(t,s) \in [0,1] \times [s_{j-1}, s_j]$ setzen wir $F(t,s) := \gamma(s)$. Dann ist F eine Homotopie relativ $\{0,1\}$ von γ zu einem Weg η derart, dass für $U_3 := \{x \in \mathbb{S}_n\colon x_{n+1} < -\frac{1}{2}\}$

$$U_3 \cap \eta([0,1]) = U_3 \cap \bigcup_{j \in \Phi} \eta_j([s_{j-1}, s_j])$$

gilt. Da jede der Mengen $\eta_j([s_{j-1}, s_j])$ in U_2 leeres Inneres hat, hat $U_3 \cap \eta_j([s_{j-1}, s_j])$ leeres Inneres als Teilmenge der offenen Menge U_3 und somit auch $U_3 \cap \eta([0,1]) = \bigcup_{j \in \Phi}(U_3 \cap \eta_j([s_{j-1}, s_j])$, als Vereinigung von endlich vielen abgeschlossenen Teilmengen von U_3 mit leerem Inneren (siehe Lemma 5.63). Insbesondere ist $U_3 \cap \eta([0,1]) \neq U_3$ und somit $\eta([0,1]) \neq \mathbb{S}_n$. $\square$

Lemma 5.63 *Es sei X ein topologischer Raum. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: Sind $A_1, \ldots, A_n$ abgeschlossene Teilmengen von X derart, dass die Vereinigung als Teilmenge von X ein nicht leeres Inneres*

$$(A_1 \cup \cdots \cup A_n)^0 \neq \emptyset$$

besitzt, so ist $A_k^0 \neq \emptyset$ für ein $k \in \{1, \ldots, n\}$.

Beweis. Der Beweis ist per Induktion nach n, wobei der Fall $n = 1$ trivial ist. Sei nun $n = 2$. Wäre $A_1^0 = A_2^0 = \emptyset$, so gäbe es für jedes $x \in A_1 \cup A_2$ und jede offene x-Umgebung U in X ein $y \in U$ mit $y \notin A_1$ (da sonst $U \subseteq A_1$ wäre und somit $x \in A_1^0$). Dann ist $U \setminus A_1$ eine offene y-Umgebung. Da $A_2^0 = \emptyset$, muss es ein $z \in U \setminus A_1$ geben mit $z \notin A_2$. Dann ist $z \in U \setminus (A_1 \cup A_2)$, also U nicht in $A_1 \cup A_2$ enthalten. Da für festes x die Umgebung U beliebig war, folgt $x \notin (A_1 \cup A_2)^0$. Da x beliebig war, folgt $(A_1 \cap A_2)^0 = \emptyset$, Widerspruch.

Sei nun $n \geq 3$ und gelte die Aussage für $n-1$ statt n. Da $A_1 \cup \cdots \cup A_n = B \cup A_n$ mit $B := A_1 \cup \cdots \cup A_{n-1}$, gilt wegen des Falls $n = 2$, dass $A_n^0 \neq \emptyset$ (womit wir fertig sind) oder $B^0 \neq \emptyset$, woraus wegen der Induktionsvoraussetzung (für Vereinigungen von $n-1$ Mengen) $A_k^0 \neq \emptyset$ folgt für ein $k \in \{1, \ldots, n-1\}$. □

Homotopiekategorie und Homotopie-Äquivalenzen

Lemma 5.64 *Es seien X, Y und Z topologische Räume und $f, f_1 \colon Y \to Z$ sowie $g, g_1 \colon X \to Y$ stetige Abbildungen. Ist $f \simeq f_1$ und $g \simeq g_1$, so ist*

$$f \circ g \ \simeq \ f_1 \circ g_1$$

und somit $[f] \circ [g] := [f \circ g]$ wohldefiniert.

Beweis. Es ist $f \circ g \simeq f \circ g_1$ nach Lemma 5.34 (a) und $f \circ g_1 \simeq f_1 \circ g_1$ nach Lemma 5.34 (b). Wegen der Transitivität von $\simeq$ ist auch $f \circ g \simeq f_1 \circ g_1$. □

Für stetige Funktionen $f \colon Y \to Z$, $g \colon X \to Y$ und $h \colon U \to X$ ist

$$([f] \circ [g]) \circ [h])((f \circ g) \circ h] = (f \circ (g \circ h)] = [f] \circ ([g] \circ [h]) .$$

Zudem ist $[\mathrm{id}_Y] \circ [f] = [\mathrm{id}_Y \circ f] = [f]$ und $[f] \circ [\mathrm{id}_X] = [f \circ \mathrm{id}_X] = [f]$ für jede stetige Funktion $f \colon X \to Y$. Also gilt:

Satz 5.65 *Die Klasse aller topologischen Räume liefert eine Kategorie* [Top], *wenn wir für topologische Räume X und Y die Menge $[X, Y]$ aller Morphismen $X \to Y$ definieren als die Menge aller Homotopieklassen $[f]$ von stetigen Abbildungen $f \colon X \to Y$. Die Komposition ist vertreterweise,*

$$[f] \circ [g] := [f \circ g]$$

für topologische Räume X, Y und Z und Morphismen $[f] \colon Y \to Z$ und $[g] \colon X \to Y$. Das Neutralelement am Objekt X ist die Homotopieklasse $[\mathrm{id}_X]$ der identischen Abbildung $\mathrm{id}_X \colon X \to X$. Ordnen wir einem topologischen Raum sich selbst zu und einer stetigen Abbildung $f \colon X \to Y$ die Homotopieklasse $[f] \in [X, Y]$, so erhalten wir einen Funktor

$$\mathrm{Top} \to [\mathrm{Top}] .$$

Definition 5.66 Topologische Räume X und Y werden *homotopieäquivalent* genannt, wenn sie in der Homotopiekategorie [Top] isomorph sind, also ein Isomorphismus $[f]\colon X \to Y$ existiert.

Bemerkung 5.67 Genau dann ist für eine stetige Abbildung $f\colon X \to Y$ zwischen topologischen Räumen die Homotopieklasse $[f]\colon X \to Y$ ein Isomorphismus in der Homotopiekategorie [Top], wenn eine stetige Abbildung $g\colon Y \to X$ existiert mit

$$[g] \circ [f] = [\mathrm{id}_X] \quad \text{und} \quad [f] \circ [g] = [\mathrm{id}_Y],$$

also $g \circ f \simeq \mathrm{id}_X$ und $f \circ g \simeq \mathrm{id}_Y$. Eine solche stetige Abbildung f nennt man eine *Homotopieäquivalenz* (oder auch: eine *starke* Homotopieäquivalenz) und g eine *Homotopie-Inverse* für f.

Beispiel 5.68 Ist X ein topologischer Raum und $A \subseteq X$ ein Deformationsretrakt, so ist jede Deformationsretraktion $r\colon X \to A$ eine Homotopie-Äquivalenz und auch die Inklusionsabbildung $i\colon A \to X$.

Es ist nämlich $r \circ i = \mathrm{id}_A$ und $i \circ r \simeq \mathrm{id}_X$.

Beispiel 5.69 Der Buchstabe E (als Teilmenge der Ebene) hat | (als Teilmenge der y-Achse) als einen starken Deformationsretrakt.

[Die Retraktion r von E nach | schickt (x, y) auf $(0, y)$. Ist i die Inklusionsabbildung von | nach E, so definiert $F(t,(x,y)) := ((1-t)x, y)$ eine Homotopie von der identischen Abbildung nach $i \circ r$. Diese "fährt die Antennen ein."]

Weiter hat | eine einpunktige Teilmenge als starken Deformationsretrakt. Es sind also E und die einpunktige Menge homotopieäquivalent. Ebenso hat der Buchstabe T den Strich | als starken Deformationsretrakt, es ist also auch T zu einer einpunktigen Menge homotopieäquivalent. Somit sind E und T homotopieäquivalent.

Bemerkung 5.70 Aus Beispiel 5.68 folgt auch:

Ist Z ein topologischer Raum und sind sowohl $X \subseteq Z$ als auch $Y \subseteq Z$ Deformationsretrakte von Z, so sind X und Y homotopieäquivalent.

Wir werden sehen, dass nach Ersetzen von X und Y durch dazu homöomophe Räume jede Homotopieäquivalenz $f\colon X \to Y$ so erhalten werden kann (man nimmt für Z den Abbildungszylinder Z_f); siehe Folgerung 8.33.

Definition 5.71 Ist $f\colon X \to Y$ eine stetige Abbildung, so nennt man eine stetige Abbildung

$$g\colon Y \to X$$

eine *Homotopie-Rechtsinverse* für f, wenn $f \circ g \simeq \mathrm{id}_Y$. Wir nennen eine stetige Abbildung $h\colon Y \to X$ eine *Homotopie-Linksinverse* für f, wenn $h \circ f \simeq \mathrm{id}_X$.

Bemerkung 5.72 Hat eine stetige Abbildung $f\colon X \to Y$ eine Homotopie-Rechtsinverse g und eine Homotopie-Linksinverse h, so sind g und h beide Homotopie-Äquivalenzen und es ist $[g] = [h]$.

Aus $[h] \circ [f] = [\mathrm{id}_X]$ und $[f] \circ [g] = [\mathrm{id}_Y]$ folgt wegen Bemerkung 5.3 (e) nämlich $[h] = [g]$, so dass beide Morphismen Isomorphismen sind.

Grob gesagt bedeutet Homotopieäquivalenz zweier topologischer Räume, dass man sie mit Methoden der algebraischen Topologie (allein mit Hilfe von Homotopien) nicht unterscheiden kann. Die kontrahierbaren Räume sind durch Homotopieäquivalenz festgelegt.

Satz 5.73 *Ein topologischer Raum X ist genau dann kontrahierbar, wenn er zu einem einpunktigen topologischen Raum $\{y_0\}$ homotopieäquivalent ist.*

Beweis. Ist X kontrahierbar, so gibt es ein $x_0 \in X$ derart, dass $\mathrm{id}_X \simeq k_{x_0}$. Ist $r\colon X \to \{x_0\}$ die konstante Abbildung und $i\colon \{x_0\} \to X$ die Inklusionsabbildung, so ist $k_{x_0} = i \circ r$ und somit $i \circ r \simeq \mathrm{id}_X$. Weiter ist $r \circ i = \mathrm{id}_{\{x_0\}}$.

Ist umgekehrt $f\colon X \to \{y_0\}$ eine Homotopieäquivalenz, so sei $g\colon \{y_0\} \to X$ eine Homotopie-Inverse. Dann ist $\mathrm{id}_X \simeq g \circ f$, wobei $g \circ f$ die konstante Abbildung $X \to X$, $x \mapsto g(y_0)$ ist. Also ist X kontrahierbar. $\square$

Wir erwähnen:

Satz 5.74 *Es seien X und Y topologische Räume, f und g stetige Abbildungen von X nach Y und $F\colon [0,1] \times X \to Y$ eine Homotopie von X nach Y. Für $x_0 \in X$ betrachten wir den Weg*

$$\theta\colon [0,1] \to Y, \quad t \mapsto F(t, x_0)$$

von $f(x_0)$ nach $g(x_0)$. Dann ist

$$g_* \;=\; \theta_\sharp \circ f_*$$

mit $f_*\colon \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, f(x_0))$, $g_*\colon \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, g(x_0))$ und dem Isomorphismus $\theta_\sharp\colon \pi_1(Y, f(x_0)) \to \pi_1(Y, g(x_0))$, $[\eta] \mapsto [\theta]^{-1}\, [\eta]\, [\theta]$.

Beweis. Sei $\eta\colon [0,1] \to X$ eine Schleife an der Stelle x_0. Wenden wir Lemma 5.46 auf die Homotopie

$$G\colon [0,1]\times[0,1] \to Y, \quad (t,s) \mapsto F(t,\eta(s))$$

an, so ist $\alpha = \theta$, $\beta = g\circ\eta$, $\gamma = \theta^-$ und $\delta = (f\circ\eta)^-$, also

$$f\circ\eta = \delta^- \simeq (\theta\cdot(g\circ\eta))\cdot\theta^-$$

relativ $\{0,1\}$. Folglich ist $f_*([\eta]) = [\theta]\, g_*([\eta])\, [\theta]^{-1}$ und somit $g_*([\eta]) = [\theta]^{-1} f_*([\eta])[\theta] = \theta_\sharp(f_*([\eta]))$. $\square$

Die punktierte Homotopiekategorie*

In der Vorlesung überspringen wir den Begriff der punktierten Homotopiekategorie (ganz oder zunächst). Für die Allgemeinbildung wird jedoch im Skript kurz darauf eingegangen. Wie Lemma 5.64 beweist man:

Lemma 5.75 *Es seien (X,x_0), (Y,y_0) und (Z,z_0) punktierte topologische Räume und $f, f_1\colon (Y,y_0)\to(Z,z_0)$ sowie $g,g_1\colon (X,x_0)\to(Y,y_0)$ Morphismen punktierter topologischer Räume. Ist $f\simeq f_1$ relativ $\{y_0\}$ und $g\simeq g_1$ relativ $\{x_0\}$, so ist*

$$f\circ g \;\simeq\; f_1\circ g_1 \quad \textit{relativ } \{x_0\}$$

und somit $[f]\circ[g] := [f\circ g]$ wohldefiniert im Sinne von Homotopieklassen relativ dem jeweiligen Basispunkt. $\square$

Dies ermöglicht folgende Definition.

Definition 5.76 Die punktierte Homotopiekategorie $[\mathrm{Top}_0]$ habe als Klasse der Objekte die Klasse der punktierten topologischen Räume. Gegeben Objekte (X,x_0) und (Y,y_0) sei die Menge $[(X,x_0),[Y,y_0)]$ der Morphismen die Menge der Homotopieklassen $[f]$ relativ $\{x_0\}$ von Morphismen $f\colon (X,x_0)\to (Y,y_0)$ punktierter topologischer Räume. Die Komposition $[g]\circ[f] := [g\circ f]$ ist wie in Lemma 5.75.

Bemerkung 5.77 Definieren wir $(X,x_0)\mapsto(X,x_0)$ auf Objekten und $f\mapsto [f]$ auf Morphismen, so erhalten wir einen Funktor

$$\mathrm{Top}_0 \to [\mathrm{Top}_0]$$

von der Kategorie punktierter topologischer Räume in die punktierte Homotopiekategorie.

Lemma 5.78 *Es seien* (X, x_0) *und* (Y, y_0) *punktierte topologische Räume und* $f\colon (X, x_0) \to (Y, y_0)$ *sowie* $g\colon (X, x_0) \to (Y, y_0)$ *Morphismen topologischer Räume. Ist* $f \simeq g$ *relativ* $\{x_0\}$*, so stimmen die Gruppenhomomorphismen*

$$f_*\colon \pi(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)$$

und $g_*\colon \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)$ *überein. Somit ist*

$$[f]_* := f_*\colon \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)$$

wohldefiniert für die Homotopieklasse $[f]$ *relativ* $\{x_0\}$.

Beweis. Es sei $F\colon [0,1] \times X \to Y$ eine Homotopie relativ $\{x_0\}$ von f nach g. Für jede Schleife $\gamma\colon [0,1] \to X$ an der Stelle x_0 ist nach Lemma 5.34 (b) dann $F \circ (\mathrm{id}_{[0,1]} \times \gamma)$ eine Homotopie relativ $\{0,1\}$ von $f \circ \gamma$ nach $g \circ \gamma$, so dass also $f_*([\gamma]) = [f \circ \gamma] = [g \circ \gamma] = g_*([\gamma])$. $\square$

Wir können die Fundamentalgruppe daher als einen Funktor auf $[\mathrm{Top}_0]$ auffassen:

Satz 5.79 *Ordnet man jedem punktierten topologischen Raum* (X, x_0) *seine Fundamentalgruppe* $\pi_1(X, x_0)$ *zu und jedem Morphismus* $[f]\colon (X, x_0) \to (Y, y_0)$ *in* $[(X, x_0), (Y, y_0)]$ *den Gruppenhomomorphismus*

$$[f]_*\colon \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0),$$

so erhält man einen Funktor $[\mathrm{Top}_0] \to \mathrm{Grp}$. $\square$

6 Überlagerungstheorie

Definition 6.1 Es seien X und Y topologische Räume und $q\colon X \to Y$ eine surjektive, stetige Abbildung.

(a) Man sagt, dass eine offene Teilmenge $U \subseteq Y$ durch q *trivial überlagert* wird, wenn das Urbild $q^{-1}(U)$ als eine Vereinigung

$$q^{-1}(U) = \bigcup_{\alpha \in A} V_\alpha$$

paarweise disjunkter offener Mengen V_α geschrieben werden kann, für welche

$$q|_{V_\alpha}^U \colon V_\alpha \to U$$

ein Homöomorphismus ist.

(b) Hat jedes $y \in Y$ eine offene Umgebung U, welche durch q trivial überlagert wird, so nennt man q eine *Überlagerung*. Man nennt X den *Überlagerungsraum*, Y die *Basis*.

Details der folgenden Beispiele behandeln wir in der Übung.

Beispiel 6.2 Die Abbildung $q\colon \mathbb{R} \to \mathbb{S}_1 \subseteq \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$, $t \mapsto e^{2\pi i t}$ ist eine Überlagerung.

Beispiel 6.3 Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist die Abbildung $q\colon \mathbb{S}_1 \to \mathbb{S}_1$, $z \mapsto z^n$ eine Überlagerung.

Beispiel 6.4 Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist die Abbildung

$$q\colon \mathbb{S}_n \to \mathbb{R}P_n, \quad x \mapsto \mathbb{R}x$$

eine Überlagerung bzw. die Abbildung $\mathbb{S}_n \to \mathbb{S}_n/\sim$ mit $x \sim y$ genau dann, wenn $y \in \{x, -x\}$.

Beispiel 6.5 Es sei Y ein topologischer Raum und F ein diskreter topologischer Raum. Dann ist

$$\mathrm{pr}_1\colon Y \times A \to Y, \quad (y, \alpha) \mapsto y$$

eine Überlagerung (wir können $U := Y$ nehmen, $A := F$ und $V_\alpha := Y \times \{\alpha\}$ für $\alpha \in F$).

Allgemeine Überlagerungen sehen lokal so aus wie das vorige Beispiel.

Definition 6.6 Eine Abbildung $q\colon X \to Y$ zwischen topologischen Räumen wird *lokaler Homöomorphismus* genannt, wenn für jedes $x \in X$ eine offene x-Umgebung $V \subseteq X$ existiert derart, dass $q(V)$ offen in Y ist und $q|_V^{q(V)}\colon V \to q(V)$ ein Homöomorphismus.

Lemma 6.7 (a) *Jede Überlagerung ist ein lokaler Homöomorphismus.*

(b)* *Jeder lokale Homöomorphismus ist eine offene Abbildung.*

Beweis. (a) Es sei $q\colon X \to Y$ eine Überlagerung und $x \in X$. Es gibt dann eine offene Umgebung U von $f(x)$, die durch q trivial überlagert ist und somit

$$q^{-1}(U) = \bigcup_{\alpha \in A} V_\alpha$$

wie in Definition 6.1. Es ist dann $x \in V_\alpha$ für ein $\alpha \in A$. Dann ist $q|_{V_\alpha}^U$ ein Homöomorphismus, wobei V_α eine offene x-Umgebung ist und U offen in Y.

(b) Es sei $q\colon X \to Y$ ein lokaler Homöomorphismus und W eine offene Teilmenge von X. Für jedes $x \in W$ gibt es eine offene x-Umgebung V in X derart, dass $q(V)$ offen in Y ist und $q|_V^{q(V)}$ ein Homöomorphismus. Dann ist $V \cap W$ eine offene x-Umgebung in V, also $q(V \cap W) = q|_V^{q(V)}(V \cap W)$ eine offene Umgebung von $f(x)$ in $q(V)$ und somit in Y. Also ist auch $q(W)$ eine Umgebung von $q(x)$ in Y. Da x beliebig war, ist $q(W)$ offen in Y. □

Definition 6.8 Es sei $q\colon X \to Y$ eine stetige Abbildung zwischen topologischen Räumen, Z ein topologischer Raum und $f\colon Z \to Y$ stetig. Eine stetige Abbildung $g\colon Z \to X$ wird eine *Hochhebung* von f genannt (kurz: ein "Lift"), wenn $q \circ g = f$.

Satz 6.9 (Eindeutigkeitsatz für Hochhebungen). *Es seien X, Y und Z topologische Räume, $q\colon X \to Y$ eine Überlagerung und $f\colon Z \to Y$ stetig. Weiter seien*

$$g_1\colon Z \to X \quad \textit{und} \quad g_2\colon Z \to X$$

Hochhebungen von f über q, also stetige Abbildungen derart, dass $q \circ g_1 = f$ und $q \circ g_2 = f$. Ist

$$g_1(z_0) = g_2(z_0)$$

für ein $z_0 \in Z$ und Z zusammenhängend, so folgt $g_1 = g_2$.

Beweis. Wir zeigen, dass die Menge

$$E := \{z \in Z \colon g_1(z) = g_2(z)\}$$

in Z offen ist. Sei $z \in E$. Als Überlagerung ist q ein lokaler Homöomorphismus, es gibt somit eine offene Umgebung V von $g_1(z) = g_2(z)$ in X derart, dass $q(V)$ offen in Y und $q|_V^{q(V)}$ ein Homöomorphismus ist. Insbesondere ist $q|_V$ injektiv. Da g_1 und g_2 stetig sind, gibt es eine offene Umgebung W von z derart, dass $g_1(W) \subseteq V$ und $g_2(W) \subseteq V$. Für jedes $w \in W$ ist

$$q|_V(g_j(w)) = (q \circ g_j)(w) = f(w)$$

sowohl für $j = 1$ als auch für $j = 2$. Wegen der Injektivität von $q|_V$ ist also $g_1(w) = g_2(w)$, also $W \subseteq E$.

Wir behaupten, dass E auch abgeschlossen ist. Stimmt das, so ist E also offen und abgeschlossen in Z und zudem nicht leer, da $x_0 \in E$ Per Voraussetzung. Da Z zusammenhängend ist, folgt $E = Z$ und somit $g_1 = g_2$.

Zum Beweis der Behauptung zeigen wir, dass $Z \setminus E$ offen in Z ist. Hierzu sei $z \in Z \setminus E$, also $g_1(z) \neq g_2(z)$. Es gibt eine durch q trivial überlagerte Umgebung U von $x := f(z)$ in Y, so dass also

$$q^{-1}(U) \;=\; \bigcup_{\alpha \in A} V_\alpha$$

wie in Definition 6.1. Es ist $g_1(z) \in V_\alpha$ für ein $\alpha \in A$ und $g_2(z) \in V_\beta$ für ein $\beta \in A$. Da $q|_{V_\alpha}$ injektiv ist und $q(g_1(z)) = f(z) = q(g_2(z))$, kann wegen $g_1(x) \neq g_2(x)$ nicht $g_2(x) \in V_\alpha$ sein; also ist $\alpha \neq \beta$. Dann ist

$$W := g_1^{-1}(V_\alpha) \cap g_2^{-1}(V_\beta)$$

eine offene w-Umgebung in Z mit $W \subseteq Z \setminus E$ (so dass wir auf Offenheit von $Z \setminus E$ schließen können). Für jedes $w \in W$ ist nämlich $g_1(w) \in V_\alpha$ und $g_2(w) \in V_\beta$ und folglich $g_1(w) \neq g_2(w)$, da $V_\alpha \cap V_\beta = \emptyset$. □

Die folgende Bemerkung überspringen wir.

Bemerkung 6.10 Die Schlussfolgerung von Satz 6.9 bleibt bestehen, wenn q nicht notwendig eine Überlagerung ist, jedoch q ein lokaler Homöomorphismus ist und X Hausdorffsch.

[Die Offenheit von E im Beweis sieht man nämlich genauso. Da X Hausdorffsch angenommen ist, ist die Diagonale $\Delta_X := \{(x,x)\colon x \in X\}$ in $X \times X$ abgeschlossen und somit

$$E = (g_1, g_2)^{-1}(\Delta)$$

abgeschlossen in Z. Man kann den Beweis nun wie oben beenden.]

Satz 6.11 (Hochheben von Wegen). *Es sei $q\colon X \to Y$ eine Überlagerung, $\gamma\colon [0,1] \to Y$ ein Weg und $x_0 \in X$ mit $q(x_0) = \gamma(0)$. Dann existiert genau ein Weg $\widetilde{\gamma}\colon [0,1] \to X$ derart, dass $\widetilde{\gamma}(0) = x_0$ und $q \circ \widetilde{\gamma} = \gamma$.*

Beweis. Da das Einheitsintervall zusammenhängend ist, folgt die Eindeutigkeit von $\tilde{\gamma}$ aus Satz 6.9. Für jedes $t \in [0,1]$ existiert eine offene Umgebung W_t von $\gamma(t)$ in Y, die durch q trivial überlagert wird. Es sei $\delta > 0$ eine Lebesguesche Zahl für die offene Überdeckung $(\gamma^{-1}(W_t))_{t\in[0,1]}$. Für jedes $s \in [0,1]$ existiert also ein $t \in [0,1]$ derart, dass

$$\{r \in [0,1]\colon |r - s| \leq \delta\} \subseteq \gamma^{-1}(W_t).$$

Wir wählen $0 = s_0 < \cdots < s_m = 1$ derart, dass $s_j - s_{j-1} \leq \delta$ für alle $j \in \{1, \ldots, m\}$. Wir behaupten, dass es für alle $j \in \{0, 1, \ldots, m\}$ einen Weg $\eta_j\colon [0, s_j] \to X$ gibt mit

$$q \circ \eta_j = \gamma|_{[0,s_j]} \quad \text{und} \quad \eta_j(0) = x_0\,. \tag{20}$$

Für $j = 0$ ist dies trivial: Dann ist $[0, s_j] = \{0\}$ und $\eta_0\colon \{0\} \to X$, $s \mapsto x_0$ leistet das Gewünschte. Sei nun $j \in \{0, \ldots, m-1\}$ und existiere η_j mit (20). Da $s_{j+1} - s_j \leq \delta$, existiert ein $t \in [0,1]$ mit

$$[s_j, s_{j+1}] \subseteq \gamma^{-1}(W_t)\,.$$

Da $U := W_t$ durch q trivial überlagert wird, finden wir eine Familie $(V_\alpha)_{\alpha\in A}$ wie in Definition 6.1. Da $q(\eta_j(s_j)) = \gamma(s_j) \in W_t = U$, ist

$$\eta_j(s_j) \in V_\alpha$$

für ein $\alpha \in A$. Dann ist

$$\eta_{j+1}\colon [0, s_{j+1}] \to X, \quad s \mapsto \left\{ \begin{array}{cl} \eta_j(s) & \text{wenn } s \in [0, s_j]; \\ (q|_{V_\alpha}^U)^{-1}(\gamma(s)) & \text{wenn } s \in [s_j, s_{j-1}] \end{array} \right.$$

wohldefiniert und stetig nach dem Klebelemma. Weiter ist $\eta_{j+1}(0) = \eta_j(0) = x_0$. Ist $s \in [0, s_{j+1}]$, so ist im Falle $s \in [0, s_j]$

$$q(\eta_{j+1}(s)) = q(\eta_j(s)) = \gamma(s)$$

und im Falle $s \in [s_j, s_{j+1}]$

$$q(\eta_{j+1}(s)) = q((q^U_{V_\alpha})^{-1}(\gamma(s))) = \gamma(s)$$

per Konstruktion. Also ist $q \circ \eta_{j+1} = \gamma|_{[0,s_{j+1}]}$ und somit η_{j+1} von der geforderten Form. Nun leistet $\widetilde{\gamma} := \eta_m$ das Gewünschte. □

Definition 6.12 Es sei $q\colon X \to Y$ eine stetige Abbildung zwischen topologischen Räumen. Man sagt, q habe die *Homotopie-Hochhebungseigenschaft* für einen topologischen Raum Z, wenn für jede stetige Abbildung

$$F\colon [0,1] \times Z \to Y$$

und jede stetige Abbildung $\widetilde{f}\colon Z \to X$ mit $q \circ \widetilde{f} = F(0,\cdot)$ eine stetige Abbildung $\widetilde{F}\colon [0,1] \times Z \to X$ existiert derart, dass

$$q \circ \widetilde{F} = F \quad \text{und} \quad \widetilde{F}(0,\cdot) = \widetilde{f}\,.$$

Hat q die Homotopie-Hochhebungseigenschaft für alle topologischen Räume Z, so wird q eine *Faserung* genannt.

Satz 6.13 (Homotopie-Hochhebungssatz) *Jede Überlagerung $q\colon X \to Y$ ist eine Faserung, hat also die Homotopie-Hochhebungseigenschaft für alle topologischen Räume Z.*

Beweis. Es seien $F\colon [0,1] \times Z \to Y$ und $\widetilde{f}\colon Z \to X$ wie in Definition 6.12. Nach Satz 6.11 gibt es für jedes $z \in Z$ genau einen Weg $\gamma_z\colon [0,1] \to X$ derart, dass $q \circ \gamma_z = F(\cdot, z)$ und $\gamma_z(0) = \widetilde{f}(z)$. Wir definieren

$$\widetilde{F}\colon [0,1] \times Z \to X, \quad (t,z) \mapsto \gamma_z(t)\,.$$

Dann ist $\widetilde{F}(0,z) = \gamma_z(0) = \widetilde{f}(z)$ für alle $z \in Z$ und $(q \circ \widetilde{F})(t,z) = q(\gamma_z(t)) = F(t,z)$ für alle $(t,z) \in [0,1] \times Z$, also $q \circ \widetilde{F} = F$. Es muss nur noch gezeigt werden, dass $\widetilde{F}$ stetig ist. Hierzu definieren wir für $z \in Z$

$$I_z \subseteq [0,1]$$

als die Menge aller $t \in [0,1]$ derart, dass $\widetilde{F}|_{[0,t]\times Q}$ stetig ist für eine offene z-Umgebung $Q \subseteq Z$. Können wir zeigen, dass stets $I_z = [0,1]$, so ist $\widetilde{F}$ stetig und der Beweis beendet. Wir halten $z \in Z$ fest. Da $\widetilde{F}(0,\cdot) = \widetilde{f}$ stetig ist, ist $0 \in I_z$. Offenbar ist I_z ein Intervall. Für jedes $s \in [0,1]$ existiert eine offene Umgebung W_s von $F(s,z)$ in Y, die durch q trivial überlagert wird. Dann enthält $F^{-1}(W_s)$ ein Produkt

$$J_s \times Q_s$$

mit einer offenen s-Umgebung $J_s \subseteq [0,1]$ und einer offenen z-Umgebung $Q_s \subseteq Z$. Es sei $\delta > 0$ eine Lebesguesche Zahl für die offene Überdeckung $(J_s)_{s\in[0,1]}$. Wir behaupten, dass für jedes $t \in I_z$ auch

$$t^* := \min\{t+\delta, 1\} \in I_z\,.$$

Wenden wir dies mehrmals an, finden wir, dass $t, t+\delta, \ldots, t+k\delta, 1 \in I_z$ für ein $k \in \mathbb{N}_0$, insbesondere also $1 \in I_z$ was den Beweis beendet. Für $t \in I_z$ gibt es per Definition eine offene z-Umgebung $Q \subseteq Z$, so dass $\widetilde{F}|_{[0,t]\times Q}$ stetig ist. Es gibt ein $s \in [0,1]$ derart, dass $[t,t^*] \subseteq J_s$ und somit

$$[t,t^*] \times Q_s \subseteq F^{-1}(W_s)$$

für die von q trivial überlagerte offene Menge $W_s =: U$. Es sei $(V_\alpha)_{\alpha\in A}$ wie in Definition 6.1. Da

$$q(\widetilde{F}(t,z)) = F(t,z) \in W_s = U,$$

ist $\widetilde{F}(t,z) \in V_\alpha$ für ein $\alpha \in A$. Da $\widetilde{F}|_{[0,t]\times Q}$ stetig ist, gibt es eine z-Umgebung $P \subseteq Q \cap Q_s$ derart, dass

$$\widetilde{F}(t,p) \in V_\alpha \quad \text{für alle } p \in P.$$

Für alle $p \in P$ ist dann

$$\eta_p\colon [t,t^*] \to X, \quad r \mapsto (q|_{V_\alpha}^U)^{-1}(F(r,p))$$

ein Weg derart, dass $\eta_p(t) = \widetilde{F}(t,p) = \gamma_p(t)$ und

$$q \circ \eta_p = F(\cdot,p)|_{[t,t^*]} = q \circ \gamma_p|_{[t,t^*]}.$$

Wegen der Eindeutigkeit von Hochhebungen ist also

$$\eta_p = \gamma_p|_{[t,t^*]}$$

und somit $\widetilde{F}(r,p) = \eta_p(r) = (q|_{V_\alpha}^U)^{-1}(F(r,p))$ für alle $(r,p) \in [t,t^*] \times P$, was eine stetige Funktion von (r,p) ist. Nach dem Klebelemma ist die Funktion $F|_{[0,t^*]\times P}$ also stetig, weil sie auf $[0,t] \times P \subseteq [0,1] \times Q$ und auf $[t,t^*] \times P$ stetig ist und somit ist $t^* \in I_z$. □

Folgerung 6.14 *Es sei $q\colon X \to Y$ eine Überlagerung. Sind Wege $\gamma_1\colon [0,1] \to Y$ und $\gamma_2\colon [0,1] \to Y$ homotop relativ $\{0,1\}$ und $\widetilde{\gamma}_1\colon [0,1] \to X$ sowie $\widetilde{\gamma}_2\colon [0,1] \to X$ Hochhebungen von γ_1 bzw. γ_2 mit*

$$\widetilde{\gamma}_1(0) = \widetilde{\gamma}_2(0),$$

so sind $\widetilde{\gamma}_1$ und $\widetilde{\gamma}_2$ homotop relativ $\{0,1\}$. Insbesondere gilt

$$\widetilde{\gamma}_1(1) = \widetilde{\gamma}_2(1).$$

Beweis. Es sei $F\colon [0,1] \times [0,1] \to Y$ eine Homotopie relativ $\{0,1\}$ von γ_1 nach γ_2. Da $F(0,\cdot) = \gamma_1$ die Hochhebung $\widetilde{\gamma}_1$ besitzt, gibt es nach dem Homotopiehochhebungssatz eine stetige Abbildung

$$\widetilde{F}\colon [0,1] \times [0,1] \to X$$

derart, dass $q \circ \widetilde{F} = F$ und $\widetilde{F}(0,\cdot) = \widetilde{\gamma}_1$. Sei $y_0 := \gamma_1(0) = \gamma_2(0)$, $x_0 := \widetilde{\gamma}_1(0)$ und $z_0 := \widetilde{\gamma}_1(1)$. Es ist

$$\widetilde{F}(\cdot,0)\colon [0,1] \to X$$

eine Hochhebung von $F(\cdot,0) = c_{y_0}$ mit $\widetilde{F}(0,0) = \widetilde{\gamma}_1(0) = x_0$. Da auch der konstante Weg $c_{x_0}\colon [0,1] \to X$ eine Hochhebung von c_{y_0} mit $c_{x_0}(0) = x_0$ ist, folgt $\widetilde{F}(\cdot,0) = c_{x_0}$, also

$$\widetilde{F}(t,0) = x_0 \quad \text{für alle } t \in [0,1] \tag{21}$$

und insbesondere $\widetilde{F}(1,0) = x_0$. Somit ist $\widetilde{F}(1,\cdot)$ ein in x_0 startender Lift von γ_2 und somit

$$\widetilde{F}(1,\cdot) = \widetilde{\gamma}_2\,.$$

Analog zu (21) ist

$$\widetilde{F}(t,1) = z_0 \quad \text{für alle } t \in [0,1].$$

Also ist $\widetilde{F}$ eine Homotopie relativ $\{0,1\}$ von $\widetilde{\gamma}_1$ nach $\widetilde{\gamma}_2$. Insbesondere haben $\widetilde{\gamma}_1$ und $\widetilde{\gamma}_2$ den gleichen Endpunkt. □

Folgerung 6.15 *Es sei $q\colon X \to Y$. Für jedes $x_0 \in X$ und $y_0 := q(x_0)$ ist dann*

$$q_*\colon \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)$$

injektiv.

Beweis. Sei $[\gamma]$ im Kern von q_*. Dann ist $[q \circ \gamma] = q_*([\gamma]) = [c_{y_0}]$, also $q \circ \gamma$ zum konstanten Weg c_{y_0} homotop relativ $\{0, 1\}$. Nun ist der konstante Weg $c_{x_0}\colon [0, 1] \to X$ der in x_0 startende Lift von c_{y_0} und es ist γ der in x_0 startende Lift von $q \circ \gamma$. Nach Folgerung 6.14 sind γ und c_{x_0} homotop relativ $\{0, 1\}$, also $[\gamma] = [c_{x_0}] = e$. □

Satz 6.16 (Hochheben beliebiger Abbildungen) *Es seien $q\colon X \to Y$ eine Überlagerung, $x_0 \in X$ und $y_0 := q(x_0)$. Weiter seien Z ein topologischer Raum, der zusammenhängend und lokal wegzusammenhängendend ist, $z_0 \in Z$ und $f\colon Z \to Y$ eine stetige Abbildung derart, dass*

$$f(z_0) = y_0$$

und

$$\operatorname{im}(f_*) \subseteq \operatorname{im}(q_*) \tag{22}$$

gilt für die Bilder der Gruppen-Homomorphismen

$$f_*\colon \pi_1(Z, z_0) \to \pi_1(Y, y_0) \quad \textit{und} \quad q_*\colon \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)\,.$$

Dann existiert genau eine stetige Abbildung $\widetilde{f}\colon Z \to X$ derart, dass

$$q \circ \widetilde{f} = f \quad \textit{und} \quad \widetilde{f}(z_0) = x_0\,. \tag{23}$$

Bemerkung 6.17 Die Bedingung (22) ist notwendig für die Existenz der Hochhebung $\widetilde{f}$, denn aus $f = q \circ \widetilde{f}$ folgt ja

$$f_* = q_* \circ (\widetilde{f})_*$$

und somit $\operatorname{im}(f_*) \subseteq \operatorname{im}(q_*)$.

Beweis von Satz 6.16. Als zusammenhängender, lokal wegzusammenhängender topologischer Raum ist Z nach Satz 1.104 wegzusammenhängend. Für jedes $z \in Z$ existiert also einen Weg γ_z von z_0 nach z. Nach Satz 6.11

gibt es genau einen Lift $\widetilde{\gamma}_z\colon [0,1] \to X$ von γ_z mit $\widetilde{\gamma}_z(0) = x_0$. Wir zeigen, dass

$$\widetilde{f}(z) := \widetilde{\gamma}_z(1)$$

unabhängig von der Wahl von γ_z ist. Sei also auch η ein Weg in Z von z_0 nach z. Dann ist $\gamma_z \cdot \eta^-$ eine Schleife in Z an der Stelle z_0 und somit

$$\theta := f \circ (\gamma_z \cdot \eta^-) = (f \circ \gamma_z) \cdot (f \circ \eta)^-$$

eine Schleife in Y an der Stelle y_0. Wegen (22) gibt es eine Schleife ζ in X an der Stelle x_0 mit $q_*([\zeta]) = [\theta]$, so dass also

$$q \circ \zeta \simeq \theta \quad \text{relativ } \{0,1\}.$$

Ist $\widetilde{\theta}\colon [0,1] \to X$ der in x_0 startende Lift von θ, so ist nach Folgerung 6.14 $\widetilde{\theta}$ zu ζ homotop relativ $\{0,1\}$ und somit

$$\widetilde{\theta}(1) = \zeta(1) = x_0\,.$$

Setzen wir $\alpha(s) := \widetilde{\theta}(s/2)$ für $s \in [0,1]$ und $\beta(s) := \widetilde{\theta}(1 - \frac{s}{2})$, so ist

$$(q \circ \alpha)(s) = \theta(s/2) = (f \circ \gamma_z)(s)$$

und $\alpha(0) = x_0$, also α der in x_0 startende Lift von $f \circ \gamma_z$ und somit

$$\alpha = \widetilde{\gamma}_z\,.$$

Weiter ist

$$(q \circ \beta)(s) = \theta(1 - \tfrac{s}{2}) = (f \circ \eta)(s)$$

und $\beta(0) = x_0$, also β der in x_0 startende Lift von $f \circ \eta$ und somit

$$\beta = \widetilde{\eta}.$$

Es folgt

$$\widetilde{\gamma}_z(1) = \alpha(1) = \widetilde{\theta}(1/2) = \beta(1) = \widetilde{\eta}(1).$$

Also ist $\widetilde{f}(z)$ unabhängig von der Wahl von γ_z.

Für alle $z \in Z$ ist

$$q(\widetilde{f}(z)) = q(\widetilde{\gamma}_z(1)) = f(\gamma_z(1)) = f(z)$$

und da wir für γ_{z_0} den konstanten Weg c_{z_0} wählen können mit in x_0 startendem Lift $\widetilde{\gamma}_{z_0} = c_{x_0}$ für $f \circ \gamma_{z_0} = c_{y_0}$, ist

$$\widetilde{f}(z_0) = \widetilde{\gamma}_{z_0}(1) = c_{x_0}(1) = x_0\,.$$

Wir zeigen noch, dass für jedes $w \in Z$ die Funktion $\widetilde{f}\colon Z \to X$ auf einer offenen Umgebung W von w stetig ist; also ist $\widetilde{f}$ stetig, was den Beweis beendet. Hierzu sei $U \subseteq Y$ eine offene Umgebung von $f(w)$, die durch q trivial überlagert ist, und es sei $(V_\alpha)_{\alpha \in A}$ wie in Definition 6.1. Für ein $\alpha \in A$ ist

$$\widetilde{f}(w) \in V_\alpha$$

(da ja $q(\widetilde{f}(w)) = f(z) \in U$) und somit

$$\widetilde{f}(w) = (q|^U_{V_\alpha})^{-1}(q|^U_{V_\alpha}(\widetilde{f}(w))) = (q|^U_{V_\alpha})^{-1}(f(w)). \tag{24}$$

Da f stetig ist, gibt es eine offene w-Umgebung $W \subseteq Z$ mit $f(W) \subseteq U$. Da Z lokal wegzusammenhängend ist, dürfen wir nach Verkleinern von W annehmen, dass W wegzusammenhängend ist. Für alle $z \in W$ gibt es also einen Weg $\xi_z\colon [0,1] \to W$ von w nach z in W. Für alle $z \in W \setminus \{w\}$ ist $\gamma_w \cdot \xi_z$ ein Weg von z_0 nach z, wir dürfen also annehmen, dass

$$\gamma_z = \gamma_w \cdot \xi_z$$

gewählt ist. Für jedes $z \in W$ ist dann $\widetilde{\gamma}_z$ gleich dem Weg

$$[0,1] \to X, \quad s \mapsto \begin{cases} \widetilde{\gamma}_w(2s) & \text{wenn } s \in [0,1/2]; \\ (q|^U_{V_\alpha})^{-1}(f(\xi_z(2s-1))) & \text{wenn } s \in [1/2,1], \end{cases}$$

denn dieser ist ein in x_0 startender Lift für $\gamma_w \cdot \xi_z = \gamma_z$ (er ist wohldefiniert, da $\widetilde{\gamma}_w(1) = \widetilde{f}(w)$ durch (24) gegeben ist und stetig nach dem Klebelemma). Also ist für alle $z \in W \setminus \{w\}$

$$\widetilde{f}(z) = \widetilde{f}_z(1) = (q|^U_{V_\alpha})^{-1}(f(\xi_z(1)))$$

mit $\xi_z(1) = z$ und folglich

$$\widetilde{f}(z) = (q|^U_{V_\alpha})^{-1}(f(z));$$

diese Formel gilt auch für $z = w$, wegen (24). Somit ist

$$\widetilde{f}|_W = (q|^U_{V_\alpha})^{-1} \circ f|^U_W$$

stetig. $\square$

Folgerung 6.18 *Es sei $q\colon X \to Y$ eine Überlagerung, $x_0 \in X$ und $y_0 := q(x_0)$. Weiter sei Z ein topologischer Raum und $z_0 \in Z$. Ist Z einfach zusammenhängend und lokal wegzusammenhängend, so existiert für jede stetige Abbildung $f\colon Z \to Y$ mit $f(z_0) = y_0$ ein Lift*

$$\widetilde{f}\colon (Z, z_0) \to (X, x_0)$$

von f.

Beweis. Da $\pi_1(Z, z_0) = \{e\}$, ist die Bedingung $\mathrm{im}(f_*) \subseteq \mathrm{im}(q_*)$ aus Satz 6.16 automatisch erfüllt. □

Definition 6.19 Es sei Y ein lokal wegzusammenhängender topologischer Raum. Eine Überlagerung $q\colon X \to Y$ wird eine *universelle Überlagerung von Y* genannt, wenn X einfach zusammenhängend ist.

Da q ein lokaler Homöomorphismus ist, ist dann auch X lokal wegzusammenhängend.

Beispiel 6.20 Es ist $q\colon \mathbb{R} \to \mathbb{S}_1$, $t \mapsto e^{2\pi i t}$ eine universelle Überlagerung von $\mathbb{S}_1$.

Beispiel 6.21 Für alle natürliche Zahlen $n \geq 2$ ist $q\colon \mathbb{S}_n \to \mathbb{R}P_n$, $x \mapsto \mathbb{R}x$ eine universelle Überlagerung.

Ist $p\colon Y \to Z$ eine universelle Überlagerung, so kann Y nur trivial überlagert werden. Wir erwähnen ohne Beweis (der nur im Anhang des Kapitels gegeben wird):

Satz 6.22 *Es sei Y ein lokal wegzusammenhängender, einfach zusammenhängender topologischer Raum und $q\colon X \to Y$ eine Überlagerung. Dann ist jede Zusammenhangskomponente W von X offen und $q|_W\colon W \to Y$ ein Homöomorphismus. Ist X zusammenhängend, so ist q ein Homöomorphismus.*

Für die Zwecke der Analysis sei noch erwähnt:

Satz 6.23 *Es seien X und Y topologische Räume und $q\colon X \to Y$ eine Überlagerung. Ist Y Hausdorffsch, so auch X.*

Beweis. Seien $x_1, x_2 \in X$ mit $x_1 \neq x_2$. Ist $q(x_1) \neq q(x_2)$, so haben $q(x_1)$ und $q(x_2)$ disjunkte offene Umgebungen W_1 bzw. W_2 in Y; es sind dann $q^{-1}(W_1)$ und $q^{-1}(W_2)$ disjunkte offene Umgebungen für x_1 und x_2 in X. Ist $y := q(x_1) = q(x_2)$, so sei $U \subseteq Y$ eine durch q trivial überlagerte y-Umgebung und

$$q^{-1}(U) = \bigcup_{\alpha \in A} V_\alpha$$

wie in Definition 6.1. Dann ist $x_1 \in V_\alpha$ und $x_2 \in V_\beta$ für gewisse $\alpha, \beta \in A$. Da $q|_{V_\alpha}$ injektiv ist, $q(x_1) = q(x_2)$ und $x_1 \neq x_2$, kann nicht $x_2 \in V_\alpha$ sein und somit ist $\alpha \neq \beta$. Es sind dann V_α und V_β disjunkte Umgebungen von x_1 bzw. x_2 in X. $\square$

Anhang für Kapitel 6

Wir beweisen Satz 6.22.

Beweis für Satz 6.22. Einen trivialen Fall ausschließend seien X und Y nicht leer. Gegeben $x_0 \in X$ sei $y_0 := q(x_0)$. Da Y einfach zusammenhängend ist und lokal wegzusammenhängend, existiert genau ein Lift

$$\phi_{x_0} \colon (Y, y_0) \to (X, x_0)$$

von id_Y. Wegen $q \circ \phi_{x_0} = \mathrm{id}_Y$ ist ϕ_{x_0} injektiv und sogar eine topologische Einbettung mit Umkehrabbildung $q|_{\phi_{x_0}(Y)}$. Jedes $y \in Y$ hat eine von q trivial überlagerte offene Umgebung U in Y. Sei $q^{-1}(U) = \bigcup_{\alpha \in A} V_\alpha$ wie in Definition 6.1. Es ist $\phi_{x_0} \in V_\alpha$ für ein $\alpha \in A$. Da ϕ_{x_0} stetig ist, gibt es eine offene y-Umgebung $W \subseteq U$ mit $\phi_{x_0}(Q) \subseteq V_\alpha$. Für alle $w \in W$ ist dann

$$q|_{V_\alpha}^{U}(\phi_{x_0}(w)) = \mathrm{id}_Y(w) = w,$$

also $\phi_{x_0}(w) = (q|_{V_\alpha}^{U})^{-1}(w)$ und somit

$$\phi_{x_0}|_W = (q|_{V_\alpha}^{U})^{-1}|_W$$

eine offene Einbettung. Da Bild

$$B_{x_0} := \mathrm{im}(\phi_{x_0})$$

ist also offen in X. Sind $x_0, z_0 \in X$ mit

$$B_{x_0} \cap B_{z_0} \neq \emptyset,$$

so sei x in diesem Durchschnitt. Es ist $x = \phi_{x_0}(y)$ für ein $y \in Y$. Dann ist

$$y = \mathrm{id}_Y(y) = q(\phi_{x_0}(y)) = q(x),$$

also $x = \phi_{x_0}(q(x))$. Ebenso ist $x = \phi_{z_0}(q(x))$. Dann sind ϕ_{x_0} und ϕ_{z_0} Lifts von id_Y mit

$$\phi_{x_0}(y) = \phi_{z_0}(y)$$

und somit $\phi_{x_0} = \phi_{z_0}$; insbesondere ist $B_{x_0} = B_{z_0}$. Es ist

$$\{B_{x_0} \colon x \in X\}$$

also eine Partition von X in offene Teilmengen. Das Komplement von B_{x_0} ist die Vereinigung aller B_{y_0} mit $B_{y_0} \cap B_{x_0} = \emptyset$; also ist auch $X \setminus B_{x_0}$ offen und somit B_{x_0} in X abgeschlossen. Da $B_{x_0} \sim Y$ wegzusammenhängend ist, gilt $B_{x_0} \subseteq W$ für die Zusammenhangskomponente W von x_0 in X. Da B_{x_0} offen und abgeschlossen ist und nicht leer, folgt $B_{x_0} = W$. $\square$

7 Die Fundamentalgruppe des Kreises

Wir berechnen die Fundamentalgruppe des Einheitskreises $\mathbb{S}_1$ und geben eine Anwendung. Das Kapitel kann bereits nach Folgerung 6.14 gelesen werden.

Satz 7.1 *Es sei* $x_0 := 1 \in \mathbb{C}$. *Für* $\mathbb{S}_1 \subseteq \mathbb{C}$ *ist dann*

$$\pi_1(\mathbb{S}_1, x_0) \cong (\mathbb{Z}, +)\,.$$

Beweis. Wir betrachten die Überlagerung

$$q\colon \mathbb{R} \to \mathbb{S}_1, \quad t \mapsto e^{2\pi i t}\,.$$

Da $q(0) = 1 = x_0$, hat für jedes $[\gamma] \in \pi_1(\mathbb{S}_1, x_0)$ der Weg $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{S}_1$ einen eindeutigen in 0 startenden Lift $\widetilde{\gamma}\colon [0,1] \to \mathbb{R}$. Dann ist also $\widetilde{\gamma}(0) = 0$ und

$$e^{2\pi i \widetilde{\gamma}(t)} = \gamma(t),$$

insbesondere also

$$e^{2\pi i \widetilde{\gamma}(1)} = \gamma(1) = x_0 = 1$$

und somit

$$\widetilde{\gamma}(1) \in \mathbb{Z}\,.$$

Nach Folgerung 6.14 ist

$$\phi([\gamma]) := \widetilde{\gamma}(1) \in \mathbb{Z}$$

wohldefiniert, unabhängig von der Wahl der Vertreters γ der Homotopieklasse $[\gamma]$. Es ist dann

$$\phi\colon \pi_1(\mathbb{S}_1, x_0) \to \mathbb{Z}$$

ein Gruppen-Homomorphismus. Um dies einzusehen, beachten wir, dass

$$q\colon (\mathbb{R}, +) \to (\mathbb{S}_1, \cdot)$$

ein Gruppen-Homomorphismus ist. Gegeben $[\gamma], [\eta] \in \pi_1(\mathbb{S}_1, x_0)$ mit in 0 startenden Lifts $\widetilde{\gamma}$ und $\widetilde{\eta}$ ist auch

$$\theta\colon [0,1] \to \mathbb{R}, \quad s \mapsto \widetilde{\gamma}(1) + \widetilde{\eta}(s)$$

ein Lift von η, da

$$q(\theta(s)) = q(\widetilde{\gamma}(1) + \widetilde{\eta}(s)) = \underbrace{q(\widetilde{\gamma}(1))}_{=1}\underbrace{q(\widetilde{\eta}(s)}_{=\eta(s)} = \eta(s)$$

für alle $s \in [0,1]$. Weiter ist $\theta(0) = \widetilde{\gamma}(1)$, so dass wir $\widetilde{\gamma}$ und η zu einem Weg

$$\widetilde{\gamma} \cdot \theta \colon [0,1] \to \mathbb{R}$$

zusammensetzen können. Dieser ist per Konstruktion ein Lift von $\gamma \cdot \eta$, also

$$\phi([\gamma]) + \phi([\eta]) = \widetilde{\gamma}(1) + \widetilde{\eta}(1) = (\widetilde{\gamma} \cdot \theta)(1) = \phi([\gamma \cdot \eta]) = \phi([\gamma]\,[\eta]).$$

Für $n \in \mathbb{Z}$ ist $\gamma_n \colon [0,1] \to \mathbb{S}_n$, $t \mapsto e^{2\pi i n t}$ eine Schleife in $\mathbb{S}_1$ an der Stelle x_0 mit in 0 startendem Lift

$$\widetilde{\gamma}_n \colon [0,1] \to \mathbb{R}, \quad s \mapsto ns;$$

es ist also $\phi([\gamma_n]) = n$ und somit ϕ surjektiv. Ist $[\gamma] \in \ker(\phi)$, so ist

$$\widetilde{\gamma}(1) = 0,$$

also $\widetilde{\gamma}$ eine Schleife in $\mathbb{R}$ an der Stelle 0. Da $\mathbb{R}$ einfach zusammenhängend ist, ist $[\widetilde{\gamma}] = e$ und auch

$$[\gamma] = [q \circ \widetilde{\gamma}] = q_*([\widetilde{\gamma}]) = e.$$

Es ist also $\ker(\phi) = \{e\}$ und somit ϕ injektiv. □

Intrinsische Charakterisierung des Randes einer abgeschlossenen Halbebene

Wir betrachten die abgeschlossene rechte Halbebene

$$H := [0, \infty[\, \times \mathbb{R}$$

und ihren Rand $\partial H = \{0\} \times \mathbb{R}$ als Teilmenge von $\mathbb{R}^2$. Wir zeigen:

Satz 7.2 *Es sei $H := [0,\infty[\, \times \mathbb{R}$ und $U \subseteq H$ eine relativ offene Teilmenge. Es sei $x \in U$. Dann gilt:*

(a) *Ist $x \in \partial H$, so gibt es eine x-Umgebung V in U, für welche $V \setminus \{x\}$ kontrahierbar (und somit einfach zusammenhängend) ist.*

(b) *Ist $x \notin \partial H$, so gibt es keine x-Umgebung $V \subseteq U$ derart, dass $V \setminus \{x\}$ einfach zusammenhängend ist.*

Beide Fälle schließen sich aus und involvieren nur den topologischen Raum U (unabhängig von seiner Einbettung in H und $\mathbb{R}^2$). Somit folgt direkt:

Folgerung 7.3 *Sind U_1 und U_2 offene Teilmengen der abgeschlossenen Halbebene $H = [0, \infty[\times \mathbb{R}$ und $\phi\colon U_1 \to U_2$ ein Homöomorphismus, so gilt für alle $x \in U_1$*

$$x \in \partial H \quad \Leftrightarrow \quad \phi(x) \in \partial H\,.$$

Es ist also $\phi(U_1 \cap \partial H) = U_2 \cap \partial H$. $\square$

Beweis von Satz 7.2. (a) Ist $x \in U \cap \partial H$

$$V := \{y \in H \colon \|y - x\|_2 \leq \varepsilon\} \subseteq U$$

für ein $\varepsilon > 0$. Dann ist V konvex und das Innere $V^0 \neq \emptyset$ als Teilmenge von $\mathbb{R}^2$. Wir wählen $x_0 \in V^0$; da $x \in \partial H$, ist $x \notin V^0$ und somit $x \neq x_0$. Dann ist $V \setminus \{x\}$ sternförmig bezüglich x_0: Für alle $y \in V \setminus \{x\}$ ist nämlich

$$(1-t)y + tx_0 \in V^0 \subseteq V \setminus \{x\}$$

für alle $t \in \,]0, 1]$ und für $t = 0$ ist ebenfalls $(1-t)y + tx_0 = y \in V \setminus \{x\}$. Nach Beispiel 5.43 ist $V \setminus \{x\}$ kontrahierbar.

(b) Sei $x \in U \setminus \partial H$ und $V \subseteq U$ eine x-Umgebung. Ist $V \setminus \{x\}$ nicht wegzusammenhängend, so ist $V \setminus \{x\}$ nicht einfach zusammenhängend. Ist $V \setminus \{x\}$ wegzusammenhängend, so wählen wir ein $\varepsilon > 0$ mit

$$\{y \in \mathbb{R}^2 \colon \|y - x\|_2 \leq \varepsilon\} \subseteq V\,.$$

Dann ist

$$A := \{y \in \mathbb{R}^2 \colon \|y - x\|_2 = \varepsilon\}$$

eine zu $\mathbb{S}_1$ homöomorphe Teilmenge von $V \setminus \{x\}$ und die Abbildung

$$r \colon V \setminus \{x\} \to A, \quad y \mapsto x + \varepsilon \frac{y - x}{\|y - x\|_2}$$

ist eine Retraktion. Sei $x_0 \in A$. Bezeichnet $i \colon A \to V \setminus \{0\}$ die Inklusionsabbildung, so ist nach Satz 5.52 (a)

$$i_* \colon \pi_1(A, x_0) \to \pi_1(V \setminus \{x\}, x_0)$$

injektiv. Da $\pi_1(A, x_0) \cong \mathbb{Z}$, ist $\mathrm{im}(i_*) \cong \mathbb{Z}$ und somit $\pi_1(V \setminus \{x\}, x_0)$ nicht die triviale Gruppe. Es ist $V \setminus \{x\}$ also nicht einfach zusammenhängend. $\square$

8 Mehr über Retrakte und Homotopien

Wir geben weitere Beispiele von Retrakten, die später von Nutzen sind. Zudem diskutieren wir die Homotopie-Fortsetzungseigenschaft und Anwendungen dieser Eigenschaft, die ebenfalls in späteren Beweisen benutzt werden.

Weitere Grundbeispiele von Retrakten

Beispiel 8.1 *Ist X eine sternförmige Teilmenge in $\mathbb{R}^n$ (oder einem topologischen Vektorraum) und $x_0 \in X$ ein Punkt mit $x_0 + [0,1](x - x_0) \subseteq X$ für alle $x \in X$, so ist $\{x_0\}$ ein starker Deformationsretrakt von X.*

Die durch $F(t,x) = (1-t)x + tx_0$ gegebene Homotopie von id_X nach k_{x_0} aus Beispiel 5.43 erfüllt nämlich $F(t,x_0) = x_0 = F(0,x_0)$ für alle $t \in [0,1]$, ist also eine Homotopie relativ $\{x_0\}$.

Lemma 8.2 *Es seien X und Y topologische Räume und $A \subseteq X$ eine Teilmenge. Ist A ein Retrakt, Deformationsretrakt bzw. starker Deformationsretrakt von X, so ist $A \times Y$ ein Retrakt, Deformationsretrakt bzw. starker Deformationsretrakt von $X \times Y$.*

Beweis. Es sei $i\colon A \to X$ die Inklusionsabbildung. Dann ist $i \times \mathrm{id}_Y$ die Inklusionsabbildung $A \times Y \to X \times Y$. Ist $r\colon X \to A$ eine Retraktion, so ist

$$r(a) = a$$

für alle $a \in A$ und somit $(r \times \mathrm{id}_Y)(a,y) = (r(a),y) = (a,y)$ für alle $(a,y) \in A \times Y$, also $r \times \mathrm{id}_Y\colon X \times Y \to A \times Y$ eine Retraktion. Ist r eine Deformationsretraktion, so gibt es eine Homotopie $F\colon [0,1] \times X \to X$ von id_X nach $i \circ r$. Dann ist

$$G\colon [0,1] \times (X \times Y) \to X \times Y, \quad (t,(x,y)) \mapsto (F(t,x),y)$$

stetig mit

$$G(0,(x,y)) = (F(0,x),y) = (x,y)$$

und

$$G(1,(x,y)) = (F(1,x),y) = (r(x),y)$$

für alle $(x,y) \in X \times Y$, also G eine Homotopie von $\mathrm{id}_{X \times Y}$ nach $(i \circ r) \times \mathrm{id}_Y = (i \times \mathrm{id}_Y) \circ (r \times \mathrm{id}_Y)$. Somit ist $r \times \mathrm{id}_Y$ eine Deformationsretraktion. Ist r eine starke Deformationsretraktion, so kann F als Homotopie relativ A gewählt werden. Für alle $t \in [0,1]$ und $(a,y) \in A \times Y$ ist dann

$$G(t,(a,y)) = (F(t,a),y) = (a,y),$$

also G eine Homotopie relativ $A \times Y$ und somit $r \times \mathrm{id}_Y$ eine starke Deformationsretraktion. $\square$

Beispiel 8.3 Da $\{0\}$ nach Beispiel 8.1 ein starker Deformationsretrakt von $[0,1]$ ist, ist $\mathbb{D}_n \times \{0\}$ nach Lemma 8.2 ein starker Deformationsretrakt von $\mathbb{D}_n \times [0,1]$, für jedes $n \in \mathbb{N}_0$.

Beispiel 8.4 Aus dem gleichen Grund ist $[0,1]^n \times \{0\}$ ein starker Deformationsretrakt von $[0,1]^n \times [0,1] = [0,1]^{n+1}$.

Beispiel 8.5 Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist $\mathbb{S}_{n-1}$ ein starker Deformationsretrakt von $\mathbb{D}_n \setminus \{0\}$, denn die Abbildung

$$\phi\colon \mathbb{S}_{n-1}\times\,]0,1] \to \mathbb{D}_n \setminus \{0\}, \quad (x,t) \mapsto tx$$

ist ein Homöomorphismus[28] mit

$$\phi(\mathbb{S}_{n-1} \times \{1\}) = \mathbb{S}_{n-1}$$

und (ähnlich den vorigen zwei Beispielen) ist $\mathbb{S}_{n-1} \times \{1\}$ ein starker Deformationsretrakt von $\mathbb{S}_{n-1}\times\,]0,1]$ (siehe auch schon Beispiel 5.54 für ein anderes Argument).

Lemma 8.6 *Es gibt einen Homöomorphismus $\theta\colon [0,1]^2 \to [0,1]^2$ des Einheitsquadrats, welcher $\partial([0,1]^2)$ auf sich abbildet,*

$$F := \{(s,t) \in [0,1]^2 : t = 0 \text{ oder } s = 1\}$$

auf $[0,1] \times \{0\}$ abbildet und $\theta(0,t) = (0,t)$ erfüllt für alle $t \in [0,1]$.

[28]Die Umkehrabbildung ist $z \mapsto \big(\frac{1}{\|z\|_2} z, \|z\|_2\big)$.

Beweis. Es seien

$$A := (0,0), \quad B := (1,0), \quad C := (1,1), \quad D := \Big(\frac{1}{2}, 1\Big), \quad E := (0,1)$$

und

$$A' := (0,0), \quad B' := \Big(\frac{1}{2}, 0\Big), \quad C' := (1,0), \quad D' := (1,1) \quad \text{sowie} \quad E' := (0,1)\,.$$

Dann ist $[0,1]^2$ die Vereinigung der ausgefüllten Dreiecke Δ_1, Δ_2 und Δ_3 mit den Ecken A, B und D bzw. B, C und D bzw. D, E und A. Ebenso ist $[0,1]^2$ die Vereinigung der ausgefüllten Dreiecke Δ'_1, Δ'_2 und Δ'_3 mit den Ecken A', B' und D' bzw. B', C' und D' bzw. D', E' und A'. Für $j \in \{1,2,3\}$ sei $f_j\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die eindeutige affin-lineare Abbildung, welche die Ecken von Δ_j auf die Ecken von Δ'_j abbildet, in der obigen Reihenfolge. Wir definieren $\theta\colon [0,1]^2 \to [0,1]^2$ stückweise via

$$x \mapsto f_j(x) \quad \text{für } j \in \{1,2,3\} \text{ und } x \in \Delta_j.$$

Nach dem Klebelemma ist θ stetig und man sieht sofort, dass die entsprechende Abbildung mit vertauschten Rollen von Δ'_j und Δ_j die Umkehrabbildung für θ ist. □

Satz 8.7 *Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ gibt es einen Homöomorphismus*

$$\phi\colon \mathbb{D}_n \times [0,1] \to \mathbb{D}_n \times [0,1],$$

welcher die Teilmenge

$$A := (\mathbb{D}_n \times \{0\}) \cup ((\partial \mathbb{D}_n) \times [0,1])$$

auf $\mathbb{D}_n \times \{0\}$ abbildet. Insbesondere ist A ein starker Deformationsretrakt von $\mathbb{D}_n \times [0,1]$.

Beweis. Für $n = 0$ ist die Aussage trivial. Sei nun $n \geq 1$. Es sei $\theta\colon [0,1]^2 \to [0,1]^2$, $(s,t) \mapsto (\theta_1(s,t), \theta_2(s,t))$ ein Homöomorphismus wie in Lemma 8.6. Weiter sei $e_{n+1} = (0, \ldots, 0, 1) \in \mathbb{R}^{n+1}$. Identifizieren wir $\mathbb{D}_n$ mit $\mathbb{D}_n \times \{0\}$, so ist

$$\phi\colon \mathbb{D}_n \times [0,1] \to \mathbb{D}_n \times [0,1], \quad sx + te_{n+1} \mapsto \theta_1(s,t)x + \theta_2(s,t)e_{n+1} \tag{25}$$

für $(s,t) \in [0,1]^2$ und $x \in \mathbb{S}_{n-1}$ wohldefiniert. Ist nämlich

$$sx + te_{n+1} = s'x' + t'e_{n+1},$$

so zeigt Vergleich der $(n+1)$ten Komponenten, dass $t = t'$ und folglich $sx = s'x'$. Dann ist $s = \|sx\|_2 = \|s'x'\|_2 = s'$. Ist $s \neq 0$, folgt $x = x'$, es sind (s,x,t) dann also eindeutig festgelegt. Ist $s = 0$, so ist $\theta(s,t) = \theta(0,t) = (0,t)$, also $\theta_1(s,t) = 0$ und somit die rechte Seite von (25) unabhängig von x und x'.

Per Konstruktion ist ϕ bijektiv. Nun ist

$$q\colon \mathbb{S}_{n-1} \times [0,1]^2 \to \mathbb{D}_n \times [0,1], \quad (x,t,s) \mapsto sx + te_{n+1}$$

stetig und surjektiv. Da der Definitionsbereich kompakt und der Wertebereich Hausdorffsch ist, ist q nach Folgerung 1.43 eine Quotientenabbildung. Weil

$$\phi \circ q\colon \mathbb{S}_{n-1} \times [0,1]^2 \to \mathbb{D}_n \times [0,1], \quad (x,s,t) \mapsto \theta_1(s,t)x + \theta_2(s,t)e_{n+1}$$

stetig ist, ist ϕ nach Satz 1.41 stetig und somit ein Homöomorphismus, nach Folgerung 1.24. □

Es ist $\mathbb{R}^0 := \{0\}$ und $[0,1]^0 :=]0,1[^0 := \{0\}$ mit $\partial([0,1]^0) = \emptyset$ in $\mathbb{R}^0$.

Definition 8.8 Für $n \in \mathbb{N}$ definieren wir

$$J_{n-1} := \partial([0,1]^n) \ \setminus \ (]0,1[^{n-1} \times \{1\}),$$

also $J_{n-1} = ([0,1]^{n-1} \times \{0\}) \cup ((\partial[0,1]^{n-1}) \times [0,1])$.

Es ist also $J_0 = \{0\}$ (das können Sie gern auch als Definition betrachten), $J_1 = ([0,1] \times \{0\}) \cup (\{0,1\} \times [0,1])$ und $J_2 = ([0,1]^2 \times \{0\}) \cup (\partial([0,1]^2) \times [0,1])$.

Folgerung 8.9 *Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gibt es einen Homöomorphismus*

$$\psi\colon [0,1]^n \to [0,1]^n,$$

welcher J_{n-1} auf $[0,1]^{n-1} \times \{0\}$ abbildet. Insbesondere ist J_{n-1} ein starker Deformationsretrakt von $[0,1]^n$.

Beweis. Wir nehmen an, dass $n \geq 2$, da der Fall $n = 1$ trivial ist. Es sei $\phi\colon \mathbb{D}_{n-1} \times [0,1] \to \mathbb{D}_{n-1} \times [0,1]$ der Homöomorphismus aus Satz 8.7, angewandt mit $n-1$ statt n. Nach Beispiel 1.46 gibt es einen Homöomorphismus $g\colon [0,1]^{n-1} \to \mathbb{D}_{n-1}$, der die Ränder als Teilmenge von $\mathbb{R}^{n-1}$ aufeinander abbildet. Dann ist

$$g \times \mathrm{id}_{[0,1]}\colon [0,1]^{n-1} \times [0,1] \to \mathbb{D}_{n-1} \times [0,1]$$

ein Homöomorphismus von $[0,1]^n$ auf $\mathbb{D}_{n-1} \times [0,1]$, welcher $\mathbb{D}_{n-1} \times \{0\}$ auf $[0,1]^{n-1} \times \{0\}$ abbildet und $\mathbb{S}_{n-2} \times [0,1]$ auf $\partial[0,1]^{n-1} \times [0,1]$. Also leistet

$$\psi := (g^{-1} \times \mathrm{id}_{[0,1]}) \circ \phi \circ (g \times \mathrm{id}_{[0,1]})$$

das Gewünschte. $\square$

Bemerkung 8.10 Statt den oberen Deckel aus ∂I^k zu entfernen in der Definition von J_{k-1} wie im aktuellen Kapitel, war es später doch nützlicher, den unteren Deckel zu entfernen (siehe Definition 11.1). Die vorigen Resultate gelten entsprechend, denn $I^k \to I^k$, $(s_1, \ldots, s_k) \mapsto (s_1, \ldots, s_{k-1}, 1 - s_k)$ ist ein Homöomorphismus, der die zwei Mengen ineinander überführt.

Definition 8.11 Sei $n \in \mathbb{N}$. Wir definieren

$$F_j := \{(x_1, \ldots, x_n) \in [0,1]^n \colon x_j = 0\}$$

für $j \in \{1, \ldots, n\}$. Für eine Teilmenge $\Phi \subseteq \{1, \ldots, n\}$ sei $F_\Phi := \bigcup_{j\in\Phi} F_j$.

Ist $n = 1$, so ist $F_1 = \{0\}$. Ist $n = 2$, so ist $F_1 = \{0\} \times [0,1]$, $F_2 = [0,1] \times \{0\}$ und $F_{\{1,2\}} = (\{0\} \times [0,1]) \cup ([0,1] \times \{0\})$. Ist $n = 3$, so ist z.B. $F_2 = [0,1] \times \{0\} \times [0,1]$.

Satz 8.12 *Für alle $n \in \mathbb{N}$ und nicht-leeren Teilmengen $\Phi \subseteq \{1, \ldots, n\}$ ist $F_\Phi = \bigcup_{j\in J} F_j$ ein starker Deformationsretrakt von $[0,1]^n$.*

Beweis. Permutieren von Koordinaten liefert einen Homöomorphismus g von $[0,1]^n$, welcher F_Φ auf $F_{g(\Psi)}$ abbildet. Wir brauchen daher nur den Fall zu behandeln, dass

$$\Phi = \{1, \ldots, k\}$$

für ein $k \in \{1, \ldots, n\}$. Der Beweis ist per Induktion nach n. Ist $n = 1$, so ist $F_\Phi = F_1 = \{0\}$; nach Beispiel 8.1 ist dies ein starker Deformationsretrakt von $[0,1]$. Sei nun $n \geq 2$ und gelte die Aussage für $n-1$ statt n. Für $j \in \{1,\ldots,n-1\}$ sei

$$G_j := \{(x_1,\ldots,x_{n-1}) \in [0,1]^{n-1} \colon x_j = 0\}.$$

Dann ist $F_j = G_j \times [0,1]$. Ist $k \leq n-1$, so G_Φ per Induktionsvoraussetzung ein starker Deformationsretrakt von $[0,1]^{n-1}$ und somit nach Lemma 8.2

$$F_\Phi = G_\Phi \times [0,1]$$

ein starker Deformationsretrakt von $[0,1]^{n-1} \times [0,1] = [0,1]^n$. Ist $k = n$, so betrachten wir die kompakte konvexe Menge $K := [0,3]^n$ und den Punkt $x_0 = (2,2,\ldots,2) \in K^0$. Wir wissen, dass $\partial([0,3]^n)$ ein starker Deformationsretrakt von $K \setminus \{x_0\}$ ist mit der Deformationsretraktion

$$r \colon K \setminus \{x_0\} \to \partial K,$$

welche $x \in K \setminus \{x_0\}$ den eindeutigen Punkt

$$r(x) \in x_0 + \,]0,\infty[\,(x - x_0) \cap \partial K$$

zuordnet (vgl. Beispiele 5.55 und 5.54). Ist $x \in [0,1]^n$, so ist jede der Komponenten von $x - x_0$ negativ. Sei $t > 0$ mit $x_0 + t(x - x_0) \in \partial K$. Da $x_0 + 1(x - x_0) = x \in K$, ist $t \geq 1$. Also ist für jedes $j \in \{1,\ldots,n\}$ die $j$te Komponente von

$$r(x) = x_0 + t(x-x_0) = x_0 + 1(x-x_0) + (t-1)(x-x_0) = x + (t-1)(x-x_0)$$

kleiner gleich x_j, woraus $r(x) \in [0,1]^n$ folgt und somit

$$r(x) \in [0,1]^n \cap \partial([0,3]^n) = \bigcup_{j=1}^{n} F_j = F_\Phi.$$

Wir können also r zu einer Abbildung $\rho \colon [0,1]^n \to F_\Phi$, $x \mapsto r(x)$ einschränken. Für jedes $x \in F_\Phi$ ist $x \in \partial([0,3]^n)$, also $\rho(x) = r(x) = x$ und somit ρ eine Retraktion. Da $[0,1]^n$ konvex ist, definiert $F(t,x) := (1-t)x + t\rho(x)$ eine Homotopie von $\mathrm{id}_{[0,1]^n}$ nach ρ. Für alle $x \in F_\Phi$ und $t \in [0,1]$ ist $F(t,x) = (1-t)x + t\rho(x) = (1-t)x + tx = x$, also F eine Homotopie relativ F_Φ von $\mathrm{id}_{[0,1]^n}$ nach $i \circ \rho$ mit der Inklusion $i \colon F_\Phi \to [0,1]^n$. Also ist ρ eine starke Deformationsretraktion. $\square$

Raumpaare und Raumtripel

Definition 8.13 Ein *Raumpaar* ist ein Paar (X, A) aus einem topologischen Raum X und einer Teilmenge $A \subseteq X$, versehen mit der induzierten Topologie. Ein *Morphismus* $f\colon (X, A) \to (Y, B)$ zwischen Raumpaaren ist eine stetige Abbildung $f\colon X \to Y$ mit $f(A) \subseteq B$.

Wir erhalten eine Kategorie von Raumpaaren. In dieser ist ein Morphismus $f\colon (X, A) \to (Y, B)$ genau dann ein Isomorphismus, wenn $f\colon X \to Y$ ein Homöomorphismus ist und $f(A) = B$. Ein punktierter topologischer Raum (X, x_0) entspricht dem Raumpaar $(X, \{x_0\})$.

Definition 8.14 Analog besteht ein Raumtripel (X, A, B) aus einem topologischen Raum X und Teilmengen $B \subseteq A \subseteq X$. Ein Morphismus

$$f\colon (X_1, A_1, B_1) \to (X_2, A_2, B_2)$$

von Raumtripeln ist eine stetige Abbildung $f\colon X_1 \to X_2$ derart, dass

$$f(A_1) \subseteq A_2 \quad \text{und} \quad f(B_1) \subseteq B_2\,.$$

Ist $B = \{x_0\}$ einpunktig, schreibt man auch (X, A, x_0) statt $(X, A, \{x_0\})$; ebenso kann $\{x_0\}$ als x_0 abgekürzt werden, falls $A = \{x_0\}$.

Die Homotopie-Fortsetzungseigenschaft

Der Rest des Kapitels lehnt sich an die Seiten 14–17 aus Hatchers Buch an, es werden jedoch die dort abkürzend umschriebenen Argumente in explizite Formeln umgesetzt.

Definition 8.15 Ein Raumpaar (X, A) hat die *Homotopie-Fortsetzungseigenschaft*, wenn für jede stetige Abbildung $f\colon X \to Y$ in einen topologischen Raum Y und jede stetige Abbildung

$$H\colon [0, 1] \times A \to Y$$

mit $H(0, \cdot) = f|_A$ eine stetige Funktion $F\colon [0, 1] \times X \to Y$ existiert derart, dass

$$F|_{[0,1]\times A} = H \quad \text{und} \quad F(0, \cdot) = f\,.$$

Diese ist ein Spezialfall eines allgemeineren Begriffs.

Definition 8.16 Ein Raumpaar (X, A) hat die *Abbildungs-Fortsetzungseigenschaft*, wenn für jeden topologischen Raum Y und jede stetige Abbildung $g\colon A \to Y$ eine stetige Abbildung $\widetilde{g}\colon X \to Y$ existiert mit $\widetilde{g}|_A = g$.

Lemma 8.17 *Ein Raumpaar (X, A) hat genau dann die Homotopie-Fortsetzungseigenschaft, wenn das Raumpaar aus*

$$[0,1] \times X$$

und seiner Teilmenge

$$(\{0\} \times X) \cup ([0,1] \times A)$$

die Abbildungs-Fortsetzungseigenschaft besitzt.

Beweis. Ist $f\colon X \to Y$ stetig und $H\colon [0,1] \times A \to Y$ eine stetige Abbildung mit $H(0,\cdot) = f|_A$, so ist

$$g\colon (\{0\}\times X)\cup([0,1]\times A) \to Y, \quad (t,x) \mapsto \begin{cases} f(x) & \text{wenn } (t,x) \in \{0\} \times X; \\ H(t,x) & \text{wenn } (t,x) \in [0,1] \times A \end{cases}$$

wohldefiniert und nach dem Klebelemma stetig. Hat das zweitgenannte Raumpaar die Abbildungs-Fortsetzungseigenschaft, so lässt sich g zu einer stetigen Abbildung

$$F := \widetilde{g}\colon [0,1] \times X \to Y$$

fortsetzen wie in Definition 8.15 benötigt. Ist umgekehrt $g\colon (\{0\} \times X) \cup ([0,1] \times A) \to Y$ stetig, so sind $H := g|_{[0,1]\times A}$ und

$$f\colon X \to Y, \quad x \mapsto g(0,x)$$

stetig und es ist $H(0,x) = f(x)$ für alle $x \in A$. Hat (X, A) die Homotopiefortsetzungseigenschaft, so sei $\widetilde{g} := F$ wie in Definition 8.15; dann ist $\widetilde{g}$ eine stetige Fortsetzung von g. $\square$

Satz 8.18 *Ein Raumpaar (X, A) hat genau dann die Abbildungs-Fortsetzungseigenschaft, wenn A ein Retrakt von X ist.*

Beweis. Gibt es eine Retraktion $r\colon X \to A$, so ist für jede stetige Abbildung $f\colon A \to Y$ die Abbildung

$$f \circ r\colon X \to Y$$

eine stetige Fortsetzung von f. Hat umgekehrt (X, A) die Abbildungs-Fortsetzungseigenschaft, so gibt es eine stetige Fortsetzung $r := (\mathrm{id}_A)\tilde{}\colon X \to A$ für die identische Abbildung $\mathrm{id}_A\colon A \to A$. $\square$

Kombination von Satz 8.18 und Lemma 8.17 zeigt:

Folgerung 8.19 *Ein Raumpaar* (X, A) *hat genau dann die Homotopie-Fortsetzungseigenschaft, wenn*

$$(\{0\} \times X) \cup ([0,1] \times A)$$

ein Retrakt von $[0,1] \times X$ *ist.* $\square$

Folgerung 8.20 *Hat ein Raumpaar* (X, A) *die Homotopie-Fortsetzungseigenschaft, so hat für jeden topologischen Raum* Y *auch das Raumpaar*

$$(X \times Y, A \times Y)$$

die Homotopie-Fortsetzungseigenschaft.

Beweis. Nach Folgerung 8.19 ist $B := (\{0\} \times X) \cup ([0,1] \times A)$ ein Retrakt von $[0,1] \times X$. Nach Lemma 8.2 ist dann

$$B \times Y = (\{0\} \times X \times Y) \cup ([0,1] \times A \times Y)$$

ein Retrakt von $[0,1] \times X \times Y$. Nach Folgerung 8.19 hat also $(X \times Y, A \times Y)$ die Homotopie-Fortsetzungseigenschaft. $\square$

8.21 Wir betrachten nun eine stetige Abbildung $f\colon X \to Y$ zwischen topologischen Räumen, den Abbildungszylinder Z_f, die kanonischen Abbildungen

$$\lambda_1\colon Y \to Y \sqcup ([0,1] \times X) \quad \text{und} \quad \lambda_2\colon [0,1] \times X \to Y \sqcup ([0,1] \times X)$$

sowie die kanonische Quotientenabbildung

$$q\colon Y \sqcup ([0,1] \times X) \to Y \cup_\phi ([0,1] \times X) = Z_f$$

mit $\phi\colon \{0\} \times X \to Y$, $(0, x) \mapsto f(x)$, wie in Definition 2.45 und Lemma 2.47. Wir identifizieren Y mit $q(\lambda_1(Y))$ mittels der abgeschlossenen topologischen Einbettung

$$Y \to Z_f, \quad y \mapsto q(\lambda_1(y))$$

und X mit $q(\lambda_2(\{1\} \times X)$ via der abgeschlossenen topologischen Einbettung

$$X \to Z_f, \quad x \mapsto q(\lambda_2(1,x))\,.$$

Die Schreibweise

$$[s,x] := q(\lambda_2(s,x)) \quad \text{für } s \in [0,1] \text{ und } x \in X \tag{26}$$

ist nützlich; mit den obigen Identifizierungen ist dann also

$$[1,x] = x \quad \text{und} \quad [0,x] = f(x) \quad \text{für alle } x \in X.$$

Lemma 8.22 *Y ist ein starker Deformationsretrakt von Z_f.*

Beweis. Die Abbildung $F\colon [0,1] \times Z_f \to Z_f$ mit

$$F(t,[s,x]) := [ts,x] \quad \text{für } (t,s,x) \in [0,1] \times [0,1] \times X$$

und

$$F(t,y) := y \quad \text{für } y \in Y$$

ist wohldefiniert, da

$$[ts,x] = f(x) = [s,x]$$

wenn $s = 0$ und somit $y := [s,x] \in Y$. Per Konstruktion ist

$$F(0,\cdot) = \mathrm{id}_{Z_f} \quad \text{und} \quad F(t,\cdot)|_Y = \mathrm{id}_Y \quad \text{für alle } t \in [0,1]. \tag{27}$$

Weiter gilt

$$F(1,z) \in Y \quad \text{für alle } z \in Z_f. \tag{28}$$

Die Topologie auf Z_f ist final bezüglich $q \circ \lambda_1$ und $q \circ \lambda_2$ und die Vereinigung der Bilder dieser Abbildungen ist Z_f. Die Topologie auf $[0,1] \times Z_f$ ist nach Folgerung 1.122 also final bezüglich den Abbildungen $\mathrm{id}_{[0,1]} \times (q \circ \lambda_j)$ mit $j \in \{1,2\}$. Nun ist

$$F \circ (\mathrm{id}_{[0,1]} \times (q \circ \lambda_1))\colon [0,1] \times Y \to Z_f, \quad (t,y) \mapsto y$$

(also $q(\lambda_1(y)))$ stetig und ebenso

$$F \circ (\mathrm{id}_{[0,1]} \times (q \circ \lambda_2))\colon [0,1] \times [0,1] \times X \to Z_f, \quad (t,s,x) \mapsto [ts,x]\,.$$

Also ist F stetig. Wegen (28) und (27) ist

$$r := F(1,\cdot)|^Y : Z_f \to Y$$

eine Retraktion. Wegen (27) ist F weiter eine Homotopie relativ Y von id_{Z_f} nach $i \circ r$ mit der Inklusionsabbildung $i\colon Y \to Z_f$. Also ist r eine starke Deformationsretraktion. □

Die mit X bzw. Y identifizierten Teilmengen von Z_f sind disjunkt und diese sind gemeint, wenn wir im Folgenden $X \cup Y$ schreiben.

Lemma 8.23 *Es ist* $(\{0\}\times Z_f)\cup([0,1]\times(X\cup Y))$ *ein Retrakt von* $[0,1]\times Z_f$. *Somit hat das Raumpaar* $(Z_f, X\cup Y)$ *die Homotopie-Fortsetzungseigenschaft.*

Beweis. Es sei

$$r\colon [0,1]\times[0,1] \to (\{0\}\times[0,1])\cup([0,1]\times\{0,1\})$$

eine Retraktion (vgl. Folgerung 8.9); wir schreiben

$$r(t,s) = (r_1(t,s), r_2(t,s)) \quad \text{mit } r_1(t,s), r_2(t,s) \in [0,1].$$

Wir definieren eine Abbildung

$$R\colon [0,1]\times Z_f \to (\{0\}\times Z_f) \cup\ [0,1]\times(X\cup Y)\ =:\ A$$

mit der von $[0,1]\times Z_f$ auf dem Wertebereich induzierten Topologie via

$$R(t,[s,x]) := (r_1(t,s),[r_2(t,s),x]) \quad \text{für } (t,s,x)\in[0,1]\times[0,1]\times X$$

und

$$R(t,y) := (t,y) \quad \text{für } (t,y)\in[0,1]\times Y \subseteq [0,1]\times Z_f.$$

Es ist R wohldefiniert, denn ist $s=0$, so ist $r(t,0)=(t,0)$ wegen $(t,0)\in[0,1]\times\{0,1\}$ und somit $r_1(t,0)=t$ und $r_2(t,0)=0$, also

$$(r_1(t,s),[r_2(t,s),x]) = (t,[0,x]) = (t,f(x)) = (t,y)$$

mit $y := f(x) = [0,x]$. Zudem ist $R(t,z)\in A$ für alle $t\in[0,1]$ und $z\in Z_f$. Wie im vorigen Beweis ist R stetig, da

$$R\circ(\mathrm{id}_{[0,1]}\times(q\circ\lambda_j))$$

für $j \in \{1, 2\}$ stetig ist. Für $j = 1$ ist dies nämlich die stetige Abbildung

$$[0,1] \times Y \to A \subseteq [0,1] \times Z_f, \quad (t,y) \mapsto (t,y)$$

und für $j = 2$ ist es die Abbildung

$$[0,1] \times [0,1] \times X \to Z_f, \quad (t,s,x) \mapsto (r_1(t,s), [r_2(t,s), x]),$$

die ebenfalls stetig ist. □

Definition 8.24 Es sei X ein topologischer Raum und $A \subseteq X$ eine abgeschlossene Teilmenge. Eine abgeschlossene Teilmenge $N \subseteq X$ wird eine *Abbildungszylinderumgebung* von A in X genannt, wenn gilt:

(a) $A \subseteq N^0$ mit dem Inneren als Teilmenge von X;

(b) Es gibt eine abgeschlossene Teilmenge $B \subseteq N$ mit $B \cap A = \emptyset$ derart, dass $N \setminus B$ in X offen ist, und eine stetige Abbildung $f \colon B \to A$, für welche ein Homöomorphismus

$$\phi \colon N \to Z_f$$

auf den Abbildungszylinder Z_f existiert mit $\phi|_{A \cup B} = \mathrm{id}_{A \cup B}$.

Satz 8.25 *Es sei X ein topologischer Raum und $A \subseteq X$ eine abgeschlossene Teilmenge. Hat A eine Abbildungszylinderumgebung N in X, so hat (X, A) die Homotopie-Fortsetzungseigenschaft.*

Beweis. Es seien $B \subseteq N$, $f \colon B \to A$ und $\phi \colon N \to Z_f$ wie in Definition 8.24. Dann ist ϕ ein Isomorphismus von Raumpaaren $(N, A \cup B) \to (Z_f, A \cup B)$. Da $(Z_f, A \cup B)$ nach Lemma 8.23 die Homotopie-Fortsetzungseigenschaft besitzt, hat auch $(N, A \cup B)$ die Homotopie-Fortsetzungseigenschaft. Es sei nun $g \colon X \to Y$ eine stetige Abbildung in einen topologischen Raum Y und $G \colon [0,1] \times A \to Y$ eine stetige Abbildung mit $G(0, \cdot)|_A = g|_A$. Für die stetige Funktion

$$F \colon [0,1] \times (A \cup B) \to Y, \quad (t,x) \mapsto \begin{cases} G(t,x) & \text{wenn } x \in A; \\ g(x) & \text{wenn } x \in B \end{cases}$$

mit $F(0, \cdot)|_{A \cup B} = (g|_N)|_{A \cup B}$ gibt es also eine stetige Funktion

$$H_N \colon [0,1] \times N \to Y$$

derart, dass $H_N(0,\cdot) = g|_N$ und $H_N|_{[0,1]\times(A\cup B)} = F$, so dass insbesondere

$$H_N(t,x) = F(t,x) = g(x) \quad \text{für alle } t \in [0,1] \text{ und } x \in B.$$

Die Abbildung

$$H\colon [0,1]\times X \to Y, \quad (t,x) \mapsto \begin{cases} H_N(t,x) & \text{wenn } (t,x) \in [0,1]\times N; \\ g(x) & \text{wenn } (t,x) \in X \setminus (N \setminus B) \end{cases}$$

ist also wohldefiniert. Nach dem Klebelemma ist H stetig. Per Konstruktion ist $H(0,\cdot) = g$ und $H|_{[0,1]\times A} = H_N|_{[0,1]\times A} = G$. □

Beispiel 8.26 In einem Abbildungszylinder Z_f mit $f\colon X \to Y$ ist $[\frac{1}{2},1]\times X$ eine Abbildungszylinderumgebung von X (homöomorph zu $[0,1]\times X$ wie in Beispiel 2.48), mit $B := \{[\frac{1}{2},x]\colon x \in X\}$. Weiter ist

$$Y \cup \big\{[s,x]\colon s \in [0,\tfrac{1}{2}],\ x \in X\big\}$$

eine zu Z_f homöomorphe Abbildungszylinderumgebung von Y in Z_f (mit dem gleichen B).

Wir betrachten nun ein CW-Paar (X,A); es ist also X ein Zellenkomplex und $A \subseteq X$ ein Unterkomplex.

Satz 8.27 *Für jedes CW-Paar (X,A) ist $(\{0\}\times X)\cup([0,1]\times A)$ ein starker Deformationsretrakt von $[0,1]\times X$. Insbesondere hat (X,A) die Homotopie-Fortsetzungseigenschaft.*

Beweis. Für $n \in \mathbb{N}_0$ sei X_n das n-Gerüst von X. Es seien $\Phi_{n,j}\colon D_{n,j} \to X$ für $j \in J_n$ die charakteristischen Abbildungen (wobei o.B.d.A. $D_{n,j} = \mathbb{D}_n$ für jedes $j \in J_n$), $e_{n,j} = \Phi_{n,j}(\mathbb{D}_n^0)$ und $J_n(A) := \{j \in J_n\colon e_{n,j} \subseteq A\}$. Weiter sei $X_{-1} := \emptyset$. Für jedes $n \in \mathbb{N}_0 \cup \{-1\}$ ist

$$A \cup X_n$$

eine abgeschlossene Teilmenge von X und ein Unterkomplex.

Wir behaupten, dass es für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ eine starke Deformationsretraktion

$$R_n\colon (\{0\}\times X) \,\cup\, I\times(A\cup X_n) \to (\{0\}\times X) \,\cup\, I\times(A\cup X_{n-1})$$

gibt; es gibt dann also eine Homotopie

$$H_n\colon I \times ((\{0\}\times X) \cup\ I\times(A\cup X_n)) \to (\{0\}\times X) \cup\ I\times(A\cup X_n)$$

relativ $(\{0\} \times X) \cup I \times (A \cup X_{n-1})$ von der identischen Abbildung auf $(\{0\}\times X) \cup I\times(A\cup X_n)$ nach $j_{n-1} \circ R_n$ mit der Inklusionsabbildung

$$j_{n-1}\colon (\{0\}\times X) \cup\ I\times(A\cup X_{n-1}) \to (\{0\}\times X) \cup\ I\times(A\cup X_n).$$

Wenn das stimmt, können wir den Beweis wie folgt zu Ende führen: Wir definieren $H\colon I \times I \times X \to I \times X$ via

$$H(t,s,x) := (s,x)$$

für $(s,x) \in I \times X_n$ mit $n \in \mathbb{N}_0$, wenn $t \in [0, \frac{1}{2^{n+1}}]$; ist hingegen $t \in [\frac{1}{2^{n+1}}, 1]$, so sei

$$H(t,s,x) := H_m\left(\frac{t - 1/2^{m+1}}{1/2^{m+1}}, (R_{m-1} \circ \cdots \circ R_n)(s,x)\right)$$

mit $m \in \{0,1,\ldots,n\}$ derart, dass $t \in [\frac{1}{2^{m+1}}, \frac{1}{2^m}]$. Insbesondere ist also

$$H(1,s,x) = (R_0 \circ \cdots \circ R_n)(s,x) \in (\{0\} \times X) \cup (I \times A)\,.$$

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist dann $H|_{I\times I\times X_n}$ nach dem Klebelemma stetig und somit auch $H \circ (\mathrm{id}_{I\times I} \times \Phi_{n,j})$ stetig für alle $j \in J_n$; folglich ist H stetig. Setzen wir

$$D := (\{0\} \times X) \cup (I \times A),$$

so ist $H(1,(s,x)) \in D$ für alle $(s,x) \in I \times X$ per Konstruktion, also $r := H(1,\cdot)|^D$ eine Retraktion. Bezeichnet $i\colon D \to I\times X$ die Inklusionsabbildung, so ist per Konstruktion H eine Homotopie relativ D von id_D nach $i\circ r$. Also ist $r\colon I \times X \to D$ eine starke Deformationsretraktion.

Beweis der Behauptung. Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ gibt es nach Satz 8.7 eine starke Deformationsretraktion

$$r_n\colon I \times \mathbb{D}_n \to (\{0\} \times \mathbb{D}_n) \cup (I \times \mathbb{D}_n) =: B_n.$$

Es sei $i_n\colon B_n \to I \times \mathbb{D}_n$ die Inklusionsabbildung und

$$F_n\colon I \times I \times \mathbb{D}_n \to I \times \mathbb{D}_n$$

eine Homotopie relativ B_n von $\mathrm{id}_{I\times\mathbb{D}_n}$ nach $i_n \circ r_n$. Für $(t,s,x) \in I \times I \times \mathbb{D}_n$ schreiben wir

$$F_n(t,s,x) = (F_n^1(t,s,x), F_n^2(t,s,x)) \text{ mit } F_n^1(t,s,x) \in I \text{ und } F_n^2(t,s,x) \in \mathbb{D}_n.$$

Für $j \in J_n \setminus J_n(A)$ definieren wir

$$H_{n,j}\colon I \times I \times \Phi_{n,j}(\mathbb{D}_n) \to I \times \Phi_{n,j}(\mathbb{D}_n)$$

via

$$H_{n,j}(t,s,\Phi_{n,j}(x)) := (F_n^1(t,s,x),\, \Phi_{n,j}(F_n^2(t,s,x)))\,.$$

Dann ist $H_{n,j}$ wohldefiniert. Sind nämlich $x, y \in \mathbb{D}_n$ mit $\Phi_{n,j}(x) = \Phi_{n,j}(y)$, so sind $x, y \in \partial\mathbb{D}_n$, woraus wegen $I \times \partial\mathbb{D}_n \subseteq B_n$ folgt, dass $F_n(t,s,x) = F_n(0,s,x) = (s,x)$. Es ist also

$$F_n^1(t,s,x) = s = F_n^1(t,s,y)$$

und $F_n^2(t,s,x) = x$, folglich

$$\Phi_{n,j}(F_n^2(t,s,y)) = \Phi_{n,j}(x) = \Phi_{n,j}(y) = \Phi_{n,j}(F_n^2(t,s,y))\,.$$

Per Konstruktion gilt $H_{n,j}(0,s,z) = (s,z)$ für alle $(s,z) \in I \times \Phi_{n,j}(\mathbb{D}_n)$;

$$H_{n,j}(t,s,z) = (s,z)$$

für alle $t \in I$ und $(s,z) \in (\{0\} \times \Phi_{n,j}(\mathbb{D}_n)) \cup (I \times \Phi_{n,j}(\partial\mathbb{D}_n))$; und

$$H_{n,j}(1,s,z) \in (\{0\} \times \Phi_{n,j}(\mathbb{D}_n)) \cup (I \times \Phi_{n,j}(\partial\mathbb{D}_n)) \tag{29}$$

für alle $(s,z) \in I \times \Phi_{n,j}(\mathbb{D}_n)$. Wir definieren nun

$$H_n\colon I \times \Big((\{0\}\times X) \,\cup\, I\times(A \cup X_n)\Big) \to (\{0\}\times X) \,\cup\, I\times(A \cup X_n)$$

via

$$H_n(t,s,z) := \begin{cases} H_{n,j}(t,s,z) & \text{wenn } z \in \Phi_{n,j}(\mathbb{D}_n) \text{ für ein } j \in J_n \setminus J_n(A); \\ (s,z) & \text{wenn } (s,z) \in \{0\}\times X \text{ oder } (s,z) \in I\times(A \cup X_{n-1}). \end{cases}$$

Dann ist H_n wohldefiniert.[29] Nach dem Klebelemma ist H stetig, wenn H auf den abgeschlossenen Teilmengen

$$(I \times \{0\} \times X) \cup (I \times I \times A)$$

[29]Sei nämlich $(s,t,z) \in I^2 \times \Phi_{n,j}(\mathbb{D}_n)$ für ein $j \in J_n \setminus J_n(A)$. Ist $s = 0$, so ist $H_{n,j}(0,s,z) = (s,z)$. Ist $z \in A \cup X_{n-1}$, so ist $z \in \Phi_{n,j}(\partial\mathbb{D}_n)$ und wiederum $H_{n,j}(t,s,z) = (s,z)$.

und $I \times I \times X_n$ des Definitionsbereichs stetig ist. Auf ersterer ist H die Abbildung $(t, s, z) \mapsto (s, z)$, also stetig. Auf $I \times I \times X_n$ ist die Topologie final bezüglich den Abbildungen $\mathrm{id}_{I^2} \times \Phi_{k,j}$ mit $k \in \{0, \ldots, n\}$ und $j \in J_k$. Ist $k < n$ oder $k = n$ und $j \in J_n(A)$, so ist $H_n \circ (\mathrm{id}_{I^2} \times \Phi_{k,j})$ die Abbildung

$$(t, s, x) \mapsto (s, \Phi_{k,j}(x)),$$

also stetig. Ist $k = n$ und $j \in J_n \setminus J_n(A)$, so ist $H_n \circ (\mathrm{id}_{I^2} \times \Phi_{n,j})$ die Abbildung

$$(t, s, x) \mapsto (s, \Phi_{n,j}(x)) = H_{n,j}(t, s, \Phi_{n,j}(x)) = (F_n^1(t, s, x),\ \Phi_{n,j}(F_n^2(t, s, x))),$$

also ebenfalls stetig. Somit ist $H_n|_{I \times I \times X_n}$ stetig.

Es gilt

$$H_n(t, s, x) = (s, x) \text{ für alle } (t, s, x) \in I \times ((\{0\} \times X) \cup I \times (A \cup X_{n-1})) \quad (30)$$

und $H_n(0, z) = z$ für alle $z \in (\{0\} \times X) \cup I \times (A \cup X_n)$, per Konstruktion.[30] Wegen (29) und (30) gilt

$$H_n(1, s, x) \in (\{0\} \times X) \cup I \times (A \cup X_{n-1})$$

für alle $(s, x) \in (\{0\} \times X) \cup I \times (A \cup X_n)$, so dass die Koeinschränkung R_n von $H_n(1, \cdot)$ zu einer Abbildung

$$(\{0\} \times X) \cup I \times (A \cup X_n) \to (\{0\} \times X) \cup I \times (A \cup X_{n-1})$$

definiert werden kann und diese eine starke Deformationsretraktion ist. □

Definition 8.28 Es seien X sowie Y topologische Räume und $A \subseteq X$ eine Teilmenge derart, dass auch $A \subseteq Y$ ist und die von X und Y auf A induzierten Topologien gleich sind. Mit anderen Worten, (X, A) und (Y, A) sind Raumpaare. Man sagt, X sei *homotopieäquivalent zu Y relativ A* und schreibt

$$X \simeq Y \quad \text{rel. } A,$$

wenn stetige Abbildungen $f : X \to Y$ und $g : Y \to X$ existieren derart, dass

$$f(a) = a \quad \text{und} \quad g(a) = a \quad \text{für alle } a \in A,$$

$$g \circ f \simeq \mathrm{id}_X \quad \text{rel. } A \quad \text{und} \quad f \circ g \simeq \mathrm{id}_Y \quad \text{rel. } A.$$

Man nennt dann f und g eine *Homotopieäquivalenz relativ A*.

[30] Für $z \in (\{0\} \times X) \cup I \times (A \cup X_{n-1})$ gilt letzteres wegen (30); ist $z = (s, x)$ mit $x \in \Phi_{n,j}(\mathbb{D}_n)$ für ein $j \in J_n \setminus J_n(A)$, so ist $H_n(0, s, x) = H_{n,j}(0, s, x) = (s, x)$.

Die beiden Homotopien stimmen also für jeden Parameter $t \in [0,1]$ auf A überein mit id_A.

Wichtig für uns ist der folgende Satz, dessen Voraussetzungen an (Y, A) nach Satz 8.27 für jedes CW-Paar (Y, A) erfüllt sind.

Satz 8.29 *Es sei X ein topologischer Raum und (Y, A) ein Raumpaar derart, dass A in Y abgeschlossen und*

$$(\{0\} \times Y) \cup ([0,1] \times A) \tag{31}$$

ein starker Deformationsretrakt von $[0,1] \times Y$ ist. Sind $f\colon A \to X$ und $g\colon A \to X$ stetige Abbildungen mit $f \simeq g$, so ist

$$X \cup_f Y \;\simeq\; X \cup_g Y \quad \textit{rel. } X.$$

Beweis. Da $[0,1] \times Y \to [0,1] \times Y$, $(s, y) \mapsto (1-s, y)$ ein Homöomorphismus ist, ist auch

$$(\{1\} \times Y) \cup ([0,1] \times A)$$

ein starker Deformationsretrakt von $[0,1] \times Y$.

Sei nun $F\colon [0,1] \times A \to X$ eine Homotopie von f nach g. Wir bilden

$$X \cup_F ([0,1] \times Y).$$

Da $\{0\} \times Y$ abgeschlossen in $[0,1] \times Y$ ist und $(\{0\} \times Y) \cap ([0,1] \times A) = \{0\} \times A$, können wir nach Aufgabe 42 von Blatt 12

$$X \cup_f Y \;\sim\; X \cup_{F|_{\{0\}\times A}} (\{0\} \times Y)$$

als Teilmenge von $X \cup_F ([0,1] \times Y)$ auffassen, mit der induzierten Topologie. Wir behaupten, dass die Teilmenge $X \cup_f Y$ ein starker Deformationsretrakt von $X \cup_F ([0,1] \times Y)$ ist. Analog ist

$$X \cup_g Y \;\sim\; X \cup_{F|_{\{1\}\times A}} (\{1\} \times Y)$$

ein starker Deformationsretrakt von $X \cup_F ([0,1], Y)$. Nach Beispiel 5.68 sind dann $X \cup_f Y$ und $X \cup_g Y$ homotopieäquivalent und zwar homotopieäquivalent relativ A mit einer analogen Begründung.[31]

[31] Für festes A bilden Raumpaare (Z, A) eine Kategorie mit mit Homotopieklassen $[h]$ relativ A von stetigen Abbildungen $h\colon Z_1 \to Z_2$ mit $h|_A = \mathrm{id}_A$ als Morphismen $(Z_1, A) \to (Z_2, A)$. Ein Morphismus $[h]$ ist genau dann ein Isomorphismus, wenn h eine Homotopieäquivalenz relativ A ist.

Zum Beweis der Behauptung sei

$$B := (\{0\} \times Y) \cup ([0,1] \times A)$$

und $i \colon B \to [0,1] \times Y$ die Inklusionsabbildung. Per Voraussetzung gibt es eine Homotopie

$$G \colon [0,1] \times [0,1] \times Y \to [0,1] \times Y$$

relativ B von $\mathrm{id}_{[0,1]\times Y}$ nach $i \circ r$ für eine starke Deformationsretraktion $r \colon [0,1] \times Y \to B$. Sind

$$\lambda_1 \colon X \to X \sqcup ([0,1] \times Y) \quad \text{und} \quad \lambda_2 \colon [0,1] \times Y \to X \sqcup ([0,1] \times Y)$$

die kanonischen Abbildungen und $q \colon X \sqcup ([0,1] \times Y) \to X \cup_F ([0,1] \times Y)$ die kanonische Quotientenabbildung, so ist eine Abbildung

$$H \colon [0,1] \times \Big(X \cup_F ([0,1] \times Y)\Big) \to X \cup_F ([0,1] \times Y)$$

wohldefiniert, wenn wir

$$H(t, q(\lambda_1(x))) := q(\lambda_1(x))$$

für $(t,x) \in [0,1] \times X$ setzen und

$$H(t, q(\lambda_2(s,y))) := q(\lambda_2(G(t,s,y)))$$

für $(t,s,y) \in [0,1] \times [0,1] \times Y$. Es ist nämlich $G(t,s,y) = (s,y)$ wenn $y \in A$ (da G eine Homotopie relativ $[0,1] \times A$ ist) und somit

$$q(\lambda_2(G(t,s,y))) = q(\lambda_2(s,y)) = q(\lambda_1(F(s,y)))\,.$$

Da $H \circ (\mathrm{id}_{[0,1]} \times (q \circ \lambda_1))$ und $H \circ (\mathrm{id}_{[0,1]} \times (q \circ \lambda_2))$ per Konstruktion stetig sind, ist H stetig. Weiter ist per Konstruktion $H(t,x) = x$ für alle $t \in [0,1]$ und alle

$$x \in X \subseteq X \cup_f Y \subseteq X \cup_F ([0,1] \times Y).$$

Zudem ist $H(t, q(\lambda_2(0,y))) = q(\lambda_2(G(t,0,y))) = q(\lambda_2(0,y))$ für alle $t \in [0,1]$ und $y \in Y$, da $\{0\} \times Y \subseteq B$. Also ist $H(t,z) = z$ für alle $z \in X \cup_f Y \subseteq X \cup_F ([0,1] \times Y)$. Schließlich ist $H(0,z) = z$ für alle $z \in X \cup_F ([0,1] \times Y)$ per Konstruktion und $H(1,z) \in X \cup_f Y$, da $q(\lambda_2(B)) \subseteq X \cup_f Y$ wegen $q(\lambda_2([0,1] \times A)) = F(A) \subseteq X \subseteq X \cup_f Y$ und $q(\lambda_2(\{0\} \times Y)) \subseteq X \cup_{F|_{\{0\}\times A}} (\{0\} \times Y) = X \cup_f Y$. $\square$

Das folgende technische Resultat beweisen wir aus Zeitgründen nur im Anhang des Kapitels (siehe auch Seite 17 in Hatchers Buch).

Satz 8.30 *Es seien (X, A) und (Y, A) Raumpaare und $f\colon X \to Y$ eine Homotopieäquivalenz derart, dass $f(a) = a$ für alle $a \in A$. Haben (X, A) und (Y, A) die Homotopie-Fortsetzungseigenschaft, so ist f eine Homotopieäquivalenz relativ A.*

Für jeden Deformationsretrakt A eine topologischen Raums X ist die Inklusionsabbildung $i\colon A \to X$ eine Homotopieäquivalenz (siehe Beispiel 5.68). Unter zusätzlichen Bedingungen gilt die Umkehrung:

Folgerung 8.31 *Es sei (X, A) ein Raumpaar derart, dass die Inklusionsabbildung $i\colon A \to X$ eine Homotopieäquivalenz ist. Hat (X, A) die Homotopie-Fortsetzungseigenschaft, so ist A ein starker Deformationsretrakt (insb. also ein Deformationsretrakt).*

Beweis. Es ist $i\colon A \to X$ eine Homotopieäquivalenz mit $i|_A = \mathrm{id}_A$. Per Voraussetzung hat (X, A) die Homotopie-Fortsetzungseigenschaft. Trivialerweise hat auch (A, A) die Homotopiefortsetzungseigenschaft. Nach Satz 8.30 ist i also eine Homotopieäquivalenz relativ A. Es gibt somit eine stetige Abbildung $r\colon X \to A$ mit $r|_A = \mathrm{id}_A$ derart, dass $i \circ r \simeq \mathrm{id}_X$ relativ A. □

Der folgende Satz ist für uns sehr wichtig:

Satz 8.32 *Eine stetige Abbildung $f\colon X \to Y$ zwischen topologischen Räumen ist genau dann eine Homotopieäquivalenz, wenn X ein starker Deformationsretrakt des Abbildungszylinders Z_f ist.*

Beweis. Es seien $i\colon X \to Z_f$ und $j\colon Y \to Z_f$ die kanonischen Inklusionen und $r\colon Z_f \to Y$ die übliche, durch

$$[s, x] \mapsto f(x) \quad \text{für } (s, x) \in [0, 1] \times X, \qquad y \mapsto y \quad \text{für } y \in Y$$

gegebene starke Deformationsretraktion. Dann ist $f = r \circ i$, also

$$[f] = [r]\,[i] \tag{32}$$

in der Homotopiekategorie. Nun ist $[r]$ in $[\mathrm{Top}]$ invertierbar (mit $[r]^{-1} = [j]$). Nach (32) ist somit $[f]$ genau dann invertierbar (also f eine Homotopieäquivalenz) wenn $[i]$ invertierbar (also i eine Homotopieäquivalenz) ist.

Ist also f eine Homotopieäquivalenz, so auch i. Nach Folgerung 8.31 ist dann X ein starker Deformationsretrakt von Z_f; nach Beispiel 8.26 hat nämlich X eine Abbildungszylinderumgebung in Z_f, so dass nach Satz 8.25 das Raumpaar (Z_f, X) die Homotopie-Fortsetzungseigenschaft hat.

Ist umgekehrt X ein starker Deformationsretrakt von Z_f, so ist die Inklusion i eine Homotopieäquivalenz (nach Beispiel 5.68) und somit auch f. □

Folgerung 8.33 *Für topologische Räume X und Y sind äquivalent:*

(a) *X und Y sind homotopieäquivalent.*

(b) *Es gibt einen topologischen Raum Z und zu X bzw. Y homöomorphe Teilmengen $X', Y' \subseteq Z$, welche Deformationsretrakte von Z sind.*

(c) *Es gibt einen topologischen Raum Z und zu X bzw. Y homöomorphe, disjunkte, abgeschlossene Teilmengen $X', Y' \subseteq Z$, welche starke Deformationsretrakte von Z sind.*

Beweis. (a)⇒(c): Ist f eine Homotopieäquivalenz, so ist X nach Satz 8.32 ein starker Deformationsretrakt des Abbildungszylinders Z_f. Auch Y ist ein starker Deformationsretrakt von Z_f, nach Lemma 8.22.

(c)⇒(b) ist trivial.

(b)⇒(a): Siehe Bemerkung 5.70. □

Weitere Fakten und Folgerungen

Für die Allgemeinbildung erwähnen wir ein weiteres Ergebnis, das nur im Anhang zu Kapitel 15 und Anhang B gebraucht wird und daher übersprungen wurde. Den Beweis findet man im Anhang zu Kapitel 8.

Nach Satz 8.27 sind die Voraussetzungen des folgenden Satzes für jedes CW-Paar erfüllt.

Satz 8.34 *Es sei (X, A) ein Raumpaar, welches die Homotopie-Fortsetzungseigenschaft erfüllt. Ist A kontrahierbar, so ist die kanonische Quotientenabbildung*

$$q\colon X \to X//A$$

eine Homotopieäquivalenz.

Anhang für Kapitel 8

Beweis von Satz 8.30. Bis zur Erstellung eines ausführlicheren Skripts sei hier auf Seite 17 des Buchs von Hatcher verwiesen.

Beweis von Satz 8.34. Da A kontrahierbar ist, gibt es eine Homotopie $H\colon [0,1]\times A \to A$ von id_A zu einer konstanten Abbildung $k_a\colon A \to A$ für ein $a \in A$. Da (X, A) per Voraussetzung die Homotopie-Fortsetzungseigenschaft hat, existiert eine stetige Abbildung

$$F\colon [0,1] \times X \to X$$

derart, dass $F(0,\cdot) = \mathrm{id}_X$ und $F(t,x) = H(t,x)$ für alle $(t,x) \in [0,1] \times A$. Sei $F_t := F(t,\cdot)\colon X \to X$. Da $F_1(x) = H_1(x) = k_a(x) = a$ für alle $x \in A$, faktorisiert F_1 zu einer stetigen Abbildung

$$g\colon X//A \to X,$$

festgelegt durch $g \circ q = F_1$. Wir zeigen, dass g eine Homotopieinverse für q ist. Da $\mathrm{id}_X = F_0 \simeq F_1$ via F, gilt

$$g \circ q \simeq \mathrm{id}_X .$$

Zu zeigen ist noch, dass auch

$$q \circ g \simeq \mathrm{id}_{X//A} . \tag{33}$$

Für festes $t \in [0,1]$ ist $q \circ F_t\colon X \to X//A$ eine Abbildung, welche jedes $x \in A$ auf das gleiche Element $q(F(t,x)) = q(H(t,x)) = \{A\}$ abbildet; sie faktorisiert daher zu einer Abbildung

$$\widetilde{F}_t\colon X//A \to X//A,$$

die durch $\widetilde{F}_t \circ q = q \circ F_t$ festgelegt ist. Dann ist

$$\widetilde{F}\colon [0,1] \times X//A \to X//A, \quad (t,y) \mapsto \widetilde{F}_t(y)$$

stetig; nach Satz 1.121 ist nämlich $\mathrm{id}_{[0,1]} \times q\colon [0,1] \times X \to [0,1] \times X//A$ eine Quotientenabbildung und

$$\widetilde{F} \circ (\mathrm{id}_{[0,1]} \times q) = q \circ F$$

ist stetig. Da $F_0 = \mathrm{id}_X$, ist

$$\widetilde{F}_0 = \mathrm{id}_{X//A} \ .$$

Dann ist

$$q \circ g \circ q = q \circ F_1 = \widetilde{F}_1 \circ q$$

und somit

$$q \circ g = \widetilde{F}_1 \, .$$

Da $\widetilde{F}$ eine Homotopie von $\widetilde{F}_0 = \mathrm{id}_{X//A}$ nach $\widetilde{F}_1$ ist, folgt (33). $\square$

9 Höhere Homotopiegruppen

Die Fundamentalgruppe $\pi_1(X, x_0)$ ist nützlich, liefert aber nicht immer genug Informationen über einen topologischen Raum X. Um höher-dimensionale Situationen besser zu erfassen, führt man Homotopiegruppen $\pi_k(X, x_0)$ ein für alle $k \in \mathbb{N}$.

Im Folgenden ist $I := [0,1]$ und $I^k = [0,1] \times \cdots \times [0,1]$ für $k \in \mathbb{N}$ mit k Faktoren. Als Teilmenge von $\mathbb{R}^k$ ist dann

$$\partial(I^k) = \{(s_1, \ldots, s_k) \in I^k \colon\ s_j = 0 \text{ oder } s_j = 1 \text{ für ein } j \in \{1, \ldots, k\}\}\,.$$

Die Homotopiegruppe $\boldsymbol{\pi_k(X, x_0)}$

9.1 Gegeben einen topologischen Raum X und einen Punkt $x_0 \in X$ betrachten wir stetige Abbildungen

$$\gamma \colon I^k \to X$$

derart, dass $\gamma(s) = x_0$ für alle $s \in \partial(I^k)$, d.h. Morphismen von Raumpaaren

$$\gamma \colon (I^k, \partial I^k) \to (X, x_0)\,.$$

Auf solchen Morphismen ist Homotopie relativ ∂I^k eine Äquivalenzrelation; wir schreiben $[\gamma]$ für die Äquivalenzklasse von $\gamma \colon (I^k, \partial I^k) \to (X, x_0)$ und

$$\pi_k(X, x_0)$$

für die Menge aller Äquivalenzklassen $[\gamma]$.

Bemerkung 9.2 Morphismen $\gamma \colon (I^k, \partial I^k) \to (X, x_0)$ und $\eta \colon (I^k, \partial I^k) \to (X, x_0)$ sind homotop relativ ∂I^k, wenn eine Homotopie

$$F \colon [0,1] \times I^k \to X$$

relativ ∂I^k von γ nach η existiert, also eine stetige Abbildung derart, dass

$$F(0, \cdot) = \gamma, \quad F(1, \cdot) = \eta \quad \text{und} \quad F(t, s) = s \text{ für alle } t \in [0,1] \text{ und } s \in \partial I^k.$$

Wir versehen nun $\pi_k(X, x_0)$ mit einer Gruppenstruktur.

9.3 Gegeben Morphismen von Raumpaaren

$$\gamma\colon (I^k, \partial I^k) \to (X, x_0) \quad \text{und} \quad \eta\colon (I^k, \partial I^k) \to (X, x_0)$$

ist

$$\gamma{\cdot}\eta\colon I^k \to X, \quad s = (s_1, \ldots, s_k) \mapsto \begin{cases} \gamma(2s_1, s_2, \ldots, s_k) & \text{für } s \in [0, \frac{1}{2}] \times I^{k-1}; \\ \eta(2s_1 - 1, s_2, \ldots, s_k) & \text{für } s \in [\frac{1}{2}, 1] \times I^{k-1} \end{cases}$$

wohldefiniert (da $\gamma(1, \cdot)$ und $\eta(0, \cdot)$ konstant x_0 sind) und nach dem Klebelemma stetig. Für alle $s \in \partial I^k$ mit $s_1 \in [0, \frac{1}{2}]$ ist auch $(2s_1, s_2, \ldots, s_k) \in \partial I^k$; für alle $s \in \partial I^k$ mit $s_1 \in [\frac{1}{2}, 1]$ ist auch $(2s_1 - 1, s_2, \ldots, s_k) \in \partial I^k$; also ist $(\gamma \cdot \eta)(s) = x_0$ für alle $s \in \partial I^k$ und somit $\gamma \cdot \eta$ ein Morphismus $(I^k, \partial I^k) \to (X, x_0)$.

9.4 Es sei $c_{x_0}\colon I^k \to X$ die konstante Abbildung $s \mapsto x_0$. Für einen Morphismus von Raumpaaren $\gamma\colon (I^k, \partial I^k) \to (X, x_0)$ definieren wir

$$\gamma^-\colon I^k \to X, \quad s = (s_1, \ldots, s_k) \mapsto \gamma(1 - s_1, s_2, \ldots, s_k);$$

dann ist auch γ^- ein Morphismus von Raumpaaren $(I^k, \partial I^k) \to (X, x_0)$.

Das Produkt $[\gamma]\,[\eta] := [\gamma \cdot \eta]$ ist wohldefiniert für γ und η wie in 9.3:

Lemma 9.5 *Es seien γ, γ_1, η und η_1 Morphismen von Raumpaaren*

$$(I^k, \partial I^k) \to (X, x_0).$$

Ist $\gamma \simeq \gamma_1$ relativ ∂I^k und $\eta \simeq \eta_1$ relativ ∂I^k, so ist $\gamma \cdot \eta \simeq \gamma_1 \cdot \eta_1$ relativ ∂I^k.

Beweis. Es sei $F\colon [0,1] \times I^k \to X$ eine Homotopie von γ nach γ_1 und $G\colon [0,1] \times I^k \to X$ eine Homotopie von η nach η_1, jeweils relativ ∂I^k. Schreiben wir $s = (s_1, \ldots, s_k)$ für $s \in I^k$, so ist

$$H\colon [0,1] \times I^k \to X, \quad (t, s) \mapsto \begin{cases} F(t, 2s_1, s_2, \ldots, s_k) & \text{wenn } s_1 \in [0, \frac{1}{2}]; \\ G(t, 2s_1 - 1, s_2, \ldots, s_k) & \text{wenn } s_1 \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

wohldefiniert, nach dem Klebelemma stetig und eine Homotopie von $\gamma \cdot \eta$ nach $\gamma_1 \cdot \eta_1$ relativ ∂I^k. $\square$

Satz 9.6 *Für alle Elemente von $\pi_k(X, x_0)$ gilt:*

(a) $([\alpha]\,[\beta])[\gamma] = [\alpha]([\beta]\,[\gamma])$;

(b) $[\gamma]\,[c_{x_0}] = [c_{x_0}]\,[\gamma] = [\gamma]$;

(c) $[\gamma]\,[\gamma^-] = [\gamma^-]\,[\gamma] = [c_{x_0}]$.

Also ist $\pi_k(X, x_0)$ eine Gruppe.

Beweis. (a) Für $(t, s) \in [0,1] \times I^k$ mit $s = (s_1, \ldots, s_k)$ setzen wir

$$F(t,s) := \begin{cases} \alpha\Big(\frac{4\,s_1}{1+t}, s_2, \ldots, s_k\Big) & \text{wenn } 0 \le s_1 \le \frac{1}{4}(1+t); \\ \beta(4s_1 - 1 - t, s_2, \ldots, s_k) & \text{wenn } \frac{1}{4}(1+t) \le s_1 \le \frac{1}{4}(2+t); \\ \gamma\Big(\frac{s_1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}t}{\frac{1}{2} - \frac{1}{4}t}, s_2, \ldots, s_k\Big) & \text{wenn } \frac{1}{2} + \frac{1}{4}t \le s_1 \le 1. \end{cases}$$

Dann ist F wohldefiniert, nach dem Klebelemma stetig und eine Homotopie von $(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma$ nach $\alpha \cdot (\beta \cdot \gamma)$ relativ ∂I^k, also $([\alpha]\,[\beta])[\gamma] = [(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma] = [\alpha \cdot (\beta \cdot \gamma)] = [\alpha]([\beta]\,[\gamma])$.

(b) Die Abbildung $F\colon [0,1] \times I^k \to X$,

$$(t,s) \mapsto \begin{cases} \gamma\left(\frac{2s_1}{1+t}, s_2, \ldots, s_k\right) & \text{wenn } 0 \le s_1 \le \frac{1}{2} + \frac{1}{2}t; \\ x_0 & \text{sonst} \end{cases}$$

ist wohldefiniert, nach dem Klebelemma stetig, und sie ist eine Homotopie relativ ∂I^k von $\gamma \cdot c_{x_0}$ nach γ. Also ist $[\gamma]\,[c_{x_0}])[\gamma \cdot c_{x_0}] = [\gamma]$. Ähnlich sieht man, dass $[c_{x_0}]\,[\gamma] = [\gamma]$.

(c) Die Funktion $F\colon [0,1] \times I^k \to X$,

$$(t,s) \mapsto \begin{cases} \gamma(2ts_1, s_2, \ldots, s_k) & \text{wenn } s_1 \in [0, \frac{1}{2}]; \\ \gamma(t(2 - 2s_1), s_2, \ldots, s_k) & \text{wenn } s_1 \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

ist wohldefiniert, nach dem Klebelemma stetig, und sie ist eine Homotopie relativ ∂I^k von c_{x_0} nach $\gamma \cdot (\gamma^-)$. Also ist $[c_{x_0}] = [\gamma \cdot (\gamma^-)] = [\gamma]\,[\gamma^-]$. Ersetzt man γ durch γ^-, so folgt wegen

$$(\gamma^-)^- = \gamma,$$

dass auch $[c_{x_0}] = [\gamma^-]\,[(\gamma^-)^-] = [\gamma^-]\,[\gamma]$. $\square$

Definition 9.7 Für $k \in \mathbb{N}$ nennt man $\pi_k(X, x_0)$ die $k$te Homotopiegruppe des topologischen Raums X an der Stelle x_0.

Satz 9.8 *Für jeden punktierten topologischen Raum (X, x_0) ist die Gruppe $\pi_k(X, x_0)$ abelsch für alle $k \geq 2$.*

Beweis. Für Morphismen γ und η von Raumpaaren $(I^k, \partial I^k) \to (X, x_0)$ ist

$$(\gamma * \eta)(s) := \begin{cases} \gamma(s_1, 2s_2, s_3, \ldots, s_k) & \text{wenn } s_2 \in [0, \frac{1}{2}]; \\ \eta(s_1, 2s_2 - 1, s_3, \ldots, s_k) & \text{wenn } s_2 \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases} \tag{34}$$

wohldefiniert, nach dem Klebelemma stetig, und die Abbildung ist wieder ein Morphismus $(I^k, \partial I^k) \to (X, x_0)$. Indem wir die Rollen der ersten und zweiten Variablen vertauschen, sehen wir wie in Lemma 9.5 und Satz 9.6 (b), dass

$$\gamma * \eta \simeq \gamma_1 * \eta_1 \quad \text{relativ } \partial I^k \tag{35}$$

wann immer $\gamma \simeq \gamma_1$ und $\eta \simeq \eta_1$ relativ ∂I^k, und zudem

$$\gamma * c_{x_0} \simeq \gamma \ \text{ relativ } \partial I^k \text{ sowie } \ c_{x_0} * \gamma \simeq \gamma \ \text{ relativ } \partial I^k. \tag{36}$$

Man beachte, dass für alle Morphismen $\gamma_{ij} \colon (I^k, \partial I^k) \to (X, x_0)$ mit $i, j \in \{1, 2\}$ stets

$$(\gamma_{11} \cdot \gamma_{21}) * (\gamma_{12} \cdot \gamma_{22}) = (\gamma_{11} * \gamma_{12}) \cdot (\gamma_{21} * \gamma_{22}) \tag{37}$$

gilt. Für alle Morphismen γ und η wie oben folgt

$$\gamma{\cdot}\eta \simeq (\gamma{*}c_{x_0}){\cdot}(c_{x_0}{*}\eta) = (\gamma{\cdot}c_{x_0}){*}(c_{x_0}{\cdot}\eta) \simeq (c_{x_0}{\cdot}\gamma){*}(\eta{\cdot}c_{x_0}) = (c_{x_0}{*}\eta){\cdot}(\gamma{*}c_{x_0}) \simeq \eta{\cdot}\gamma$$

relativ ∂I^k, wobei die zwei Gleichheitszeichen auf (37) beruhen, die Homotopien relativ ∂I^k auf Satz 9.6 (b) und (35) bzw. (36) und Lemma 9.5. □

Beispiel 9.9 Ist X eine sternförmige Menge in $\mathbb{R}^n$ (oder in einen topologischen Vektorraum) und $x_0 \in X$ mit $x_0 + [0, 1](x - x_0) \in X$ für alle $x \in X$, so ist

$$\pi_k(X, x_0) = \{e\}$$

für alle $k \in \mathbb{N}$.

Für jeden Morphismus $\gamma \colon (I^k, \partial I^k) \to (X, x_0)$ von Raumpaaren ist nämlich

$$F \colon [0, 1] \times I^k \to X, \quad (t, s) := (1 - t)\gamma(s) + t\, x_0$$

eine Homotopie relativ ∂I^k von γ nach c_{x_0}, also $[\gamma] = [c_{x_0}] = e$.

π_k als Funktor

9.10 Sei $k \in \mathbb{N}$. Ist $f\colon X \to Y$ eine stetige Abbildung zwischen topologischen Räumen und $x_0 \in X$, so erhalten wir mit $y_0 := f(x_0)$ eine wohldefinierte Abbildung
$$f_*\colon \pi_k(X, x_0) \to \pi_k(Y, y_0), \quad [\gamma] \mapsto [f \circ \gamma]\,.$$

Ist nämlich $F\colon [0,1] \times I^k \to X$ eine Homotopie von γ nach η relativ ∂I^k, so ist $f \circ F$ eine Homotopie von $f \circ \gamma$ nach $f \circ \eta$ relativ ∂I^k (siehe Lemma 5.34 (a)).

Lemma 9.11 *Für jedes $k \in \mathbb{N}$ und jeden Morphismus $f\colon (X, x_0) \to (Y, y_0)$ punktierter topologischer Räume ist*

$$f_*\colon \pi_k(X, x_0) \to \pi_k(Y, y_0), \quad [\gamma] \mapsto [f \circ \gamma]$$

ein Gruppen-Homomorphismus.

Beweis. Da $f \circ (\gamma \cdot \eta) = (f \circ \gamma) \cdot (f \circ \eta)$, ist $f_*([\gamma]\,[\eta]) = f_*([\gamma \cdot \eta]) = [f \circ (\gamma \cdot \eta)] = [(f \circ \gamma) \cdot (f \circ \eta)] = [f \circ \gamma]\,[f \circ \eta] = f_*([\gamma]) f_*([\eta])$. □

Lemma 9.12 *Sei $k \in \mathbb{N}$.*

(a) *Für alle Morphismen punktierter topologischer Räume*

$$g\colon (X, x_0) \to (Y, y_0) \quad \textit{und} \quad f\colon (Y, y_0) \to (Z, z_0)$$

gilt
$$(f \circ g)_* = f_* \circ g_*$$
für die Gruppen-Homomorphismen

$$f_*\colon \pi_k(Y, y_0) \to \pi_k(Z, z_0), \quad g_*\colon \pi_k(X, x_0) \to \pi_k(Y, y_0)$$

und $(f \circ g)_*\colon \pi_k(X, x_0) \to \pi_k(Z, z_0)$.

(b) *Für alle punktierten topologischen Räume (X, x_0) gilt $(\mathrm{id}_X)_* = \mathrm{id}_{\pi_k(X,x_0)}$ für den Gruppen-Homomorphismus $(\mathrm{id}_X)_*\colon \pi_k(X, x_0) \to \pi_k(X, x_0)$.*

Beweis. Das rechnet man direkt nach (vergleiche Beweis von Satz 5.36). □

Lemma 9.11 und Lemma 9.12 zeigen:

Satz 9.13 *Es sei $k \in \mathbb{N}$. Ordnen wir einem punktierten topologischen Raum (X, x_0) seine kte Homotopiegruppe $\pi_k(X, x_0)$ zu und einem Morphismus*

$$f\colon (X, x_0) \to (Y, y_0)$$

punktierter topologischer Räume den Gruppen-Homomorphismus

$$f_*\colon \pi_k(X, x_0) \to \pi_k(Y, y_0),$$

so erhalten wir einen Funktor $\mathrm{Top}_0 \to \mathrm{Grp}$. $\square$

Homotopieklassen stetiger Abbildungen auf $\mathbb{S}_k$

Wir erläutern nun, dass man für $k \in \mathbb{N}$ die Elemente von $\pi_k(X, x_0)$ identifizieren kann mit Homotopieklassen relativ $\{z_0\}$ von stetigen Abbildungen

$$\widetilde{\gamma}\colon \mathbb{S}_k \to X$$

mit $\widetilde{\gamma}(z_0) = x_0$, wobei $z_0 := e_{k+1} := (0, \ldots, 0, 1) \in \mathbb{S}_k$ der Nordpol ist. Manches wird bei dieser Sichtweise einfacher und anschaulicher (nicht jedoch die Gruppenmultiplikation).

9.14 Es sei $m := (\frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{2})$ der Mittelpunkt von $I^k = [0,1]^k$. Dann ist

$$\phi\colon I^k \to \mathbb{D}_k, \quad m + t(x - m) \mapsto t\,\frac{x - m}{\|x - m\|_2} \quad \text{für } x \in \partial I^k,\ t \in [0,1]$$

ein Homöomorphismus, welcher ∂I^k auf $\partial \mathbb{D}_k = \mathbb{S}_{k-1}$ abbildet und somit einen Homöomorphismus

$$\overline{\phi}\colon I^k /\!/ \partial I^k \to \mathbb{D}_k /\!/ \mathbb{S}_{k-1}, \quad [s] \mapsto [\phi(s)]$$

induziert. Es sei

$$h\colon \mathbb{D}_k /\!/ \mathbb{S}_{k-1} \to \mathbb{S}_k$$

der Homöomorphismus aus Beispiel 1.47 (mit k an Stelle von n). Bezeichnet $q\colon I^k \to I^k /\!/ \partial I^k$, $s \mapsto [s]$ die kanonische Quotientenabbildung, so ist

$$p := h \circ \overline{\phi} \circ q\colon I^k \to \mathbb{S}_k$$

eine Quotientenabbildung und $\psi := h \circ \overline{\phi}\colon I^k /\!/ \partial I^k \to \mathbb{S}_k$ ein Homöomorphismus mit

$$\psi(\partial I^k) = z_0$$

(vergleiche Beispiel 1.48). Nach Satz 1.121 ist auch

$$\mathrm{id}_{[0,1]} \times p \colon [0,1] \times I^k \to [0,1] \times \mathbb{S}_k$$

eine Quotientenabbildung.

9.15 Jeder Morphismus $\gamma\colon (I^k, \partial I^k) \to (X, x_0)$ von Raumpaaren faktorisiert über p und induziert somit einen Morphismus

$$\widetilde{\gamma}\colon (\mathbb{S}_k, z_0) \to (X, x_0)$$

punktierter topologischer Räume, der durch $\widetilde{\gamma} \circ p = \gamma$ festgelegt ist. Umgekehrt ist $\widetilde{\gamma} \circ p\colon I^k \to X$ ein Morphismus von Raumpaaren $(I^k, \partial I^k) \to (X, x_0)$ für jeden Morphismus $\widetilde{\gamma}\colon (\mathbb{S}_k, z_0) \to (X, x_0)$ punktierter topologischer Räume.

9.16 Sind γ und η Morphismen $(I^k, \partial I^k) \to (X, x_0)$ von Raumpaaren und ist $F\colon [0,1] \times I^k \to X$ eine Homotopie relativ ∂I^k, so ist $F(t,s) = x_0$ für alle $(t,s) \in [0,1] \times \partial I^k$, so dass F durch $\mathrm{id}_{[0,1]} \times p$ faktorisiert; es gibt also eine stetige Abbildung

$$\widetilde{F}\colon [0,1] \times \mathbb{S}_k \to X$$

mit $\widetilde{F}(t, p(s)) = F(t,s)$ für alle $t \in [0,1]$ und $s \in I^k$. Für jedes t ist dann mit $s \in \partial I^k$

$$\widetilde{F}(t, z_0) = \widetilde{F}(t, p(s)) = F(t,s) = x_0,$$

also $\widetilde{F}$ eine Homotopie relativ $\{z_0\}$ von $\widetilde{\gamma}$ nach $\widetilde{\eta}$. Umgekehrt ist $\widetilde{F} \circ (\mathrm{id}_{[0,1]} \times p)$ eine Homotopie relativ ∂I^k für jede Homotopie $\widetilde{F}\colon [0,1] \times \mathbb{S}_k \to X$ rel. $\{z_0\}$.

Wie angekündigt können wir für $k \in \mathbb{N}$ also $\pi_k(X, x_0)$ identifizieren mit der Menge aller Homotopieklassen von stetigen Abbildungen

$$\widetilde{\gamma}\colon \mathbb{S}_k \to X$$

mit $\widetilde{\gamma}(z_0) = x_0$, unter Benutzung von Homotopien relativ $\{z_0\}$.

Bisher blieb $\pi_0(X, x_0)$ undefiniert. Wir können diese Lücke nun schließen, motiviert durch die vorige Interpretation von $\pi_k(X, x_0)$ für $k \geq 1$.

Definition 9.17 Im Falle $k = 0$ definieren wir $\pi_0(X, x_0)$ als die Menge aller Homotopieklassen $[\gamma]$ relativ $\{z_0\}$ von stetigen Abbildungen

$$\gamma\colon \mathbb{S}_0 \to X,$$

wobei $\mathbb{S}_0 = \{-1, 1\}$ und $z_0 := 1$.

Bemerkung 9.18 $\pi_0(X, x_0)$ ist nur eine Menge, wir definieren darauf keine Gruppenstruktur.

Bemerkung 9.19 Ein Morphismus

$$\gamma\colon (\mathbb{S}_0, z_0) \to (X, x_0)$$

punktierter topologischer Räume ist durch die Angabe von $\gamma(-1) \in X$ festgelegt, und $\gamma(-1)$ kann jeden vorgegebenen Wert annehmen. Ist auch $\eta\colon (\mathbb{S}_0, z_0) \to (X, x_0)$ ein Morphismus, so legt jede Homotopie

$$F\colon [0,1] \times \mathbb{S}_0 \to X$$

relativ $\{z_0\}$ einen Weg

$$\theta\colon [0,1] \to X, \quad t \mapsto F(t, -1)$$

von $\gamma(-1)$ nach $\eta(-1)$ fest. Ist umgekehrt θ ein solcher Weg, so definiert

$$F(t,-1) := \theta(t), \quad F(t,1) := x_0$$

eine Homotopie relativ $\{z_0\}$ von γ nach η. Bezeichnet

$$[\gamma] \in \pi_0(X, x_0)$$

die Homotopieklasse von γ relativ $\{z_0\}$, so ist also

$$\{\eta(-1)\colon \eta \in [\gamma]\}$$

die Wegkomponente von $\gamma(-1)$ in X und die Abbildung

$$\pi_0(X, x_0) \to \text{Menge der Wegkomponenten von } X, \ \ [\gamma] \mapsto \{\eta(-1)\colon \eta \in [\gamma]\}$$

ist eine Bijektion.

Man kann $\pi_0(X, x_0)$ also als Menge der Wegkomponenten von X auffassen.

Bemerkung 9.20 Da $\mathbb{S}_k$ homogen ist, können wir an Stelle des Nordpols mit irgend einem $z_0 \in \mathbb{S}_k$ arbeiten. Eine besonders gute Wahl ist $z_0 \in \mathbb{S}_0 = \{-1, 1\}$ (also $z_0 = -1$ oder $z_0 = 1$), weil wir mit der Identifizierung von $\mathbb{R}^n$ mit $\mathbb{R}^n \times \{0\} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ dann in jeder der Sphären $\mathbb{S}_0 \subseteq \mathbb{S}_1 \subseteq \mathbb{S}_2 \subseteq \cdots$ den gleichen Basispunkt vorliegen haben.

Verhalten bei Überlagerungen

Satz 9.21 *Es seien $q\colon X \to Y$ eine Überlagerung, $x_0 \in X$ und $y_0 := q(x_0)$. Für jedes $k \geq 2$ ist dann*

$$q_*\colon \pi_k(X, x_0) \to \pi_k(Y, y_0)$$

ein Isomorphismus.

Beispiel 9.22 Wir betrachten die Überlagerung

$$q\colon \mathbb{R} \to \mathbb{S}_1, \quad t \mapsto e^{2\pi i t}$$

mit $x_0 := 0$ und $y_0 := 1$. Nach Beispiel 9.9 ist $\pi_k(\mathbb{R}, x_0) = \{e\}$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Nach Satz 9.21 ist

$$\pi_k(\mathbb{S}_1, y_0) \cong \pi_k(\mathbb{R}, x_0) \cong \{e\}$$

für alle $k \geq 2$.

Homotopiegruppen von Produkten

Wir betrachten ein Produkt $X \times Y$ topologischer Räume X und Y und die Projektionen $\mathrm{pr}_1\colon X \times Y \to X$, $(x, y) \mapsto x$ und

$$\mathrm{pr}_2\colon X \times Y \to Y, \quad (x, y) \mapsto y$$

auf die Komponenten.

Satz 9.23 *Für jedes $k \in \mathbb{N}$ ist die Abbildung*

$$\Phi := ((\mathrm{pr}_1)_*, (\mathrm{pr}_2)_*)\colon \pi_k(X \times Y, (x_0, y_0)) \to \pi_k(X, x_0) \times \pi_k(Y, y_0)$$

ein Isomorphismus von Gruppen.

Beweis. Da $(\mathrm{pr}_1)_*$ und $(\mathrm{pr}_2)_*$ Gruppen-Homomorphismen sind, gilt dies auch für die Abbildung Φ mit diesen Komponenten. Es ist Φ surjektiv, denn sind $[\gamma_1] \in \pi_k(X, x_0)$ und $[\gamma_2] \in \pi_k(Y, y_0)$, so ist

$$\gamma := (\gamma_1, \gamma_2)\colon I^k \to X \times Y, \quad s \mapsto (\gamma_1(s), \gamma_2(s))$$

ein Morphismus $(I^k, \partial I^k) \to (X \times Y, (x_0, y_0))$ mit

$$\Phi([\gamma]) = ([\mathrm{pr}_1 \circ \gamma], [\mathrm{pr}_2 \circ \gamma]) = ([\gamma_1], [\gamma_2])\,.$$

Sei nun $[\eta] \in \ker(\Phi)$; wir zeigen, dass $\Phi[\eta] = \{(e,e)\}$; der Homomorphismus Φ ist also injektiv. Da $[\mathrm{pr}_1 \circ \eta] = e = [c_{x_0}]$, gibt es eine Homotopie $F_1\colon [0,1] \times I^k \to X$ relativ ∂I^k von $\mathrm{pr}_1 \circ \eta$ nach c_{x_0}. Ebenso gibt es eine Homotopie $F_2\colon [0,1] \times I^k \to Y$ relativ ∂I^k von $\mathrm{pr}_2 \circ \eta$ nach c_{y_0}. Dann ist

$$F\colon [0,1] \times I^k \to X \times Y, \quad (t,s) \mapsto (F_1(t,s), F_2(t,s))$$

eine Homotopie relativ ∂I^k von η nach $c_{(x_0,y_0)}$, also $[\eta] = [c_{(x_0,y_0)}] = e$. $\square$

Beispiel 9.24 Jeder zweidimensionale Torus ist zu $\mathbb{S}_1 \times \mathbb{S}_1$ homöomorph (hat also bis auf Isomorphie die gleichen Homotopiegruppen). Sei $x_0 \in \mathbb{S}_1$. Nach Satz 7.1, Beispiel 9.22 und Satz 9.23 ist für alle $k \in \mathbb{N}$

$$\pi_k(\mathbb{S}_1 \times \mathbb{S}_1, (x_0,x_0)) \cong \pi_k(\mathbb{S}_1, x_0) \times \pi_k(\mathbb{S}_1, x_0) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} & \text{wenn } k = 1; \\ \{0\} & \text{wenn } k \geq 2. \end{cases}$$

Wechsel des Basispunkts

9.25 Sei $k \in \mathbb{N}$. Ist X ein topologischer Raum und $\theta\colon X \to X$ ein Weg von x_0 nach y_0, so können wir jedem Morphismus

$$\gamma\colon (I^k, \partial I^k) \to (X, x_0)$$

punktierter topologischer Räume einen Morphismus

$$\theta_\sharp(\gamma)\colon (I^k, \partial I^k) \to (X, y_0)$$

zuordnen via

$$\theta_\sharp(\gamma)(s) := \begin{cases} \gamma(m + 2(s-m)) & \text{wenn } \|s-m\|_\infty \in [0, \frac{1}{4}]; \\ \theta(4\|s-m\|_\infty - 1) & \text{wenn } \|s-m\|_\infty \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}], \end{cases}$$

wobei $m := (\frac{1}{2}, \ldots \frac{1}{2}) \in I^k$ der Mittelpunkt von I^k ist.

9.26 Ist auch $\eta\colon (I^k, \partial I^k) \to (X, x_0)$ ein Morphismus und $F\colon [0,1] \times I^k \to X$ eine Homotopie relativ ∂I^k von γ nach η, so ist

$$[0,1] \times I^k \to X, \qquad (t,s) \mapsto \begin{cases} F(t, m + 2(s-m)) & \text{wenn } \|s-m\|_\infty \in [0, \frac{1}{4}]; \\ \theta(4\|s-m\|_\infty - 1) & \text{wenn } \|s-m\|_\infty \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}], \end{cases}$$

eine Homotopie relativ ∂I^k von $\theta_\sharp(\gamma)$ nach $\theta_\sharp(\eta)$. Die durch das gleiche Symbol bezeichnete Abbildung

$$\theta_\sharp\colon \pi_k(X, x_0) \to \pi_k(X, y_0), \quad [\gamma] \mapsto [\theta_\sharp(\gamma)]$$

ist also wohldefiniert.

Satz 9.27 *Es sei X ein topologischer Raum, $x_0 \in X$ und $k \in \mathbb{N}$.*

(a) *Für jedes $y_0 \in X$ und jeden Weg $\theta\colon [0,1] \to X$ von x_0 nach y_0 ist*

$$\theta_\sharp\colon \pi_k(X,x_0) \to \pi_k(X,y_0)$$

ein Isomorphismus von Gruppen.

(b) *Ist $\zeta\colon [0,1] \to X$ homotop relativ $\{0,1\}$ zu θ, so ist $\theta_\sharp = \zeta_\sharp$.*

(c) *Es ist $(c_{x_0})_\sharp$ die identische Abbildung $\pi_k(X,x_0) \to \pi_k(X,x_0)$.*

(d) *Ist $\alpha\colon [0,1] \to X$ ein Weg von x_0 nach y_0 und $\beta\colon [0,1] \to X$ ein Weg von y_0 nach z_0, so gilt*

$$(\alpha \cdot \beta)_\sharp = \beta_\sharp \circ \alpha_\sharp$$

für die Isomorphismen $\alpha_\sharp\colon \pi_k(X,x_0) \to \pi_k(X,y_0)$,

$$\beta_\sharp\colon \pi_k(X,y_0) \to \pi_k(X,z_0)$$

sowie $(\alpha \cdot \beta)_\sharp\colon \pi_k(X,x_0) \to \pi_k(X,z_0)$.

Insbesondere sind in einem wegzusammenhängenden topologischen Raum alle $k$ten Homotopiegruppen als Gruppen zueinander isomorph.

Folgerung 9.28 *Ist X ein wegzusammenhängender topologischer Raum, so ist für alle $k \in \mathbb{N}$*

$$\pi_k(X,x_0) \cong \pi_k(Y,y_0) \quad \textit{für alle } x_0, y_0 \in X. \qquad \square$$

Bemerkung 9.29 Ist X wegzusammenhängend und interessiert $\pi_k(X,x_0)$ nur bis auf Isomorphie (z.B. wenn wir $\pi_k(X,x_0) = \{e\}$ konstatieren oder $\pi_k(X,x_0) \cong \mathbb{Z}$), so schreibt man auch kurz $\pi_k(X)$ statt $\pi_k(X,x_0)$. Ebenso, wenn x_0 aus dem Zusammenhang klar ist.

Beweis von Satz 9.27. (a) Wir zeigen zunächst nur, dass $\theta_\sharp$ ein Gruppen-Homomorphismus ist, also $\theta_\sharp([\gamma])\theta_\sharp([\eta]) = \theta_\sharp([\gamma][\eta])$ für alle Morphismen $\gamma\colon (I^k, \partial I^k) \to (X,x_0)$ und $\eta\colon (I^k \partial I^k) \to (X,x_0)$ von Raumpaaren gilt bzw.

$$\theta_\sharp(\gamma) \cdot \theta_\sharp(\eta) \simeq \theta_\sharp(\gamma \cdot \eta) \quad \text{relativ } \partial I^k. \tag{38}$$

Da $\gamma \simeq \gamma \cdot c_{x_0}$, ist nach 9.26

$$\theta_\sharp(\gamma) \simeq \theta_\sharp(\gamma \cdot c_{x_0});$$

analog ist $\theta_\sharp(\eta) \simeq \theta_\sharp(c_{x_0} \cdot \eta)$ und somit

$$\theta_\sharp(\gamma) \cdot \theta_\sharp(\eta) \simeq \theta_\sharp(\gamma \cdot c_{x_0}) \cdot \theta_\sharp(c_{x_0} \cdot \eta), \tag{39}$$

jeweils relativ ∂I^k. Ganz wesentlich ist nun, dass

$$\theta_\sharp(\gamma \cdot c_{x_0})(1 - s_1, s_2, \ldots, s_k) = \theta_\sharp(c_{x_0} \cdot \eta)(s) \quad \text{für alle } s \in [0, \tfrac{1}{2}] \times I^{k-1} \tag{40}$$

mit $s = (s_1, \ldots, s_k)$. Für alle $s \in I^k$ mit $s_1 \in [0, \frac{1}{2}]$ ist nämlich $\theta_\sharp(c_{x_0} \cdot \eta)(s)$ gleich

$$\begin{cases} x_0 & \text{wenn } \|s - m\|_\infty \in [0, \frac{1}{4}]; \\ \theta(4\|s - m\|_\infty - 1) & \text{wenn } \|s - m\|_\infty \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}] \end{cases} \tag{41}$$

und somit nur von $\|s - m\|_\infty$ abhängig. Für alle $s \in I^k$ mit $s_1 \in [\frac{1}{2}, 1]$ ist $\theta_\sharp(\gamma \cdot c_{x_0})(s)$ ebenfalls durch (41) gegeben. Für $s \in I^k$ mit $s_1 \in [0, \frac{1}{2}]$ gilt nun

$$|(1 - s_1) - \tfrac{1}{2}| = |\tfrac{1}{2} - s_1| = |s_1 - \tfrac{1}{2}|$$

und folglich

$$\|(1 - s_1, s_2, \ldots, s_k) - m\|_\infty = \|s - m\|_\infty\,.$$

Mit der Beschreibung über (41) folgt also (40).

Nach (40) ist die Abbildung

$$F\colon [0,1] \times I^k \to X, \quad (t, s) \mapsto \begin{cases} \theta_\sharp(\gamma \cdot c_{x_0})((1 - \frac{t}{2})2s_1) & \text{wenn } s_1 \in [0, \frac{1}{2}]; \\ \theta_\sharp(c_{x_0} \cdot \eta)(\frac{t}{2} + (1 - \frac{t}{2})(2s_1 - 1)) & \text{wenn } s_1 \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

wohldefiniert. Sie ist stetig nach dem Klebelemma und ist eine Homotopie

$$\theta_\sharp(\gamma \cdot c_{x_0}) \cdot \theta_\sharp(c_{x_0} \cdot \eta) \simeq \theta_\sharp(\gamma \cdot \eta)$$

relativ ∂I^k. In Verbindung mit (39) ergibt sich (38).

(b) Ist $F\colon [0,1] \times [0,1] \to X$ eine Homotopie relativ $\{0,1\}$ von θ nach ζ, so ist

$$[0,1] \times I^k \to X, \quad (t, s) \mapsto \begin{cases} \gamma(m + 2(s - m)) & \text{wenn } \|s - m\|_\infty \leq \frac{1}{4}; \\ F(t, 4\|s - m\|_\infty - 1) & \text{wenn } \|s - m\|_\infty \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}] \end{cases}$$

eine Homotopie relativ ∂I^k von $\theta_\sharp(\gamma)$ nach $\zeta_\sharp(\gamma)$, also $[\theta_\sharp(\gamma)] = [\zeta_\sharp(\gamma)]$ in $\pi_k(X, y_0)$.

(c) Sei $\gamma\colon (I^k, \partial I^k) \to (X, x_0)$ ein Morphismus von Raumpaaren. Dann ist $F\colon [0,1] \times I^k \to X$,

$$(t,s) \mapsto \begin{cases} \gamma\left(m + \frac{1}{2}\frac{s-m}{\frac{1}{4}+\frac{t}{4}}\right) & \text{wenn } \|s-m\|_\infty \in [0, \frac{1}{4}+\frac{t}{4}]; \\ x_0 & \text{wenn } \|s-m\|_\infty \in [\frac{1}{4}+\frac{t}{4}, \frac{1}{2}] \end{cases}$$

wohldefiniert, nach dem Klebelemma stetig und eine Homotopie relativ ∂I^k von $(c_{x_0})_\sharp(\gamma)$ nach γ. Also ist

$$[(c_{x_0})_\sharp(\gamma)] = [\gamma] \quad \text{in } \pi_k(X, x_0).$$

(d) Die Abbildung $F\colon [0,1] \times I^k \to X$,

$$(t,s) \mapsto \begin{cases} \beta\left(\frac{\|s-m\|_\infty - (\frac{3}{8}-\frac{t}{8})}{\frac{1}{8}+\frac{t}{8}}\right) & \text{wenn } \|s-m\|_\infty \in [\frac{3}{8}-\frac{t}{8}, \frac{1}{2}]; \\ \alpha\left(\frac{\|s-m\|_\infty - (\frac{1}{4}-\frac{t}{8})}{1/8}\right) & \text{wenn } \|s-m\|_\infty \in [\frac{1}{4}-\frac{t}{8}, \frac{3}{8}-\frac{t}{8}]; \\ \gamma\left(m + \frac{1}{2}\frac{s-m}{\frac{1}{4}-\frac{t}{8}}\right) & \text{wenn } \|s-m\|_\infty \in [0, \frac{1}{4}-\frac{t}{8}] \end{cases}$$

ist eine Homotopie relativ ∂I^k von $(\alpha \cdot \beta)_\sharp(\gamma)$ nach $\beta_\sharp(\alpha_\sharp(\gamma))$.

Wir können nun auch den Beweis von (a) beenden, indem wir die Invertierbarkeit der Abbildung $\theta_\sharp\colon \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(X, y_0)$ nachweisen. Da $\theta \cdot (\theta^-) \simeq c_{x_0}$ relativ $\{0,1\}$, gilt

$$(\theta^-)_\sharp \circ \theta_\sharp = (\theta \cdot \theta^-)_\sharp = (c_{x_0})_\sharp = \mathrm{id}$$

auf $\pi_1(X, x_0)$; die Gleichheitszeichen gelten hierbei der Reihe nach wegen (d), (b) bzw. (c). Analog sehen wir, dass $\theta_\sharp \circ (\theta^-)_\sharp = \mathrm{id}$ auf $\pi_1(X, y_0)$. $\square$

Lemma 9.30 *Es seien X ein topologischer Raum, $x_0, y_0 \in X$ und $k \in \mathbb{N}$. Weiter seien $\gamma\colon (I^k, \partial I^k) \to (X, x_0)$ und $\eta\colon (I^k, \partial I^k) \to (X, x_0)$ Morphismen von Raumpaaren und $F\colon [0,1] \times I^k \to X$ eine Homotopie von γ nach η derart, dass für alle $t \in [0,1]$*

$$F(t, \cdot)|_{\partial I^k}$$

eine konstante Funktion ist. Für $z_0 \in \partial I^k$ ist dann

$$\theta\colon [0,1] \to X, \quad t \mapsto F(t, z_0)$$

ein Weg von x_0 nach y_0 und es ist

$$\theta_\sharp(\gamma) \;\simeq\; \eta \quad \textit{relativ } \partial I^k.$$

Beweis. Es ist $F\colon [0,1] \times I^k \to X$,

$$(t,s) \mapsto \begin{cases} F(t, m + 2(s-m)) & \text{wenn } \|s-m\|_\infty \in [0, \frac{1}{4}]; \\ \theta\left(t + (1-t)\frac{\|s-m\|_\infty - \frac{1}{4}}{1/4}\right) & \text{wenn } \|s-m\|_\infty \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}] \end{cases}$$

eine Homotopie relativ ∂I^k von $\theta_\sharp(\gamma)$ nach $(c_{y_0})_\sharp(\eta)$. Da $(c_{y_0})_\sharp\eta \simeq \eta$ relativ ∂I^k nach Satz 9.27 (c), folgt die Behauptung. □

Satz 9.31 *Es seien X und Y topologische Räume und $x_0 \in X$. Weiter seien $f\colon X \to Y$ sowie $g\colon X \to Y$ stetige Abbildungen, $y_0 := f(x_0)$, $y_1 := g(x_0)$, $H\colon [0,1] \times X \to Y$ eine Homotopie von f nach g und $\theta(t) := H(t, x_0)$ für $t \in [0,1]$. Für jedes $k \in \mathbb{N}$ gilt dann*

$$g_* = \theta_\sharp \circ f_*$$

für die Gruppenhomomorphismen $f_*\colon \pi_k(X, x_0) \to \pi_k(Y, y_0)$ sowie $g_*\colon \pi_k(X, x_0) \to \pi_k(Y, y_1)$ und den Isomorphismus $\theta_\sharp\colon \pi_k(Y, y_0) \to \pi_k(Y, y_1)$. Insbesondere ist f_* genau dann surjektiv, injektiv bzw. bijektiv, wenn g_* es ist.

Beweis. Für einen Morphismus $\gamma\colon (I^k, \partial I^k) \to (X, x_0)$ von Raumpaaren ist

$$F\colon [0,1] \times I^k \to Y, \quad (t,s) \mapsto H(t, \gamma(s))$$

eine Homotopie von $f \circ \gamma$ nach $g \circ \gamma$ derart, dass

$$F(t,s) = H(t, x_0) = \theta(t) \quad \text{für alle } s \in I^k.$$

Nach Lemma 9.30 ist also

$$\theta_\sharp(f \circ \gamma) \simeq g \circ \gamma$$

relativ ∂I^k und somit $(\theta_\sharp \circ f_*)([\gamma]) = [\theta_\sharp(f \circ \gamma)] = [g \circ \gamma] = g_*([\gamma])$. □

Folgerung 9.32 *Sind X und Y topologische Räume, $x_0 \in X$ und $f\colon X \to Y$ eine Homotopieäquivalenz, so ist für jedes $k \in \mathbb{N}$ die Abbildung*

$$f_*\colon \pi_k(X, x_0) \to \pi_k(Y, y_0)$$

ein Isomorphismus, wobei $y_0 := f(x_0)$.

Beweis. Es sei $g\colon Y \to X$ eine Homotopieinverse und $z_0 := g(y_0)$. Da $g \circ f \simeq \mathrm{id}_X$, ist $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$ nach Satz 9.31 ein Isomorphismus und somit $g_*\colon \pi_k(Y, f(x_0)) \to \pi_k(X, z_0)$ surjektiv. Da die Bezeichnung f_* schon belegt ist, schreiben wir f'_* für die Abbildung

$$\pi_k(Y, z_0) \to \pi_k(X, g(z_0)), \quad [\gamma] \mapsto [f \circ \gamma].$$

Da $f \circ g \simeq \mathrm{id}_Y$, ist nach Satz 9.31

$$(f \circ g)_* = f'_* \circ g_*$$

ein Isomorphismus und somit g_* injektiv. Somit ist g_* ein Isomorphismus. Komponieren wir den Isomorphismus $g_* \circ f_*$ von links mit $(g_*)^{-1}$, so sehen wir, dass auch f_* ein Isomorphismus ist. □

Bemerkung 9.33 Ist $f\colon (X, x_0) \to (Y, y_0)$ ein Morphismus punktierter topologischer Räume, so ist

$$f_*\colon \pi_0(X, x_0) \to \pi_0(Y, y_0), \quad [\gamma] \mapsto [f \circ \gamma]$$

eine wohldefinierte Abbildung. Ist f eine Homotopieäquivalenz, so ist f_* eine Bijektion. In diesem Fall ist insbesondere X genau dann wegzusammenhängend, wenn Y es ist (Übung).

Folgerung 9.34 *Ist X ein topologischer Raum und $A \subseteq X$ ein Retrakt mit der Inklusionsabbildung $i\colon A \to X$, $a \mapsto a$, so ist für jedes $x_0 \in A$ und jedes $k \in \mathbb{N}$ der Gruppen-Homomorphismus*

$$i_*\colon \pi_k(A, x_0) \to \pi_k(X, x_0)$$

injektiv. Ist A ein Deformationsretrakt, so ist $i_*\colon \pi_k(A, x_0) \to \pi_k(X, x_0)$ ein Isomorphismus von Gruppen.

Beweis. ist $r\colon X \to A$ eine Retraktion, so ist $r \circ i = \mathrm{id}_A$ und somit

$$r_* \circ i_* = (r \circ i)_* = (\mathrm{id}_A)_*$$

die identische Abbildung auf $\pi_k(A, x_0)$, somit i_* injektiv. Ist A eine Deformation, so ist i eine Homotopieäquivalenz, also i_* nach Folgerung 9.32 ein Isomorphismus. □

Folgerung 9.35 *Ist ein topologischer Raum X kontrahierbar, so gilt*

$$\pi_k(X, x_0) = \{e\} \quad \textit{für alle } k \in \mathbb{N}.$$

Beweis. Nach Satz 5.73 gibt es eine Homotopieäquivalenz $f\colon X \to Y$ für einen einpunktigen topologischen Raum $Y = \{y_0\}$. Für jedes $x_0 \in X$ ist $f(x_0) = y_0$, nach Folgerung 9.32 also für jedes $k \in \mathbb{N}$ die Abbildung

$$f_*\colon \pi_k(X, x_0) \to \pi_k(Y, y_0) = \{e\}$$

ein Isomorphismus. □

Satz 9.36 *Es seien $f\colon X \to Y$ eine stetige Abbildung zwischen topologischen Räumen, $x_0 \in X$ und $\theta\colon [0,1] \to X$ ein Weg von x_0 zu einem Punkt $x_1 \in X$. Wir betrachten für $k \in \mathbb{N}_0$ den Gruppen-Homomorphismus*

$$f_*\colon \pi_k(X, x_0) \to \pi_k(Y, f(x_0)), \quad [\gamma] \mapsto [f \circ \gamma]$$

und den analogen Gruppen-Homomorphismus

$$f'_*\colon \pi_k(X, x_1) \to \pi_k(Y, f(x_1)), \quad [\gamma] \mapsto [f \circ \gamma]\,.$$

Dann ist

$$(f \circ \theta)_\sharp \circ f_* = f'_* \circ \theta_\sharp \tag{42}$$

mit den Isomorphismen $\theta_\sharp\colon \pi_k(X, x_0) \to \pi_k(X, x_1)$ und $(f \circ \theta)_\sharp\colon \pi_k(Y, f(x_0)) \to \pi_k(Y, f(x_1))$, die den Basispunkt ändern. Insbesondere ist f_* genau dann ein Isomorphismus (bzw. surjektiv, bzw. injektiv), wenn f'_* ein Isomorphismus ist (bzw. surjektiv, bzw. injektiv).

Beweis. Für jeden Morphismus $\gamma\colon (I^k, \partial I^k) \to (X, x_0)$ ist per Konstruktion

$$f \circ \theta_\sharp(\gamma) = (f \circ \theta)_\sharp(f \circ \gamma),$$

so dass (42) gilt; die weiteren Aussagen folgen unmittelbar. □

10 Ausblick auf weitere Ergebnisse

Als "roten Faden" geben wir nun einen Überblick über einige Hauptergebnisse, die in der Vorlesung noch bewiesen werden.

Homotopiegruppen von Sphären

Die höheren Homotopiegruppen $\pi_k(\mathbb{S}_n)$ sind kompliziert und nach wie vor nicht für alle Paare $(k,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ bekannt.[32] Für die Praxis besonders relevant ist $\pi_k(\mathbb{S}_n)$ für $k \leq n$; diese Homotopiegruppen können berechnet werden und wir werden in der Vorlesung noch zeigen:

Satz 10.1 *Es sei $n \in \mathbb{N}$.*

(a) *Für alle natürlichen Zahlen $k < n$ ist $\pi_k(\mathbb{S}_n) = \{0\}$.*

(b) *Es ist $\pi_n(\mathbb{S}_n) \cong (\mathbb{Z}, +)$.*

Sobald Satz 10.1 bewiesen ist, können wir Randpunkte eines Halbraums völlig analog zu Satz 7.2 und Folgerung 7.3 behandeln. Wir gehen kurz auf diese Anwendung ein.

Für $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ betrachten wir den abgeschlossenen Halbraum

$$H := [0, \infty[\, \times \mathbb{R}^{n-1}$$

und seinen Rand $\partial H = \{0\} \times \mathbb{R}^{n-1}$ als Teilmenge von $\mathbb{R}^n$. Da $\pi_{n-1}(\mathbb{S}_{n-1}) \cong \mathbb{Z}$, können wir im Beweis von Folgerung 7.3 über Randpunkte der Halbebene einfach Fundamentalgruppen durch $(n-1)$te Homotopiegruppen ersetzen. Man erhält:

Satz 10.2 *Sind U_1 und U_2 offene Teilmengen des abgeschlossenen Halbraums $H = [0, \infty[\, \times \mathbb{R}^{n-1}$ und $\phi\colon U_1 \to U_2$ ein Homöomorphismus, so gilt für alle $x \in U_1$*

$$x \in \partial H \quad \Leftrightarrow \quad \phi(x) \in \partial H\,.$$

Es ist also $\phi(U_1 \cap \partial H) = U_2 \cap \partial H$. $\square$

Wir überspringen die Details, die im Anhang des Kapitels festgehalten sind.

[32] Siehe die Tabelle auf S. 339 in Hatchers Buch für einen ersten Eindruck.

Zelluläre Approximation

In diesem und den folgenden zwei Abschnitten stellen wir (später noch zu beweisende) Sätze vor, mit deren Hilfe sich Satz 10.1 über die Homotopiegruppen der Sphären beweisen lässt.

Satz 10.3 *Es seien X und Y Zellenkomplexe mit den n-Gerüsten X_n bzw. Y_n für $n \in \mathbb{N}_0$. Dann ist jede stetige Abbildung $f\colon X \to Y$ homotop zu einer stetigen Abbildung $g\colon X \to Y$ derart, dass*

$$g(X_n) \subseteq Y_n \quad \textit{für alle } n \in \mathbb{N}_0. \tag{43}$$

Ist $A \subseteq X$ ein Unterkomplex und $f(A_n) \subseteq Y_n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$, so kann g homotop f relativ A gewählt werden.

Abbildungen $g\colon X \to Y$, welche (43) erfüllen, nennt man *zellulär.*

Zur Erinnerung: Ein *Unterkomplex* eines Zellenkomplexes $(X, (\Phi_{n,j})_{n\in\mathbb{N}_0, j\in J_n})$ ist eine abgeschlossene Teilmenge $A \subseteq X$, die eine Vereinigung von Zellen ist (siehe Definition 3.31). Ist also $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}_0} \bigcup_{j\in J_n} e_{n,j}$, so gibt es Teilmengen $J_n(A) \subseteq J_n$ mit

$$A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}_0} \bigcup_{j\in J_n(A)} e_{n,j}\,.$$

Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ ist dann

$$A_n := A \cap X_n = \bigcup_{k\le n} \bigcup_{j\in J_k(A)} e_{k,j}.$$

Bemerkung 10.4 Sei $\overline{e_{n,j}}$ der Abschluss von $e_{n,j}$ in X, also $\overline{e_{n,j}} = \Phi_{n,j}(D_{n,j})$. Da A abgeschlossen ist, ist $\overline{e_{n,j}} \subseteq A$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und $j \in J_n(A)$. Man kann zeigen, dass die von X auf A induzierte Topologie final ist bezüglich den $\Phi_{n,j}|^A$ für $n \in \mathbb{N}_0$ und $j \in J_n(A)$; weiter ist $(A, (\Phi_{n,j}|^A)_{n\in\mathbb{N}_0, j\in J_n(A)})$ ein Zellenkomplex (siehe Lemma 3.35). Wir benötigen beides nicht.

Beweis von Satz 10.1 (a). Es seien $k, n \in \mathbb{N}$ mit $k < n$. Wir betrachten $\mathbb{S}_n$ als Zellenkomplex mit einer 0-Zelle $e_0' = \{y_0\}$ und einer n-Zelle,

$$\mathbb{S}_n = e_0' \cup e_n'\,.$$

Entsprechend schreiben wir $\mathbb{S}_k = e_0 + e_k$ mit dem Nordpol x_0, $e_0 := \{x_0\}$ und einer k-Zelle e_k. Für $X := \mathbb{S}_k$ und $Y := \mathbb{S}_n$ haben wir haben also die m-Gerüste

$$X_m = \begin{cases} e_0 = \{x_0\} & \text{für } m < k; \\ X = \mathbb{S}_k & \text{für } m \ge k \end{cases}$$

und

$$Y_m = \begin{cases} e'_0 = \{y_0\} & \text{für } m < n; \\ Y = \mathbb{S}_n & \text{für } m \geq n. \end{cases}$$

Ist $\gamma\colon \mathbb{S}_k \to \mathbb{S}_n$ eine stetige Abbildung mit $\gamma(x_0) = y_0$, so ist γ auf $A := \{x_0\}$ zellulär; nach Satz 43 ist also γ homotop relativ $A = \{x_0\}$ zu einer stetigen Abbildung $\eta\colon \mathbb{S}_k \to \mathbb{S}_n$, welche zellulär ist. Somit gilt

$$\eta(\mathbb{S}_k) = \eta(X_k) \subseteq Y_k = e'_0 = \{y_0\},$$

es ist also η die konstante Abbildung c_{y_0} und somit $[\gamma] = [c_{y_0}] = e$ in $\pi_k(\mathbb{S}_n, y_0)$, realisiert als Homotopieklassen von Funktionen auf $\mathbb{S}_k$ wie in 9.14–9.16. $\square$

Lange exakte Homotopiesequenz und $\boldsymbol{\pi_2(\mathbb{S}_2)}$

Definition 10.5 Es sei F ein topologischer Raum. Eine surjektive stetige Abbildung $q\colon E \to B$ zwischen topologischen Räumen heißt *Faserbündel mit Faser F*, wenn für jedes $x \in B$ eine Umgebung $U \subseteq B$ existiert und ein Homöomorphismus

$$\theta\colon q^{-1}(U) \to U \times F$$

derart, dass $\mathrm{pr}_1 \circ \theta = q|_{q^{-1}(U)}$.

Es ist also $\theta^{-1}(\{y\} \times F) = q^{-1}(\{y\})$ für alle $y \in U$.

Satz 10.6 *Es sei $q\colon E \to B$ ein Faserbündel, $b_0 \in B$, $F := q^{-1}(\{b_0\})$ und $x_0 \in F$. Ist B wegzusammenhängend, so gibt es eine exakte Sequenz*

$$\cdots \to \pi_k(F, x_0) \xrightarrow{i_*} \pi_k(E, x_0) \xrightarrow{q_*} \pi_k(B, b_0) \to \pi_{k-1}(F, x_0) \to \cdots \to \pi_0(E, x_0) \to \{0\},$$

wobei $i\colon F \to E$ die Inklusionsabbildung ist.

Die Terminologie ist wie folgt:

Definition 10.7 Sind $\phi\colon A \to B$ und $\psi\colon B \to C$ Gruppen-Homomorphismen, so meint *Exaktheit* von

$$A \xrightarrow{\phi} B \xrightarrow{\psi} C,$$

dass $\mathrm{im}(\phi) = \ker(\psi)$.

Bemerkung 10.8 Was Exaktheit an den Mengen $\pi_0(\ldots)$ meint (die keine Gruppen sind), erklären wir auf dem Übungsblatt 14.

Beispiel 10.9 (Die Hopf-Faserung). Die Kreisgruppe $\mathbb{S}_1 \subseteq \mathbb{C}$ operiert auf

$$E := \mathbb{S}_3 \subseteq \mathbb{R}^4 = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 = \mathbb{C} \times \mathbb{C}$$

durch Skalarmultiplikation, $(z, x) \mapsto z \cdot x$ für $z \in \mathbb{S}_1$ und $x \in \mathbb{S}_3 \subseteq \mathbb{C}^2$. Wir betrachten den Bahnenraum $B := \mathbb{S}_1 \setminus \mathbb{S}_3$ mit der Quotiententopologie bezüglich der kanonischen Abbildung

$$q\colon \mathbb{S}_3 \to B, \quad x \mapsto \mathbb{S}_1.x\,.$$

In Aufgabe 46 des Aufgabenblatts 14 zeigen wir, dass $B \sim \mathbb{S}_2$; somit können wir q auffassen als eine stetige surjektive Abbildung

$$q\colon \mathbb{S}_3 \to \mathbb{S}_2\,.$$

In Aufgabe 45 des Aufgabenblatts 13 zeigen wir, dass diese ein Faserbündel mit Faser $\mathbb{S}_1$ ist.

Bemerkung 10.10 Der Schiefkörper $\mathbb{H} = \mathbb{R} + \mathbb{R}i + \mathbb{R}j + \mathbb{R}k$ der Quaternionen ist eine 4-dimensionale reelle Algebra und hat $\mathbb{C} = \mathbb{R}+\mathbb{R}i$ als reelle Unteralgebra. Die Sphäre $G := \mathbb{S}_3 \subseteq \mathbb{H}$ ist eine Untergruppe von $\mathbb{H}^\times = \mathbb{H}\setminus\{0\}$ mit glatter Gruppenmultiplikation und Inversion, also eine Liegruppe. Weiter ist $H := \mathbb{S}_1 \subseteq \mathbb{C} \subseteq \mathbb{H}$ eine kompakte (also abgeschlossene) Untergruppe von $\mathbb{S}_3$ und eine Untermannigfaltigkeit, also ebenfalls eine Liegruppe. Es ist bekannt, dass somit

$$G \to G/H, \quad g \mapsto gH$$

ein Faserbündel mit Faser H ist (sogar ein besonders schönes, ein sogenanntes *Hauptfaserbündel*).[33] In den Aufgaben 43 bis 45 von Blatt 13 diskutieren wir Aspekte zum Teil allgemein, zum Teil für $G = \mathbb{S}_3 \subseteq \mathbb{H}$ und $H = \mathbb{S}_1 \subseteq \mathbb{C}$.

[33] Ist H eine Gruppe und sind Mengen X und Y mit einer rechten H-Wirkung versehen, so nennt man eine Abbildung $f\colon X \to Y$ *äquivariant*, wenn $f(x.h) = f(x).h$ für alle $x \in X$ und $h \in H$. Sei nun H eine topologische Gruppe und $q\colon E \to B$ ein Faserbündel mit typischer Faser H, das mit einer rechten H-Wirkung versehen ist. Für jede Trivialisierung $\theta\colon q^{-1}(U) \to U \times H$ wirkt H von rechts auf $U \times H$ via $(x, h)h' := (x, hh')$ für alle $x \in U$ und $h, h' \in H$. Kann für jedes $x \in B$ eine offene x-Umgebung $U \subseteq B$ gefunden werden und eine Trivialisierung $\theta\colon q^{-1}(U) \to U \times H$ derart, dass θ eine äquivariante Abbildung ist, so nennt man $q\colon E \to B$ (zusammen mit der Rechtswirkung) ein H-Hauptfaserbündel. Da die Abbildung θ_g in Aufgabe 44 (f) äquivariant ist, ist $q\colon G \to H$ (mit der Rechtswirkung $G \times H \to G$, $(g, h) \mapsto gh$) ein H-Hauptfaserbündel. Insbesondere ist die in den Aufgaben 46 und 47 diskutierte Hopffaserung $\mathbb{S}_3 \to \mathbb{S}_2$ ein $\mathbb{S}_1$-Hauptfaserbündel.

Lemma 10.11 *Es ist* $\pi_2(\mathbb{S}_2) \cong (\mathbb{Z}, +)$.

Beweis. Die lange exakte Homotopiesequenz für die Hopffaserung $\mathbb{S}_3 \to \mathbb{S}_2$ liefert eine exakte Sequenz

$$\cdots \to \pi_2(\mathbb{S}_3) \to \pi_2(\mathbb{S}_2) \to \pi_1(\mathbb{S}_1) \to \pi_1(\mathbb{S}_3) \to \cdots,$$

wobei $\pi_2(\mathbb{S}_3) = \{0\}$ und $\pi_1(\mathbb{S}_3) = \{0\}$ nach Satz 10.1 (a) und $\pi_1(\mathbb{S}_1) \cong \mathbb{Z}$. Wir haben also eine exakte Sequenz

$$\{0\} \to \pi_2(\mathbb{S}_2) \to \mathbb{Z} \to \{0\},$$

in welcher der mittlere Homomorphismus wegen der Exaktheit surjektiv und injektiv ist, also ein Isomorphismus. □

Der Freudenthalsche Einhängungssatz

Wir erinnern an die Einhängung

$$S(X) := (X \times [0,1])//(X \times \{0\})//(X \times \{1\})$$

eines topologischen Raums,[34]

10.12 Sei $q_X \colon X \times [0,1] \to S(X)$ die kanonische Abbildung. Für jede stetige Abbildung $f \colon X \to Y$ zwischen topologischen Räumen faktorisiert

$$X \times [0,1] \stackrel{f \times \mathrm{id}_{[0,1]}}{\to} Y \times [0,1] \stackrel{q_Y}{\to} S(Y)$$

über q_X, es gibt also eine stetige Abbildung $S(f) \colon S(X) \to S(Y)$ mit

$$S(f) \circ q_X = q_Y \circ (f \times \mathrm{id}_{[0,1]}).$$

Es ist $S(\mathrm{id}_X) = \mathrm{id}_{S(X)}$.

10.13 Eine stetige Abbildung $\gamma \colon \mathbb{S}_k \to \mathbb{S}_n$ liefert eine stetige Abbildung

$$S(\gamma) \colon S(\mathbb{S}_k) \to S(\mathbb{S}_n),$$

[34] Abweichend von Vorigen ist es zweckmäßiger, nun das Intervall $[0,1]$ als *zweiten* Faktor zu schreiben.

die wir mit fest gewählten Identifizierungen von $S(\mathbb{S}_k)$ mit $\mathbb{S}_{k+1}$ und $S(\mathbb{S}_n)$ mit $\mathbb{S}_{n+1}$ auffassen können als stetige Abbildung

$$\mathbb{S}_{k+1} \to \mathbb{S}_{n+1}\,.$$

Und zwar identifizieren wir für diese Zwecke für jedes $k \in \mathbb{N}$ die k-Sphäre mit $I^k//\partial I^k$; die kanonische Quotientenabbildung sei für den Moment als

$$p_k \colon I^k \to I^k//\partial I^k$$

bezeichnet. Kürzen wir $\mathbb{S}_k := I^k//\partial I^k$ ab, so ist die Komposition

$$I^k \times I \overset{p_k \times \mathrm{id}_I}{\to} \mathbb{S}_k \times I \overset{q_{\mathbb{S}_k}}{\to} S(\mathbb{S}_k)$$

eine Quotientenabbildung, welche genau die Punkte des Randes

$$(\partial I^k) \times I \,\cup\, I^k \times \{0,1\}$$

von I^{k+1} miteinander identifiziert und somit über p_{k+1} zu einem Homöomorphismus

$$\mathbb{S}_{k+1} = I^{k+1}//\partial I^{k+1} \to S(\mathbb{S}_k) \tag{44}$$

faktorisiert, der auf Äquivalenzklassen gegeben ist durch

$$[(s_1, \ldots, s_{k+1})] \mapsto [[(s_1, \ldots, s_k)],\, s_{k+1}]\,.$$

Für die Zwecke des folgenden Satzes identifizieren wir $\mathbb{S}_{k+1}$ mit $S(\mathbb{S}_k)$ über den Homöomorphismus aus (44).

Wir werden sehen, dass man dann eine wohldefinierte Abbildung

$$\pi_k(\mathbb{S}_n, x_0) \to \pi_{k+1}(\mathbb{S}_{n+1}, x_0), \quad [\gamma] \mapsto [S(\gamma)]$$

bekommt mit $x_0 \in \mathbb{S}_0$, welche ein Gruppen-Homomorphismus ist (genannt der *Einhängungs-Homomorphismus*). Wir zeigen auch:

Satz 10.14 (*Freudenthalscher Einhängungssatz*). *Es seien $k, n \in \mathbb{N}$. Der Einhängungs-Homomorphismus*

$$\pi_k(\mathbb{S}_n) \to \pi_{k+1}(\mathbb{S}_{n+1})$$

ist für $k = 2n-1$ surjektiv; für alle $k < 2n-1$ ist er ein Isomorphismus.

Beweis von Satz 10.1 (b). Für $n \geq 2$ ist $n = 2n-n \leq 2n-2 < 2n-1$. Der Freudenthalsche Einhängungssatz kann also mit $k := n$ angewandt werden und liefert

$$\pi_{n+1}(\mathbb{S}_{n+1}) \cong \pi_n(\mathbb{S}_n).$$

Es ist also

$$\pi_n(\mathbb{S}_n) \cong \pi_2(\mathbb{S}_2) \quad \text{für alle } n \geq 2.$$

Da $\pi_2(\mathbb{S}_2) \cong \mathbb{Z}$ nach Lemma 10.11, folgt $\pi_n(\mathbb{S}_n) \cong \mathbb{Z}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. $\square$

Bemerkung 10.15 Für $n = 1$ ist $2n - 1 = 1$, nach dem Freudenthalschen Einhängungssatz der Einhängungshomomorphismus

$$\pi_1(\mathbb{S}_1) \to \pi_2(\mathbb{S}_2) \tag{45}$$

also surjektiv. Wäre der Kern nicht trivial, so wäre $\pi_2(\mathbb{S}_2)$ zur endlichen Gruppe $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ isomorph für ein $m \in \mathbb{N}$, im Widerspruch dazu, dass $\pi_2(\mathbb{S}_2) \cong \mathbb{Z}$ eine unendliche Gruppe ist. Also ist der Kern trivial und somit auch der Einhängungshomomorphismus in (45) ein Isomorphismus. Somit ist jeder der Einhängungshomomorphismen

$$\pi_1(\mathbb{S}_1) \to \pi_2(\mathbb{S}_2) \to \pi_3(\mathbb{S}_3) \to \cdots$$

ein Isomorphismus. Da $\pi_1(\mathbb{S}_1)$ (aufgefasst als Homotopieklassen relativ x_0 von Morphismen $(\mathbb{S}_1, x_0) \to (\mathbb{S}_1, x_0)$ punktierter topologischer Räume) von $[\mathrm{id}_{\mathbb{S}_1}]$ erzeugt wird und für jedes $n \in \mathbb{N}$ der Einhängungshomomorphismus

$$\pi_n(\mathbb{S}_n) \to \pi_{n+1}(\mathbb{S}_{n+1})$$

die Homotopieklasse $[\mathrm{id}_{\mathbb{S}_2}]$ auf $[\mathrm{id}_{\mathbb{S}_{n+1}}]$ abbildet, sehen wir per Induktion nach n, dass $\pi_n(\mathbb{S}_n)$ von $[\mathrm{id}_{\mathbb{S}_n}]$ erzeugt wird für alle $n \in \mathbb{N}$.

Berechnung von $\pi_k(X)$ über das $(k+1)$-Gerüst

Wir halten eine schöne Folgerung der zellulären Approximation fest.

Satz 10.16 *Es sei X ein Zellenkomplex mit dem n-Gerüst X_n für $n \in \mathbb{N}_0$. Für jedes $k \in \mathbb{N}$ gilt dann für alle $x_0 \in X_0$ mit den Inklusionsabbildungen $i\colon X_k \to X$ und $j\colon X_{k+1} \to X$:*

(a) *Der Gruppenhomomorphismus $i_*\colon \pi_k(X_k, x_0) \to \pi_k(X, x_0)$ ist surjektiv.*

(b) $j_*\colon \pi_k(X_{k+1}, x_0) \to \pi_k(X, x_0)$ *ist ein Isomorphismus.*

Beweis. Sei $z_0 \in \partial I^k$. Wir betrachten I^k als Zellenkomplex mit der 0-Zelle $e_0 := \{z_0\}$, der $(k-1)$-Zelle $e_{k-1} := (\partial I^k) \setminus \{z_0\}$ und der k-Zelle $e_k :=]0,1[^k$. Dann ist $A := \partial I^k = e_0 \cup e_{k-1}$ ein Unterkomplex von I^k. Ist

$$\gamma\colon (I^k, \partial I^k) \to (X, x_0)$$

ein Morphismus von Raumpaaren, so ist wegen $\gamma(e_0) = \{x_0\} \subseteq X_0$ und $\gamma(e_{k-1}) = \{x_0\} \subseteq X_0$ die Einschränkung $\gamma|_{\partial I^k}$ zellulär. Zelluläre Approximation liefert eine stetige Abbildung $\eta\colon I^k \to X$, welche zellulär ist und zu γ homotop relativ A, so dass also insbesondere

$$\eta|_{\partial I^k} = \gamma|_{\partial I^k}$$

konstant x_0 ist. Somit ist $\eta\colon (I^k, \partial I^k) \to (X, x_0)$ ein Morphismus von Raumpaaren und $[\gamma] = [\eta]$ in $\pi_k(X, x_0)$. Da η zellulär ist und I^k das k-Gerüst I^k hat, gilt

$$\eta(I^k) \subseteq X_k.$$

Wir können also die Homotopieklasse $[\eta|^{X_k}] \in \pi_k(X_k, x_0)$ bilden. Da

$$i_*([\eta|^{X_k}]) = [i \circ \eta^{X_k}] = [\eta] = [\gamma],$$

ist i_* surjektiv.

(b) Für γ und η wie im Beweis von (a) können wir $[\eta|^{X_{k+1}}] \in \pi_k(X_{k+1}, x_0)$ bilden und erhalten $j_*([\eta|^{X_{k+1}}]) = [j \circ \eta|^{X_{k+1}}] = [\eta] = [\gamma]$; also ist j_* surjektiv.

Zum Nachweis der Injektivität von j_* seien nun beliebige Homotopieklassen $[\gamma], [\eta] \in \pi_k(X_{k+1}, x_0)$ gegeben mit $j_*([\gamma]) = j_*([\eta])$. Anwendung von (a) mit X_{k+1} statt X zeigt, dass wir $\gamma(I^k) \subseteq X_k$ und $\eta(I^k) \subseteq X_k$ annehmen dürfen. Es sei $F\colon I \times I^k \to X$ eine Homotopie relativ ∂I^k von $j \circ \gamma$ nach $j \circ \eta$. Wir können $I \times I^k = I^{k+1}$ so als Zellenkomplex auffassen und ∂I^{k+1} als Unterkomplex, dass $F|_{\partial I^{k+1}}$ zellulär ist (siehe Aufgabe 47 des Aufgabenblatts 14). Zelluläre Approximation liefert dann eine stetige Abbildung $G\colon I^{k+1} \to X$, welche zellulär ist und homotop zu F relativ ∂I^{k+1}. Wie in Aufgabe 47 gezeigt, ist dann G eine Homotopie relativ ∂I^k von $j \circ \gamma$ nach $j \circ \eta$ und $G(I^{k+1}) \subseteq X_{k+1}$. Also ist $G|^{X_{k+1}}\colon I \times I^k \to X_{k+1}$ eine Homotopie relativ ∂I^k von γ nach η und somit $[\gamma] = [\eta]$ in $\pi_k(X_{k+1}, x_0)$. Also ist j_* injektiv. □

Der Satz von Whitehead

Definition 10.17 Eine stetige Abbildung $f\colon X \to Y$ zwischen wegzusammenhängenden topologischen Räumen X und Y wird eine *schwache Homotopieäquivalenz* genannt, wenn für ein (somit jedes) $x_0 \in X$ und jedes $k \in \mathbb{N}$ die Abbildung

$$f_*\colon \pi_k(X, x_0) \to \pi_k(Y, f(x_0))$$

ein Isomorphismus ist.

Jede Homotopieäquivalenz zwischen wegzusammenhängenden topologischen Räumen ist eine schwache Homotopieäquivalenz, nach Folgerung 9.32. Wir werden zeigen:

Satz 10.18 (*Satz von Whitehead*). *Jede schwache Homotopieäquivalenz*

$$f\colon X \to Y$$

zwischen wegzusammenhängenden Zellenkomplexen ist eine Homotopieäquivalenz.

Folgerung 10.19 *Ein wegzusammenhängender Zellenkomplex X ist genau dann kontrahierbar, wenn*

$$\pi_k(X) = \{0\} \quad \textit{für alle } k \in \mathbb{N}. \tag{46}$$

Beweis. Die Bedingung ist wegen Folgerung 9.35 notwendig für Kontrahierbarkeit. Gilt umgekehrt (46), so sei $x_0 \in X$ und $f\colon X \to \{x_0\}$ die konstante Abbildung. Da $\pi_k(\{x_0\}, x_0) = \{0\}$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und $\pi_k(X, x_0) = \{0\}$ per Voraussetzung, ist

$$f_*\colon \pi_k(X_0, x_0) \to \pi_k(\{x_0\}, x_0)$$

ein Isomorphismus für alle $k \in \mathbb{N}$, also f eine schwache Homotopieäquivalenz. Nach dem Satz von Whitehead ist f eine Homotopieäquivalenz, also X kontrahierbar nach Satz 5.73. $\square$

Anhang zu Kapitel 10

Wir begründen nun Satz 10.2. Man beweist analog zu Satz 7.2:

Satz 10.20 *Es sei $U \subseteq H$ eine relativ offene Teilmenge von $H = [0, \infty[\times \mathbb{R}^{n-1}$ und $x \in U$. Dann gilt:*

(a) *Ist $x \in \partial H$, so gibt es eine x-Umgebung V in U, für welche $V \setminus \{x\}$ kontrahierbar ist.*

(b) *Ist $x \notin \partial H$, so gibt es keine x-Umgebung $V \subseteq U$ derart, dass $V \setminus \{x\}$ kontrahierbar ist.*

Beide Fälle schließen sich aus und involvieren nur den topologischen Raum U (unabhängig von seiner Einbettung in H und $\mathbb{R}^n$). Also folgt unmittelbar Satz 10.2.

Beweis von Satz 10.20. (a) Ist $x \in U \cap \partial H$, so ist

$$V := \{y \in H \colon \|y - x\|_2 \le \varepsilon\} \subseteq U$$

für ein $\varepsilon > 0$. Dann ist V konvex und das Innere $V^0 \neq \emptyset$ als Teilmenge von $\mathbb{R}^n$. Wir wählen $x_0 \in V^0$; da $x \in \partial H$, ist $x \notin V^0$ und somit $x \neq x_0$. Dann ist $V \setminus \{x\}$ sternförmig bezüglich x_0. Nach Beispiel 5.43 ist $V \setminus \{x\}$ kontrahierbar.

(b) Sei $x \in U \setminus \partial H$ und $V \subseteq U$ eine x-Umgebung. Ist $V \setminus \{x\}$ nicht wegzusammenhängend, so ist $V \setminus \{x\}$ nicht kontrahierbar. Ist $V \setminus \{x\}$ wegzusammenhängend, so wählen wir ein $\varepsilon > 0$ mit

$$\{y \in \mathbb{R}^n \colon \|y - x\|_2 \le \varepsilon\} \subseteq V .$$

Dann ist

$$A := \{y \in \mathbb{R}^n \colon \|y - x\|_2 = \varepsilon\}$$

eine zu $\mathbb{S}_{n-1}$ homöomorphe Teilmenge von $V \setminus \{x\}$ und die Abbildung

$$r \colon V \setminus \{x\} \to A, \quad y \mapsto x + \varepsilon \frac{y - x}{\|y - x\|_2}$$

ist eine Retraktion. Sei $x_0 \in A$. Bezeichnet $i \colon A \to V \setminus \{0\}$ die Inklusionsabbildung, so ist nach Folgerung 9.34

$$i_* \colon \pi_{n-1}(A, x_0) \to \pi_{n-1}(V \setminus \{x\}, x_0)$$

injektiv. Da $\pi_{n-1}(A, x_0) \cong \mathbb{Z}$ wegen Satz 10.1 (b), ist $\operatorname{im}(i_*) \cong \mathbb{Z}$ und somit $\pi_1(V \setminus \{x\}, x_0)$ nicht die triviale Gruppe. Wegen Folgerung 9.35 kann $V \setminus \{x\}$ also nicht kontrahierbar sein. $\square$

11 Relative Homotopiegruppen und lange exakte Homotopiesequenz

Für ein Raumpaar (X, A) und $x_0 \in A$ kann für $k \geq 2$ eine Gruppe $\pi_k(X, A, x_0)$ definiert werden, eine sogenannte *relative* Homotopiegruppe. Im Fall $k = 1$ hat man zumindest eine Menge $\pi_1(X, A, x_0)$. Die relativen Homotopiegruppen sind Teil einer langen exakten Homotopiesequenz, die oft nützlich ist. Im Spezialfall eines Faserbündels kann diese konkretisiert werden in einer Form, die nur noch gewöhnliche (nicht relative) Homotopiegruppen beinhaltet (siehe Kapitel 14); in Kapitel 10 haben wir bereits gesehen, wie dies (angewandt auf die Hopf-Faserung) zum Beispiel zur Berechnung von $\pi_2(\mathbb{S}_2)$ benutzt werden kann.

Definition 11.1 Für $k \in \mathbb{N}$ sei

$$J_{k-1} := (I^{k-1} \times \{1\}) \cup (\partial(I^{k-1}) \times I) \subseteq I^k .$$

Es ist also

$$J_0 = \{1\} \subseteq I, \quad J_1 = (I \times \{1\}) \cup (\{0,1\} \times I) \quad \text{und} \quad J_2 = (I^2 \times \{1\}) \cup ((\partial I^2) \times I) .$$

Gegeben ein Raumpaar (X, A) und $x_0 \in A$ betrachten wir Morphismen von Raumtripeln

$$\gamma \colon (I^k, \partial I^k, J_{k-1}) \to (X, A, x_0);$$

es ist also $: I^k \to X$ eine stetige Abbildung derart, dass $\gamma(\partial I^k) \subseteq A$ und $\gamma(s) = x_0$ für alle $s \in J_{k-1}$. Wir betrachten Morphismen γ und η als äquivalent, wenn eine Homotopie $F \colon I \times I^k \to X$ von γ nach η existiert derart, dass für jedes $t \in I$ auch $F(t, \cdot) \colon I^k \to X$ ein Morphismus von Raumtripeln

$$(I^k, \partial I^k, J_{k-1}) \to (X, A, x_0)$$

ist. Es sei $\pi_k(X, A, x_0)$ die Menge von Äquivalenzklassen $[\gamma]$ mit

$$\gamma \colon (I^k, \partial I^k, J_{k-1}) \to (X, A, x_0).$$

Ist $k \geq 2$, so erhalten wir für Morphismen $\gamma \colon (I^k, \partial I^k, J_{k-1}) \to (X, A, x_0)$ und $\eta \colon (I^k, \partial I^k, J_{k-1}) \to (X, A, x_0)$ eine stetige Abbildung

$$\gamma \cdot \eta \colon I^k \to X$$

wie in 9.3; diese ist ein Morphismus $(I^k, \partial I^k, J_{k-1}) \to (X, A, x_0)$ und man sieht wie in Lemma 5.25 und Satz 9.6, dass die Abbildung

$$\pi_k(X, A, x_0) \times \pi_k(X, A, x_0) \to \pi_k(X, A, x_0), \quad [\gamma]\,[\eta] := [\gamma \cdot \eta]$$

wohldefiniert ist und aus $\pi_k(X, A, x_0)$ eine Gruppe macht mit Neutralelement $[c_{x_0}]$ und $[\gamma]^{-1} := [\gamma^-]$ mit γ^- wie in 9.4.

11.2 Ist $k \geq 3$, so ist $\gamma * \eta$ (wie in (34) ein Morphismus für Morphismen γ und η wie zuvor und (37) gilt; wie dort können wir folgern, dass dann die Gruppe $\pi_k(X, A, x_0)$ abelsch ist.

Bemerkung 11.3 Für $k = 1$ ist ein Morphismus von $(I^1, \partial I^1, J_0) = (I, \{0, 1\}, \{1\})$ nach (X, A, x_0) ein Weg $\gamma\colon I \to X$ in X, dessen Endpunkt $\gamma(1) = x_0$ ist und dessen Anfangspunkt $\gamma(0)$ in A ist. Die Menge $\pi_1(X, A, x_0)$ der entsprechenden Homotopieklassen wird nur als Menge betrachtet (nicht zu einer Gruppe gemacht). Genauer ist $0 := [c_{x_0}]$ ein interessantes Element und man betrachtet das Paar $(\pi_1(X, A, x_0), 0)$ (also eine punktierte Menge).

Bemerkung 11.4 Sei X ein topologischer Raum und $x_0 \in X$. Eine stetige Abbildung $\gamma\colon I^k \to X$ ist genau dann ein Morphismus $(I^k, \partial I^k) \to (X, x_0)$, wenn sie ein Morphismus $(I^k, \partial I^k, J_{k-1}) \to (X, x_0, x_0)$ ist. Mit $A := \{x_0\}$ ist also

$$\pi_k(X, x_0) = \pi_k(X, x_0, x_0);$$

gewöhnliche (absolute) Homotopiegruppen und für $k \geq 2$ Spezialfälle der absoluten (und für $k = 1$ wenigstens als Menge).

Relative Homotopiegruppen als Funktor

Wir führen nun Gruppenhomomorphismen f_* zwischen relativen Homotopiegruppen ein.

11.5 Ist $f\colon (X, A, x_0) \to (Y, B, y_0)$ ein Morphismus, so ist für jeden Morphismus $\gamma\colon (I^k, \partial I^k, J_{k-1}) \to (X, A, x_0)$ die Komposition $f \circ \gamma\colon (I^k, \partial I^k, J_{k-1}) \to (Y, B, y_0)$ ein Morphismus. Im Fall $k \geq 2$ sieht man wie in Lemma 9.11, dass

$$f_*\colon \pi_k(X, A, x_0) \to \pi_k(Y, B, y_0), \quad [\gamma] \mapsto [f \circ \gamma]$$

ein Gruppen-Homomorphismus ist. Auch im Fall $k = 1$ ist $f_*([c_{x_0}]) = [c_{y_0}]$.

Bemerkung 11.6 Im Fall $k \geq 2$ kann man $(X, A, x_0) \mapsto \pi_k(X, A, x_0)$, $f \mapsto f_*$ als Funktor

$$\text{Raumtripel der Form } (X, A, x_0) \quad \to \quad \text{Gruppen}$$

auffassen (analog zu Satz 9.13); für $k = 1$ hat man einen Funktor in die Kategorie der punktierten Mengen (vgl. Übungsblatt 14).

Wechsel des Basispunkts*

11.7 Es sei (X, A) ein Raumpaar, $x_0, y_0 \in A$ und $\theta\colon [0,1] \to A$ ein Weg in A von x_0 nach y_0. Es sei $m := \left(\frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{2}\right)$ der Mittelpunkt von I^k,

$$p := \left(\frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right) \in I^k$$

und

$$q := \left(\frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{2}, 0\right) \in I^k\,.$$

Für jeden Morphismus $\gamma\colon (I^k, \partial I^k, J_{k-1}) \to (X, A, x_0)$ ist dann $\theta_\natural(\gamma)\colon I^k \to X$,

$$s \mapsto \begin{cases} \gamma(m + 2(s-p)) & \text{wenn } \|s-p\|_\infty \leq \frac{1}{4}; \\ \theta\Big(4\left\|\left(s_1 - \frac{1}{2}, \ldots, s_{k-1} - \frac{1}{2}, \frac{1}{2}s_k\right)\right\|_\infty - 1\Big) & \text{wenn } \|s-p\|_\infty \geq \frac{1}{4} \end{cases}$$

mit $s = (s_1, \ldots, s_k)$ ein Morphismus $(I^k, \partial I^k, J_{k-1}) \to (X, A, y_0)$ (siehe Skizze in der Vorlesung).

Analog zu Satz 9.27 haben wir:

Lemma 11.8 *Es sei (X, A) ein Raumpaar, $x_0 \in A$ und $k \in \mathbb{N}$.*

(a) *Für jedes $y_0 \in A$ und jeden Weg $\theta\colon [0,1] \to A$ von x_0 nach y_0 ist*

$$\theta_\natural\colon \pi_k(X, A, x_0) \to \pi_k(X, A, y_0), \quad [\gamma] \mapsto [f_\natural(\gamma)]$$

wohldefiniert. Ist $k \geq 2$, so ist die so erhaltene Abbildung $\theta_\natural$ zwischen relativen Homotopiegruppen ein Isomorphismus von Gruppen. Im Fall $k = 1$ ist $\theta_\natural$ eine Bijektion, welche $[c_{x_0}]$ auf $[c_{y_0}]$ abbildet.

(b) *Ist* $\zeta\colon [0,1] \to A$ *homotop relativ* $\{0,1\}$ *zu* θ *in* A*, so ist* $\theta_\natural = \zeta_\natural$.

(c) *Es ist* $(c_{x_0})_\natural$ *die identische Abbildung* $\pi_k(X,A,x_0) \to \pi_k(X,A,x_0)$.

(d) *Ist* $\alpha\colon [0,1] \to A$ *ein Weg von* x_0 *nach* y_0 *und* $\beta\colon [0,1] \to A$ *ein Weg von* y_0 *nach* z_0*, so gilt*

$$(\alpha \cdot \beta)_\natural = \beta_\natural \circ \alpha_\natural$$

für die Abbildungen $\alpha_\natural\colon \pi_k(X,A,x_0) \to \pi_k(X,A,y_0)$,

$$\beta_\natural\colon \pi_k(X,A,y_0) \to \pi_k(X,A,z_0)$$

sowie $(\alpha\cdot\beta)_\natural\colon \pi_k(X,A,x_0) \to \pi_k(X,A,z_0)$.

Beweis. Dies lässt sich auf den Beweis von Satz 9.27 zurückführen.

Ist $\gamma\colon (I^k, \partial I^k, J_{k-1}) \to (X,A,x_0)$ ein Morphismus, so erhalten wir einen Morphismus $\gamma_\flat\colon (I^k,\partial I^k) \to (X,x_0)$, indem wir den Definitionsbereich I^k von γ mit $I^{k-1} \times [\frac{1}{2},1]$ identifizieren und die dort erhaltene[35] Funktion so auf I^k fortsetzen, dass sie spiegelsymmetrisch zu $s_k = \frac{1}{2}$ ist, also

$$\gamma_\flat(s) := \gamma_\flat(s_1,\ldots,s_{k-1},1-s_k)$$

für alle $s=(s_1,\ldots,s_k) \in I^{k-1} \times [0,\frac{1}{2}]$. Man sieht direkt, dass

$$(\gamma\cdot\eta)_\flat = \gamma_\flat \cdot \eta_\flat, \quad (c_{x_0})_\flat = c_{x_0} \quad \text{und}(\gamma^-)_\flat = (\gamma_\flat)^-$$

für alle Morphismen γ und η von $(I^k,\partial I^k, J_{k-1})$ nach (X,A,x_0). Wir haben $\theta_\natural(\gamma)$ so definiert, dass

$$(\theta_\natural(\gamma))_\flat = \theta_\sharp(\gamma_\flat)$$

mit $\theta_\sharp$ wie in 9.25. Da all die im Beweis von Satz 9.27 auftretenden (jetzt F genannten) Homotopien $F\colon [0,1]\times I^k \to X$ für alle Parameter $t \in [0,1]$ alle $s \in I^{k-1} \times \{1/2\}$ in A abbilden, können wir diese nach Einschränken auf $[0,1] \times I^{k-1} \times [\frac{1}{2},1]$ als Homotopien $[0,1]\times I^k$ auffassen, welche auf $[0,1] \times I^{k-1} \times \{0\}$ nur Werte in A annehmen (und auf $[0,1]\times J_{k-1}$ den Wert x_0); in Formeln ist die so erhaltene Homotopie

$$[0,1]\times I^k \to X, \quad (t,s) \mapsto F\Big(t, s_1, \ldots, s_{k-1}, \frac{1}{2} + \frac{1}{2}s_k\Big).$$

Die Behauptungen folgen. □

[35] Für $s=(s_1,\ldots,s_k) \in I^{k-1} \times [\frac{1}{2}]$ ist also $\gamma_\flat(s) := \gamma(s_1,\ldots,s_{k-1}, 2\,s_k - 1)$.

Bemerkung 11.9 Ist (X, A) ein Raumpaar und A wegzusammenhängend, so ist also

$$\pi_k(X, A, x_0) \cong \pi_k(X, A, y_0)$$

für alle $x_0, y_0 \in A$ und $k \geq 2$. Im Falle $k = 1$ gibt es eine Bijektion $\pi_1(X, A, x_0) \to \pi_1(X, A, y_0)$, die $[c_{x_0}]$ auf $[c_{y_0}]$ abbildet.

Bemerkung 11.10 Mit dem gleichen Trick hätte man auch schon die Wohldefiniertheit der Gruppenoperation auf $\pi_k(X, A, x_0)$ für $k \geq 2$ zeigen können, die Gruppenaxiome und alle Eigenschaften von f_*, durch Zurückführen auf die frühere Diskussion absoluter Homotopiegruppen via $\gamma \mapsto \gamma_\flat$ und Zurückholen von Homotopien.

Interpretation via Abbildungen auf $\mathbb{D}_k$

Analog zu 9.14 ist folgende Interpretation möglich für die zur Definition von $\pi_k(X, A, x_0)$ benutzen Morphismen $(I^k, \partial I^k, J_{k-1})$ und ihre Homotopieklassen in $\pi_k(X, A, x_0)$.

11.11 Jeder Morphismus

$$\gamma\colon (I^k, \partial I^k, , J_{k-1}) \to (X, A, x_0)$$

faktorisiert zu einer stetigen Abbildung

$$\overline{\gamma}\colon I^k // J_{k-1} \to X,$$

die durch $\overline{\gamma} \circ q = \gamma$ festgelegt ist mit der kanonischen Quotientenabbildung $q\colon I^k \to I^k // J_{k-1}$. Wegen Folgerung 8.9 ist

$$I^k // J_{k-1} \;\sim\; I^k // (\{0\} \times I^{k-1} = \operatorname{cone}(I^{k-1})$$

homöomorph zum Kegel über I^{k-1}, der sich als Pyramide in $\mathbb{R}^k$ über der Grundfläche I^{k-1} auffassen lässt, also eine kompakte konvexe Menge mit nicht-leerem Inneren und somit eine k-Zelle homöomorph zu $\mathbb{D}_k$ ist, wobei der Homöomorphismus den jeweiligen Rand als Teilmenge von $\mathbb{R}^k$ bijektiv aufeinander abbildet. Da $I^k // J_{k-1}$ Hausdorffsch und ∂I^k kompakt ist, ist

$$q|_{\partial I^k}\colon \partial I^k \to q(\partial I^k)$$

eine Quotientenabbildung. Also ist $\partial I^k // J_{k-1} \sim q(\partial I^k)$. Unter den vorigen Homöomorphismen wird diese Menge auf $\mathbb{S}_{k-1} \subseteq \mathbb{D}_k$ abgebildet. Also ist

$$(I^k // J_{k-1}, \partial I^k // J_{k-1}) \cong (\mathbb{D}_k, \mathbb{S}_{k-1}).$$

Sei $z_0 \in \mathbb{S}_{k-1}$ der Punkt, der in der vorigen Konstruktion der Kegelspitze entsprach. Wir können $\overline{\gamma}$ dann als Morphismus $(\mathbb{D}_k, \mathbb{S}_{k-1}, z_0) \to (X, A, x_0)$ auffassen. Entsprechend faktorisiert jede Homotopie $F\colon [0,1] \times I^k \to X$ mit $F(t, \cdot)\colon (I^k, \partial i^k, J_{k-1}) \to (X, A, x_0)$ zu einer Homotopie

$$\overline{F}\colon [0,1] \times \mathbb{D}_k \to X$$

mit $\overline{F}(t, \cdot)\colon (\mathbb{D}_k, \mathbb{S}_{k-1}, z_0) \to (X, A, x_0)$.

Das Kompressionskriterium

Mit Identifizierungen wie in 11.11 gilt:

Satz 11.12 *(Kompressionskriterium) Es sei (X, A) ein Raumpaar, $x_0 \in A$, $k \in \mathbb{N}$, $z_0 \in \mathbb{S}_{k-1}$ und $\gamma\colon (\mathbb{D}_k, \mathbb{S}_{k-1}, z_0) \to (X, A, x_0)$ ein Morphismus. Dann sind äquivalent:*

(a) *$\gamma = [c_{x_0}]$ in $\pi_k(X, A, x_0)$.*

(b) *γ ist homotop relativ $\mathbb{S}_{k-1}$ zu einer stetigen Abbildung $\eta\colon \mathbb{D}_k \to X$ mit Bild $\eta(\mathbb{D}_k) \subseteq A$.*

Beweis. (b)$\Rightarrow$(a): Ist F eine Homotopie relativ $\mathbb{S}_{k-1}$ von γ zu einem η wie in (b), so ist $[\gamma] = [\eta]$ in $\pi_k(X, A, x_0)$. Da $\{z_0\}$ ein starker Deformationsretrakt von $\mathbb{D}_k$ ist, gibt es eine Homotopie $G\colon [0,1] \times \mathbb{D}_k \to \mathbb{D}_k$ von $\mathrm{id}_{\mathbb{D}_k}$ zur konstanten Abbildung $c_{z_0}\colon \mathbb{D}_k \to \mathbb{D}_k$. Dann ist $\eta \circ G$ eine Homotopie von η zur konstanten Abbildung $c_{x_0}\colon \mathbb{D}_k \to X$, welche nur Werte in A annimmt und $\eta(G(t, z_0)) = \eta(z_0) = x_0$ erfüllt für alle $t \in [0,1]$. Also ist $[\eta] = [c_{x_0}]$ in $\pi_k(X, A, x_0)$.

(a)$\Rightarrow$(b): Gilt (a), so gibt es eine Homotopie $F\colon [0,1] \times \mathbb{D}_k \to X$ von γ nach c_{x_0} derart, dass $F(t, \cdot)$ ein Morphismus $(\mathbb{D}_k, \mathbb{S}_{k-1}, z_0) \to (X, A, x_0)$ ist für jedes $t \in [0,1]$. Wir definieren

$$G\colon [0,1] \times \mathbb{D}_k \to X$$

via

$$G(t, rz) := \begin{cases} F(2(1-r), z) & \text{wenn } 1 - t/2 \leq r \leq 1 \\ F\Big(t, \frac{r}{1-t/2} z\Big) & \text{wenn } 0 \leq r \leq 1 - t/2. \end{cases}$$

für $t \in [0,1]$, $z \in \mathbb{S}_{k-1}$ und $r \in [0,1]$. Für $t = 0$ ist $G(0, s) = F(0, s) = \gamma(s)$ für alle $s \in \mathbb{D}_k$. Für alle $t \in [0,1]$ ist für alle $z \in \mathbb{S}_{k-1}$ mit $r := 1$

$$G(t, z) = F(0, z) = \eta(z) = G(0, z),$$

also G eine Homotopie relativ $\mathbb{S}_{k-1}$. Für $t = 1$ ist $G(1, rz) = F(1, 2rz) = x_0 \in A$ wenn $0 \leq r \leq 1/2$; für $1/2 \leq r \leq 1$ ist

$$G(1, rz) = F(2(1-r), z) \in A\,.$$

Also ist $\eta := G(1, \cdot)\colon \mathbb{D}_k \to X$ eine stetige Abbildung mit Werten in A. □

Lange exakte Homotopiesequenz

Wir betrachten folgende Situation.

11.13 Es sei (X, A) ein Raumpaar und $x_0 \in A$. Wir betrachten die Inklusionsabbildung $i\colon A \to X$ als Morphismus

$$(A, x_0) \to (X, x_0);$$

für jedes $k \in \mathbb{N}_0$ induziert dieser eine Abbildung

$$i_*\colon \pi_k(A, x_0) \to \pi_k(X, x_0), \quad [\gamma] \mapsto [i \circ \gamma],$$

die für alle $k \in \mathbb{N}$ ein Gruppen-Homomorphismus ist. Wir betrachten die identische Abbildung $j\colon X \to X$ als Morphismus

$$(X, \{x_0\}, x_0) \to (X, A, x_0).$$

Für jedes $k \in \mathbb{N}$ induziert dieser eine Abbildung

$$j_*\colon \pi_k(X, x_0) \to \pi_k(X, A, x_0), \quad [\gamma] \mapsto [\gamma],$$

die für alle $k \geq 2$ ein Gruppen-Homomorphismus ist. Für jedes $k \in \mathbb{N}$ ist zudem

$$\partial\colon \pi_k(X, A, x_0) \to \pi_{k-1}(A, x_0), \quad [\gamma] \mapsto [\gamma|_{I^{k-1}}^A]$$

eine wohldefinierte Abbildung, die $[c_{x_0}]$ auf $[c_{x_0}]$ abbildet und im Falle $k \geq 2$ ein Gruppen-Homomorphismus ist (was wir sogleich nachrechnen). Hierbei wird I^{k-1} wie üblich mit $I^{k-1} \times \{0\} \subseteq I^k$ identifiziert.

11.14 Ist γ ein Morphismus $(I^k, \partial I^k, J_{k-1}) \to (X, A, x_0)$, so ist $\gamma|_{I^{k-1}}^A$ ein Morphismus $(I^{k-1}, \partial I^{k-1}) \to (A, x_0)$. Es ist nämlich $\gamma(I^{k-1}) \subseteq \gamma(\partial I^k) \subseteq A$; für jedes $s \in \partial I^{k-1}$ ist zudem $(s, 0) \in \partial I^{k-1} \times [0, 1] \subseteq J_{k-1}$, also $\gamma(s, 0) = x_0$.

Zum Nachweis der Wohldefiniertheit sei $F\colon [0, 1] \times I^k \to X$ eine Homotopie von γ zu einem Morphismus $\eta\colon (I^k, \partial I^k, J_{k-1}) \to (X, A, x_0)$ mit der Eigenschaft, dass $F(t, \cdot)$ für jedes $t \in [0, 1]$ ein Morphismus $(I^k, \partial I^k, J_{k-1}) \to (X, A, x_0)$ ist. Dann ist $F(t, s) \in A$ für alle $t \in [0, 1]$ und $s \in I^{k-1}$, da $I^{k-1} = I^{k-1} \times \{0\} \subseteq \partial I^k$ und $F(\{t\} \times \partial I^k) \subseteq A$. Nach dem vorigen Argument ist weiter $F(t, \cdot)|_{\partial I^k}$ konstant x_0. Also ist

$$G\colon [0, 1] \times I^{k-1} \to A, \quad (t, s) \mapsto F(t, s)$$

eine Homotopie relativ ∂I^{k-1} von $\gamma|_{I^{k-1}}^A$ nach $\eta|_{I^{k-1}}^A$ und somit

$$[\gamma|_{I^{k-1}}^A] = [\eta|_{I^{k-1}}^A] \quad \text{in } \pi_{k-1}(A, x_0).$$

Ist $k \geq 2$, so ist für Morphismen γ und η von $(I^k, \partial I^k, J_{k-1})$ nach (X, A, x_0)

$$(\gamma \cdot \eta)|_{I^{k-1}} = (\gamma|_{I^{k-1}}) \cdot (\eta|_{I^{k-1}}),$$

also $\partial([\gamma]\,[\eta]) = \partial([\gamma \cdot \eta]) = [(\gamma \cdot \eta)|_{I^{k-1}}] = [\gamma|_{I^{k-1}} \cdot \eta|_{I^{k-1}}] = [\gamma|_{I^{k-1}}]\,[\eta|_{I^{k-1}}] = \partial([\gamma])\partial([\eta])$.

Dann gilt, mit Exaktheit wie auf Aufgabenblatt 14:

Satz 11.15 (Lange exakte Homotopiesequenz) *Die Sequenz*

$$\cdots \to \pi_k(A, x_0) \xrightarrow{i_*} \pi_k(X, x_0) \xrightarrow{j_*} \pi_k(X, A, x_0) \xrightarrow{\partial} \pi_{k-1}(A, x_0) \to \cdots \to \pi_0(X, x_0)$$

ist exakt.

Beweis. Es sei $k \geq 1$. *Exaktheit an* $\pi_{k-1}(A, x_0)$: Ist γ ein Morphismus $(I^k, \partial I^k, J_{k-1}) \to (X, A, x_0)$, so ist

$$F\colon [0, 1] \times I^{k-1} \to X, \quad (t, s) \mapsto \gamma(s, t)$$

eine Homotopie relativ ∂I^{k-1} von $\gamma|_{I^{k-1}} = i \circ \gamma|_{I^{k-1}}^A$ nach c_{x_0}, also

$$i_*(\partial([\gamma])) = [\gamma|_{I^{k-1}}] = [c_{x_0}]$$

in $\pi_{k-1}(X, x_0)$. Ist umgekehrt $\gamma\colon (I^{k-1}, \partial I^{k-1}) \to (A, x_0)$ ein Morphismus mit $i_*([\gamma]) = [c_{x_0}]$ in $\pi_{k-1}(X, x_0)$, so existiert eine Homotopie

$$F\colon [0,1] \times I^{k-1} \to X$$

relativ ∂I^{k-1} von $i \circ \gamma$ nach c_{x_0}. Dann ist

$$\eta\colon I^k \to X, \quad (s,t) \mapsto F(t,s)$$

ein Morphismus $(I^k, \partial I^k, J_{k-1}) \to (X, A, x_0)$ und $\partial([\eta]) = [\gamma]$ in $\pi_{k-1}(A, x_0)$.

Exaktheit an $\pi_k(X, A, x_0)$: Ist γ ein Morphismus $(I^k, \partial I^k) \to (X, x_0)$, so ist $\gamma|_{I^{k-1}}$ konstant x_0, da $I^{k-1} = I^{k-1} \times \{0\} \subseteq \partial I^k$. Also ist $\partial(j_*([\gamma])) = [\gamma^A|_{I^{k-1}}] = [c_{x_0}]$ in $\pi_{k-1}(A, x_0)$.

Sei umgekehrt $\gamma\colon (I^k, \partial I^k, J_{k-1}) \to (X, A, x_0)$ ein Morphismus mit $\partial([\gamma]) = [c_{x_0}]$ in $\pi_{k-1}(A, x_0)$. Dann existiert also eine Homotopie $F\colon [0,1] \times I^{k-1} \to A$ relativ ∂I^{k-1} von c_{x_0} nach $\gamma|_{I^{k-1}}$. Es ist dann $\eta\colon I^k = I^{k-1} \times I \to X$,

$$(s,t) \mapsto \begin{cases} F(2t, s) & \text{wenn } t \in [0, \frac{1}{2}]; \\ \gamma(s, 2t-1) & \text{wenn } t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

stetig und ein Morphismus $(I^k, \partial I^k) \to (X, x_0)$. Weiter ist $j_*([\eta]) = [\gamma]$ in $\pi_k(X, A, x_0)$, denn die Abbildung

$$G\colon [0,1] \times I^{k-1} \times I \to X, \quad (r,s,t) \mapsto \begin{cases} F(r+2t, s) & \text{wenn } t \in [0, \frac{1}{2} - \frac{1}{2}r]; \\ \gamma\Big(s, \frac{2t-1+r}{1+r}\Big) & \text{wenn } t \in [\frac{1}{2} - \frac{1}{2}r, 1] \end{cases}$$

ist stetig und eine Homotopie von η nach γ derart, dass $G(r, \cdot)$ ein Morphismus $(I^k, \partial I^k, J_{k-1}) \to (X, A, x_0)$ ist für alle $r \in [0,1]$.

Exaktheit an $\pi_k(X, x_0)$: Ist $\gamma\colon (I^k, \partial I^k) \to (A, x_0)$ ein Morphismus, so sieht man $[j \circ i \circ \gamma] = j_*(i_*([\gamma])) = [c_{x_0}]$ in $\pi_k(X, A, x_0)$ wie folgt: Da $\gamma|_{\partial I^k}$ konstant x_0 ist, faktorisiert $j \circ i \circ \gamma = i \circ \gamma$ zu einer stetigen Abbildung $\overline{\gamma}\colon \mathbb{D}_k \to X$, die auf $\mathbb{S}_{k-1}$ konstant x_0 ist. Es ist

$$\overline{\gamma}(\mathbb{D}_k) = \gamma(I^k) \subseteq A.$$

Nach dem Kompressionskriterium ist $[\overline{\gamma}] = [c_{x_0}]$ in $\pi_k(X, A, x_0)$ bei Benutzung von Abbildungen auf $\mathbb{D}_k$, folglich $[j \circ i \circ \gamma] = [c_{x_0}]$ bei Benutzung von Abbildungen auf I^k.

Sie umgekehrt $\gamma\colon (I^k, \partial I^k) \to (X, x_0)$ ein Morphismus derart, dass $j_*([\gamma]) = [c_{x_0}]$ in $\pi_k(X, A, x_0)$. Aus dem Kompressionskriterium folgt, dass es dann eine Homotopie relativ ∂I^k gibt von γ zu einem Morphismus $\eta\colon (I^k, \partial I^k, J_{k-1}) \to (X, A, x_0)$ mit $\eta(I^k) \subseteq A$. Dann ist $[\eta|^A] \in \pi_k(A, x_0)$ und $i_*([\eta|^A]) = [i \circ \eta|^A] = [\eta] = [\gamma]$ in $\pi_k(X, x_0)$. $\square$

12 Zelluläre Approximation

In diesem Kapitel beweisen wir Satz 10.3. Wir benutzen den folgenden Sachverhalt, der im Anhang näher erläutert wird.

Lemma 12.1 *Es seien $k, n \in \mathbb{N}_0$ mit $k < n$ und $f\colon I^k \to Y$ eine stetige Abbildung in einen Hausdorffschen topologischen Raum Y. Weiter sei $\Phi\colon \mathbb{D}_n \to Y$ eine stetige Abbildung derart, dass $e := \Phi(\mathbb{D}_n^0)$ offen in Y ist und $\Phi|_{\mathbb{D}_n^0}^e$ ein Homöomorphismus, mit $\mathbb{D}_n^0 := \mathbb{D}_n \setminus \mathbb{S}_{n-1}$. Dann ist f homotop relativ $f^{-1}(Y \setminus e)$ zu einer stetigen Abbildung $g\colon I^k \to Y$ derart, dass*

$$g(I^k) \subseteq Y \setminus e\,.$$

Bemerkung 12.2 Zum Beweis des Lemmas genügt es, $e \setminus g(I^k) \neq \emptyset$ zu erreichen. Wir wählen dann einen Punkt $z_0 \in e \setminus g(I^k)$ und erhalten $x_0 := (\Phi|_{\mathbb{D}_n}^e)^{-1} \in \mathbb{D}_n \setminus \mathbb{S}_{n-1}$. Es sei $i\colon \mathbb{S}_{n-1} \to \mathbb{D}_n$ die Inklusionsabbildung. Da $\mathbb{S}_{n-1}$ nach Beispiel 5.56 ein starker Deformationsretrakt von $\mathbb{D}_n \setminus \{x_0\}$ ist, gibt es eine Homotopie

$$H\colon [0,1] \times (\mathbb{D}_n \setminus \{x_0\}) \to \mathbb{D}_n \setminus \{x_0\}$$

relativ $\mathbb{S}_{n-1}$ von $\mathrm{id}_{\mathbb{D}_n \setminus \{x_0\}}$ nach $i \circ r$ mit einer starken Deformationsretraktion $r\colon \mathbb{D}_n \setminus \{x_0\} \to \mathbb{S}_{n-1}$. Da $H(t,x) = x$ für alle $t \in [0,1]$ und $x \in \mathbb{S}_{n-1}$, ist eine Abbildung $G\colon [0,1] \times \Phi(\mathbb{D}_n) \to \Phi(\mathbb{D}_n)$ via

$$(t, \Phi(x)) \mapsto \Phi(H(t,x))$$

wohldefiniert und diese ist stetig, da $\mathrm{id}_{[0,1]} \times \Phi|^{\Phi(\mathbb{D}_n)}$ eine Quotientenabbildung ist als stetige surjektive Abbildung von einem kompakten Raum in einen Hausdorffraum. Dann ist

$$F\colon [0,1] \times I^k \to Y, \quad (t,s) \mapsto \begin{cases} g(s) & \text{wenn } s \in g^{-1}(Y \setminus e); \\ G(t, f(x))) & \text{wenn } s \in g^{-1}(\Phi(\mathbb{D}_n)) \end{cases}$$

wohldefiniert und nach dem Klebelemma stetig. Es ist $h := F(1, \cdot)$ stetig und $e \cap h(I^k) = \emptyset$. Per Konstruktion ist F eine Homotopie von g nach h relativ $g^{-1}(Y \setminus e)$, wobei $g^{-1}(Y \setminus e) \supseteq f^{-1}(Y \setminus e)$.

Mehrmalige Anwendung von Lemma 12.1 zeigt:

Lemma 12.3 *Es sei X ein Zellenkomplex mit n-Gerüst X_n für $n \in \mathbb{N}_0$. Seien $k, n \in \mathbb{N}_0$ mit $k < n$ und $f\colon I^k \to X$ eine stetige Abbildung mit $f(I^k) \subseteq X_n$. Dann ist f homotop relativ $f^{-1}(X_{n-1})$ zu einer stetigen Abbildung $g\colon I^k \to X$ mit $g(I^k) \subseteq X_{n-1}$.*

Beweis. Es seien $e_{n,j}$ für $j \in J_n$ die n-Zellen von X. Ist $f(I^k) \subseteq X_{n-1}$, ist nichts zu zeigen. Andernfalls ist die Menge

$$M := \{j \in J_n \colon e_{n,j} \cap f(I^k) \neq \emptyset\}$$

nicht leer; sie ist zudem endlich, nach Satz 3.20 (c). Der Beweis ist per Induktion nach der Zahl m der Elemente von M. Der Induktionsanfang $m = 1$ ist ein Spezialfall von Lemma 12.1 mit $Y := X_{n-1} \cup e_{n,j}$ und $\Phi := \Phi_{n,j}|^Y$, wobei $M = \{j\}$. Im Falle $m > 0$ sei $j \in M$; wir wenden Lemma 12.1 auf f an als Abbildung nach $X_{n-1} \cup \bigcup_{i \in M} e_{n,i}$ und dann die Induktionsvoraussetzung auf die erhaltene Abbildung $g\colon I^k \to X_{n-1} \cup \bigcup_{i \in M \setminus \{j\}} e_{n,i}$. □

Lemma 12.4 *Es sei X ein Zellenkomplex mit n-Gerüst X_n für $n \in \mathbb{N}_0$. Es sei $k \in \mathbb{N}_0$ und $f\colon I^k \to X$ stetig. Dann ist f homotop relativ $f^{-1}(X_k)$ zu einer stetigen Abbildung $g\colon I^k \to X$ mit $g(I^k) \subseteq X_k$.*

Beweis. Da $f(I^k)$ kompakt ist, existiert nach Satz 3.20 (c) ein $n \in \mathbb{N}_0$ mit $f(I^k) \subseteq X_n$. Ist $n \leq k$, sind wir fertig. Ist $n > k$, wenden wir Lemma 12.3 $n-k$ mal an, um f nacheinander durch Abbildungen $I^k \to X_{n-j}$ zu ersetzen mit $j \in \{1, \ldots, n-k\}$. □

Beweis von Satz 10.3. Für $n \in \mathbb{N}_0$ sei X_n das n-Gerüst von X und Y_n das n-Gerüst von Y. Es seien $\Phi^X_{n,j}\colon D_{n,j} \to X$ für $j \in J^X_n$ die charakteristischen Abbildungen (wobei o.B.d.A. $D_{n,j} = I^n$ für jedes $j \in J^X_n$), $e^X_{n,j} = \Phi^X_{n,j}(]0,1[^n)$ und $J_n(A) := \{j \in J^X_n \colon e_{n,j} \subseteq A\}$. Weiter sei $X_{-1} := \emptyset$ und $Y_{-1} := \emptyset$. Für jedes $n \in \mathbb{N}_0 \cup \{-1\}$ ist

$$A \cup X_n$$

eine abgeschlossene Teilmenge von X und ein Unterkomplex.

Sei $f_{-1} :=:= f$. Wir behaupten, dass für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ eine stetige Abbildung

$$f_n \colon X \to Y$$

mit

$$f_n(A \cup X_n) \subseteq Y_n$$

existiert und eine Homotopie

$$F_n \colon [0,1] \times X \to Y$$

relativ $A \cup X_{n-1}$ von f_{n-1} nach f_n. Insbesondere ist dann also $f_n|_A = f_{n-1}|_A = \cdots = f_{-1}|_A = f|_A$ und für alle $k < n$

$$f_n|_{X_k} = f_{n-1}|_{X_k} = \cdots = f_k|_{X_k},$$

also $f_n(X_k) = f_k(X_k) \subseteq Y_k$.

Wenn das stimmt, können wir den Beweis wie folgt zu Ende führen: Wir definieren $F \colon [0,1] \times X \to Y$ via

$$F(t,x) := \begin{cases} F_n(t,x) & \text{wenn } t \in [1 - \frac{1}{2^n}, 1 - \frac{1}{2^{n+1}}]; \\ f_n(x) & \text{wenn } x \in X_n \text{ und } t \geq \frac{1}{2^{n+1}}. \end{cases}$$

Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ ist F_n eine Homotopie relativ $A \cup X_{n-1}$, also

$$F_n(t,\cdot)|_{A \cup X_{n-1}} = F_n(0,\cdot)|_{A \cup X_{n-1}} = f_{n-1}|_{A \cup X_{n-1}}$$

für all $t \in [0,1]$ und insbesondere

$$f_n|_{A \cup X_{n-1}} = f_{n-1}|_{A \cup X_{n-1}} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}_0.$$

Daher ist F wohldefiniert. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist $F|_{[0,1] \times X_n}$ nach dem Klebelemma stetig und somit auch $F \circ (\mathrm{id}_{[0,1]} \times \Phi^X_{n,j})$ stetig für alle $j \in J^X_n$; folglich ist F stetig.

Beweis der Behauptung. Wir konstruieren die Funktionen f_n und Homotopien F_n rekursiv für $n \in \mathbb{N}_0$. Da $f_{-1} = f$ schon vorhanden ist, kann die folgende Konstruktion für $n = 0$ durchgeführt werden aber auch für $n > 0$, wenn $f_0, \ldots, f_{n-1}$ und $F_1, \ldots, F_{n-1}$ schon konstruiert sind.

Es gilt

$$f_{n-1}(X_k) \subseteq Y_k \quad \text{für alle } k \in \{-1, \ldots, n-1\}$$

und $f_{n-1}|_A = f|_A$. Nach Lemma 12.4 gibt es für jedes $j \in J^X_n \setminus J_n(A)$ eine Homotopie

$$H_{n,j} \colon [0,1] \times I^n \to Y$$

von $h_{n-1,j} := f_{n-1} \circ \Phi^X_{n,j}$ zu einer stetigen Abbildung $g_{n,j} \colon I^n \to Y$ mit $g_{n,j}(I^n) \subseteq Y_n$, relativ $h^{-1}_{n-1,j}(Y_n)$. Da $f_{n-1}(X_{n-1}) \subseteq Y_n$ und $\Phi^X_{n,j}(\partial I^n) \subseteq X_{n-1}$, ist $\partial I^n \subseteq g^{-1}_{n,j}(Y_n)$. Also ist eine Funktion

$$H_n \colon [0,1] \times (A \cup X_n) \to Y$$

durch

$$H_n(t,x) := \begin{cases} f_{n-1}(x) & \text{wenn } x \in A \cup X_{n-1}; \\ \Phi^X_{n,j}(H_{n,j}(t,s)) & \text{wenn } x = \Phi^X_{n,j}(s) \text{ mit } j \in J^X_n \setminus J_n(A) \text{ und } s \in I^n \end{cases}$$

wohldefiniert. Diese ist stetig, da $H_n \circ (\mathrm{id}_{[0,1]} \times \Phi^X_{k,j})$ stetig ist für alle $k \in \mathbb{N}_0$ und $j \in J_k(A)$ und auch für alle $k \in \{0, \ldots, n\}$ und $j \in J^X_k$. Diese Funktionen schicken im ersten Fall nämlich (t,s) auf $f_{n-1}(\Phi^X_{k,j}(s))$. Im zweiten Falle bekommt man $f_{n-1}(\Phi^X_{k,j}(s))$ für $k \in \{0, \ldots, n-1\}$ und $j \in J^X_k$ oder $k = n$ und $j \in J_n(A)$; für $k = n$ und $j \in J^X_n \setminus J_n(A)$ bekommt man $\Phi^X_{n,j}(H_{n,j}(t,s)$.

Da das CW-Paar $(X, A \cup X_n)$ nach Satz 8.27 die Homotopiefortsetzungseigenschaft besitzt, finden wir eine Homotopie

$$F_n \colon [0,1] \times X \to Y$$

von f_{n-1} zu einer stetigen Abbildung $f_n \colon X \to Y$ derart, dass $F_n|_{A \cup X_n} = H_n$ und somit F_n wie H_n eine Homotopie relativ $A \cup X_{n-1}$ ist. Per Konstruktion ist $f_n(A \cap X_n) = f_{n-1}(A \cap X_n) = f(A \cap X_n) \subseteq Y_n$ und $f_n(e^X_{n,j}) \subseteq Y_n$ für alle $j \in J^X_n \setminus J_n(A)$, also $f_n(X_n) \subseteq Y_n$. $\square$

Anhang zu Kapitel 12: Mehr zu Lemma 12.1*

Das genannte Lemma 12.1 ergibt sich aus dem folgenden technischeren Lemma (da es für $k < n$ keine surjektiven affin-linearen Abbildungen von $\mathbb{R}^k$ nach $\mathbb{R}^n$ gibt und somit $g^{-1}(\Delta)$ eine leere Vereinigung, also die leere Menge ist).

Für $n \in \mathbb{N}_0$ ist ein *n-Simplex* in $\mathbb{R}^n$ definiert als die konvexe Hülle von $n+1$ affin unabhängigen Punkten $v_0, v_1, \ldots, v_n$ (d.h. $v_1 - v_0, \ldots, v_n - v_0$ sind in $\mathbb{R}^n$ linear unabhängig).

Ein *konvexes Polyeder* K in $\mathbb{R}^n$ ist eine kompakte Menge, die Durchschnitt $\lambda_1^{-1}([0,\infty[) \cap \cdots \cap \lambda_m^{-1}([0,\infty[)$ endlich vieler Halbräume ist (mit linearen Abbildungen $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$). Dies ist genau dann der Fall, wenn K die konvexe Hülle einer endlichen Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ ist (wie man in der konvexen Geometrie zeigt, ggf. auch in der linearen Optimierung).

Lemma 12.5 *Es seien k sowie n natürliche Zahlen und Y ein topologischer Raum der Form $Y = X \cup_\phi \mathbb{D}_n$ mit einem topologischen Raum X und einer stetigen Abbildung $\phi \colon \mathbb{S}_{n-1} \to X$. Dann ist jede stetige Abbildung $f \colon I^k \to Y$ homotop relativ $f^{-1}(X)$ zu einer stetigen Abbildung $g \colon I^k \to Y$ derart, dass für ein n-Simplex $\Delta \subseteq \mathbb{D}_n^0$ das Urbild $g^{-1}(\Delta)$ eine (möglicherweise leere) Vereinigung von endlich vielen konvexen Polyedern ist auf denen f jeweils die Einschränkung einer affin-linearen surjektiven Abbildung $\mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ ist.*

Siehe Lemma 4.10 und dessen Beweis auf den Seiten 350–351 von Hatchers Buch.

Bemerkung 12.6 Hatcher identifiziert die offene n-Zelle mit $\mathbb{R}^n$ und betrachtet Δ als Simplex in $\mathbb{R}^n$. Man kann seinen Beweis aber wörtlich mit der offenen Kugel $3\mathbb{D}_n^0$ vom Radius 3 statt $\mathbb{R}^n$ durchführen (wenn wir von $\mathbb{D}_n^0$ zu dieser übergehen). Wir betrachten also Δ wörtlich als Simplex in der offenen Kugel $\mathbb{D}_n^0 \subseteq \mathbb{R}^n$.

13 Der Satz von Whitehead

Die Kernaussage des Satzes von Whitehead wurde schon erwähnt. Wir beweisen etwas mehr:

Satz 13.1 (Satz von Whitehead) *Es sei $f\colon X \to Y$ eine stetige Abbildung zwischen wegzusammenhängenden Zellenkomplexen derart, dass für ein $x_0 \in X$ und alle $k \in \mathbb{N}$*

$$f_*\colon \pi_k(X, x_0) \to \pi_k(Y, y_0)$$

ein Isomorphismus ist, mit $y_0 := f(x_0)$. Dann ist f eine Homotopieäquivalenz. Ist X ein Unterkomplex von Y und f die Inklusionsabbildung $X \to Y$, so ist X ein starker Deformationsretrakt von Y.

Der folgende Begriff ist nützlich.

Definition 13.2 Ein Raumpaar (X, A) wird 0-zusammenhängend genannt, wenn jede Wegkomponente von X ein Element aus A enthält, also jeder Punkt von X mit einem Punkt aus A durch einen Weg in X verbunden werden kann.

Im Beweis des Satzes nutzt das folgende Lemma, das wir anschließend beweisen:

Lemma 13.3 (Kompressionslemma) *Es seien (X, A) ein CW-Paar und (Y, B) ein Raumpaar mit $B \neq \emptyset$, welches 0-zusammenhängend ist. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ derart, dass es eine n-Zelle von X in $X \setminus A$ gibt, sei*

$$\pi_n(Y, B, y_0) = \{0\} \quad \text{für alle } y_0 \in B.$$

Dann ist jeder Morphismus $f\colon (X, A) \to (Y, B)$ homotop relativ A zu einer stetigen Abbildung $g\colon X \to Y$ mit $g(X) \subseteq B$.

Beweis von Satz 13.1. Zunächst sei Y ein wegzusammenhängender Zellenkomplex, X ein wegzusammenhängender Unterkomplex von Y und f die Inklusionsabbildung. In der langen exakten Homotopiesequenz ist per Voraussetzung dann

$$f_*\colon \pi_n(X, x_0) \to \pi_n(Y, x_0)$$

ein Isomorphismus für alle $n \in \mathbb{N}$, woraus $\pi_n(Y, X, x_0) = \{0\}$ folgt.[36] Die Voraussetzungen des Kompressionslemmas sind also erfüllt für die identische Abbildung

$$\mathrm{id}_Y \colon (Y, A) \to (Y, B)$$

mit $A := X$ und $B := X$. Somit ist id_Y homotop relativ X zu einer stetigen Abbildung $g \colon Y \to Y$ mit Bild $g(Y) \subseteq X$, also $r := g|^X \colon Y \to X$ eine starke Deformationsretraktion.

Im allgemeinen Fall ist f über zelluläre Approximation homotop zu einer stetigen Abbildung $g \colon X \to Y$, welche zellulär ist. Können wir zeigen, dass g eine Homotopieäquivalenz ist, so ist auch f eine solche. Wegen Satz 9.31 sind mit den f_* auch alle $g_* \colon \pi_k(X, x_0) \to \pi_k(Y, g(x_0))$ Isomorphismen. Wir dürfen daher annehmen, dass f zellulär ist. Nun ist Y ein starker Deformationsretrakt des Abbildungszylinders Z_f; es sei $r \colon Z_f \to Y$ die übliche starke Deformationsretraktion. Dann ist $f = r \circ h$ mit der Inklusionsabbildung $h \colon X \to Z_f$, also

$$[f] = [r]\,[h]$$

in der Homotopiekategorie [Top], wobei $[r]$ ein Isomorphismus ist. Also wird $[f]$ ein Isomorphismus (und somit f eine Homotopieäquivalenz) sein, wenn wir zeigen können, dass h eine Homotopieäquivalenz (und somit $[h]$ ein Isomorphismus) ist. Da die $f_* = r_* \circ h_*$ und die r_* Isomorphismen sind, ist auch $h_* \colon \pi_k(X, x_0) \to \pi_k(Z_f, h(x_0))$ ein Isomorphismus für alle $k \in \mathbb{N}$. Nach Lemma 13.4 können wir Z_f derart zu einem Zellenkomplex machen, dass X und Y Unterkomplexe werden und somit (Z_f, X) ein CW-Paar. Nach dem Spezialfall ist X ein starker Deformationsretrakt von Z_f, also h eine Homotopieäquivalenz und somit auch $f = r \circ h$, was dem Beweis beendet. $\square$

Beweis des Kompressionslemmas. Für $n \in \mathbb{N}_0$ sei X_n das n-Gerüst von X. Es seien $\Phi_{n,j} \colon D_{n,j} \to X$ für $j \in J_n$ die charakteristischen Abbildungen (wobei o.B.d.A. $D_{n,j} = \mathbb{D}_n$ für jedes $j \in J_n$), $e_{n,j} = \Phi_{n,j}(\mathbb{D}_n^0)$ und $J_n(A) := \{j \in J_n \colon e_{n,j} \subseteq A\}$. Weiter sei $X_{-1} := \emptyset$. Für jedes $n \in \mathbb{N}_0 \cup \{-1\}$ ist

$$A \cup X_n$$

[36]Da f_* nach $\pi_n(Y, x_0)$ ein Isomorphismus und somit surjektiv ist, ist die Abbildung nach $\pi_n(Y, X, x_0)$ die Nullabbildung. Da f_* als Abbildung nach $\pi_{n-1}(Y, x_0)$ bijektiv und somit injektiv ist, ist die verbindende Abbildung $\partial \colon \pi_n(Y, X, x_0) \to \pi_{n-1}(X, x_0)$ die Nullabbildung. Sie bildet also ganz $\pi_n(Y, X, x_0)$ auf $\{0\}$ ab und somit muss $\pi_n(Y, X, x_0)$ gleich dem Bild der Abbildung $\pi_n(Y, x_0) \to \pi_n(Y, X, x_0)$ sein. Da diese (wie schon gezeigt) die Nullabbildung ist, ist $\pi_n(Y, X, x_0) = \{0\}$.

eine abgeschlossene Teilmenge von X und ein Unterkomplex.

Sei $f_{-1} := f$. Wir behaupten, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine stetige Abbildung

$$f_n \colon X \to Y$$

mit

$$f_n(A \cup X_n) \subseteq B$$

existiert und eine Homotopie

$$F_n \colon [0,1] \times X \to Y$$

relativ $A \cup X_{n-1}$ von f_{n-1} nach f_n.

Wenn das stimmt, können wir den Beweis wie folgt zu Ende führen: Wir definieren $F \colon [0,1] \times X \to Y$ via

$$F(t,x) := \begin{cases} F_n(t,x) & \text{wenn } t \in [1 - \frac{1}{2^n}, 1 - \frac{1}{2^{n+1}}]; \\ f_n(x) & \text{wenn } x \in X_n \text{ und } t \geq \frac{1}{2^{n+1}}. \end{cases}$$

Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ ist F_n eine Homotopie relativ $A \cup X_{n-1}$, also

$$F_n(t,\cdot)|_{A \cup X_{n-1}} = F_n(0,\cdot)|_{A \cup X_{n-1}} = f_{n-1}|_{A \cup X_{n-1}}$$

für all $t \in [0,1]$ und insbesondere

$$f_n|_{A \cup X_{n-1}} = f_{n-1}|_{A \cup X_{n-1}} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}_0.$$

Daher ist F wohldefiniert. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist $F|_{[0,1] \times X_n}$ nach dem Klebelemma stetig und somit auch $F \circ (\mathrm{id}_{[0,1]} \times \Phi_{n,j})$ stetig für alle $j \in J_n$; folglich ist F stetig.

Beweis der Behauptung. Im Falle $n = 0$ gibt es für jedes $x \in X_0 \setminus A_0$ einen Weg $\gamma_x \colon [0,1]$ von x zu einem Element $\gamma_x(1)$ aus A, weil das Paar (X, A) als 0-zusammenhängend angenommen ist. Dann ist

$$H_0 \colon [0,1] \times (A \cup X_0) \to Y, \quad (t,x) \mapsto \begin{cases} f(x) & \text{wenn } x \in A; \\ f(\gamma_x(t)) & \text{wenn } x \in X_0 \setminus A \end{cases}$$

eine stetige Funktion und eine Homotopie relativ A von $f|_{A \cup X_0}$ zu einer Funktion $h_0 \colon A \cup X_0 \to Y$ mit Bild $h_0(A \cup X_0) \subseteq B$. Da $(X, A \cup X_0)$

nach Satz 8.27 die Homotopiefortsetzungseigenschaft besitzt, finden wir eine Homotopie

$$F_0\colon [0,1]\times X\to Y$$

von f zu einer stetigen Funktion $f_0\colon X\to Y$ derart, dass

$$F_0(0,\cdot)=f$$

und $F_0|_{[0,1]\times(A\cup X_0)}=H_0$, so dass also $f_0(A\cup X_0)=h_0(A\cup X_0)\subseteq B$ und F_0 wie H_0 eine Homotopie relativ A ist.

Induktionsschritt: Sei nun $n\in\mathbb{N}$ und seien $F_0,\ldots,F_{n-1}$ und $f_0,\ldots,f_{n-1}$ bereits konstruiert mit den genannten Eigenschaften. Für jedes $j\in J_n\backslash J_n(A)$ ist $f_{n-1}\circ\Phi_{n,j}$ eine stetige Abbildung $\mathbb{D}_n\to Y$ mit

$$(f_{n-1}\circ\Phi_{n,j})(\mathbb{S}_{n-1})\subseteq B,$$

da $\Phi_{n,j}(\mathbb{S}_{n-1})\subseteq X_{n-1}$. Sei $z_0\in\mathbb{S}_{n-1}$ und $y_{n,j}:=\Phi_{n,j}(z_0)$. Da $\pi_n(Y,B,y_{n,j})=\{0\}$ per Voraussetzung, ist $[f_{n-1}\circ\Phi_{n,j}]=[c_{y_{n,j}}]$ in $\pi_n(Y,B,y_{n,j})$. Nach dem Kompressionskriterium gibt es also eine Homotopie

$$G_{n,j}\colon [0,1]\times\mathbb{D}_n\to Y$$

relativ $\mathbb{S}_{n-1}$ von $f_{n-1}\circ\Phi_{n,j}$ zu einer stetigen Abbildung $g_{n,j}\colon\mathbb{D}_n\to Y$ mit Bild

$$g_{n,j}(\mathbb{D}_n)\subseteq B. \tag{47}$$

Da $G_{n,j}(t,x)=G_n(0,x)=f_{n-1}(\Phi_{n,j}(x))$ für alle $t\in[0,1]$ und $x\in\mathbb{S}_{n-1}$, ist

$$H_{n,j}\colon [0,1]\times\Phi_{n,j}(\mathbb{D}_n)\to Y,\quad (t,\Phi_{n,j}(x)):=H_{n,j}(t,x)$$

wohldefiniert und auch $H_n\colon [0,1]\times(A\cup X_n)\to Y$,

$$(t,x)\mapsto\begin{cases} f_{n-1}(x) & \text{wenn } x\in A\cup X_{n-1};\\ H_{n,j}(t,x) & \text{wenn } x\in\Phi_{n,j}(\mathbb{D}_n) \text{ für ein } j\in J_n\setminus J_n(A).\end{cases}$$

Dann ist $H_n(t,\Phi_{k,j}(x))=f_{n-1}(\Phi_{k,j}(x))$ stetig in $(t,x)\in[0,1]\times\mathbb{D}_k$ für alle $k\in\mathbb{N}_0$ und $j\in J_k(A)$; ebenso für alle $k\in\{0,\ldots,n-1\}$ und $j\in J_k$; und ebenfalls mit $k=n$ für alle $j\in J_n\setminus J_n(A)$, da dann

$$H_n(t,x)=H_{n,j}(t,\Phi_{n,j}(x))=G_{n,j}(t,x)\,.$$

Da die Topologie auf $[0,1] \times (A \cup X_n)$ final bezüglich den Abbildungen $\mathrm{id}_{[0,1]} \times \Phi_{k,j}$ ist mit (k,j) wie zuvor, ist H_n stetig. Per Konstruktion gilt

$$H_n(0,\cdot) = f_{n-1}|_{A \cup X_{n-1}}$$

und es ist H_n eine Homotopie relativ $A \cup X_{n-1}$ nach $h_n := H_n(1,\cdot)$. Es gilt $h_n(A \cup X_n) \subseteq B$, da

$$A \cup X_n = (A \cup X_{n-1}) \cup \bigcup_{j \in J_n \setminus J_n(A)} \Phi_{n,j}(\mathbb{D}_n);$$

auf der ersten Menge rechts stimmt h_n mit f_{n-1} überein, bildet diese also in B ab. Auf der zweiten Menge ist (47) anwendbar.

Da $(X, A \cup X_n)$ nach Satz 8.27 die Homotopiefortsetzungseigenschaft besitzt, finden wir eine Homotopie

$$F_n \colon [0,1] \times X \to Y$$

von f_{n-1} zu einer stetigen Funktion $f_n \colon X \to Y$ derart, dass

$$F_n|_{[0,1] \times (A \cup X_n)} = H_n\,.$$

Folglich ist $f_n(A \cup X_n) = H_n(\{1\} \times (A \cup X_n)) \subseteq B$ und F_n wie H_n eine Homotopie relativ $A \cup X_{n-1}$. □

Auch folgende Hilfsaussage wurde benutzt.

Lemma 13.4 *Es seien X und Y Zellenkomplexe und $f \colon X \to Y$ eine stetige Abbildung, welche zellulär ist. Dann ist auch der Abbildungszylinder Z_f ein Zellenkomplex. Die Zellen von Z_f können so gewählt werden, dass X und Y Unterkomplexe von Z_f sind.*

Beweis. Es seien $\lambda_1 \colon Y \to Y \sqcup ([0,1] \times X)$ und $\lambda_2 \colon [0,1] \times X \to Y \sqcup ([0,1] \times X)$ die kanonischen Abbildungen und

$$q \colon Y \sqcup ([0,1] \times X) \to Z_f$$

die kanonische Quotientenabbildung. Wir wissen, dass $q \circ \lambda_1 \colon Y \to Z_f$ eine topologische Einbettung ist und ebenso

$$h := q \circ \lambda_2(0,\cdot) \colon X \to Z_f.$$

Es seien $\Phi^X_{n,j}\colon \mathbb{D}_n \to X$ die charakteristischen Abbildungen des Zellenkomplexes X für $n \in \mathbb{N}_0$ und $j \in J^X_n$; wir definieren jeweils

$$\Psi^X_{n,j} := h \circ \Phi_{n,j}\colon \mathbb{D}_n \to Z_f\,.$$

Die charakteristischen Abbildungen für Y seien $\Phi^Y_{n,j}\colon \mathbb{D}_n \to Y$ für $n \in \mathbb{N}_0$ und $j \in J^Y_n$; wir definieren jeweils

$$\Psi^Y_{n,j} := q \circ \lambda_1 \circ \Phi^Y_{n,j}\colon \mathbb{D}_n \to Z_f\,.$$

Im Fall $n \in \mathbb{N}$ definieren wir zudem

$$\Theta_{n,j} := q \circ \lambda_2 \circ (\mathrm{id}_{[0,1]} \times \Phi^X_{n-1,j})\colon [0,1] \times \mathbb{D}_{n-1} \to Z_f$$

für alle $j \in J^X_{n-1}$. Wir zeigen nun, dass Z_f mit den charakteristischen Abbildungen $\Psi^X_{n,j}$, $\Psi^Y_{n,j}$ und $\Theta_{n,j}$ ein Zellenkomplex ist. Identifizieren wir X und Y mit abgeschlossenen Teilmengen von Z_f mit Hilfe der topologischen Einbettungen h bzw. $q \circ \lambda_1$, so gehen die Zellen $\Phi^X_{n,j}(\mathbb{D}^0_n)$ in die Zellen $\Psi^X_{n,j}(\mathbb{D}^0_n)$ bzw. die $\Phi^Y_{n,j}(\mathbb{D}^0_n)$ in die Zellen $\Psi^Y_{n,j}(\mathbb{D}^0_n)$. Es sind also X und Y Unterkomplexe von Z_f.

Wir prüfen nun die Voraussetzungen des Satzes 3.30 für Z_f nach. Zunächst wissen wir, dass Z_f Hausdorffsch ist (siehe Aufgabe 24).

Die Topologie $\mathcal{O}$ auf Z_f ist final bezüglich den Abbildungen $q \circ \lambda_1$ und $q \circ \lambda_2$, somit final bezüglich den Abbildungen

$$q \circ \lambda_1 \circ \Phi^Y_{n,j} = \Psi^Y_{n,j}$$

und

$$q \circ \lambda_2 \circ (\mathrm{id}_{[0,1]} \times \Phi^X_{n,j}) = \Theta_{n+1,j}\,.$$

Komponieren letzterer Abbildung mit der stetigen Abbildung $\mathbb{D}_n \to [0,1] \times \mathbb{D}_n$, $x \mapsto (1,x)$ liefert $\Psi^X_{n,j}$, d.h. $\mathcal{O}$ macht automatisch auch alle $\Psi^X_{n,j}$ stetig und ist somit final bezüglich den $\Psi^X_{n,j}$, $\Psi^Y_{n,j}$ und $\Theta_{n,j}$.

Da $\Phi^X_{n,j}|_{\mathbb{D}^0_n}$ und h topologische Einbettungen sind, ist $\Psi^X_{n,j}|_{\mathbb{D}^0} = h \circ \Phi^X_{n,j}|_{\mathbb{D}^0_n}$ eine topologische Einbettung; analog für $\Psi^Y_{n,j}|_{\mathbb{D}^0_n}$. Wegen Satz 2.29 (a) ist

$$q \circ \lambda_2|_{[0,1[\,\times X}$$

eine topologische Einbettung, also auch die Komposition $\Theta_{n,j}|_{]0,1[\,\times \mathbb{D}^0_{n-1}} = (q \circ \lambda_2)|_{]0,1[\,\times X} \circ (\mathrm{id}_{]0,1[} \times \Phi^X_{n-1,j}|_{\mathbb{D}^0_{n-1}})$.

Da man die Menge Z_f als die disjunkte Vereinigung von $]0,1] \times X$ und Y auffassen kann, ist Z_f die disjunkte Vereinigung der $\Psi^X_{n,j}(\mathbb{D}^0_n)$, $\Psi^Y_{n,j}(\mathbb{D}^0_n)$ und $\Theta_{n,j}(]0,1[\times\mathbb{D}^0_{n-1})$.

Für $n \in \mathbb{N}$ und $j \in J^X_n$ ist $\Phi^X_{n,j}(\partial\mathbb{D}_n)$ in der Vereinigung von endlich vielen $\Phi^X_{k,i}(\mathbb{D}^0_k)$ enthalten mit $k < n$, folglich $\Psi^X_{n,j}(\partial\mathbb{D}_n)$ in der Vereinigung der entsprechenden $\Psi^X_{k,i}(\mathbb{D}^0_k)$. Analog für die $\Psi^Y_n(\partial\mathbb{D}_n)$.

Ist $n \in \mathbb{N}$ und $j \in J^X_{n-1}$, so ist

$$\partial([0,1] \times \mathbb{D}_{n-1}) = (\{0\} \times \mathbb{D}_{n-1}) \cup (\{1\} \times \mathbb{D}_{n-1}) \cup (]0,1[\times\partial\mathbb{D}_{n-1})\,.$$

$\Theta_{n,j}$ bildet die zweite der rechten Mengen auf $\Phi^X_{n-1,j}(\mathbb{D}_{n-1}) = \Phi^X_{n-1,j}(\mathbb{D}^0_{n-1}) \cup \Phi^X_{n-1,j}(\partial\mathbb{D}_{n-1})$ ab, wie schon diskutiert. Die erste Menge wird auf das Bild von

$$f(\Phi^X_{n-1,j}(\mathbb{D}_{n-1}))$$

unter $q \circ \lambda_1$ abgebildet, eine kompakte Teilmenge von Y, die wegen der Zellularität von f im $n-1$-Gerüst Y_n enthalten ist, folglich enthalten in einer endlichen Vereinigung von Zellen der Form $\Phi^Y_{k,i}(\mathbb{D}^0_k)$ mit $k < n$; das Bild ist dann Vereinigung der entsprechenden $\Psi^Y_{k,i}(\mathbb{D}^0_k)$. Schließlich ist $\Phi^X_{n-1,j}(\partial\mathbb{D}_{n-1})$ in einer endlichen Vereinigung von Mengen der Form $\Phi^X_{k,i}(\mathbb{D}^0_k)$ enthalten mit $k < n-1$ und $i \in J^X_k$, folglich $\Theta_{n,j}(]0,1[\times\partial\mathbb{D}_{n-1})$ in der entsprechenden Vereinigung der Mengen $\Theta_{k+1,i}(]0,1[\times\mathbb{D}^0_k)$. $\square$

14 Faserbündel und Serre-Faserungen

Es sei F ein topologischer Raum und $q\colon E \to B$ ein Faserbündel mit typischer Faser F, wie in Definition 10.5. Im Folgenden nehmen wir stets an, dass $F \neq \emptyset$ und $B \neq \emptyset$. Nachdem wir ein $b_0 \in B$ gewählt haben, dürfen wir ohne Einschränkung

$$F = q^{-1}(\{b_0\})$$

annehmen (da F für jedes $b \in B$ zur Faser $q^{-1}(\{b\})$ homöomoph ist). Wählen wir ein $x_0 \in F$, so ist also

$$q(x_0) = b_0\,.$$

Wir können q nun auffassen als einen Morphismus

$$(E, F, x_0) \to (B, \{b_0\}, b_0)$$

und erhalten somit für jedes $k \in \mathbb{N}$ eine Abbildung

$$q_*\colon \pi_k(E, F, x_0) \to \pi_k(B, \{x_0\}, x_0) = \pi_k(B, x_0),$$

die im Falle $k \geq 2$ ein Gruppen-Homomorphismus ist. Im Laufe des Kapitels beweisen wir das folgende Hilfsresultat:

Lemma 14.1 *Für jedes $k \in \mathbb{N}$ ist*

$$q_*\colon \pi_k(E, F, x_0) \to \pi_k(B, b_0)$$

bijektiv, somit für alle $k \geq 2$ ein Gruppen-Isomorphismus.

14.2 Wir betrachten nun die lange exakte Homotopiesequenz

$$\cdots \to \pi_k(F, x_0) \xrightarrow{i_*} \pi_k(E, x_0) \xrightarrow{j_*} \pi_k(E, F, x_0) \xrightarrow{\partial} \pi_{k-1}(F, x_0) \to \cdots \to \pi_0(E, x_0)$$

mit den Inklusionsabbildungen $i\colon (F, x_0) \to (E, x_0)$ und

$$j\colon (E, \{x_0\}, x_0) \to (E, F, x_0)$$

sowie den verbindenen Abbildungen $\partial\colon \pi_k(E, F, x_0) \to \pi_{k-1}(F, x_0)$.

Da die Abbildungen q_* in Lemma 14.1 bijektiv sind, folgern wir sofort:

Satz 14.3 (Lange exakte Homotopiesequenz für Faserbündel)

$$\cdots \to \pi_k(F,x_0) \xrightarrow{i_*} \pi_k(E,x_0) \xrightarrow{q_*\circ j_*} \pi_k(B,b_0) \xrightarrow{\partial\circ(q_*)^{-1}} \pi_{k-1}(F,x_0) \to \cdots \to \pi_0(E,x_0)$$

ist exakt.

Bemerkung 14.4 Ist B wegzusammenhängend, werden wir die Sequenz sogar noch nach rechts um eine Abbildung verlängern können bei Erhaltung der Exaktheit, und zwar

$$\pi_0(E,x_0) \to \{0\}\,.$$

Bemerkung 14.5 Es ist $q_*\circ j_* = (q\circ j)_*\colon \pi_k(E,x_0) \to \pi_k(B,b_0)$ ein Gruppen-Homomorphismus für alle $k \geq 1$. Für diesen könnte man einfach wieder q_* schreiben, wenn wir q auffassen als Morphismus

$$q\colon (E,x_0) \to (B,b_0)\,.$$

In Definition 6.12 haben wir die Homotopie-Hochhebungseigenschaft einer stetigen Abbildung $q\colon X \to Y$ definiert für einen topologischen Raum Z.

Definition 14.6 Eine stetige Abbildung $q\colon E \to B$ zwischen topologischen Räumen wird eine *Serre-Faserung* genannt, wenn sie die Homotopie-Hochhebungseigenschaft besitzt für I^n für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

Satz 14.7 *Jedes Faserbündel $q\colon E \to B$ ist eine Serre-Faserung.*

Beweis. Der topologische Raum F sei die typische Faser von q. Es sei $n \in \mathbb{N}_0$, $H\colon [0,1] \times I^n \to B$ eine stetige Abbildung und $g\colon [0,1] \to E$ eine stetige Abbildung derart, dass

$$q \circ g = H(0,\cdot)\,.$$

Für jedes $s \in I^{n+1}$ gibt es eine offene Umgebung U_s von $H(s)$ in B derart, dass auf $q^{-1}(U_s)$ ein lokale Trivialisierung des Faserbündels definiert ist. Es sei $\delta > 0$ eine Lebesguesche Zahl der offenen Überdeckung $(H^{-1}(U_s))_{s\in I^{n+1}}$ von I^{n+1} bezüglich der zur Maximum-Norm auf $\mathbb{R}^{n+1}$ gehörigen Metrik. Wir wählen $m \in \mathbb{N}$ so groß, dass $\frac{1}{m} < \delta$. Für $j = (j_1,\ldots,j_{n+1}) \in \{0,\ldots,m-1\}^{n+1}$ ist dann

$$Q_j := \prod_{i=1}^{n+1} \left[\frac{j_i}{m}, \frac{j_i}{m} + \frac{1}{m}\right]$$

in einer der offenen Mengen der Überdeckung enthalten, etwa in $H^{-1}(V_j)$ mit $V_j := U_s$ für ein geeignetes $s \in I^{n+1}$. Es sei

$$\theta_j \colon q^{-1}(V_j) \to V_j \times F$$

eine zugehörige lokale Trivialisierung von q. Wir ordnen die Indizes $j \in \{0, \ldots, m-1\}^{n+1}$ lexikographisch und setzen

$$P_j := (\{0\} \times I^n) \cup \bigcup_{j'<j} Q_{j'}\,.$$

Wir zeigen nun, dass für jedes j ein Lift

$$H_j \colon P_j \cup Q_j \to E$$

von $H|_{P_j \cup Q_j}$ existiert mit $H_j(0, \cdot) = g$. Da $P_j \cup Q_j = I^{n+1}$ im Falle $j = (m-1, \ldots, m-1)$, folgt dann der Satz.

Sei $j \in \{0, \ldots, m-1\}^n$ und sei $H_{j'}$ schon konstruiert für alle $j' < j$ (wobei die Menge dieser j' im Fall $j = (0, \ldots, 0)$ leer ist, also noch nichts konstruiert sein muss). Aufgrund der lexikographischen Ordnung ist dann

$$P_j \cap Q_j$$

eine Menge der Form F_Φ wie in Definition 8.11 und Satz 8.12, mit $n+1$ an Stelle von n (wenn wir Q_j mit I^{n+1} identifizieren). Es ist also $P_j \cap Q_j$ ein Retrakt von Q_j und folglich hat das Paar $(Q_j, P_j \cap Q_j)$ die Abbildungs-Fortsetzungseigenschaft, nach Satz 8.18. Gibt es einen j' mit $j' < j$, so wählen wir diesen maximal; unter Benutzung der Projektion

$$\mathrm{pr}_2 \colon q^{-1}(V_j) \times F \to F$$

auf die zweite Komponente ist dann

$$\mathrm{pr}_2 \circ \theta_j \circ H_{j'}|_{P_j \cap Q_j} \colon P_j \cap Q_j \to F$$

eine stetige Abbildung, die nach dem Vorigen eine stetige Fortsetzung $h_j \colon Q_j \to F$ besitzt. Dann ist

$$H_j \colon P_j \cup Q_j \to E, \quad s \mapsto \begin{cases} H_{j'}(s) & \text{wenn } s \in P_j; \\ \theta_j^{-1}(H(s), h_j(s)) & \text{wenn } s \in Q_j \end{cases}$$

wohldefiniert und nach dem Klebelemma stetig; zudem ist H_j ein Lift von $H|_{P_j \cup Q_j}$ über q. Im Falle $j = (0, \ldots, 0)$ hat entsprechend

$$P_j \cap Q_j \to F, \quad (0, s) \mapsto \mathrm{pr}_2(\theta_j(g(s)))$$

eine stetige Fortsetzung $h_j \colon Q_j \to F$ und wir können H_j wie zuvor definieren mit $g(t)$ an Stelle von $H_{j'}(s)$ wenn $s = (0, t) \in \{0\} \times I^n = P_0$. □

Die folgenden Begriffe sind hilfreich.

Definition 14.8 Es sei $q \colon E \to B$ eine stetige Abbildung zwischen topologischen Räumen.

(a) Man sagt, dass q die *Hochhebungs-Fortsetzungseigenschaft* besitzt für ein Raumpaar (X, A), wenn für jede stetige Abbbildung $f \colon X \to B$ und jeden Lift $g \colon A \to E$ von $f|_A$ über q ein Lift $h \colon X \to E$ von f über q existiert mit $h|_A = g$.

(b) Man sagt, dass q die Homotopie-Hochhebungseigenschaft besitzt für ein Raumpaar (X, A), wenn für jede Homotopie $H \colon [0, 1] \times X \to B$, jede stetige Abbildung $g \colon X \to E$ mit $q \circ g = H(0, \cdot)$ und jede Homotopie $G \colon [0, 1] \times A \to E$ mit $G(0, \cdot) = g|_A$ und $q \circ G = H|_{[0,1]\times A}$ ein Lift $F \colon [0, 1] \times X \to E$ von H existiert derart, dass $F(0, \cdot) = g$ und $F|_{[0,1]\times A} = G$.

Bemerkung 14.9 (a) Die Homotopie-Hochhebungseigenschaft von q für einen topologischen Raum Z ist dann also genau die Hochhebungs-Fortsetzungseigenschaft für das Raumpaar $([0, 1] \times Z, \{0\} \times Z)$.

(b) Die Homotopie-Hochhebungseigenschaft von q für ein Raumpaar (X, A) ist genau die Hochhebungs-Fortsetzungseigenschaft für das Raumpaar $([0, 1] \times X,\ (\{0\} \times X) \cup ([0, 1] \times A))$.

Lemma 14.10 *Es sei $q \colon E \to B$ eine stetige Abbildung zwischen topologischen Räumen und $n \in \mathbb{N}_0$. Genau dann hat q die Homotopie-Hochhebungseigenschaft für I^n, wenn q die Homotopie-Hochhebungseigenschaft hat für das Raumpaar $(I^n, \partial I^n)$, also die Hochhebungs-Fortsetzungseigenschaft für $J_n = (\{0\} \times I^n) \cup ([0, 1] \times \partial I^n)$.*

Beweis. Nach Bemerkung 14.9 ist die erste Eigenschaft äquivalent zur Hochhebungs-Fortsetzungseigenschaft für das Raumpaar $([0,1]\times I^n, \{0\}\times I^n)$, die zweite Eigenschaft äquivalent zur Hochhebungs-Fortsetzungseigenschaft für das Raumpaar $([0,1]\times I^n, (\{0\}\times I^n)\cup([0,1]\times\partial I^n))$. Beide Fortsetzungseigenschaften sind zueinander äquivalent, weil es einen Homömorphismus

$$[0,1]\times I^n \to [0,1]\times I^n$$

gibt, der $(\{0\}\times I^n)\cup([0,1]\times\partial I^n)$ auf $\{0\}\times I^n$ abbildet (vgl. Folgerung 8.9).
□

14.11 Für den Rest des Kapitels sei $q\colon E\to B$ eine Serre-Faserung mit $E\neq\emptyset$ and $B\neq\emptyset$. Es sei

$$b_0\in B,\quad F := q^{-1}(\{b_0\})\quad \text{und}\quad x_0\in F\,.$$

Wir fassen q auf als Morphismus $(E,F,x_0)\to(B,\{b_0\},b_0)$ und erhalten somit für jedes $k\in\mathbb{N}$ eine Abbildung

$$q_*\colon \pi_k(E,F,x_0)\to\pi_k(B,\{x_0\},x_0)=\pi_k(B,x_0),$$

die im Falle $k\geq 2$ ein Gruppen-Homomorphismus ist.

Wir beweisen nun das folgende Lemma, welches wegen Satz 14.7 das Lemma 14.1 als Spezialfall beinhaltet.

Lemma 14.12 *Für jedes $k\in\mathbb{N}$ ist*

$$q_*\colon \pi_k(E,F,x_0)\to\pi_k(B,b_0)$$

bijektiv, somit für alle $k\geq 2$ ein Gruppen-Isomorphismus.

Beweis. q_* *ist surjektiv*: Wir betrachten einen Morphismus $\gamma\colon(I^k,\partial I^k)\to(B,b_0)$. Die konstante Abbildung $J_{k-1}\to E$, $s\mapsto x_0$ ist ein Lift für $\gamma|_{J_{k-1}}$. Da q nach Lemma 14.10 die Hochhebungs-Fortsetzungseigenschaft für das Raumpaar (I^k,J_{k-1}) hat, existiert ein Lift $\eta\colon I^k\to E$ von γ über q derart, dass $\eta|_{J_{k-1}}$ konstant x_0 ist. Wegen $(q\circ\eta)(\partial I^k)=\gamma(\partial I^k)\subseteq\{b_0\}$ ist $\eta(\partial I^k)\subseteq q^{-1}(\{b_0\})=F$. Also ist η ein Morphismus

$$(I^k,\partial I^k,J_{k-1})\to(E,F,x_0)$$

und definiert somit ein Element $[\eta] \in \pi_k(E,F,x_0)$. Per Konstruktion ist $q_*([\eta]) = [q \circ \eta]) = [\gamma]$.

q_* ist injektiv: Es seien $\eta_j\colon (I^k, \partial I^k, J_{k-1}) \to (E,F,x_0)$ Morphismen für $j \in \{1,2\}$ derart, dass $q_*([\eta_1]) = q_*([\eta_2])$ in $\pi_k(B,b_0)$. Dann gibt es also eine Homotopie $H\colon [0,1]\times I^k \to B$ relativ ∂I^k von $q\circ\eta_1$ nach $q\circ\eta_2$. Die Abbildung $G\colon (\{0,1\}\times I^k)\cup([0,1]\times J_{k-1}) \to E$,

$$(t,s) \mapsto \begin{cases} \eta_1(s) & \text{wenn } t=0; \\ \eta_2(s) & \text{wenn } t=1; \\ x_0 & \text{wenn } s \in J_{k-1} \end{cases}$$

ist wohldefiniert, stetig nach dem Klebelemma und eine Hochhebung von $H|_{(\{0,1\}\times I^k)\cup([0,1]\times J_{k-1})}$. Der Definitionsbereich ist gleich J_k. Da die Abbildung q die Hochhebungs-Fortsetzungseigenschaft für (I^{k-1}, J_k) hat, existiert eine Hochhebung $K\colon [0,1]\times I^k \to E$ für H mit $K|_{J_k} = G$. Wegen

$$q(K([0,1]\times\partial I^k)) = H([0,1]\times\partial I^k) = \{b_0\}$$

ist $K([0,1]\times\partial I^k) \subseteq F$, also K eine Homotopie von η_1 nach η_2 mit Morphismen $K(t,\cdot)\colon (I^k,\partial I^k, J_{k-1}) \to (E,F,x_0)$ für alle $t\in[0,1]$. Folglich ist $[\eta_1] = [\eta_2]$ in $\pi_k(E,F,x_0)$. □

Wir betrachten nun die lange exakte Homotopiesequenz wie in 14.2. Aus Lemma 14.12 folgt sofort die erste Aussage des folgenden Satzes (welche Satz 14.3 verallgemeinert).

Satz 14.13 (Lange exakte Homotopiesequenz für Serre-Faserungen) *Es sei $q\colon E\to B$ eine Serre-Faserungen. Mit Notationen wie in* 14.11 *und* 14.2 *ist dann die Sequenz*

$$\cdots \to \pi_k(F,x_0) \overset{i_*}{\to} \pi_k(E,x_0) \overset{q_*\circ j_*}{\to} \pi_k(B,b_0) \overset{\partial\circ(q_*)^{-1}}{\to} \pi_{k-1}(F,x_0) \to \cdots \to \pi_0(E,x_0)$$

exakt. Ist B wegzusammenhängend, so kann die Sequenz bei Erhaltung der Exaktheit noch verlängert werden um die Abbildung

$$\pi_0(E,x_0) \to \{0\}\,.$$

Beweis. Nur die letzte Aussage bleibt zu zeigen, wenn B wegzusammenhängend ist. Wir haben also zu zeigen, dass

$$i_*\colon \pi_0(F,x_0) \to \pi_0(E,x_0)$$

surjektiv ist. Sei also $[\gamma] \in \pi_0(E, x_0)$ mit $\gamma\colon (\mathbb{S}_0, 1) \to (E, x_0)$. Da B wegzusammenhängend ist, gibt es einen Weg $\theta\colon [0,1] \to B$ in B von $q(\gamma(-1))$ nach b_0. Es sei $\eta\colon [0,1] \to E$ ein Lift für θ über q, welcher in $\gamma(-1)$ startet; ein solcher Lift existiert, da q die Homotopie-Hochhebungseigenschaft für $I^0 = \{0\}$ besitzt. Dann ist $\eta(1) \in F$. Definieren wir $\kappa\colon \mathbb{S}_0 \to F$ via $\kappa(-1) := \eta(1)$ und $\kappa(1) := x_0$, so ist $i \circ \kappa \simeq \gamma$ relativ $\{1\}$ mit der Homotopie $(t, 1) \mapsto x_0$, $(t, -1) \mapsto \eta(t))$; es ist also $i_*([\kappa]) = [\gamma]$. $\square$

15 Der Freudenthalsche Einhängungssatz

Für $n \in \mathbb{N}$ sei

$$\mathbb{S}_n^+ := \mathbb{S}_n \cap (\mathbb{R}^{n-1} \times [0, \infty[)$$

die obere Halbsphäre und $\mathbb{S}_n^- := \mathbb{S}_n \cap (\mathbb{R}^{n-1} \times]-\infty, 0])$ die untere Halbsphäre. Dann ist

$$\mathbb{S}_n = \mathbb{S}_{n+1}^+ \cap \mathbb{S}_{n+1}^-$$

der Äquator von $\mathbb{S}_{n+1}$. Sei $x_0 \in \mathbb{S}_n$. Wir betrachten die Inklusionsabbildung

$$j\colon (\mathbb{S}_{n+1}, \{x_0\}, x_0) \to (\mathbb{S}_{n+1}, \mathbb{S}_{n+1}^-, x_0)$$

und die Inklusionsabbildung

$$\lambda\colon (\mathbb{S}_{n+1}^+, \mathbb{S}_n) \to (\mathbb{S}_{n+1}, \mathbb{S}_{n+1}^-)\,.$$

Lemma 15.1 *Für jedes $k \in \mathbb{N}$ gilt:*

(a) *Die Abbildung $j_*\colon \pi_k(\mathbb{S}_{n+1}, x_0) \to \pi_k(\mathbb{S}_{n+1}, \mathbb{S}_{n+1}^-, x_0)$ ist eine Bijektion (für $k \geq 2$ also ein Isomorphismus).*

(b) *Die Abbildung $\partial\colon \pi_k(\mathbb{S}_{n+1}^+, \mathbb{S}_n, x_0) \to \pi_{k+1}(\mathbb{S}_n, x_0)$, $[\gamma] \mapsto [\gamma|_{I^{k-1}}^{\mathbb{S}_n}]$ ist eine Bijektion (für $k \geq 2$ also ein Isomorphismus).*

(c) *Für $k < 2n$ ist*

$$\lambda_*\colon \pi_k(\mathbb{S}_{n+1}^+, \mathbb{S}_n, x_0) \to \pi_k(\mathbb{S}_{n+1}, \mathbb{S}_{n+1}^-, x_0)$$

eine Bijektion, für $k = 2n$ surjektiv.

Der Beweis von (c) ist schwierig und kann im Anhang (und Hatcher) nachgelesen werden. Die Teile (a) und (b) beweisen wir am Ende des Kapitels.

15.2 Für $k \in \mathbb{N}$ betrachten wir nun die Komposition $\phi\colon \pi_k(\mathbb{S}_n, x_0) \to \pi_{k+1}(\mathbb{S}_{n+1}, x_0)$ der Gruppen-Homomorphismen

$$\pi_k(\mathbb{S}_n, x_0) \overset{\partial^{-1}}{\to} \pi_{k+1}(\mathbb{S}_{n+1}^+, \mathbb{S}_n, x_0) \overset{\lambda_*}{\to} \pi_{k+1}(\mathbb{S}_{n+1}, \mathbb{S}_n^-, x_0) \overset{(j_*)^{-1}}{\to} \pi_{k+1}(\mathbb{S}_{n+1}, x_0).$$

Als Komposition von Gruppen-Homomorphismen ist auch ϕ ein Gruppen-Homomorphismus.

Mit Lemma 15.1 (c) erhalten wir:

Satz 15.3 (Freudenthalscher Einhängungssatz) *Für alle $k \in \mathbb{N}$ mit $k < 2n-1$ ist*

$$\phi\colon \pi_k(\mathbb{S}_n, x_0) \to \pi_{k+1}(\mathbb{S}_{n+1}, x_0)$$

ein Gruppen-Isomorphismus; für $k = 2n-1$ ist ϕ ein surjektiver Gruppen-Homomorphismus. $\square$

Beweis der Teile (a) und (b) von Lemma 15.1. Über die Projektion $(s_1, \ldots, s_{n+2}) \mapsto (s_1, \ldots, s_{n+1})$ sind $\mathbb{S}^+_{n+1}$ und $\mathbb{S}^-_{n+1}$ zu $\mathbb{D}_n$ homöomorph, also kontrahierbar.

(a) Für jedes $k \in \mathbb{N}$ können wir folgenden Teil der langen exakten Homotopiesequenz des Raumpaars $(\mathbb{S}_{n+1}, \mathbb{S}^-_{n+1})$ betrachten:

$$\underbrace{\pi_k(\mathbb{S}^-_{n+1}, x_0)}_{=\{0\}} \to \pi_k(\mathbb{S}_{n+1}, x_0) \xrightarrow{j_*} \pi_k(\mathbb{S}_{n+1}, \mathbb{S}^-_{n+1}, x_0) \xrightarrow{\partial} \underbrace{\pi_{k-1}(\mathbb{S}^-_{n+1}, x_0)}_{=\{0\}}.$$

Somit ist j_* surjektiv. Im Falle $k \geq 2$ ist j_* ein Gruppen-Homomorphismus und dieser ist injektiv (und somit ein Isomorphismus), da sein Kern trivial ist. Im Falle $k = 1$ ist $\pi_1(\mathbb{S}_{n+1}, x_0) = \{0\}$, so dass wegen der Surjektivität von j_* auch $\pi_1(\mathbb{S}_{n+1}, \mathbb{S}^-_{n+1}, x_0) = \{0\}$ sein muss und folglich $j_*\colon \{0\} \to \{0\}$ eine Bijektion ist.

(b) Nun betrachten wir für das Raumpaar $(\mathbb{S}^+_{n+1}, \mathbb{S}_n)$ folgenden Teil der langen exakten Homotopiesequenz:

$$\underbrace{\pi_k(\mathbb{S}^+_{n+1}, x_0)}_{=\{0\}} \xrightarrow{\ell_*} \pi_k(\mathbb{S}^+_{n+1}, \mathbb{S}_n, x_0) \xrightarrow{\partial} \pi_{k-1}(\mathbb{S}_n, x_0) \to \underbrace{\pi_{k-1}(\mathbb{S}^+_{n+1}, x_0)}_{=\{0\}}$$

mit der Inklusionsabbildung $\ell\colon (\mathbb{S}^+_{n+1}, \{x_0\}, x_0) \to (\mathbb{S}^+_{n+1}, \mathbb{S}_n, x_0)$. Somit ist ∂ surjektiv. Im Falle $k \geq 2$ ist ∂ ein Gruppen-Homomorphismus und dieser ist injektiv (und somit ein Isomorphismus), da sein Kern trivial ist. Im Falle $k = 1$ ist $\pi_0(\mathbb{S}_n, x_0) = \{0\}$ und folglich

$$\pi_1(\mathbb{S}^+_{n+1}, \mathbb{S}_n, x_0) = \partial^{-1}(\{0\}) = \mathrm{im}(\ell_*) = \{0\};$$

es ist ∂ dann also die bijektive Abbildung $\{0\} \to \{0\}$. $\square$

15.4 Für $x_0 \in \mathbb{S}_0$ betrachten wir im folgenden Satz $\pi_k(\mathbb{S}_n, x_0)$ für alle $k \in \mathbb{N}$ als Mengen von Homotopieklassen von Morphismen $(\mathbb{S}_k, x_0) \to (\mathbb{S}_n, x_0)$ wie in Bemerkung 9.20 mit $z_0 := x_0$ (vergleiche 9.14 bis Bemerkung 9.19). Für $k, n \in \mathbb{N}_0$ identifizieren wir die Einhängungen $S(\mathbb{S}_k)$ und $S(\mathbb{S}_n)$ mit $\mathbb{S}_{k+1}$ bzw. $\mathbb{S}_{n+1}$ wie in (44).

Im Anhang zeigen wir den folgenden Satz.

Satz 15.5 *Für alle* $k, n \in \mathbb{N}$ *ist der Gruppen-Homomorphismus*

$$\phi\colon \pi_k(\mathbb{S}_n, x_0) \to \pi_{k+1}(\mathbb{S}_{n+1}, x_0)$$

aus 15.2 *gegeben durch* $\phi([\gamma]) = [S(\gamma)]$. $\square$

Der obige Homomorphismus ϕ ist also der sogenannte *Einhängungshomomorphismus*, welcher $[\gamma]$ die Homotopieklasse der Einhängung $S(\gamma)$ von γ zuordnet (wie in 15.4).

Anhang zu Kapitel 15: Weitere Beweise*

In diesem Anhang erläutern wir, wie Lemma 15.1 (c) bewiesen werden kann (wobei für die letzten Beweisschritte auf Hatchers Buch verwiesen wird). Wir erläutern auch, wie Satz 15.5 bewiesen werden kann. Beides ist recht technisch und die Diskussionen sind nicht prüfungsrelevant.

Mehr zu Lemma 15.1 (c)

Wir beginnen mit einer Vorüberlegung.

Lemma 15.6 *Es sei (X, A) ein Raumpaar, $B \subseteq A$ ein starker Deformationsretrakt von A und $x_0 \in B$. Betrachten wir die identische Abbildung $i = \mathrm{id}_X$ als Morphismus $(X, B, x_0) \to (X, A, x_0)$, so ist für jedes $k \in \mathbb{N}$ die Abbildung*

$$i_*\colon \pi_k(X, B, x_0) \to \pi_k(X, A, x_0)$$

surjektiv.

Beweis. Es sei $j\colon B \to A$ die Inklusionsabbildung und $F\colon [0,1] \times A \to A$ eine Homotopie relativ B von id_A nach $j \circ r$ mit einer Retraktion $r\colon A \to B$. Wir betrachten einen Morphismus von Raumtripeln $\gamma\colon (I^k, \partial I^k, J_{k-1}) \to (X, A, x_0)$. Dann ist $[\gamma] = [\overline{\gamma}]$ in $\pi_k(X, A, x_0)$ mit

$$\overline{\gamma}\colon I^k = I^{k-1} \times I \to X, \quad (s, \tau) \mapsto \begin{cases} \gamma(s, 2\tau - 1) & \text{wenn } \tau \in [\frac{1}{2}, 1]; \\ \gamma(s, 0) & \text{wenn } \tau \in [0, \frac{1}{2}] \end{cases}$$

(eine mögliche Homotopie verbreitert den (s, τ)-Bereich ohne τ-Abhängigkiet kontinuierlich von $\tau \in [0, 0]$ auf $\tau \in [0, \frac{1}{2}]$). Die Abbildung

$$H\colon I \times I^{k-1} \times I \to X, \quad H(t, s, \tau) := \begin{cases} \overline{\gamma}(s, \tau) & \text{wenn } \tau \in [\frac{1}{2}, 1]; \\ F(t(1 - 2\tau), \gamma(s, 0)) & \text{wenn } \tau \in [0, \frac{1}{2}] \end{cases}$$

ist eine Homotopie von $\overline{\gamma}$ nach η für einen Morphismus $\eta\colon (I^k, \partial I^k, J_{k-1}) \to (X, B, x_0)$ derart, dass jedes $H(t, \cdot)$ ein Morphismus $(I^k, \partial I^k, J_{k-1}) \to (X, A, x_0)$ ist. Es ist also $[\gamma] = [\overline{\gamma}] = [j \circ \eta] = j_*([\eta])$ in $\pi_k(X, A, x_0)$. □

15.7 Wir kürzen ab $X := \mathbb{S}_{n+1}$, $A := \mathbb{S}_n$, $B := \mathbb{S}^+_{n+1}$ und $C := \mathbb{S}^-_{n+1}$. Zum Beweis der Surjektivität von

$$\lambda_*\colon \pi_k(A, C, x_0) \to \pi_k(X, B, x_0)$$

sei $\gamma\colon (I^k, \partial I^k, J_{k-1}) \to (X, B, x_0)$ ein Morphismus von Raumtripeln. Nach zweimaliger Anwendung von Lemma 12.5 dürfen wir nach Übergang zu einem anderen Vertreter der Homotopieklasse $[\gamma] \in \pi_{k+1}(X, B, x_0)$ annehmen, dass bei fester Identifizierung der Inneren A^0 und B^0 mit $\mathbb{D}^0_{n+1}$ jeweils ein $(n+1)$-Simplex $\Delta_+ \subseteq A^0$ und ein $(n+1)$-Simplex $\Delta_- \subseteq B^0$ existiert derart, dass $\gamma^{-1}(\Delta_+)$ und $\gamma^{-1}(\Delta_-)$ eine endliche Vereinigung konvexer Polytope ist, auf welchen γ jeweils Einschränkung einer surjektiven affin-linearen Abbildung von $\mathbb{R}^k$ nach $\mathbb{R}^{n+1}$ ist. Für alle $p \in \Delta_+$ und $q \in \Delta_-$ haben wir ein kommutatives Diagramm mit induzierten Abbildungen der jeweiligen Inklusionsabbildungen:

$$\begin{array}{ccc} \pi_k(A, C, x_0) & \to & \pi_k(X, B, x_0) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \pi_k(X \setminus \{q\}, X \setminus \{p, q\}, x_0) & \to & \pi_k(X, X \setminus \{p\}, x_0). \end{array}$$

Expliziter sei $i\colon A \to X$ die Inklusionsabbildung; wir können diese als Morphismus von Raumtripeln $i\colon (A, C, x_0) \to (X \setminus \{q\}, X \setminus \{p, q\}, x_0)$ betrachten. Ebenso können wir die identische Abbildung $j\colon X \to X$ als Morphismus von Raumtripeln $j\colon (X, B, x_0) \to (X, X \setminus \{p\}, x_0)$ betrachten. Die vertikalen Abbildungen im vorigen Diagramm sind die induzierten Abbildungen

$$i_*\colon \pi_k(A, C, x_0) \to \pi_k(X \setminus \{q\}, X \setminus \{p, q\}, x_0) \tag{48}$$

und

$$j_*\colon \pi_k(X, B, x_0) \to \pi_k(X, X \setminus \{p\}, x_0). \tag{49}$$

Wir rechnen nach:

Lemma 15.8 *Die Abbildung i_* in* (48) *ist surjektiv. Die Abbildung j_* in* (49) *ist injektiv.*

Beweis. *Surjektivität von i_*.* Es ist C ein starker Deformationsretrakt von $B\setminus\{q\}$; es gibt somit eine Homotopie $F\colon [0,1] \times (B\setminus\{q\}) \to B\setminus\{q\}$ von $\mathrm{id}_{B\setminus\{q\}}$ zur Komposition $B \setminus \{q\} \xrightarrow{R} C \to B \setminus \{q\}$ der Inklusionsabbildung mit einer Retraktion R. Setzen wir $r(x) := R(x)$ für $x \in B \setminus \{q\}$, $r(x) := x$ für $x \in A$, so erhalten wir eine wohldefinierte Retraktion $r\colon X \setminus \{q\} \to A$. Diese ist eine starke Deformationsretraktion, denn F lässt sich durch $F(t, x) := x$ für $x \in A$ fortsetzen zu einer gleichnamigen Homotopie $[0,1] \times (X \setminus \{q\}) \to X \setminus \{q\}$ von $\mathrm{id}_{X\setminus\{q\}}$ zur Komposition $X\setminus\{q\} \xrightarrow{r} A \to X\setminus\{q\}$ mit der Inklusionsabbildung.

Sei nun $\gamma\colon (I^k, \partial I^k, J_{k-1}) \to (X \setminus \{q\}, X \setminus \{p,q\}, x_0)$ ein Morphismus von Raumtripeln. Da $x_0 \in A$, ist $F(t,\gamma(s)) = F(t,x_0) = x_0$ für jedes $t \in [0,1]$ und alle $s \in J_{k-1}$. Für jedes $s \in \partial I^k$ ist $\gamma(s) \neq p$. Ist $\gamma(s) \in A$, so folgt $F(t,\gamma(s)) = \gamma(s) \neq p$. Ist $\gamma(s) \in B$, so ist $F(t,\gamma(s)) \in C$ und wieder $\gamma(s) \neq p$. Also ist

$$[0,1] \times I^k \to X \setminus \{q\}$$

eine Homotopie derart, dass $f(t,\cdot)$ ein Morphismus

$$(I^k, \partial I^k, J_{k-1}) \to (X \setminus \{q\}, X \setminus \{p,q\}, x_0)$$

ist für alle $t \in [0,1]$. Weiter ist $\eta(s) := F(1,s) \in A$ für alle $s \in I^k$ und η ein Morphismus $(I^k, \partial I^k, J_{k-1}) \to (A, A \setminus \{p\}, x_0)$ mit $[\gamma] = [i \circ \eta]$ in $\pi_k(X \setminus \{q\}, X \setminus \{p,q\}, x_0)$. Da C ein starker Deformationsretrakt von $A \setminus \{p\}$ ist, gibt es nach Lemma 15.6 ein $\theta\colon (I^k, \partial I^k, J_{k-1}) \to (A, C, x_0)$ derart, dass $[\eta] = [\theta]$ in $\pi_k(A, A \setminus \{p\}, x_0)$ und somit $[\gamma] = [i \circ \eta] = [i \circ \theta] = i_*([\theta])$.

Injektivität von j_*. Seien $\gamma_\ell\colon (I^k, \partial I^k, J_{k-1}) \to (X, B, x_0)$ Morphismen von Raumtripeln für $\ell \in \{1,2\}$ mit $[\gamma_1] = [\gamma_2]$ in $\pi_k(X, X \setminus \{p\}, x_0)$. Es gibt also eine Homotopie $F\colon [0,1] \times I^k \to X$ von γ_1 nach γ_2 derart, dass $F(t,\cdot)$ ein Morphismus $(I^k, \partial I^k, J_{k-1}) \to (X, X \setminus \{p\}, x_0)$ ist für alle $t \in [0,1]$. Da C ein starker Deformationsretrakt von $A \setminus \{p\}$ ist, ist B ein starker Deformationsretrakt von $X \setminus \{p\}$: Ist nämlich $R\colon A \setminus \{p\} \to C$ eine starke Deformationsretraktion, so auch

$$r\colon X \setminus \{p\} \to B, \quad x \mapsto \begin{cases} R(x) & \text{wenn } x \in A \setminus \{p\}; \\ x & \text{wenn } x \in B. \end{cases}$$

Sei $G\colon [0,1] \times (X \setminus \{p\}) \to X \setminus \{p\}$ eine Homotopie relativ B von id_X nach $\iota \circ r$ mit der Inklusionsabbildung $\iota\colon B \to X \setminus \{p\}$. Definieren wir $\overline{\gamma}_\ell$ für $\ell \in \{1,2\}$ wie im Beweis von Lemma 15.6, so ist

$$[\gamma_\ell] = [\overline{\gamma}_\ell] \quad \text{in } \pi_k(X, B, x_0).$$

Nun ist

$$H\colon I \times I^{k-1} \times I \to X, \quad (t,s,\tau) \mapsto \begin{cases} F(t,s,2\tau - 1) & \text{wenn } \tau \in [\frac{1}{2}, 1]; \\ G(1 - 2\tau, F(t,s,0)) & \text{wenn } \tau \in [0, \frac{1}{2}] \end{cases}$$

Eine Homotopie von $\overline{\gamma}_1$ nach $\overline{\gamma}_2$ derart, dass $H(t,\cdot)$ für jedes $t \in [0,1]$ ein Morphismus $(I^k, \partial I^k, J_{k-1}) \to (X, B, x_0)$ ist, also $[\gamma_1] = [\overline{\gamma}_1] = [\overline{\gamma}_2] = [\gamma_2]$ in $\pi_k(X, B, x_0)$. □

Beendigung des Beweises von Lemma 15.1 (c). Der Beweis kann beendet werden wie im Fall 1 des Beweises von 4.23 auf den Seiten 361–262 in

Hatchers Buch (wo man i durch k ersetze, $m := n$ und jeweils nur eine $(n+1)$-Zelle zu C hinzugefügt wird, um unser A bzw. B zu erhalten (nämlich A^0 bzw. B^0). Die dort ohne Beweis behauptete Bijektivität der obigen Abbildungen i_* und j_* ist unnötig, die Aussagen von Lemma 15.8 genügen für die Argumentation. $\square$

Einhängungsabbildung und reduzierte Einhängungen

15.9 Es sei X ein Zellenkomplex und $x_0 \in X_0$ im 0-Gerüst. Wir betrachten die Einhängung $S(X) := (X \times [0,1])//(X \times \{1\})//(X \times \{0\})$ mit der kanonischen Quotientenabbildung

$$q_X \colon X \times [0,1] \to X, \quad (x,t) \mapsto [(x,t)] =: [x,t] .$$

Wir identifizieren $x \in X$ mit $(x, \frac{1}{2}) \in S(X)$ und entsprechend X mit der Teilmenge $q_X(X \times \{\frac{1}{2}\}) \subseteq S(X)$. Die Teilmenge

$$C_+(X) := q_X \left(X \times \left[\tfrac{1}{2}, 1\right]\right)$$

ist zu $\operatorname{cone}(X)$ homöomorph und somit kontrahierbar; ebenso $C_-(X) := q_X(X \times [0, \frac{1}{2}])$. Es ist $C_+(X) \cap C_-(X) = X$. Wir betrachten die Inklusionsabbildung

$$j \colon (S(X), \{x_0\}, x_0) \to (S(X), C_-(X), x_0)$$

und die Inklusionsabbildung

$$\lambda \colon (C_+(X), X) \to (S(X), C_-(X)) .$$

Wie oben sieht man, dass $j_* \colon \pi_{k+1}(S(X), x_0) \to \pi_{k+1}(S(X), C_-(X), x_0)$ eine Bijektion ist und ebenso die verbindende Abbildung

$$\partial \colon \pi_{k+1}(C_+(X), X, x_0) \to \pi_k(X, x_0), \quad [\gamma] \mapsto [\gamma|_{I^k}^X] .$$

Wir zeigen nach weiteren Vorbereitungen den folgenden Satz, aus dem Satz 15.5 folgt; hierbei ist $S(\gamma)$ wie in 10.12.

Satz 15.10 *Für jedes $k \in \mathbb{N}$ ist die Komposition $\psi \colon \pi_k(X, x_0) \to \pi_{k+1}(S(X), x_0)$ der Abbildungen*

$$\pi_k(X, x_0) \xrightarrow{\partial^{-1}} \pi_{k+1}(C_+(X), X, x_0) \xrightarrow{\lambda_*} \pi_{k+1}(S(X), C_-(X), x_0) \xrightarrow{(j_*)^{-1}} \pi_{k+1}(S(X), x_0)$$

gleich der Abbildung $[\gamma] \mapsto [S(\gamma) \circ q_{I^k}]$ mit der kanonischen Quotientenabbildung $q_{I^k} \colon I^k \times [0,1] \to S(I^k)$.

Der Beweis gelingt uns über einen Umweg. Analoges beweist sich nämlich leichter für sogenannte *reduzierte* Einhängungen und *reduzierte* Kegel. Anschließend müssen wir dann nur noch zum unreduzierten Fall übergehen.

15.11 Die reduzierte Einhängung von (X, x_0) ist definiert als

$$\Sigma(X) := S(X)//\{[x_0, t] \colon t \in [0,1]\}$$

mit der Quotiententopologie bezüglich der kanonischen Abbildung

$$p_X \colon S(X) \to \Sigma(X).$$

Wir halten x_0 fest und brauchen x_0 in der Notation daher nicht zu berücksichtigen. Wir kürzen noch ab

$$q'_X := p_X \circ q_X \colon X \times I \to \Sigma(X)\,.$$

Wir betrachten weiter die reduzierten Kegel

$$C^r_+(X) := C_+(X)//\{[x_0, t] \colon t \in [\tfrac{1}{2}, 1]\}$$

und $C^r_-(X) := C_-(X)//\{[x_0, t] \colon t \in [0, \frac{1}{2}]\}$. Da X als Zellenkomplex Hausdorffsch ist (T_1 wäre ausreichend), ist p_X eine abgeschlossene Abbildung; wir können daher $C^r_+(X)$ mit der entsprechenden Teilmenge von $\Sigma(X)$ identifizieren mit der induzierten Topologie (und ebenso $C^r_-(X)$). Wir identifizieren X mit $p_X(q_X(X)) \subseteq \Sigma(X)$. Dann ist $X = C^r_+(X) \cap C^r_-(X)$. Die Abbildung

$$[0,1] \times C^r_+(X) \to C^r_+(X), \quad (t, p_X([x,\tau]) := p_X([x, (1-t)\tau + t])$$

ist wohldefiniert und stetig, und eine Homotopie relativ $p_X(x_0)$ von der identischen Abbildung zur konstantenAbbildung mit Wert $p_X(x_0)$. Insbesondere ist $C^r_+(X)$ kontrahierbar und ebenso $C^r_-(X)$. Im folgenden identifizieren wir x_0 mit $p_X(x_0)$. Wir betrachten die Inklusionsabbildung

$$j' \colon (\Sigma(X), \{x_0\}, x_0) \to (\Sigma(X), C^r_-(X), x_0)$$

und die Inklusionsabbildung

$$\lambda' \colon (C^r_+(X), X) \to (\Sigma(X), C^r_-(X))\,.$$

Wie oben sieht man, dass $j'_* \colon \pi_{k+1}(\Sigma(X), x_0) \to \pi_{k+1}(\Sigma(X), C^r_-(X), x_0)$ eine Bijektion ist und ebenso die verbindende Abbildung

$$\partial' \colon \pi_{k+1}(C^r_+(X), X, x_0) \to \pi_k(X, x_0), \quad [\gamma] \mapsto [\gamma|^X_{I^k}]\,.$$

Satz 15.12 *Für jedes $k \in \mathbb{N}$ ist die Komposition $\theta\colon \pi_k(X,x_0) \to \pi_{k+1}(\Sigma(X),x_0)$ der Abbildungen*

$$\pi_k(X,x_0) \overset{(\partial')^{-1}}{\to} \pi_{k+1}(C_+^r(X),X,x_0) \overset{\lambda'_*}{\to} \pi_{k+1}(\Sigma(X),C_-^r(X),x_0) \overset{(j'_*)^{-1}}{\to} \pi_{k+1}(\Sigma(X),x_0)$$

gleich der Abbildung $[\gamma] \mapsto [\Sigma(\gamma) \circ q'_{I^k}]$ mit der kanonischen Quotientenabbildung $q'_{I^k}\colon I^k \times I \to \Sigma(I^k)$.

Beweis. Wir betrachten einen Morphismus $\gamma\colon (I^k, \partial I^k) \to (X, x_0)$ von Raumpaaren. Dann ist

$$\eta\colon I^k \times [0,1] \to C_+^r(X), \quad (s,\tau) \mapsto p_X([\gamma(s), \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\tau])$$

ein Morphismus $(I^{k+1}, \partial I^k, J_k) \to (C_+^r(X), X, x_0)$ mit

$$\partial'([\eta]) = [\gamma],$$

also

$$(\partial')^{-1}([\gamma]) = [\eta].$$

Weiter ist $j'_*([\Sigma(\gamma) \circ q'_{I^k}])$ die Homotopieklasse in $\pi_{k+1}(\Sigma(X), C_-^r(X), x_0)$ der Abbildung

$$\Sigma(\gamma) \circ q'_{I^k}\colon I^k \times I \to \Sigma(X), \quad (s,\tau) \mapsto p_X([\gamma(s),\tau]).$$

Es ist

$$F\colon I \times I^k \times I \to \Sigma(X), \quad (t,s,\tau) \mapsto p_X([\gamma(s), (1-\tau)\tfrac{1}{2}(1-t) + \tau])$$

eine Homotopie von η nach $\Sigma(\gamma) \circ q'_{I_k}$ derart, dass $F(t,\cdot)$ für jedes $t \in I$ ein Morphismus $(I^{k+1}, \partial I^{k+1}, J_k) \to (\Sigma(X), C_-^r(X), x_0)$ ist. Für $s \in \partial I^k$ ist der Funktionswert nämlich immer x_0 und ebenso, wenn $s \in I^k$ und $\tau = 1$. Für $s \in I^k$ und $\tau = 0$ ist $(1-\tau)\frac{1}{2}(1-t) + \tau = \frac{1}{2}(1-t) \in [0, \frac{1}{2}]$, also $F(t,s,\tau) \in C_-^r(X)$. Also ist

$$\lambda'_*([\eta]) = [\eta] = j'_*([\Sigma(\gamma) \circ q_{I^k}]) \quad \text{in } \pi_{k+1}(\Sigma(X), C_-^r(X), x_0);$$

Anwenden von $(j'_*)^{-1}$ liefert die Behauptung. □

Beweis von Satz 15.10. Wir betrachten p_X als Morphismus

$$(S(X), \{x_0\}, x_0) \to (\Sigma(X), \{x_0\}, x_0)$$

und schreiben p'_X für den entsprechenden Morphismus

$$(S(X), C_-(X), x_0) \to (\Sigma(X), C^r_-(X), x_0).$$

Weiter sei p^+_X die Einschränkung von p_X zu einer Quotientenabbildung

$$C_+(X) \to C^r_+(X);$$

wir betrachten p'_X als Morphismus $(C_+(X), X, x_0) \to (C^r_+(X), X, x_0)$. Wir haben dann ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc}
\pi_k(X,x_0) & \stackrel{\partial^{-1}}{\to} & \pi_{k+1}(C_+(X),X,x_0) & \stackrel{\lambda_*}{\to} & \pi_{k+1}(S(X),C_-(X),x_0) & \stackrel{(j_*)^{-1}}{\to} & \pi_{k+1}(S(X),x_0) \\
\mathrm{id}\downarrow & & (p^+_X)_*\downarrow & & (p'_X)_*\downarrow & & (p_X)_*\downarrow \\
\pi_k(X,x_0) & \stackrel{(\partial')^{-1}}{\to} & \pi_{k+1}(C^r_+(X),X,x_0) & \stackrel{\lambda'_*}{\to} & \pi_{k+1}(\Sigma(X),C^r_-(X),x_0) & \stackrel{(j'_*)^{-1}}{\to} & \pi_{k+1}(\Sigma(X),x_0)
\end{array}$$

Wir machen $S(X)$ zu einen Zellenkomplex mit $A := \{[x_0,t]\colon t \in [0,1]\}$ als Unterkomplex, mit den Zellen $\{[x_0,1]\}$, $\{[x_0,0]\}$ sowie

$$\{[x,t]\colon x \in e_{n,j},\ t \in]0,1[\}.$$

Da A kontrahierbar ist, ist die kanonische Quotientanabbildung

$$p_X\colon S(X) \to S(X)//A = \Sigma(X)$$

nach Satz 8.34 eine Homotopieäquivalenz, also

$$(p_X)_*\colon \pi_{k+1}(S(X),x_0) \to \pi_{k+1}(\Sigma(X),x_0)$$

ein Isomorphismus nach Folgerung 9.32. Bezeichnet ψ die Komposition der Abbildung in der oberen Zeile und θ die Komposition der Abbildungen in der unteren Zeile des kommutativen Diagramms, so ist

$$(p_X)_* \circ \psi = \theta;$$

für jedes $[\gamma] \in \pi_k(X,x_0)$ ist somit

$$\begin{aligned}
(p_X)_*(\psi([\gamma])) &= \theta([\gamma]) = [\Sigma(\gamma) \circ q'_{I^k}] = [\Sigma(\gamma) \circ p_{I^k} \circ q_{I^k}] \\
&= [p_X \circ S(\gamma) \circ q_{I^k}] = (p_X)_*([S(\gamma) \circ q_{I^k}]),
\end{aligned}$$

wobei benutzt wurde, dass $\Sigma(\gamma) \circ p_{I^k} = p_X \circ S(\gamma)$ per Konstruktion. Da $(p_X)_*$ injektiv ist, folgt $\psi([\gamma]) = [S(\gamma) \circ q_{I^k}]$. $\square$

16 Von Zellenkomplexen dominierte Räume und Abbildungsteleskope

Man sagt, dass ein topologischer Raum Y durch einen topologischen Raum X *dominiert wird*, wenn es stetige Abbildungen

$$Y \xrightarrow{i} X \xrightarrow{r} Y$$

gibt mit $r \circ i \simeq \mathrm{id}_Y$.

Unser Ziel ist der folgende Satz.

Satz 16.1 *Wird ein topologischer Raum Y durch einen Zellenkomplex dominiert, so ist Y homotopieäquivalent zu einem Zellenkomplex.*

Der Satz ist sehr wichtig für die unendlich-dimensionale Topologie. Palais nennt einen Hausdorffschen topologischen Raum M eine *Mannigfaltigkeit*, wenn für jedes $x \in M$ eine offene x-Umgebung $U \subseteq M$ existiert und ein Homöomorphismus

$$\phi\colon U \to V$$

für eine offene Teilmenge V eines lokal konvexen topologischen Vektorraums E_ϕ oder eine relativ offene Teilmenge $V \subseteq H$ mit

$$H := \{x \in E_\phi \colon \lambda(x) \geq 0\}$$

für ein stetiges lineares Funktional $\lambda\colon E_\phi \to \mathbb{R}$ mit $\lambda \neq 0$ (H ist also ein abgeschlossener Halbraum). Da die Definition nicht allgemein verbreitet ist, sprechen wir im folgenden von *Palais-Mannigfaltigkeiten*. Wir nehmen stets $M \neq \emptyset$ an. Palais charakterisiert die metrisierbaren Palais-Mannigfaltigkeiten (Theorem 1) und zeigt, dass jede metrisierbare Palais-Mannigfaltigkeit durch einen simplizialen Komplex dominiert wird (Theorem 14). Da jeder simpliziale Komplex insbesondere ein Zellenkomplex ist, folgt:

Satz 16.2 (*Fakt*). *Jede metrisierbare Palais-Mannigfaltigkeit wird durch einen Zellenkomplex dominiert.* □

Mit Satz 16.1 folgt:

Satz 16.3 *Jede metrisierbare Palais-Mannigfaltigkeit ist homotopieäquivalent zu einem Zellenkomplex.*

Beispiel 16.4 Jede offene, nicht leere Teilmenge U eines metrisierbaren lokalkonvexen topologischen Vektorraums E ist eine metrisierbare Palais-Mannigfaltigkeit (mit $V := U$ und $\phi := \mathrm{id}_U$) und wird somit durch einen Zellenkomplex dominiert. Ebenso jede relativ offene Teilmenge U eines Halbraums $\lambda^{-1}([0,\infty[)$ mit $\lambda \in E' \setminus \{0\}$.

Zum Beispiel können Sie für E jeden normierten Raum $(E, \|\cdot\|)$ nehmen.

Wir halten eine wichtige Folgerung fest.

Folgerung 16.5 *Sei M eine wegzusammenhängende, metrisierbare Palais-Mannigfaltigkeit derart, dass $\pi_k(M) = \{0\}$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Dann ist M kontrahierbar.*

Beweis. Nach Satz 16.3 ist M zu einem Zellenkomplex X homotopieäquivalent; da M wegzusammenhängend ist, ist nach Aufgabe 41 (d) auf Blatt 12 auch X wegzusammenhängend. Nach Folgerung 9.32 ist $\pi_k(X) \cong \pi_k(M) = \{0\}$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und somit X kontrahierbar, nach dem Satz von Whitehead. Also ist X zu einem einpunktigen topologischen Raum homotopieäquivalent (siehe Satz 5.73) und somit auch M. Nach Satz 5.73 ist M also kontrahierbar. □

Um Satz 16.1 zu beweisen, sind sogenannte *Abbildungsteleskope* das entscheidende Hilfsmittel.

Abbildungsteleskope

Definition 16.6 Es seien $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge topologischer Räume und

$$f_n\colon X_n \to X_{n+1}$$

stetige Abbildungen für $n \in \mathbb{N}$. Wir betrachten die topologische Summe

$$Z := \coprod_{n\in\mathbb{N}} ([n, n+1] \times X_n)$$

mit den kanonischen Abbildungen

$$\lambda_n\colon [n, n+1] \times X_n \to Z$$

für $n \in \mathbb{N}$. Das *Abbildungsteleskop* der Folge $f := (f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist definiert als

$$T(f) := \coprod_{n\in\mathbb{N}} ([n, n+1] \times X_n)/\sim$$

mit der Quotiententopologie bezüglich der kanonischen Quotientenabbildung

$$q\colon \coprod_{n\in\mathbb{N}}([n,n+1]\times X_n) \to T(f), \quad z\mapsto [z]$$

unter Benutzung der Äquivalenzrelation auf der topologischen Summe Z, welche durch $z\sim z$ für alle $z\in Z$ sowie

$$\lambda_n(n+1,x)\sim \lambda_{n+1}(n+1,f_n(x))$$

für $n\in\mathbb{N}$ und $x\in X_n$ (und umgekehrt) gegeben ist und

$$\lambda_n(n+1,x)\sim\lambda_n(n+1,y)$$

für alle $x,y\in X_n$ mit $f_n(x)=f_n(y)$. Man schreibt auch $T(f_1,f_2,\ldots)$ statt $T(f)$.

Beispiel 16.7 Für jeden topologischen Raum Y ist

$$T(\mathrm{id}_Y,\mathrm{id}_Y,\ldots)\sim [0,\infty[\times Y \;\simeq\; Y\,.$$

[Es sei $Z:=\coprod_{n\in\mathbb{N}}([n,n+1]\times Y)$, $q\colon Z\to T(\mathrm{id}_Y,\mathrm{id}_Y,\ldots)$ die kanonische Quotientenabbildung und $\lambda_n\colon [n,n+1]\times Y\to Z$ die kanonische Einbettung. Sei $i_n\colon [n,n+1]\times Y\to [0,\infty[\times Y$ die Inklusionsabbildung. Dann ist

$$i:=\cup_{n\in\mathbb{N}} i_n\colon Z\to [0,\infty[\times Y$$

stetig. Da $i(\lambda_n(n+1,y))=(n+1,y)=i(\lambda_{n+1}(n+1,y))$, faktorisiert i zu einer stetigen Abbildung

$$j\colon T(\mathrm{id}_Y,\mathrm{id}_Y,\ldots)\to [0,\infty[\times Y$$

mit $j\circ q=i$. Da i surjektiv ist, ist auch j surjektiv. Man rechnet nach, dass j zudem injektiv ist. Für jedes $n\in\mathbb{N}$ ist für alle $(s,y)\in [n,n+1]\times Y$

$$j(q(\lambda_n(s,y)))=i(\lambda_n(s,y))=i_n(s,y)=(s,y),$$

also

$$j^{-1}|_{[n,n+1]\times Y}=q\circ\lambda_n$$

stetig. Nach dem Klebelemma ist dann $j^{-1}|_{[0,n]\times Y}$ stetig für alle $n\in\mathbb{N}$, also j^{-1} insbesondere auf den offenen Teilmengen $[0,n[\times Y$ von $[0,\infty[\times Y$ stetig. Da diese eine Überdeckung von $[0,\infty[\times Y$ bilden, ist j^{-1} stetig, also j ein Homöomorphismus.]

Wir notieren wichtige Eigenschaften von Abbildungsteleskopen (die im Anhang des Kapitels bewiesen werden).

Satz 16.8 *Sei* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine Folge topologischer Räume und* $f_n\colon X_n \to X_{n+1}$ *eine stetige Abbildung für* $n \in \mathbb{N}$. *Dann gilt:*

(a) *Ist* $g_n\colon X_n \to X_{n+1}$ *stetig und zu* f_n *homotop für* $n \in \mathbb{N}$, *so ist*

$$T(f_1, f_2, \ldots) \simeq T(g_1, g_2, \ldots)\,.$$

(b) *Es ist* $T(f_1, f_2, \ldots) \simeq T(f_2, f_3, \ldots)$.

(c) *Es ist* $T(f_1, f_2, \ldots) \simeq T(f_2 \circ f_1, f_4 \circ f_3, \ldots)$.

(d) *Ist* X_n *Hausdorffsch für jedes* $n \in \mathbb{N}$, *so ist* $T(f_1, f_2, \ldots)$ *Hausdorffsch.*

(e) *Ist* X_n *ein Zellenkomplex für jedes* $n \in \mathbb{N}$ *und* $f_n\colon X_n \to X_{n+1}$ *zellulär, so ist* $T(f_1, f_2, \ldots)$ *ein Zellenkomplex.*

Beweis von Satz 16.1

Sei Y dominiert durch einen Zellenkomplex X und seien

$$Y \xrightarrow{i} X \xrightarrow{r} Y$$

stetige Abbildungen mit $r \circ i \simeq \mathrm{id}_Y$. Dann gilt

$$\begin{aligned} T(i\circ r, i\circ r, \ldots) &\simeq T(r, i, r, i, \ldots) \simeq T(i, r, i, r, \ldots) \\ &\simeq T(r\circ i, r\circ i, \ldots) \simeq T(\mathrm{id}_Y, \mathrm{id}_Y, \ldots) \\ &\simeq Y, \end{aligned}$$

wobei nacheinander die Teile (c), (b), (c) und (a) von Satz 16.8 benutzt wurden und dann Beispiel 16.7. Wir verwenden nun zelluläre Approximation: Als stetige Abbildung zwischen Zellenkomplexen ist

$$i \circ r\colon X \to X$$

homotop zu einer zellulären stetigen Abbildung $f\colon X \to X$. Dann ist

$$T(i\circ r, i\circ r, \ldots) \simeq T(f, f, f, \ldots)$$

nach Satz 16.8 (a) und folglich $Y \simeq T(f, f, \ldots)$. Nach Satz 16.8 (e) ist $T(f, f, \ldots)$ ein Zellenkomplex, was den Beweis beendet. □

Anhang für Kapitel 16

Bevor wir Satz 16.8 beweisen, stellen wir eine Beobachtung an.

Bemerkung 16.9 Ist für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein topologischer Raum Y_n gegeben und ein Homöomorphismus $\phi_n \colon X_n \to Y_n$, so sieht man leicht, dass

$$T((f_n)_{n\in\mathbb{N}}) \sim T((\phi_{n+1} \circ f_n \circ \phi_n^{-1})_{n\in\mathbb{N}}).$$

Auch folgende Beobachtungen sind nützlich.

Bemerkung 16.10 (a) Für jedes Abbildungsteleskop wie in Definition 16.6 ist

$$q \circ \lambda_n|_{]n,n+1[\,\times X_n} \colon\ ]n, n+1[\ \times X_n \to T(f_1, f_2, \ldots)$$

eine offene Einbettung.

[Die Einschränkung ist stetig und injektiv; für jede offene Teilmenge $U \subseteq\ ]n, n+1[\ \times X_j$ ist $\lambda_j(U)$ offen in Z und q-saturiert, also $q(\lambda_j(U))$ offen in $T(f_1, f_2, \ldots)$.]

(b) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist

$$h_n \colon X_j \to T(f_1, f_2, \ldots), \quad x \mapsto q(\lambda_n(n, x))$$

eine abgeschlossene topologische Einbettung.

[Die Abbildung ist stetig, weil $q \circ \lambda_n$ es ist und injektiv. Ist $A \subseteq X_n$ abgeschlossen, so ist die Menge $\lambda_n(\{n\} \times A)$ abgeschlossen in Z. Im Falle $n = 1$ ist sie zudem q-saturiert, ihr Bild unter q also abgeschlossen (und dieses stimmt mit $h_n(A)$ überein). Im Falle $n \geq 2$ ist $B := f_{n-1}^{-1}(A)$ abgeschlossen in X_{n-1} und

$$\lambda_{n-1}(\{n\} \times B) \cup \lambda_n(\{n\} \times A)$$

eine q-saturierte abgeschlossene Teilmenge von Z. Ihr Bild unter q ist abgeschlossen und stimmt mit $h_n(A)$ überein.

Wir benutzen zudem folgenden Sachverhalt.

Lemma 16.11 *Es sei $(X_j)_{j\in J}$ eine Familie topologischer Räume und $A_j \subseteq X_j$ eine Teilmenge derart, dass*

$$B_j := (\{0\} \times X_j) \cup ([0, 1] \times A_j)$$

ein starker Deformationsretrakt von $[0,1] \times X_j$ *ist. Sei* $X := \coprod_{j \in J} X_j$ *und* $A := \coprod_{j \in J} A_j$*. Dann ist*

$$B := (\{0\} \times X) \cup ([0,1] \times A)$$

ein starker Deformationsretrakt von $[0,1] \times X$*.*

Beweis. Wir dürfen annehmen, dass die Mengen X_j paarweise disjunkt sind und $X = \bigcup_{j \in J} X_j$ mit den Inklusionsabbildungen $\lambda_j \colon X_j \to X$. Für jedes $j \in J$ ist dann $[0,1] \times X_j$ offen in $[0,1] \times X$ mit der Produkttopologie und die Inklusionsabbildung

$$\mathrm{id}_{[0,1]} \times \lambda_j \colon [0,1] \times X_j \to [0,1] \times X$$

ist eine offene topologische Einbettung; also ist $[0,1] \times X = \coprod_{j \in J}([0,1] \times X_j)$. Für $j \in J$ sei

$$i_j \colon B_j \to [0,1] \times X_j$$

die Inklusionsabbildung,

$$r_j \colon [0,1] \times X_j \to B_j$$

eine starke Deformationsretraktion und

$$F_j \colon [0,1] \times [0,1] \times X_j \to [0,1] \times X_j$$

eine Homotopie relativ B_j von $\mathrm{id}_{[0,1] \times X_j}$ nach $i_j \circ r_j$ mit der Inklusionsabbildung $i_j \colon B_j \to [0,1] \times X_j$. Die von X auf B induzierte Topologie macht B zur topologischen Summe der B_j. Dann ist

$$r := \cup_{j \in J} (\lambda_j|_{B_j}^{B} \circ r_j)[0,1] \times X \to B$$

eine Retraktion. Sei $i \colon B \to X$ die Inklusionsabbildung. Wir betrachten die Abbildung

$$F \colon [0,1] \times X \to [0,1] \times X, \quad (t,x) := (\mathrm{id}_{[0,1]} \times \lambda_j)(F_j(t,x))$$

für $t \in [0,1]$, $j \in J$ und $x \in X_j$. Diese ist stetig auf jeder der offenen Mengen $[0,1] \times X_j$ und somit stetig. Per Konstruktion ist F eine Homotopie relativ B von $\mathrm{id}_{[0,1] \times X}$ nach $i \circ r$. $\square$

Beweis von Satz 16.8. (a) Nach Bemerkung 16.9 dürfen wir annehmen, dass die Mengen X_n für $n \in \mathbb{N}$ paarweise disjunkt sind. Wir betrachten die topologischen Summen $X := \coprod_{n \in \mathbb{N}} X_n$ und

$$Z := \coprod_{n \in \mathbb{N}} ([n, n+1] \times X_n).$$

Für $n \in \mathbb{N}$ sei weiter $Z_n := [n, n+1] \times X_n$ für $n \in \mathbb{N}$ und $A_n := \{n, n+1\} \times X_n$. Da A_n in Z_n abgeschlossen ist, ist

$$A := \coprod_{n \in \mathbb{N}} A_n = \{n, n+1\} \times X$$

abgeschlossen in Z. Die Abbildung

$$\phi \colon A \to X$$

mit $(n, x) \mapsto x \in X_n \subseteq X$ für $x \in X_n$, $(n+1, x) \mapsto f_n(x) \in X_{n+1} \subseteq X$ ist stetig auf jedem A_n und somit stetig. Wir behaupten, dass $T(f_1, f_2, \ldots)$ zu

$$X \cup_\phi Z$$

homöomorph ist. Stimmt dies, ist analog $T(g_1, g_2, \ldots)$ zu $X \cup_\psi Z$ homöomorph mit der zu ϕ analogen Abbildung $\psi \colon A \to Z$, unter Benutzung von g_n statt f_n. Dann ist

$$\phi \simeq \psi\,.$$

Sei nämlich $F_n \colon [0,1] \times X_n \to X_{n+1}$ eine Homotopie von f_n nach g_n für $n \in \mathbb{N}$. Definieren wir

$$F \colon A \times Z \to X$$

via $F(t, n, x) := x \in X_n \subseteq X$ für alle $t \in [0,1]$, $n \in \mathbb{N}$ und $x \in X_n$ sowie $F(t, n+1, x) := F_n(t, x) \in X_{n+1} \subseteq X$, so ist F stetig und eine Homotopie von ϕ nach ψ.

Wir wollen nun Satz 8.29 anwenden und müssen die Voraussetzung des Satzes über die Menge in (31) noch nachprüfen. Da wegen Folgerung 8.9 die Teilmenge $(\{0\} \times [n, n+1]) \cup ([0,1] \times \{n, n+1\})$ ein starker Deformationsretrakt von $[0,1] \times [n, n+1]$ ist, ist nach Lemma 8.2 die Teilmenge

$$\Big((\{0\} \times [n, n+1]) \cup ([0,1] \times \{n, n+1\}) \Big) \times X_n = (\{0\} \times Z_n) \cup ([0,1] \times A_n)$$

ein starker Deformationsretrakt von $([0,1] \times [n, n+1]) \times X_n = [0,1] \times Z_n$. Nach Lemma 16.11 ist somit

$$(\{0\} \times Z) \cup ([0,1] \times A)$$

ein starker Deformationsretrakt von $[0,1] \times Z$. Nach Satz 8.29 ist somit $X \cup_\phi Z \simeq X \cup_\psi Z$ und folglich $T(f_1, f_2, \ldots) \simeq T(g_1, g_2, \ldots)$.

Zum Beweis der Behauptung betrachten wir die kanonischen Abbildungen

$$\mu_1\colon X \to X \cup_\phi Z \quad \text{und} \quad \mu_2\colon Z \to X \cup_\phi Z\,.$$

Die Topologie $\mathcal{U}$ auf $X \cup_\phi Z$ ist final bezüglich $(\mu_j)_{j\in\{1,2\}}$. Sei $\mathcal{V}$ die finale Topologie auf $X \cup_\phi Z$ bezüglich μ_2; da μ_2 surjektiv ist, ist dies also die Quotiententopologie bezüglich μ_2. Dann ist $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{V}$. Jedoch macht $\mathcal{V}$ auch μ_1 stetig, denn es ist

$$\mu_1 = \mu_2 \circ h$$

mit der stetige Abbildung $h\colon \coprod_{n\in\mathbb{N}} X_n \to \coprod_{n\in\mathbb{N}}([0,1]\times X_n) = Z$, $X_n \ni x \mapsto (n,x)$. Also ist auch $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$ und somit $\mathcal{V} = \mathcal{U}$. Für $z, w \in Z$ ist genau dann $\mu_2(z) = \mu_2(w)$, wenn $z \sim w$, also $q(z) = q(w)$. Somit ist $X \cup_\phi Z$ homöomorph zu $Z/\!\sim\, = T(f_1, f_2, \ldots)$.

(b) Wir betrachten $T' := T(f_2, f_3, \cdots)$ mit $Z' := \coprod_{n\in\mathbb{N}}([n, n+1] \times X_{n+1})$, der kanonischen Quotientenabbildung

$$q'\colon Z' \to T'$$

und den kanonischen Abbildungen

$$\lambda_n'\colon [n, n+1] \times X_{n+1} \to Z'$$

für $n \in \mathbb{N}$. Wir wissen, dass $h_1'\colon X_2 \to T'$, $x \mapsto q'(\lambda_1'(1,x))$ eine abgeschlossene topologische Einbettung ist. Wir betrachten die Abbildung

$$f_1' := h_1' \circ f_1\colon X_1 \to T'$$

und bilden den Abbildungszylinder $Z_{f_1'}$. Nach Lemma 8.22 ist dann T' ein starker Deformationsretrakt von $Z_{f_1'}$, folglich

$$T(f_2, f_2, \ldots) = T' \simeq Z_{f_1'}\,.$$

Wir zeigen nun, dass es einen Homöomorphismus

$$\psi\colon Z_{f_1'} \to T(f_1, f_2, \ldots)$$

gibt. Dann ist insbesondere $Z_{f_1'} \simeq T(f_1, f_2, \ldots)$ und somit $T(f_2, f_3, \ldots) \simeq T(f_1, f_2, \ldots)$. Offenbar leistet die durch

$$\psi([s,x]) := q(\lambda_1(2-s, x)) \quad \text{für } (s,x) \in [0,1] \times X_1$$

und $\psi(q'(\lambda'_n(s,x))) := q(\lambda_{n+1}(s+1,x))$ für $n \in \mathbb{N}$, $s \in [0,1]$ und $x \in X_{n+1}$ gegebene Abbildung $Z_{f'_1} \to T(f_1, f_2, \ldots)$ das Gewünschte, mit der Umkehrabbildung $T(f_1, f_2, \ldots) \to Z_{f'_1}$, die durch

$$q(\lambda_1(s,x)) \mapsto [2-s, x]$$

für $s \in [1,2]$ und $x \in X_1$ sowie $q(\lambda_n(s,x)) := q'(\lambda'_{n-1}(s-1,x))$ für $2 \leq n \in \mathbb{N}$, $s \in [n, n+1]$ und $x \in X_n$ gegeben ist.

(c) Wir betrachten $T' := T(f_2 \circ f_1, f_4 \circ f_3, \cdots)$ mit der topologischen Summe $Z' := \coprod_{n\in\mathbb{N}}([n, n+1] \times X_{2n-1})$, der kanonischen Quotientenabbildung

$$q' \colon Z' \to T'$$

und den kanonischen Abbildungen

$$\lambda'_n \colon [n, n+1] \times X_{2n-1} \to Z'$$

für $n \in \mathbb{N}$. Dann ist eine stetige Abbildung $\phi\colon T \to T'$ wohldefiniert durch

$$\phi(q(\lambda_{2n-1}(s,x))) := q'(\lambda'_n(s+1-n, x))$$

für $n \in \mathbb{N}$, $s \in [2n-1, 2n]$ und $x \in X_{2n-1}$ sowie

$$\phi(q(\lambda_{2n}(s,x)) := q'(\lambda'_{n+1}(n+1, f_{2n}(x)))$$

für $n \in \mathbb{N}$, $s \in [2n, 2n+1]$ und $x \in X_{2n}$. Ebenso ist eine stetige Abbildung $\psi\colon T' \to T$ wohldefiniert via

$$\psi(q'(\lambda'_n(s,x))) := q(\lambda_{2n-1}(2s-1, x))$$

für $n \in \mathbb{N}$, $s \in [n, n+\frac{1}{2}]$ und $x \in X_{2n-1}$ sowie

$$\psi(q'(\lambda'_n(s,x)) := q(\lambda_{2n}(2s-2, f_{2n-1}(x)))$$

für $n \in \mathbb{N}$, $s \in [n+\frac{1}{2}, n+1]$ und $x \in X_{2n-1}$. Dann ist

$$\psi \circ \phi \simeq \mathrm{id}_T \quad \text{und} \quad \phi \circ \psi \simeq \mathrm{id}_{T'},$$

so dass insbesondere (c) gilt. Homotopien $F\colon [0,1] \times T \to T$ von $\psi \circ \phi$ nach id_T und $G\colon [0,1] \times T' \to T'$ von $\phi \circ \psi$ nach $\mathrm{id}_{T'}$ können nämlich definiert werden wie folgt: Es sei $F(t, q(\lambda_{2n-1}(s,x)))$ gleich

$$\begin{cases} q\Big(\lambda_{2n-1}\Big(2n-1+\frac{2}{1+t}(s-(2n-1)), x\Big)\Big) & \text{wenn } 2n-1 \leq s \leq 2n-1+\frac{1}{2}(1+t) \\ q(\lambda_{2n}(2s+1-t-2n, f_{2n-1}(x))) & \text{wenn } 2n-1+\frac{1}{2}(1+t) \leq s \leq 2n \end{cases}$$

für $n \in \mathbb{N}$, $t \in [0,1]$, $s \in [2n-1, 2n]$ und $x \in X_{2n-1}$; hierbei ist

$$2s + 1 - t - 2n = 2n + (1-t)\frac{s - (2n - 1 + \frac{1}{2}(1+t))}{1 - \frac{1}{2}(1+t)}$$

wenn $t \in [0,1[$. Weiter sei

$$F(t, q(\lambda_{2n}(s,x))) := q(\lambda_{2n}(2n+1-t+t(s-2n), x))$$

für $t \in [0,1]$, $n \in \mathbb{N}$, $s \in [2n, 2n+1]$ und $x \in X_{2n}$. Weiter sei

$$G(q'(\lambda'_n(s,x))) := \begin{cases} q'\Big(\lambda'_n\Big(n + 2\frac{s-n}{1+t}, x\Big)\Big) & \text{wenn } s \in [n, n + \frac{1}{2}(1+t)]; \\ q'(\lambda'_n(n+1, x)) & \text{wenn } s \in [n + \frac{1}{2}(1+t), n+1] \end{cases}$$

für $t \in [0,1]$, $n \in \mathbb{N}$, $s \in [n, n+1]$ und $x \in X_{2n-1}$.

(d) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist die Abbildung $w_n \colon [n, n+1] \times X_n \to [1, \infty[$, $(s,x) \mapsto s$ stetig. Also ist auch

$$w := \cup_{n\in\mathbb{N}} w_n \colon \coprod_{n\in\mathbb{N}} ([n, n+1] \times X_n) \to [1, \infty[$$

stetig. Da $w(\lambda_n(n+1, x)) = n+1 = w(\lambda_{n+1}(n+1, f_n(x))$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $x \in X_n$, faktorisiert w zu einer durch $\overline{w} \circ q = w$ festgelegten stetigen Abbildung

$$\overline{w} \colon T(f_1, f_2, \ldots) \to [1, \infty[\,.$$

Seien nun $z_1, z_2 \in T(f_1, f_2, \ldots)$ mit $z_1 \neq z_2$. Wenn $\overline{w}(z_1) \neq \overline{w}(z_2)$, wählen wir disjunkte offene Umgebungen U und V von $\overline{w}(z_1)$ bzw. $\overline{w}(z_2)$ in $[1, \infty[$; dann sind $\overline{w}^{-1}(U)$ und $\overline{w}^{-1}(V)$ disjunkte offene Umgebungen von z_1 bzw. z_2 in $T(f_1, f_2, \ldots)$. Sei nun $r := \overline{w}(z_1) = \overline{w}(z_2)$. Fall $r \notin \mathbb{N}$: Dann ist $r \in [n, n+1[$ für genau ein $n \in \mathbb{N}$ und für $j \in \{1,2\}$ ist $z_j = \lambda_j(r, x_j)$ für genau ein $x_j \in X_n$. Dann ist $x_1 \neq x_2$, wir finden also disjunkte offene Umgebungen U und V von x_1 bzw. x_2 in X_n. Dann sind $\lambda_n(]n, n+1[\times U)$ und $\lambda_n(]n, n+1[\times V)$ offene, q-saturierte Teilmengen von X und disjunkt, also

$$q(\lambda_n(]n, n+1[\times U)) \quad \text{und} \quad q(\lambda_n(]n, n+1[\times V))$$

disjunkte offene Teilmengen von $T(f_1, f_2, \ldots)$, welche z_1 bzw. z_2 enthalten. Im Fall $r = 1$ verfährt man analog mit $[1, 2[$ an Stelle von $]n, n+1[$. Es bleibt der Fall $2 \leq r \in \mathbb{N}$. Für $j \in \{1,2\}$ ist dann $z_j = \lambda_n(n, x_j)$ für genau ein

$x_j \in X_n$. Dann ist $x_1 \neq x_2$, es gibt in X_n also disjunkte offene Umgebungen U und V von x_1 bzw. x_2. Dann sind

$$P := \lambda_{n-1}(]n-1, n] \times f_{n-1}^{-1}(U)) \cup \lambda_n(U \times [n, n+1[)$$

und $Q := \lambda_{n-1}(]n-1, n] \times f_{n-1}^{-1}(V)) \cup \lambda_n(V \times [n, n+1[)$ offene q-saturierte Teilmengen von Z und disjunkt, also $q(Q)$ und $q(P)$ disjunkte offene Teilmengen von $T(f_1, f_2, \ldots)$. Diese enthalten z_1 bzw. z_2.

(e) Für $n \in \mathbb{N}$ seien $\Phi_{k,j}^n \colon D_{k,j}^n \to X_n$ für $k \in \mathbb{N}_0$ und $j \in J_k^n$ die charakteristischen Abbildungen des Zellenkomplexes X_n mit k-Zellen $D_{k,j}$. Wir behaupten, dass $T := T(f_1, f_2, \ldots)$ ein Zellenkomplex ist mit den charakteristischen Abbildungen für k-Zellen von der Form

$$\Psi_{k,j}^n := h_n \circ \Phi_{k,j}^n \colon D_{k,j}^n \to T, \quad x \mapsto q(\lambda_n(n, \Phi_{k,j}^n(x)))$$

für $n \in \mathbb{N}$ und $j \in J_k^n$ sowie, falls $k \geq 1$, zudem

$$\Theta_{k,j}^n \colon [n, n+1] \times D_{k-1,j}^n \to T, \quad (s, x) \mapsto q(\lambda_n(s, \Phi_{k-1,j}^n(x)))$$

für $n \in \mathbb{N}$ und $j \in J_{k-1}^n$. Wir prüfen nun die Bedingungen von Satz 3.30 nach und stellen zunächst fest, dass T nach (d) Hausdorffsch ist.

Da $\Phi_{k,j}^n|_{D_{k,j}^n \setminus \partial D_{k,j}^n}$ und h_n aus Bemerkung 16.10 (b) topologische Einbettungen sind, ist $\Psi_{k,j}^n|_{D_{k,j}^n \setminus \partial D_{k,j}^n}$ eine topologische Einbettung. Im Falle $k \geq 1$ ist $\Phi_{k-1,j}^n|_{D_{k-1,j}^n \setminus \partial D_{k-1,j}^n}$ eine topologische Einbettung und nach Bemerkung 16.10 (a) auch $(q \circ \lambda_n)|_{]n,n+1[\times X_n}$; also ist $\Theta_{k,j}^n|_{D_{k-1,j}^n \setminus \partial D_{k-1,j}^n}$ eine topologische Einbettung. Bedingung (a) aus Satz 3.30 ist also erfüllt.

Per Konstruktion ist T die disjunkte Vereinigung der Mengen $h_n(e_{k,j}^n)$ mit $e_{k,j}^n := \Phi_{k,j}^n(D_{k,j}^n \setminus \partial D_{k,j}^n) \subseteq X_n$ für $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}_0$ und $j \in J_k^n$ (deren Vereinigung $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} h_n(X_n)$ ist) sowie der Mengen $f_{k,j}^n := \Theta_{k,j}^n(D_{k-1,j}^n \setminus \partial D_{k-1,j}^n)$ für $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}$ und $j \in J_{k-1}^n$, mit Vereinigung $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} q(\lambda_n(]n, n+1[\times X_n)$. Bedingung (b) aus Satz 3.30 ist also erfüllt.

Die Topologie auf Z ist final bezüglich den Abbildungen λ_n für $n \in \mathbb{N}$. Da q eine Quotientenabbildung ist, ist die Topologie auf T also final bezüglich den Abbildungen $q \circ \lambda_n \colon [n, n+1] \times X_n \to T$. Da die Topologie auf X_n final ist bezüglich den Abbildungen $\Phi_{k,j}^n$ für $k \in \mathbb{N}_0$ und $j \in J_k^n$, ist die Topologie auf $[n, n+1] \times X_n$ final bezüglich den Abbildungen $\mathrm{id}_{[n,n+1]} \times \Phi_{k,j}^n$. Die Topologie $\mathcal{O}$ auf T ist also final bezüglich den Abbildungen

$$q \circ \lambda_n \circ (\mathrm{id}_{[0,1]} \times \Phi_{k,j}^n) = \Theta_{k+1,j}^n .$$

Es sei $\mathcal{T}$ die finale Topologie auf T bezüglich alle den $\Theta^n_{k,j}$ allen $\Psi^n_{k,j}$. Da $\mathcal{T}$ alle $\Theta^n_{k+1,j}$ stetig macht für $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}_0$ und $j \in J^n_k$, ist $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{O}$. Da $\mathcal{O}$ für $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}_0$ und $j \in J^n_k$ die Abbildung

$$\Theta^n_{k+1,j}\colon [n, n+1] \times D_{k,j} \to T, \quad (s, x) \mapsto q(\lambda_n(s, \Phi^n_{k,j}(x)))$$

stetig macht, macht $\mathcal{T}$ auch

$$D_{k,j} \to T, \quad x \mapsto \Theta^n_{k+1,j}(n, x)) = h_n(\Phi^n_{k,j}(x))$$

stetig, also die Abbildung $\Psi^n_{k,j}$. Also gilt $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{T}$ und somit $\mathcal{O} = \mathcal{T}$. Die Bedingung (c) von Satz 3.30 ist also erfüllt.

Wir weisen nun noch Bedingung (d) von Satz 3.30 nach. Da X_n für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein Zellenkomplex ist, ist für alle $k \in \mathbb{N}$ und $j \in J^n_k$ das Bild $\Phi^n_{k,j}(\partial D^n_{k,j})$ in einer Vereinigung von endlich vielen der Mengen $e^n_{\ell,i}$ enthalten mit $\ell < k$ und $i \in J^n_\ell$. Also ist $\Psi^n_{k,j}(\partial D^n_{k,j})$ enthalten in der entsprechenden endlichen Vereinigung der $h_n(e^n_{\ell,i})$.

Gegeben $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}$ und $j \in J^n_{k-1}$ ist

$$\partial([n, n+1] \times D^n_{k-1,j}) = (\{n, n+1\} \times D^n_{k-1,j}) \cup (]n, n+1[\, \times \partial D^n_{k-1,j})\,.$$

Es ist $\Phi^n_{k-1,j}(D^n_{k-1,j})$ in einer endlichen Vereinigung von Mengen der Form $e_{\ell,i}$ mit $\ell \leq k$ und $i \in J^n_\ell$ enthalten, also $\Theta^n_{k,j}(\{n\} \times D^n_{k-1,j}) = h_n(D^n_{k-1,j})$ in der entsprechenden Vereinigung der $h_n(e^n_{\ell,i})$.

Da f_n zellulär ist, ist $f_n(D^n_{k-1,j})$ eine Teilmenge des $(k-1)$-Gerüsts von X_{n+1} und diese ist kompakt, da $D^n_{k-1,j}$ kompakt und f_n stetig ist. Da X_{n+1} ein Zellenkomplex ist, ist $f_n(D^n_{k-1,j})$ also enthalten in einer endlichen Vereinigung von Mengen der Form $e^{n+1}_{\ell,i}$ mit $\ell \leq k-1$ und $i \in J^{n-1}_\ell$, somit

$$\begin{aligned}\Theta^n_{k,j}(\{n+1\} \times D^n_{k-1,j}) &= q(\lambda_n(\{n+1\} \times D^n_{k-1,j}))\\ &= q(\lambda_{n+1}(\{n+1\} \times f_n(D^n_{k-1,j})) = h_{n+1}(f_n(D^n_{k-1,j}))\end{aligned}$$

enthalten in der entsprechenden endlichen Vereinigung der Mengen $h_{n+1}(e^{n+1}_{\ell,i})$.

Ist $k = 1$, so ist $\partial D^n_{k-1,j} = \emptyset$. Im Falle $k \geq 2$ ist $\Phi^n_{k-1,j}(\partial D^n_{k-1,j})$ in einer endlichen Vereinigung von Mengen der Form $e^n_{\ell,i}$ mit $\ell \leq k-2$ und $i \in J^n_\ell$ enthalten und somit $\Theta^n_{k,j}(]0,1[\, \times \partial D^n_{k-1,j})$ in der entsprechenden endlichen Vereinigung der Mengen

$$\Theta^n_{k,j}(]0,1[\, \times e^n_{\ell,i}) = f^n_{\ell+1,i}\,.$$

Dies beendet den Beweis. □

A Existenz universeller Überlagerungen*

Definition A.1 Ein topologischer Raum X heißt *semilokal einfach zusammenhängend*, wenn für jedes $x \in X$ eine x-Umgebung $U \subseteq X$ existiert derart, dass für die Inklusionsabbildung $i_U \colon U \to X$

$$(i_U)_* \colon \pi_1(U, x) \to \pi_1(X, x)$$

der triviale Homomorphismus $[\gamma] \mapsto [c_x]$ ist. Für jede Schleife in U an der Stelle x ist also $i_U \circ \gamma$ in X homotop relativ $\{0, 1\}$ zum konstanten Weg c_x.

Als Schleife in X betrachtet ist γ also homotop zu c_x.

Bemerkung A.2 Ist X ein topologischer Raum $x \in X$ und $U \subseteq X$ eine x-Umgebung mit $(i_U)_* = e$, so ist $(i_V)_* = e$ für jede x-Umgebung $V \subseteq U$, da

$$i_V = i_U \circ i_{U,V}$$

mit der Inklusionsabbildung $i_{U,V} \colon V \to U$ und somit $(i_V)_* = (i_U)_* \circ (i_{U,V})_*$. Ist X lokal wegzusammenhängend, so können wir V wegzusammenhängend wählen. Nach Satz 9.36 gilt dann

$$(i_V)_* = e \quad \text{für} \quad (i_V)_* \colon \pi_1(V, y) \to \pi_1(X, y)$$

für alle $y \in V$. Nach Bemerkung 1.109 können wir V sogar wegzusammenhängend *und offen* wählen.

Der folgende Sachverhalt ist sehr nützlich.

Satz A.3 (Existenz universeller Überlagerungen) *Es sei X ein topologischer Raum, welcher zusammenhängend und lokal wegzusammenhängend ist. Dann sind äquivalent:*

(a) *Für X existiert eine universelle Überlagerung.*

(b) *X ist semilokal einfach zusammenhängend.*

Bemerkung A.4 Jede endlich-dimensionale Mannigfaltigkeit oder unendlich-dimensionale Mannigfaltigkeit M (etwa im Sinne von Palais, wie in Kapitel 16) ist semilokal einfach zusammenhängend, da jede Umgebung eines Punkts eines lokal konvexen topologischen Vektorraums E eine konvexe und somit kontrahierbare Umgebung enthält, also auch jede Umgebung eines Punkts in M (und die kontrahierbare Umgebung ist insbesondere einfach zusammenhängend, folglich semilokal einfach zusammenhängend); ebenso, wenn man Umgebungen in E durch Umgebungen in einem Halbraum $H \subseteq E$ ersetzt (da H konvex ist, ist der Durchschnitt einer konvexen Umgebung in E mit H ebenfalls konvex). Somit folgt:

Für jede zusammenhängende Palais-Mannigfaltigkeit M existiert eine universelle Überlagerung $q\colon \widetilde{M} \to M$.

Da q ein lokaler Homöomorphismus ist und jede Umgebung in M eine zu einer offenen Teilmenge in E (oder einem Halbraum $H \subseteq E$) homöomorphe Teilmenge enthält, ist auch $\widetilde{M}$ eine Palais-Mannigfaltigkeit (siehe Satz 6.23 für die Hausdorff-Eigenschaft).

Bemerkung A.5 In Satz A.6 werden wir sehen, dass jeder Zellenkomplex X semilokal einfach zusammenhängend ist und folglich eine universelle Überlagerung $q\colon \widetilde{X} \to X$ existiert. Wir erwähnen ohne Beweis, dass dann auch $\widetilde{X}$ ein Zellenkomplex ist (siehe Seite 529 in Hatchers Buch, Exercise 1).

Beweis von Satz A.3. (a)$\Rightarrow$(b). Es sei $q\colon \widetilde{X} \to X$ eine universelle Überlagerung. Gegeben $x \in X$ wählen wir ein $y \in \widetilde{X}$ mit $q(y) = x$. Da q ein lokaler Homöomorphismus ist, gibt es eine offene y-Umgebung $W \subseteq \widetilde{X}$ derart, dass $U := q(W)$ eine offene x-Umgebung ist und $q|_W^U$ ein Homöomorphismus. Für jede Schleife $\gamma\colon [0,1] \to U$ an der Stelle x ist dann $\eta := (q|_W^U)^{-1} \circ \gamma$ eine Schleife an der Stelle y in W. Wir betrachten η als Schleife in $\widetilde{X}$. Dann ist $i_U \circ \gamma = q \circ (q|_W^U)^{-1} \circ \gamma = q \circ \eta$. Da $\widetilde{X}$ einfach zusammenhängend ist, ist $[\eta] = [c_y]$ in $\pi_1(\widetilde{X}, y)$ und somit

$$(i_U)_*([\gamma]) = [i \circ \gamma] = [q \circ \eta] = q_*([\eta]) = q_*([c_y]) = [c_x]$$

in $\pi_1(X, x)$.

(b)$\Rightarrow$(a). Sei unser zusammenhängender, lokal wegzusammenhängender topologischer Raum X semilokal einfach zusammenhängend. Ist $X = \emptyset$, so sei $\widetilde{X} := \emptyset$. Sei nun $X \neq \emptyset$; wir wählen ein $x_0 \in X$. Wir betrachten das Fundamentalgruppoid $\pi_1(X)$ von X; wir definieren

$$\widetilde{X} := \{[\gamma] \in \pi_1(X) \colon \gamma(0) = x_0\}$$

und

$$q\colon \widetilde{X} \to X, \quad [\gamma] \mapsto \gamma(1)\,.$$

Topologie auf $\widetilde{X}$. Es sei $[\gamma] \in \widetilde{X}$ und $U \subseteq X$ eine wegzusammenhängende offene Umgebung von $\gamma(1)$ derart, dass $i_*\colon \pi_1(U, \gamma(1)) \to \pi_1(X, \gamma(1))$ der triviale Homomorphismus ist. Für jedes $x \in U$ gibt es einen Weg γ_x von $\gamma(0)$ nach x. Ist auch η ein solcher, so ist

$$[\eta]^{-1}[\gamma_x] = [\eta^- \cdot \gamma_x] = e \quad \text{in } \pi_1(X, \gamma(1)),$$

da $[\eta^- \cdot \gamma_x]$ im Bild von i_* ist. Folglich ist $[\gamma_x] = [\eta]$ in $\pi_1(X)$. Mit Produkten in $\pi_1(X)$ ist also

$$\sigma_{[\gamma],U}\colon U \to \widetilde{X}, \quad x \mapsto [\gamma]\,[\gamma_x]$$

wohldefiniert. Da

$$q(\sigma_{[\gamma],U}(x)) = (\gamma \cdot \gamma_x)(1) = x, \tag{50}$$

ist $\sigma_{[\gamma],U}$ injektiv. Für jedes $y \in U$ ist

$$\sigma_{[\gamma],U} = \sigma_{[\gamma \cdot \gamma_y],U}; \tag{51}$$

ist nämlich $x \in U$ und η_x ein Weg in U von y nach x, so ist $\gamma_y \cdot \eta_x$ ein Weg in U von $\gamma(1)$ nach x und somit

$$\sigma_{[\gamma],U}(x) = [\gamma]\,[\gamma_y \cdot \eta_x] = [\gamma \cdot \gamma_y]\,[\eta_x] = \sigma_{[\gamma \cdot \gamma_y],U}(x)\,.$$

Wir geben $\widetilde{X}$ die finale Topologie bezüglich den Abbildungen $\sigma_{[\gamma],U}$.

Dann wird jedes $\sigma_{[\gamma],U}$ zu einer offenen Abbildung, also $\sigma_{[\gamma],U}(V)$ offen in $\widetilde{X}$ für jede offene Teilmenge $V \subseteq U$. Sei nämlich $\gamma' \in \widetilde{X}$ und U' eine wegzusammenhängende offene $\gamma'(1)$-Umgebung derart, dass $(i_{U'})_*\colon \pi_1(U', \gamma'(1)) \to \pi_1(X, \gamma'(1))$ der triviale Homomorphismus ist. Wir zeigen, dass das Urbild

$$Q := (\sigma_{[\gamma'],U'})^{-1}(\sigma_{[\gamma],U}(V))$$

eine Umgebung in U' ist von jedem Element y in Q. Es ist dann nämlich

$$\sigma_{[\gamma'],U'}(y) = \sigma_{[\gamma],U}(z)$$

für ein $z \in V$; Anwendung von q zeigt wegen (50), dass $x = z$ und somit

$$[\gamma]\,[\gamma_y] = [\gamma']\,[\gamma'_y]$$

mit einem Weg γ'_y von $\gamma'(1)$ nach y in U''. Es sei U'' eine wegzusammenhängende offene Umgebung von y in $U \cap U'$. Dann ist

$$\begin{aligned} \sigma_{[\gamma],U}|_{U''} &= \sigma_{[\gamma\cdot\gamma_y],U}|_{U''} = \sigma_{[\gamma\cdot\gamma_y],U''} \\ &= \sigma_{[\gamma'\cdot\gamma'_y],U''} = \sigma_{[\gamma'\cdot\gamma'_y],U'}|_{U''} = \sigma_{[\gamma'],U'}|_{U''}, \end{aligned} \tag{52}$$

also $U'' \subseteq Q$.

q ist eine Überlagerung. Gegeben $x \in X$ sei U eine wegzusammenhängende offene Umgebung von x in X derart, dass $(i_U)_*\colon \pi_1(U,x) \to \pi_1(X,x)$ trivial ist. Setzen wir

$$A := q^{-1}(\{x\})$$

und

$$V_\alpha := \sigma_{[\gamma],U}(U)$$

für alle $\alpha := [\gamma] \in A$, so ist jedes V_α nach dem Obigen offen in $\widetilde{X}$ und

$$q|_{V_\alpha}\colon V_\alpha \to U$$

ein Homöomorphismus.

Sind $\alpha, \beta \in A$ und existiert ein $y \in V_\alpha \cap V_\beta$, so ist (mit $U'' := U' := U$) $\sigma_{\alpha,U} = \sigma_{\beta,U}$ nach (52) und somit $\alpha = \sigma_{\alpha,U}(x) = \sigma_{\beta,U}(x) = \beta$.

Ist $[\eta] \in q^{-1}(U)$, so ist $y := \eta(1) \in U$. Ist γ_y eine Weg von $\gamma(1)$ nach y, so ist $\alpha := [\eta \cdot \gamma_y^-] \in A$ und

$$\sigma_{[\eta],U} = \sigma_{[\eta\cdot\gamma_y^-],U} = \sigma_{\alpha,U},$$

also $[\eta] = \sigma_{[\eta],U}(y) = \sigma_{\alpha,U}(y) \in V_\alpha$. Es ist also

$$q^{-1}(U) = \bigcup_{\alpha\in A} V_\alpha$$

als Vereinigung paarweise disjunkter Mengen.

$\widetilde{X}$ ist einfach zusammenhängend. Sei $y_0 := [c_{x_0}] \in \widetilde{X}$. Ist $[\gamma] \in \widetilde{X}$, so ist $\gamma\colon [0,1] \to X$ ein Weg in X mit $\gamma(0) = x_0$. Dann ist

$$F\colon [0,1] \times [0,1] \to X, \quad F(t,s) := \gamma(st)$$

stetig. Für jedes $t \in [0,1]$ ist $F_t := F(t,\cdot)$ ein Weg in X von x_0 nach $\gamma(t)$; es ist $F_0 = c_{x_0}$ und $F_1 = \gamma$. Wir erhalten also eine Abbildung

$$\widetilde{\gamma}\colon [0,1] \to \widetilde{X}, \quad t \mapsto [F_t]$$

mit $\widetilde{\gamma}(0) = [c_{x_0}] = y_0$ und derart, dass

$$q \circ \widetilde{\gamma} = \gamma$$

(da $F_t(1) = \gamma(t1) = \gamma(t)$ für alle $t \in [0,1]$). Weiter ist $\widetilde{\gamma}(1) = [F_1] = [\gamma]$. Wir behaupten, dass $\widetilde{\gamma}$ immer stetig ist. Dann ist $\widetilde{X}$ also wegzusammenhängend. Sind η_1 und η_2 in y_0 startende Wege in $\widetilde{X}$ mit $\eta_1(1) = \eta_2(1)$, so ist für $j \in \{1,2\}$

$$\gamma_j := q \circ \eta_j$$

ein in x_0 startender Weg in X, also insbesondere $[\gamma] \in \widetilde{X}$. Nach der Behauptung ist $\widetilde{\gamma}_j$ ein an der Stelle y_0 startender Lift von γ_j, also

$$\eta_j = \widetilde{\gamma}_j$$

wegen Satz 6.9. Insbesondere gilt

$$[\gamma_1] = \widetilde{\gamma}_1(1) = \eta_1(1) = \eta_2(1) = \widetilde{\gamma}_2(1) = [\gamma_2];$$

wegen Folgerung 6.14 ist also $[\widetilde{\gamma}_1] = [\widetilde{\gamma}_2]$ und somit $[\eta_1] = [\eta_2]$. Da es für jedes $y \in \widetilde{X}$ nur eine Homotopieklasse von Wegen von y_0 nach y gibt (und $\widetilde{X}$ wegzusammenhängend ist), ist $\widetilde{X}$ einfach zusammenhängend (vergleiche Lemma 5.41).

Beweis der Behauptung. Für jedes $t \in [0,1]$ existiert eine offene t-Umgebung $Q_t \subseteq [0,1]$ derart, dass $\gamma(Q_t) \subseteq U$ für eine wegzusammenhängende offene Teilmenge $U \subseteq X$ mit $(i_U)_* = e$. Es sei $\delta > 0$ eine Lebesguesche Zahl für die offene Überdeckung $(\gamma^{-1}(Q_t))_{t\in[0,]}$ von $[0,1]$ und $n \in \mathbb{N}$ so groß, dass $\frac{1}{n} < \delta$. Wir betrachten die äquidistante Unterteilung

$$0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = 1$$

mit $t_k := \frac{k}{n}$ für $k \in \{0,1,\ldots,n\}$. Wir zeigen, dass $\widetilde{\gamma}|_{[t_k,t_{k+1}]}$ stetig ist für alle $k \in \{0,\ldots,n-1\}$; nach dem Klebelemma ist $\widetilde{\gamma}$ also (wie behauptet) stetig. Es gibt eine wegzusammenhängende offene Menge $U_k \subseteq X$ mit $\gamma([t_k,t_{k+1}]) \subseteq U_k$ derart, dass $(i_{U_k})_*\colon \pi_1(U_k,\gamma(t_k)) \to \pi_1(X,\gamma(t_k))$ trivial ist. Halte k fest.

Es $\eta\colon [0,1] \to X$, $s \mapsto \gamma(t_k s)$ ein Weg von x_0 nach $\gamma(t_k)$ und für jedes $t \in [t_k, t_{k+1}]$ ist

$$\theta\colon [t_k, t_{k+1}] \to \widetilde{X}, \quad t \mapsto \sigma_{[\eta],U}(\gamma(t))$$

stetig mit $q(\theta(t)) = \gamma(t)$ für alle $t \in [t_k, t_{k+1}]$ und $\theta(t_k) = \sigma_{[\eta],U}(\eta(1)) = [\eta] = \widetilde{\gamma}(t_k)$. Nun ist für jedes $t \in [t_k, t_{k+1}]$

$$h_t\colon [0,1] \to U_k, \quad s \mapsto \gamma(t_k + s(t_{k+1} - t_k))$$

ein Weg von $\gamma(t_k)$ nach $\gamma(t)$ in U_k, also

$$\theta(t) = \sigma_{[\eta],U}(\gamma(t)) = [\eta]\,[h_t] = [\eta \cdot h_t] = [F_t] = \widetilde{\gamma}(t)\,.$$

Somit ist $\widetilde{\gamma}|_{[t_k,t_{k+1}]} = \theta$, eine stetige Funktion. $\square$

Wir zeigen nun:

Satz A.6 *In einem Zellenkomplex X enthält jede Umgebung V eines Punkts $x \in X$ eine offene x-Umgebung $U \subseteq X$, für welche die Menge $\{x\}$ ein starker Deformationsretrakt ist; insbesondere ist U kontrahierbar und einfach zusammenhängend.*

Im Beweis nutzt ein Hilfsresultat.

Lemma A.7 *Es sei $X_1 \subseteq X_2 \subseteq \cdots$ eine strikte gerichtete Folge topologischer Räume und $U_1 \subseteq U_2 \subseteq \cdots$ eine Folge offener Teilmengen $U_n \subseteq X_n$ derart, dass U_n ein starker Deformationsretrakt von U_{n+1} ist für alle $n \in \mathbb{N}$. Weiter sei A ein starker Deformationsretrakt von U_1. Dann ist $U := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n$ eine offene Teilmenge von $X := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n = \lim_{\to} X_n$ und A ein starker Deformationsretrakt von U.*

Beweis. Nach Lemma 1.69 ist U offen in X und ebenso jede in $\lim_{\to} U_n$ offene Teilmenge von U; die von X auf U induzierte Topologie ist also die Topologie des direkten Limes $\lim_{\to} U_n$. Es sei $U_0 := A$. Für $n \in \mathbb{N}$ sei $r_n\colon U_n \to U_{n-1}$ eine starke Deformationsretraktion, $i_{n-1}\colon U_{n-1} \to U_n$ die Inklusionsabbildung und

$$F_n\colon [0,1] \times U_n \to U_n$$

eine Homotopie relativ U_{n-1} von id_{U_n} nach $i_{n-1} \circ r_n$. Wir definieren $F\colon [0,1] \times U \to U$ für $t \in [0,1]$ und $x \in U_n$ mit $n \in \mathbb{N}$ via

$$F(t,x) := x$$

wenn $t \in [0, 2^{-n}]$ bzw.

$$F_m\Big(\frac{t - 2^{-m}}{2^{-m}}, (r_n \circ \cdots \circ r_{m-1})(x)\Big)$$

wenn $t \in [2^{-n}, 1]$, mit $m \in \mathbb{N}$ derart, dass $t \in [2^{-m}, 2^{-m+1}]$. Dies ist unabhängig von der Wahl von m. Da $r_m(x) = x$ für alle $m > n$ und F_m eine Homotopie relativ $U_{m-1} \supseteq U_n$ ist, ist F wohldefiniert, unabhängig von der Wahl von n. Per Konstruktion ist $F|_{[0,1]\times U_n}$ stetig für alle $n \in \mathbb{N}$, nach dem Klebelemma. Da $U = \lim\limits_{\rightarrow} U_n$, ist die Topologie auf U final bezüglich den Inklusionen $U_n \to U$. Nach Folgerung 1.122 ist die Topologie auf $[0,1] \times U$ also final bezüglich den Inklusionsabbildungen

$$[0,1] \times U_n \to [0,1] \times U\,.$$

Folglich ist F stetig und leistet das Gewünschte. $\square$

Beweis von Satz A.6. Es sei X_n das n-Gerüst von X für $n \in \mathbb{N}$ und es seien $\Phi_{n,j} \colon \mathbb{D}_n \to X$ die charakteristischen Abbildungen mit $j \in J_n$ und $e_{n,j} := \Phi_{n,j}(\mathbb{D}_n^0)$. Es sei $x \in X$ und $V \subseteq X$ eine offene x-Umgebung. Wir wählen $m \in \mathbb{N}_0$ minimal derart, dass x im m-Gerüst X_m enthalten ist. Dann ist also $x \in e_{m,i}$ für ein $i \in J_m$. Einer kompakten Kugel in $\mathbb{R}^m$ entsprechend um den Mittelpunkt finden wir wegen $e_{m,i} \sim \mathbb{R}^m$ eine kompakte x-Umgebung K_m in $e_{m,i} \cap V$ derart, dass $\{x\}$ ein starker Deformationsretrakt von $U_m := K_m^0$ mit dem Inneren als Teilmenge von $e_{m,i}$ (also von X_m). Wir setzen noch $U_{m-1} := K_{m-1} := \{x\}$.

Für alle $n \geq m$ konstruieren wir nun in X_n offene Teilmengen $U_n \subseteq V \cap X_n$ mit $U_{n-1} \subseteq U_n$ derart, dass U_n in $V \cap X_n$ relativ kompakt (also in einer kompakten Teilmenge $K_n \subseteq V \cap X_n$ enthalten ist) und U_{n-1} ein starker Deformationsretrakt von U_n ist.

Gelingt dies, so ist $\{x\}$ nach Lemma A.7 ein starker Deformationsretrakt der offenen Teilmenge $U = \bigcup_{n\geq m} U_n$ von $\lim\limits_{\rightarrow\, n\geq m} X_n = \lim\limits_{\rightarrow\, n\geq 0} X_n = X$.

Für $n = m$ ist die Konstruktion erledigt. Sei nun $n > m$ und U_{n-1} schon konstruiert und K_{n-1} wie oben. Die Menge F_n aller $j \in J_n$ mit $\Phi_{n,j}(\mathbb{D}_n) \cap K_{n-1} \neq \emptyset$ ist endlich. Für $j \in F_n$ ist $\Phi_{n,j}^{-1}(K_{n-1})$ eine kompakte Teilmenge von $\mathbb{S}_{n-1}$ und $\Phi_{n,j}^{-1}(U_{n-1})$ in $\mathbb{S}_{n-1}$ offen. Weiter ist $\Phi_{n,j}^{-1}(V)$ eine offene Umgebung von $\Phi_{n,j}^{-1}(K_{n-1})$. Die Abbildung

$$h_n \colon \mathbb{S}_{n-1} \times\,]0,1] \times \mathbb{D}_n \setminus \{0\}, \quad (s,r) \mapsto sr$$

ist ein Homöomorphismus. Es ist $h_n^{-1}(\Phi_{n,j}^{-1}(V) \setminus \{0\})$ eine offene Umgebung von $\Phi_{n,j}^{-1}(K_{n-1}) \times \{0\}$. Mit dem Lemma von Wallace finden wir ein $\varepsilon_n \in]0,1[$ mit $\Phi_{n,j}^{-1}(K_{n-1}) \times [1-\varepsilon_n, 1]$ in der genannten offenen Umgebung. Nach Vergrößeren kann ε_n unabhängig von $j \in F_n$ gewählt werden. Dann ist

$$U_n := \bigcup_{j \in F_n} \Phi_{n,j}(h_n(\Phi_{n,j}^{-1}(U_{n-1}) \times]\varepsilon_n, 1]))$$

eine Teilmenge von X_n mit $U_n \cap X_{n-1} = U_{n-1}$, so dass also $\Phi_{k,j}^{-1}(U_n)$ offen ist für alle $k \in \{0, \ldots, n-1\}$ und $j \in J_k$. Für $j \in J_n$ ist $\Phi_{n,j}^{-1}(U_n) = \emptyset$ offen wenn $j \notin F_n$; ist $j \in F_n$, so ist $\Phi_{n,j}^{-1}(U_n) = h_n(\Phi_{n,j}(U_{n-1}) \times]\varepsilon_n, 1]))$ ebenfalls offen. Also ist U_n offen in X_n. Per Konstruktion ist U_n in der kompakten Teilmenge $K_n := \bigcup_{j \in F_n} \Phi_{n,j}(h_n(\Phi_{n,j}^{-1}(K_{n-1}) \times [\varepsilon_n, 1]))$ von V enthalten. Schließlich ist die Abbildung $F_n \colon [0,1] \times U_n \to U_n$,

$$F_n(t, \Phi_{n,j}(x)) := \Phi_{n,j}\left((1-t)x + t\frac{1}{\|x\|_2}x\right)$$

für $j \in J_n$ und $t \in [0,1]$ wohldefiniert, nach dem Klebelemma stetig und eine Homotopie relativ U_{n-1} von id_{U_n} zu einer Abbildung $F_n(1, \cdot) \colon U_n \to U_n$ mit Bild in U_{n-1}. Also ist U_{n-1} ein starker Deformationsretrakt von U_n. $\square$

B Der Satz von Seifert und van Kampen*

In diesem Anhang stellen wir den Satz von Seifert und van Kampen vor und benutzen ihn zur Berechnung der Fundamentalgruppe eines wegzusammenhängenden Zellenkomplexes.

Formulierung des Satzes

Wir benötigen einen Begriff aus der Gruppentheorie:

B.1 Für jede Familie $(G_\alpha)_{\alpha\in A}$ von Gruppen gibt es eine Gruppe P, zusammen mit einer Familie $(\lambda_\alpha)_{\alpha\in A}$ von Gruppen-Homomorphismen $\lambda_\alpha\colon G_\alpha \to P$ für $\lambda \in P$, so dass für jede Gruppe G und jede Familie $(\phi_\alpha)_{\alpha\colon A}$ von Gruppen-Homomorphismen genau ein Gruppen-Homomorphismus $\phi\colon P \to G$ existiert derart, dass $\phi\circ\lambda_\alpha = \phi_\alpha$ für alle $\alpha \in A$. Man nennt $(P, (\lambda_\alpha)_{\alpha\in A})$ das *freie Produkt* der Familie $(G_\alpha)_{\alpha\in A}$ und schreibt $*_{\alpha\in A}\, G_\alpha := P$.

Freie Produkte sind eindeutig bis auf Isomorphie.[37]

B.2 Es sei X topologischer Raum, $x_0 \in X$ und $(U_\alpha)_{\alpha\in A}$ eine offene Überdeckung von X derart, dass $x_0 \in U_\alpha$ für alle $\alpha \in A$. Es sei

$$P := *_{\alpha\in A}\, \pi_1(U_\alpha, x_0)$$

das freie Produkt mit den kanonischen Homomorphismen $\lambda_\alpha\colon \pi_1(U_\alpha, x_0) \to F$ für $\alpha \in A$. Weiter sei und $i_\alpha\colon U_\alpha \to X$ die Inklusionsabbildung, $\phi_\alpha := (i_\alpha)_*\colon \pi_1(U_\alpha, x_0) \to \pi_1(X, x_0)$ der induzierte Homomorphismus und

$$\phi\colon P \to \pi_1(X, x_0)$$

der von der Familie $(\phi_\alpha)_{\alpha\in A}$ induzierte Homomorphismus mit $\phi\circ\lambda_\alpha = \phi_\alpha$ für alle $\alpha \in A$. Für $\alpha, \beta \in A$ sei $i_{\alpha,\beta}\colon U_\alpha \cap U_\beta \to U_\alpha$ die Inklusionsabbildung and $\lambda_{\alpha,\beta} := (i_{\alpha,\beta})_*\colon \pi_1(U_\alpha\cap U_\beta, x_0) \to \pi_1(U_\alpha, x_0)$ der von $i_{\alpha,\beta}$ induzierte Homomorphismus.

Satz B.3 (Satz von Seifert und van Kampen) *In der Situation von* B.2 *betrachten wir die Bedingungen:*

[37] Ist auch $(Q, (\psi_\alpha)_{\alpha\in A})$ ein freies Produkt, so gibt es Gruppen-Hhomomorphismen $\psi\colon P \to Q$ und $\phi\colon Q \to P$ mit $\psi\circ\phi_\alpha = \psi_\alpha$ und $\phi\circ\psi_\alpha = \phi_\alpha$ für alle $\alpha \in A$. Da $\phi\circ\psi$ und id_P Gruppen-Homomorphismen sind, deren Komposition mit jedem ϕ_α gleich ϕ_α ist, folgt $\phi\circ\psi = \mathrm{id}_P$. Analog ist $\psi\circ\phi = \mathrm{id}_Q$, somit ψ ein Isomorphismus mit $\psi^{-1} = \phi$.

(a) *Für jedes* $\alpha \in A$ *ist* U_α *wegzusammenhängend.*

(b) *Für alle* $\alpha, \beta \in A$ *ist* $U_\alpha \cap U_\beta$ *wegzusammenhängend.*

(c) *Für alle* $\alpha, \beta, \gamma \in A$ *ist* $U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$ *wegzusammenhängend.*

Gelten (a) *und* (b)*, so ist der Gruppen-Homomorphismus*

$$\phi\colon \ast_{\alpha \in A}\, \pi_1(U_\alpha, x_0) \to \pi_1(X, x_0)$$

surjektiv und sein Kern enthält den Normalteiler N *von* $\ast_{\alpha\in A}\pi_1(U_\alpha, x_0)$*, der erzeugt wird von allen Elementen der Form*

$$\lambda_{\alpha,\beta}(g)\lambda_{\beta,\alpha}(g)^{-1}$$

mit $\alpha, \beta \in A$ *und* $g \in \pi_1(U_\alpha \cap U_\beta, x_0)$*. Gilt zudem* (c)*, so ist* $\ker \phi = N$*.*

Für den Beweis von Satz B.3 verweisen wir auf das Buch von Hatcher, Seite 44–46. Auf Anwendungen gehen wir jedoch mit vollem Beweis ein.

Ein wichtiger Spezialfall ist der folgende:

Folgerung B.4 *Gilt* (a), (b) *und* (c) *und ist* $U_\alpha \cap U_\beta$ *einfach zusammenhängend für alle* $\alpha, \beta \in A$ *mit* $\alpha \neq \beta$*, so ist* $N = \{e\}$ *und somit*

$$\phi\colon \ast_{\alpha \in A}\, \pi_1(U_\alpha, x_0) \to \pi_1(X, x_0)$$

ein Gruppen-Isomorphismus.

Beispiel B.5 Wir betrachten ein Bukett

$$X := \bigvee_{\alpha \in A} \mathbb{S}_1$$

von Kreisen $(\mathbb{S}_1, x_0)$ mit $x_0 := 1$. Wir zeigen, dass

$$\pi_1(X, x_0) \cong \ast_{\alpha \in A}\, \pi_1(\mathbb{S}_1, x_0) \cong \ast_{\alpha \in A}\, \mathbb{Z}$$

(was sich auch als die freie Gruppe $F(A)$ über A auffassen lässt, siehe B.15).

Zum Beweis sei $q\colon \coprod_{\alpha \in A} \mathbb{S}_1 \to X$ die kanonische Quotientenabbildung. Die Halbsphäre

$$H := \{z \in \mathbb{S}_1\colon \operatorname{Re}(z) > 0\}$$

ist offen in $\mathbb{S}_1$ und kontrahierbar. Setzen wir für $\alpha \in A$

$$V_\alpha := \mathbb{S}_1 \quad \text{und} \quad V_\delta := H \quad \text{für } \delta \in A \setminus \{\alpha\},$$

so ist $W_\alpha := \coprod_{\delta\in A} V_\delta$ eine q-saturierte offene Teilmenge von $\coprod_{\delta\in A} \mathbb{S}_1$ und somit

$$U_\alpha := q(W_\alpha)$$

offen in X und auch wegzusammenhängend, da jede der Mengen V_δ wegzusammenhängend ist und x_0 enthält. Für alle $\alpha \neq \beta$ ist

$$U_\alpha \cap U_\beta = q\left(\coprod_{\delta\in A} H\right)$$

kontrahierbar (da wir simultan jede Kopie von H kontrahieren können zur konstanten Abbilkdung x_0), insbesondere also wegzusammenhängend und einfach zusammenhängend. Für alle paarweise verschiedenen α, β, γ ist

$$U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma = U_\alpha \cap U_\beta$$

ebenfalls wegzusammenhängend. Für $\alpha \in A$ sei $\lambda_\alpha \colon \mathbb{S}_1 \to \coprod_{\delta\in A} \mathbb{S}_1$ die kanonische Abbildung. Da $q(\lambda_\alpha(\mathbb{S}_1))$ ein starker Deformationsretrakt von U_α ist und zu $\mathbb{S}_1$ homöomorph, ist

$$\pi_1(U_\alpha, x_0) \cong \pi_1(q(\lambda_\alpha(\mathbb{S}_1)), x_0) \cong \pi_1(\mathbb{S}_1, x_0) \cong \mathbb{Z}.$$

Wegen Folgerung B.4 ist also

$$\pi_1(X, x_0) \cong *_{\alpha\in A}\, \pi_1(U_\alpha, x_0) \cong *_{\alpha\in A}\, \mathbb{Z}\,.$$

Weitere Begriffe und Fakten über Gruppen

Um Satz B.3 und Folgerung B.4 gewinnbringend einsetzen zu können, erwähnen wir noch weitere elementare Fakten der Gruppentheorie.

B.6 Zu jeder Menge M gibt es eine Gruppe $F(M)$, zusammen mit einer Abbildung $\theta_M \colon M \to F(M)$, so dass für jede Abbildung $f \colon M \to G$ von M in eine Gruppe G genau ein Gruppen-Homomorphismus $\overline{f} \colon F(M) \to G$ existiert mit $\overline{f} \circ \theta_M = f$. Man nennt $(F(M), \theta_M)$ die *freie Gruppe über* M.

Bemerkung B.7 Zur Konstruktion des freien Produkts kann man die freie Gruppe $(F(M), \theta_M)$ über der disjunkten Vereinigung $M := \coprod_{\alpha \in A} G_\alpha$ nehmen, mit den kanonischen Abbildungen $\iota_\alpha \colon G_\alpha \to M$. Es sei N der von den Elementen

$$\theta_M(\iota_\alpha(h))^{-1}\theta_M(\iota_\alpha(g))^{-1}\theta_M(\iota_\alpha(gh))$$

mit $\alpha \in A$ und $g, h \in G_\alpha$ erzeugte Normalteiler von $F(M)$. Dann ist die Quotientengruppe

$$P := F(M)/N$$

ein freies Produkt für die Familie $(G_\alpha)_{\alpha \in A}$, zusammen mit den Gruppen-Homomorphismen $\lambda_\alpha := q \circ \theta_M \circ \iota_\alpha$, wobei $q \colon F(M) \to F(M)/N$ der kanonische Quotienten-Homomorphismus ist.

Mehr Informationen zu freien Gruppen und freien Produkten findet man in Robinsons Buch (oder auch bei Rotman). Hat M mindestens zwei Elemente, so ist die freie Gruppe $F(M)$ nicht abelsch. Ist $G_\alpha \neq \{e\}$ für mindestens zwei Indizes, so ist $\ast_{\alpha \in A} G_\alpha$ nicht abelsch. Wir erwähnen noch zwei Grundideen, die wir aber nicht benutzen werden:

Bemerkung B.8 (a) Ist M eine Menge, so wählt man eine zu M disjunkte Menge M' der gleichen Mächtigkeit; es gibt also eine bijektive Abbildung $\iota \colon M \to M'$. Man definiert $x^{-1} := \iota(x)$ für $x \in M$ und $\iota(x)^{-1} := x$. Die freie Gruppe $F(M)$ kann realisiert werden als die Menge der Wörter $(g_1, \ldots, g_n)$ in Elementen $g_1, \ldots, g_n \in M \cup M'$, welche *reduziert* sind in dem Sinne, dass

$$g_j^{-1} \neq g_{j+1} \quad \text{für alle } j \in \mathbb{N} \text{ mit } 1 \leq j \leq n-1;$$

verschiedene reduzierte Wörter ergeben verschiedene Gruppenelemente. Das Neutralelement ist das leere Wort $\emptyset$ (mit $n = 0$). Jedes Element $g \in M \cup M'$ ist ein reduziertes Wort und in der freien Gruppe ist $(g_1, \ldots, g_n) = g_1 \cdots g_n$.

(b) Gegeben eine Familie von Gruppen $(G_\alpha)_{\alpha \in A}$ darf man nach Übergang zu isomorphen Gruppen annehmen, dass alle G_α das gleiche Neutralelement besitzen und die Mengen $G_\alpha \setminus \{e\}$ paarweise disjunkt sind. Die von $\bigcup_{\alpha \in A} \lambda_\alpha(G_\alpha)$ erzeugte Untergruppe des freien Produkts erfüllt ebenfalls dessen universelle Eigenschaft und stimmt daher mit dem freien Produkt überein, es wird also von der genannten Vereinigung erzeugt. Jedes Element g des freien Produkts kann daher geschrieben werden als ein Produkt

$$g = \lambda_{\alpha_1}(g_1) \cdots \lambda_{\alpha_n}(g_n) \tag{53}$$

mit einem $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in A$ und $g_j \in G_{\alpha_j}$ für $j \in \{1, \ldots, n\}$. Faktoren mit $g_j = e$ können weggelassen werden; ist $\alpha_{j+1} = \alpha_j$, so ist zudem

$$\lambda_{\alpha_j}(g_j)\lambda_{\alpha_{j+1}}(g_{j+1}) = \lambda_{\alpha_j}(g_j)\lambda_{\alpha_j}(g_{j+1}) = \lambda_{\alpha_j}(g_j g_{j+1}),$$

da λ_{α_j} ein Gruppen-Homomorphismus ist; es kann also n um eins verringert werden. Nach endlich vielen Schritten kann angenommen werden, dass

$$\alpha_j \neq \alpha_{j+1} \quad \text{für alle } j \in \mathbb{N} \text{ mit } 1 \leq j \leq n-1 \tag{54}$$

in (53). Ein Wort $(g_1, \ldots, g_n)$ mit $g_j \in \bigcup_{\alpha \in A}(G_\alpha \setminus \{e\})$, welches (54) erfüllt, wird wieder ein *reduziertes* Wort genannt. Wir haben gesehen, das jedes Gruppenelement Produkt eines reduzierten Wortes ist, und man kann zeigen, dass das reduzierte Wort durch g eindeutig festgelegt ist. Das freie Produkt der G_α lässt sich also realisieren als die Menge aller reduzierten Wörter in $\bigcup_{\alpha \in A}(G_\alpha \setminus \{e\})$; Neutralelement ist das leere Wort. Im Beweis des Satzes von Seifert und van Kampen benötigt man nicht die Eindeutigkeit des reduzierten Wortes $(g_1, \ldots, g_n)$ für ein gegebenes g, nur die gerade gezeigte Existenz.

B.9 Ist G eine Gruppe, so gibt es eine abelsche Gruppe G_{ab} und einen Gruppen-Homomorphismus $\kappa_G \colon G \to G_{\mathrm{ab}}$ derart, dass für jede abelsche Gruppe H und jeden Gruppen-Homomorphismus $\phi \colon G \to H$ genau ein Gruppen-Homomorphismus $\overline{\phi} \colon G_{\mathrm{ab}} \to H$ existiert mit $\overline{\phi} \circ \kappa_G = \phi$.

Die von allen Gruppenelementen der Form $ghg^{-1}h^{-1}$ mit $g, h \in G$ erzeugte Untergruppe G' von G (die sogenannte *Kommutatorgruppe*) ist nämlich ein Normalteiler von G und $G_{\mathrm{ab}} := G/G'$ hat die gewünschte Eigenschaft, zusammen mit dem kanonischen Quotienten-Homomorphismus $\kappa_G \colon G \to G/G'$.

B.10 Zu jeder Menge M gibt es eine abelsche Gruppe $A(M)$, zusammen mit einer Abbildung $\varepsilon_M \colon M \to A(M)$, so dass für jede Abbildung $f \colon M \to G$ von M in eine abelsche Gruppe G genau ein Gruppen-Homomorphismus $\overline{f} \colon A(M) \to G$ existiert mit $\overline{f} \circ \varepsilon_M = f$. Man nennt $(A(M), \varepsilon_M)$ die *freie abelsche Gruppe über M*.

Sei $\mathbb{Z}^M$ die Gruppe aller Funktionen von M nach $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Z}^{(M)}$ die Untergruppe aller Funktionen $f \colon M \to \mathbb{Z}$ derart, die Menge aller $m \in M$ mit $f(m) \neq 0$ endlich ist. Dann ist $A(M) := \mathbb{Z}^{(M)}$ eine freie abelsche Gruppe über M, zusammen mit der Abbildung $\varepsilon_M \colon M \to \mathbb{Z}^{(M)}$, $m \mapsto \delta_m$ mit $\delta_m(n) = 1$ wenn $n = m$ und $\delta_m(n) = 0$ sonst.

B.11 Wir zeigen: *Sind M und N endliche Mengen und die Gruppe $\mathbb{Z}^M$ und $\mathbb{Z}^N$ isomorph, so haben die Mengen M und N gleich viele Elemente, also die gleiche Mächtigkeit $|M| = |N|$.*

Sei nämlich $\phi\colon \mathbb{Z}^M \to \mathbb{Z}^N$ ein Isomorphismus. Wir können die $\mathbb{Q}$-lineare Abbildung

$$\alpha\colon \mathbb{Q}^M \to \mathbb{Q}^N$$

betrachten, die durch $\alpha(e_j) := \phi(e_j)$ festgelegt ist für $j \in M$ mit $e_j := \varepsilon_M(j)$ und die entsprechende Abbildung $\beta\colon \mathbb{Q}^N \to \mathbb{Q}^M$ unter Benutzung von ϕ^{-1}. Dann ist $\alpha(f) = \phi(f)$ für alle $f \in \mathbb{Z}^M$ und $\beta(g) = \phi^{-1}(g)$ für alle $g \in \mathbb{Z}^N$, folglich $(\beta \circ \alpha)(f) = \phi^{-1}(\phi(f)) = f$ für alle $f \in \mathbb{Z}^M$, also $(\beta \circ \alpha)(e_j) = e_j$ für alle $j \in M$ und somit $\beta \circ \alpha = \mathrm{id}_{\mathbb{Q}^M}$. Analog ist $\alpha \circ \beta = \mathrm{id}_{\mathbb{Q}^N}$. Also ist α ein Isomorphismus von Vektorräumen (mit Umkehrabbildung β). Da $\mathbb{Q}^M$ die Dimension $|M|$ hat und $\mathbb{Q}^N$ die Dimension $|N|$, folgt $|M| = |N|$.

Bemerkung B.12 Für $\mathbb{Z}^{(M)}$ und $\mathbb{Z}^{(N)}$ gilt Analoges für beliebige (nicht notwendig endliche) Mengen M und N; im Beweis sind lediglich $\mathbb{Q}^M$ und $\mathbb{Q}^N$ durch $\mathbb{Q}^{(M)}$ bzw. $\mathbb{Q}^{(N)}$ zu ersetzen. Eine freie abelsche Gruppe $A(M) \cong \mathbb{Z}^{(M)}$ hat also einen wohldefinierten *Rang* $|M|$. Wir benötigen nur den Fall endlicher Mengen.

B.13 Für jede Menge M ist $A(M) = (F(M))_{\mathrm{ab}}$.

Für jede Abbildung $f\colon M \to G$ in eine abelsche Gruppe sei $\overline{f}\colon F(M) \to G$ der Gruppen-Homomorphismus mit $\overline{f} \circ \theta_M = f$. Da G abelsch ist, faktorisiert $\overline{f}$ über $\kappa_{F(M)}\colon F(M) \to F(M)_{\mathrm{ab}}$; es gibt einen Homomorphismus $\widetilde{f}\colon F(M)_{\mathrm{ab}} \to G$ derart, dass $\widetilde{f} \circ \kappa_{F(M)} = \overline{f}$. Setzen wir $\varepsilon_M := \kappa_{F(M)} \circ \theta_M\colon M \to F(M)_{\mathrm{ab}}$, so ist also

$$\widetilde{f} \circ \varepsilon_M = \widetilde{f} \circ \kappa_{F(M)} \circ \theta_M = \overline{f} \circ \theta_M = f\,.$$

Da $F(M)$ durch $\theta_M(M)$ erzeugt wird und $\kappa_{F(M)}$ ein surjektive Gruppen-Homomorphismus ist, wird $F(M)_{\mathrm{ab}}$ durch $\kappa_{F(M)}(\theta_M(M)) = \varepsilon_M(M)$ erzeugt. Es gibt daher höchstens einen Gruppen-Homomorphismus $\alpha\colon F(M)_{\mathrm{ab}} \to G$ derart, dass $\alpha \circ \varepsilon_M = f$. Damit erfüllt $(F(M)_{\mathrm{ab}}, \varepsilon_M)$ die universelle Eigenschaft der freien abelschen Gruppe über M.

Bemerkung B.14 Sind M und N endliche Mengen und $\alpha\colon F(M) \to F(N)$ ein Isomorphismus, so ist $|M| = |N|$.

Es ist nämlich auch

$$\alpha_{\mathrm{ab}}\colon F(M)_{\mathrm{ab}} \to F(N)_{\mathrm{ab}}, \quad gF(M)' \mapsto \alpha(g)F(N)'$$

ein Isomorphismus, also $A(M) = F(M)_{\mathrm{ab}} \cong F(N)_{\mathrm{ab}} = A(N)$ und somit $|M| = |N|$ nach B.10. Analog für nicht notwendig endliche Mengen M und N (wegen Bemerkung B.12); eine freie Gruppe $F(M)$ hat also einen wohldefinierten *Rang* $|M|$.

B.15 Für jede Menge A ist

$$\ast_{\alpha \in A} \mathbb{Z} \;\cong\; F(A).$$

Seien nämlich $\lambda_\alpha\colon \mathbb{Z} \to P$ die kanonische Homomorphismen des freien Produkts P. Wir erhalten eine Abbildung

$$\theta_A\colon A \to P, \quad \alpha \mapsto \lambda_\alpha(1)$$

und zeigen, dass (P, θ_A) eine freie Gruppe ist über A. Sei hierzu G eine Gruppe und $f\colon A \to G$ eine Abbildung. Für jedes $\alpha \in A$ ist dann

$$\phi_\alpha\colon \mathbb{Z} \to G, \quad n \mapsto f(\alpha)^n$$

ein Gruppenhomomorphismus. Es sei

$$\phi\colon P \to G$$

der Gruppenhomomorphismus mit $\phi \circ \lambda_\alpha = \phi_\alpha$ für alle $\alpha \in A$. Dann ist

$$\phi(\theta(\alpha)) = \phi(\lambda_\alpha(1)) = \phi_\alpha(1) = f(\alpha)^1 = f(\alpha),$$

also $\phi \circ \theta_A = f$. Durch letztere Eigenschaft ist ϕ eindeutig festgelegt, denn die vom Bild $\theta_A(A)$ erzeugte Untergruppe $H := \langle \theta_A(A) \rangle$ ist ganz P. Aus $\lambda_\alpha(1) \in H$ folgt nämlich

$$\lambda_\alpha(n) = \lambda_\alpha(1)^n)\theta_A(\alpha)^n \in H$$

für alle $n \in \mathbb{Z}$; also $\lambda_\alpha(\mathbb{Z}) \subseteq H$. Die Menge $\bigcup_{\alpha \in A} \lambda_\alpha(\mathbb{Z})$ erzeugt jedoch P, so dass $H = P$.

Die Fundamentalgruppe eines Graphen

Wir berechnen die Fundamentalgruppe eines (0- oder) eindimensionalen Zellenkomplexes, d.h. die Fundamentalgruppe eines Graphen.

Definition B.16 Wir nennen einen Zellenkomplex $(X, (\Phi_{n,j})_{n\in\mathbb{N}_0, j\in J_n})$ der Dimension ≤ 1 einen *Graphen*, wenn jede charakteristische Abbildung $\Phi_{1,j}\colon D_{1,j} \to X$ injektiv ist und es für alle $x \neq y$ im 0-Gerüst höchstens ein $j \in J_1$ gibt mit $\Phi_{1,j}(\partial D_{1,j}) = \{x, y\}$.

B.17 Wir dürfen annehmen, dass $D_{1,j} = [0,1]$ für alle $j \in J_1$. Wir nennen $K_j := \Phi_{1,j}([0,1])$ eine *Kante* des Graphen; es ist

$$\Phi_{1,j}|^{K_j}\colon [0,1] \to K_j$$

ein Homöomorphismus. Für $i \neq j$ in J_1 ist $K_i \neq K_j$, da ja $e_{1,i} = \Phi_{1,i}(]0,1[)$ und $e_{1,j} = \Phi_{1,j}(]0,1[)$ disjunkt sind. Wir nennen

$$\mathcal{V} := X_0$$

die Menge der Ecken (vertices) des Graphen und $\mathcal{E} := \{K_j \colon j \in J_1\}$ die Menge der Kanten (edges). Dann ist $(\mathcal{V}, \mathcal{E})$ ein (möglicherweise unendlicher, ungerichteter) Graph im Sinne der Graphentheorie. Für alle $x \neq y$ in $\mathcal{V}$ gibt es höchstens eine Kante $K \in \mathcal{E}$ mit $\{x, y\} \subseteq K$; wir schreiben $K(x,y) := K(y,x) := K$.

Lemma B.18 *Ist $(X, (\Phi_{n,j})_{n\in\mathbb{N}_0, j\in J_n})$ ein Zellenkomplex der Dimension ≤ 1, so kann man den topologischen Raum X derart zu eine Zellenkomplex $(X, (\Phi'_{n,j})_{n\in\mathbb{N}_0, j\in J'_n})$ machen, dass dieser ein Graph ist.*

Beweis. Wir dürfen annehmen, dass $D_{1,j} = [0,2]$ für alle $j \in J_1$. Wir setzen

$$X'_0 := X_0 \cup \{\Phi_{1,j}(1) \colon j \in J_1\},$$

$J'_0 := X'_0$, $J'_1 := \{0,1\} \times J_1$. Für $x \in X'_0$ sei $\Phi_{0,x}\colon \{x\} \to X$ die Inklusionsabbildung. Für $(i,j) \in J'_1$ sei

$$\Phi'_{1,(i,j)} := \Phi_{1,j}|_{[i,i+1]}\,.$$

Die Topologie $\mathcal{O}$ auf X ist final bezüglich den Abbildungen $\Phi_{0,j}$ mit $j \in J_0$ und $\Phi_{1,j}$ mit $j \in J_1$. Erstere können ohne ändern der finalen Topologie weggelassen und dann durch die $\Phi'_{0,x}$ ersetzt werden, da die Topologie auf $D_{0,j}$ und $\{x\}$ diskret ist. Nach dem Klebelemma ist $\Phi_{1,j}\colon [0,2] \to (X, \mathcal{T})$ für eine Topologie $\mathcal{T}$ auf X genau dann stetig, wenn

$$\Phi_{1,j}|_{[0,1]} = \Phi'_{1,(0,j)} \quad \text{und} \quad \Phi_{1,j}|_{[1,2]} = \Phi'_{1,(1,j)}$$

stetig sind. Somit ist $\mathcal{O}$ auch final bezüglich den Abbildungen $\Phi'_{0,x}$ und $\Phi'_{1,(i,j)}$. Anschließend ersetzen wir noch $[1,2]$ durch $[0,1]$ in der Definition von $\Phi'_{1,(1,j)}$, durch Komponieren mit dem Homöomorphismus $[0,1] \to [1,2]$, $t \mapsto 1+t$. Nach dem Vorigen ist $X = X'_0 \cup_{\phi'} \coprod_{(i,j)\in\{0,1\}\times J_1}[0,1]$ mit $\phi' := \cup_{(i,j)} \Phi'_{1,(i,j)}|_{\{0,1\}}$. □

Definition B.19 Ein n-Tupel von Ecken $(x_1, \ldots, x_n)$ heißt *Eckenweg* in einem Graphen $(\mathcal{V}, \mathcal{E})$, wenn für alle $j \in \{1, \ldots, n-1\}$ eine Kante K existiert mit $\{x_j, x_{j+1}\} \subseteq K$ und $x_j \neq x_{j+1}$ ist. Man spricht auch von einem Eckenweg *von x_1 nach x_n*. Ist $x_j \neq x_{j+2}$ für alle $j \in \{1, \ldots, n-2\}$, so nennen wir den Eckenweg *reduziert*.[38] Man nennt $(\mathcal{V}, \mathcal{E})$ *kombinatorisch zusammenhängend*, wenn es für alle $x, y \in \mathcal{V}$ einen Eckenweg von x nach y gibt (und somit auch einen reduzierten Eckenweg). Gibt es für alle $x, y \in \mathcal{V}$ *genau einen* reduzierten Eckenweg von x nach y, so nennen wir $(\mathcal{V}, \mathcal{E})$ einen *Baum*.

Satz B.20 *Es sei $(X, (\Phi_{n,j})_{n\in\mathbb{N}_0, j\in J_n})$ ein Graph mit Eckenmenge $\mathcal{V} := X_0$ und Kantenmenge $\mathcal{E}$. Dann sind äquivalent:*

(a) *X ist zusammenhängend.*

(b) *X ist wegzusammenhängend.*

(c) *$(\mathcal{V}, \mathcal{E})$ ist kombinatorisch zusammenhängend.*

Beweis. Die Äquivalenz von (a) und (b) ist ein Spezialfall von Satz 3.20 (f).

Gilt (c), so auch (b), denn für $x \in X_0$ existiert für alle $y \in X_0$ ein Eckenweg $(x_1, \ldots, x_n)$ von x nach y. Für alle $j \in \{1, \ldots, n-1\}$ existiert eine Kante K_j mit $\{x_j, x_{j+1}\} \subseteq K_j$. Da K_j wegzusammenhängend ist, sind $x = x_1, x_2, \ldots, x_n = y$ in der Wegkomponente von x enthalten. Ist $z \in X \backslash X_0$, so ist z in einer Kante K von X enthalten. Diese ist wegzusammenhängend

[38] Ist $x_j = x_{j+2}$, so ist auch $(x_1, \ldots, x_j, x_{j+3}, \ldots, x_n)$ ein Eckenweg. Wiederholung des Arguments führt auf einen reduzierten Eckenweg mit gleichem Anfangs- und Endpunkt.

und enthält eine Ecke y, so dass wie y auch z in der Wegkomponente von x ist.

Gelte nun (a). Durch einen Eckenweg verbindbar zu sein ist eine Äquivalenzrelation auf X_0. Für jede Äquivalenzklasse C sei

$$\widetilde{C} := C \cup \{x \in X \colon (\exists y \in C)(\exists K \in \mathcal{E})\colon \{x, y\} \subseteq K\}.$$

Dann ist $\widetilde{C} \cap X_0 = C$.

Wir zeigen nun, dass $L \subseteq \widetilde{C}$ für jede Kante L mit $\widetilde{C} \cap L \neq \emptyset$.

Sei hierzu $y \in \widetilde{C} \cap L$. Kann $y \in C$ gewählt werden, so folgt $x \in \widetilde{C}$ für alle $x \in L$, also $L \subseteq \widetilde{C}$. Andernfalls wäre $y \notin X_0$ und somit $y \in L^0$. Weiter gäbe es ein $z \in C$ und eine Kante K mit $\{y, z\} \subseteq K$. Dann wäre $y \in K^0$, also $K = L$ und $z \in C \cap L$, Widerspruch. Für jedes $j \in J_1$ ist also

$$\Phi_{1,j}^{-1}(\widetilde{C}) = \emptyset \quad \text{oder} \quad \Phi_{1,j}^{-1}(\widetilde{C}) = [0, 1].$$

Da in beiden Fällen das Urbild offen in $B_{1,j} = [0, 1]$ ist, ist $\widetilde{C}$ offen in X.

Ist auch D eine Äquivalenzklasse und $\widetilde{C} \cap \widetilde{D} \neq \emptyset$, so folgt $C = D$, falls es ein $x \in \widetilde{C} \cap \widetilde{D} \cap X_0 = C \cap D$ gibt. Andernfalls finden wir ein $x \in \widetilde{C} \cap \widetilde{D}$, das nicht in X_0 ist. Es gibt dann Kanten K und L und Elemente $y \in C$ sowie $z \in D$ mit $\{x, y\} \subseteq K$ und $\{x, z\} \subseteq L$. Dann ist $x \in K^0 \cap L^0$, also $K = L$. Wegen $y, z \in K = L$ sind y und z durch einen Kantenweg verbindbar, also $C = D$ und folglich $\widetilde{C} = \widetilde{D}$.

Die Mengen $\widetilde{C}$ bilden also eine Partition von X und da alle offen sind, sind sie auch abgeschlossen. Da X zusammenhängend ist, folgt aus $\widetilde{C} \neq \emptyset$ nun $X = \widetilde{C}$ und folglich $X_0 = \widetilde{C} \cap X_0 = C$. Also ist $\mathcal{V} = X_0$ kombinatorisch zusammenhängend. □

Wichtig ist auch:

Lemma B.21 *Ist $(X, (\Phi_{n,j})_{n \in \mathbb{N}_0, j \in J_n})$ ein Baum, so ist X kontrahierbar.*

Beweis. Sei $x \in X_0 = \mathcal{V}$. Für jedes $y \in inX_0$ gibt es genau einen reduzierten Eckenweg $(x_1, \ldots, x_n)$ von x nach y; wir nennen $d(x, y) := n - 1$ den *Abstand* von x und y. Indem wir notfalls $\Phi_{1,j}$ ersetzen durch $t \mapsto \Phi_{1,j}(1 - t)$, dürfen wir annehmen, dass

$$d(x, \Phi_{1,j}(1)) = d(x, \Phi_{1,j}(0)) + 1$$

für alle $j \in J_1$. Wir wählen

$$0 = t_1 < t_2 < \cdots$$

mit $\lim_{k\to\infty} t_k = 1$. Für $y \in X_0$ wählen wir einen reduzierten Eckenweg $(x_1, \ldots, x_n)$ von x nach y. Für $k \in \{1, \ldots, n-1\}$ finden wir ein $j(k) \in J_1$ derart, dass $\Phi_{1,j(k)}(0) = x_k$ und $\Phi_{1,j(k)}(1) = x_{k+1}$. Wir definieren

$$F(t, y) := y \quad \text{wenn } t \in [t_n, 1],$$

$$F(t, y) := \Phi_{1,j(k)}\left(\frac{t - t_k}{t_{k+1} - t_k}\right)$$

wenn $t \in [t_k, t_{k+1}]$ mit $k \in \{1, \ldots, n-1\}$. Ist $z \in X \setminus X_0$, so ist

$$z = \Phi_{1,i}(s)$$

für ein $i \in J_1$ und $s \in]0, 1[$. Für $y := \Phi_{1,i}(0)$ finden wir $x = x_1, x_2, \ldots, x_n = y$ wie zuvor. Wir definieren

$$F(t, z) := z \quad \text{wenn } t \in [t_{n+1}, 1],$$

$$F(t, z) := \Phi_{1,i}\left(\frac{t - t_n}{t_{n+1} - t_n}\, s\right)$$

wenn $t \in [t_n, t_{n+1}]$,

$$F(t, y) := \Phi_{1,j(k)}\left(\frac{t - t_k}{t_{k+1} - t_k}\right)$$

wenn $t \in [t_k, t_{k+1}]$ mit $k \in \{1, \ldots, n-1\}$. Dann ist F wohldefiniert. Weiter sind $F|_{[0,1]\times\{y\}}$ stetig für alle $y \in X_0$ und $F|_{[0,1]\times K}$ stetig für jede Kante K, also F stetig, da die Topologie auf X final ist bezüglich den Abbildungen $\mathrm{id}_{[0,1]} \times \Phi_{n,j}$ mit $n \in \{0, 1\}$ und $j \in J_n$. Per Konstruktion ist F eine Homotopie relativ $\{x\}$ von der konstanten Abbildung x nach id_X, also $\{x\}$ ein starker Deformationsretrakt von X und insbesondere X kontrahierbar. □

Lemma B.22 *Genau dann ist ein wegzusammenhängender Graph ein Baum, wenn es keine im Graphen keine Schleifen gibt, also keine reduzierten Eckenwege $x_1, \ldots, x_n$ mit $n \geq 2$ und $x_1 = x_n$.*

Beweis. Haben wir keinen Baum, so gibt es Ecken x, y und zwei verschiedene reduzierte Eckenwege $x_1, \ldots, x_n$ und $y_1, \ldots, y_m$ von x nach y. Wir wählen x, y und die Eckenwege so, dass $n + m$ minimal ist. Ist $n = 1$ oder $m = 1$, so ist der jeweils andere Weg eine Schleife. Sind $n, m \geq 2$, so muss $x_2 \neq y_2$ sein (da wir sonst $x_1 = y_1$ weglassen könnten, im Widerspruch zu Mimnimalität). Entsprechend ist $x_{n-1} \neq y_{m-1}$. Also ist $x_1, \ldots, x_n = y_m, y_{m-1}, \ldots, y_1 = x_1$ eine Schleife.

Gäbe es in einem Baum eine Schleife $x_1, \ldots, x_n$, so wäre $n \geq 3$ (da $x_2 \neq x_1$) und $n \geq 4$ (da x_1, x_2, x_1 nicht reduziert ist). Somit wäre $x_1, \ldots, x_{n-1}$ und x_n, x_{n-1} zwei verschiedene reduzierte Eckenwege von x_1 nach x_{n-1}, Widerspruch. □

Es gibt stets maximale Unterbäume.

Lemma B.23 *In jedem wegzusammenhängenden Graphen* $(X, (\Phi_{n,j})_{n \in \mathbb{N}_0, j \in J_n})$ *gibt es einen Baum* T*, also ein maximales Element der Menge der Unterkomplexe, welche Bäume sind. Jede Unterkomplex* B *von* X*, welcher ein Baum ist, ist in einem maximalen Baum enthalten. Dieser enthält jede Ecke von* X*.*

Beweis. Jede Vereinigung C einer Menge von Kanten ist abgeschlossen in X und somit ein Unterkomplex (da für jede Kante K ja $K = K^0 \cup \partial K$ mit einer 1-Zelle K^0 und $\partial K \subseteq X_0$). Für jedes $j \in J_0$ ist $\Phi_{0,j}^{-1}(C)$ trivialerweise abgeschlossen; für $j \in J_1$ ist $\Phi_{1,j}^{-1}(C)$ eine der Mengen

$$[0,1], \quad \{0\}, \quad \{1\} \quad \text{oder} \quad \emptyset$$

und somit ebenfalls abgeschlossen in $[0,1]$.

Nun sei B ein Unterkomplex von X, welcher ein Baum ist (z.B. können wir einen Punkt $x_0 \in X_0$ wählen und $B := \{x_0\}$ setzen). Es sei $\mathcal{B}$ die Menge aller Unterkomplexe C von X, welche Bäume sind und $B \subseteq C$ erfüllen. Da $B \in \mathcal{B}$, ist $\mathcal{B}$ nicht leer. Mengeninklusion liefert eine partielle Ordnung auf $\mathcal{B}$. Wir behaupten, dass $\mathcal{B}$ induktiv geordnet ist; nach dem Zornschen Lemma hat dann $\mathcal{B}$ ein maximales Element T (wie gewünscht). Zum Beweis der Behauptung sei $\Gamma \subseteq \mathcal{B}$ eine total geordnete Teilmenge. Ist $\Gamma = \emptyset$, so ist B eine obere Schranke für Γ. Ist Γ nicht leer, so ist

$$D := \bigcup_{C \in \Gamma} C$$

eine Vereinigung von Kanten und somit nach der Vorüberlegung ein Unterkomplex von X; weiter ist $B \subseteq D$. Sind $y, z \in D$, so gibt es $C_1, C_2 \in \Gamma$ mit $y \in C_1$ und $z \in C_2$. Da Γ total geordnet ist, ist eine der Mengen (die wir nun C nennen) Obermenge der anderen. Dann sind also $y, z \in C$. Da C ein Baum ist, gibt es einen reduzierten Eckenweg $(x_1, \ldots, x_n)$ von y nach z in C und somit in D. Sei auch $(y_1, \ldots, y_m)$ ein reduzierter Eckenweg in D von y nach z. Dann ist $y_j \in c_j$ für ein $c_j \in \Gamma$. Es sei A die größte der Mengen $C, c_1, \ldots, c_m$ in $(\Gamma, \subseteq)$. Dann ist A ein Baum. Dann sind sowohl $(x_1, \ldots, x_n)$ als auch $(y_1, \ldots, y_m)$ reduzierte Eckenwege von y nach z in T. Da A ein Baum ist, müssen die genannten Eckenwege gleich sein. Also sind in D reduzierte Eckenwege eindeutig und somit ist D ein Baum, folglich $D \in \mathcal{B}$. Per Konstruktion ist D eine obere Schranke für Γ in $(\mathcal{B}, \subseteq)$.

Sei schließlich T ein maximaler Baum, $y \in X_0$ und $x_0 \in T \cap X_0$. Da X zusammenhängend ist, gibt es einen reduzierten Eckenweg $(x_1, \ldots, x_n)$ von x nach y. Wäre $y \notin T$, so gäbe es ein minimales $k \in \{2, \ldots, n\}$ derart, dass $x_k \notin T$. Nach Ersetzen von y durch x_k dürfen wir annehmen, dass es eine Kante K gibt mit $y \in K$ und ein $x \in T \cap X_0$ mit $x \in K$. Dann wäre also $S := T \cup K$ ein Unterkomplex von X und wegzusammenhängend. Vorbereitung: Ist $z \in T \cap X_0$ ein Element derart, dass $\{y, z\} \subseteq L$ für eine Kante L, so ist L keine Teilmenge von T und somit $L = K$ und $z = x$. Da T maximal ist, kann S kein Baum sein. Es muss also eine Schleife $x_1, \ldots, x_n$ in S geben. Wir wählen n minimal. Da es in T keine Schleife gibt, ist $x_k = y$ für ein $k \in \{1, \ldots, n\}$. Wäre $1 < k < n$, so wären $x_{k-1}, x_{k+1} \in T \cap X_0$ und somit $x_{k-1} = x_{k+1} = x$ nach der Vorbereitung. Also wäre der Eckenweg nicht reduziert, Widerspruch. Also ist $k = 1$ oder $k = n$, also $x_1 = x_n = y$. Nach der Vorbereitung muss $x_2 = x$ sein und $x_{n-1} = x$. Da $n \geq 4$ (siehe Beweis von Lemma B.22), wäre also auch $x_2, \ldots, x_{n-1}$ eine Schleife im Widerspruch zur Minimalität von n. $\square$

Satz B.24 *Es sei $(X, (\Phi_{n,j})_{n \in \mathbb{N}_0, j \in J_n})$ ein zusammenhängender Graph mit Eckenmenge $\mathcal{V} := X_0$ und Kantenmenge $\mathcal{E}$. Es sei T ein maximaler Baum in X und A die Menge aller Kanten $K \in \mathcal{E}$, welche nicht Teilmenge von T sind. Für jedes $x_0 \in X$ ist dann $\pi_1(X, x_0)$ zur freien Gruppe $F(A)$ isomorph.*

Beweis. Ist X ein Baum, so ist $A = \emptyset$ und X kontrahierbar, also $\pi_1(X, x_0) = \{e\} = F(\emptyset) = F(A)$. Sei nun X kein Baum, also T eine echte Teilmenge von X und $A \neq \emptyset$. Nach Satz 8.34 ist die Quotientenabbildung

$$q\colon X \to X/\!/T$$

eine Homotopieäquivalenz. Wählen wir $x_0 \in T$, so ist also

$$q_*\colon \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(X/\!/T, q(x_0))$$

ein Isomorphismus. Weil T in X abgeschlossen ist und X ein Hausdorffscher, normaler topologischer Raum, ist $X/\!/T$ nach Bedingung (i) in Lemma 2.2 (c) Hausdorffsch. Für jede Kante $K \in A$ ist $\partial K \subseteq T$ nach Lemma B.23, also $q(K) \cong K/\!/\partial K \sim \mathbb{S}_1$. Die Inklusionsabbildungen $q(K) \to X/\!/T$ induzieren eine bijektive stetige Abbildung

$$\bigvee_{K \in A} q(K) \to X/\!/T\,;$$

diese ist ein Homöomorphismus, weil die Topologie auf $X/\!/T$ final ist bezüglich den genannten Inklusionsabbildungen. Also ist

$$\pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(X/\!/T, q(x_0)) \cong \pi_1\left(\bigvee_{K \in A} q(K), q(x_0)\right) \cong \pi_1\left(\bigvee_{K \in A} \mathbb{S}_1, 1\right) \cong F(A)\,.$$

□

Folgerung B.25 *Es sei $(X, (\Phi_{n,j})_{n \in \mathbb{N}_0, j \in J_n})$ ein zusammenhängender Graph. Dann sind äquivelent:*

(a) *X ist kontrahierbar.*

(b) *X ist einfach zusammenhängend.*

(c) *X ist ein Baum.*

Beweis. Wir haben bereits gesehen, dass jeder Baum kontrahierbar ist. Weiter ist jeder kontrahierbare topologische Raum einfach zusammenhängend. Wir zeigen noch, dass (c) aus (b) folgt. Via Kontraposition genügt es, $\neg$(c)$\Rightarrow\neg$(b) zu zeigen. Sei also X ein zusammenhängender Graph und kein Baum. Sei $x_0 \in X$. Wählen wir einen maximalen Baum $T \subseteq X$, so ist die Menge A der nicht in T enthaltenen Kanten also nicht leer. Somit ist $\pi_1(X, x_0) \cong F(A)$ die freie Gruppe über einer nicht leeren Menge und somit eine nicht triviale Gruppe. □

Folgerung B.26 *Für jeden Graphen X ist $\pi_k(X, x_0) = \{0\}$ für alle $k \geq 2$ und $x_0 \in X$.*

Beweis. Nach Übergang zur Zusammenhangskomponenten von x_0, die ein offener Unterkomplex ist, dürfen wir X zusammenhängend annehmen. Nach Bemerkung A.5 existiert eine einfach zusammenhängende Überlagerung

$$q\colon \widetilde{X} \to X$$

und $\widetilde{X}$ ist nach Bemerkung A.5 ebenfalls ein Zellenkomplex der Dimension ≤ 1, also ein Graph. Sei $y_0 \in \widetilde{X}$ mit $q(y_0) = x_0$. Als einfach zusammenhängender Graph ist $\widetilde{X}$ nach Folgerung B.25 kontrahierbar, so dass also $\pi_k(\widetilde{X}, y_0) = \{0\}$ für alle $k \geq 2$ (nach Folgerung 9.35) und somit $\pi_k(X, x_0) = \{0\}$, nach Satz 9.21. $\square$

Die Fundamentalgruppe eines Zellenkomplexes

Wir beweisen den folgenden Satz.

Satz B.27 *Es sei $(X, (\Phi_{n,j})_{n\in\mathbb{N}_0, j\in J_n})$ ein wegzusammenhängender Zellenkomplex, X_1 sein 1-Gerüst, x_0 im 0-Gerüst X_0 und $i\colon X_1 \to X$ die Inklusionsabbildung. Der Definitionsbereich der charakteristischen Abbildung $\Phi_{2,j}\colon D_{2,j} \to X$ sei als die Kreisscheibe $D_{2,j} = \mathbb{D}_2 \subseteq \mathbb{C}$ gewählt für alle $j \in J_2$. Für jedes $j \in J_2$ sei $y_j := \Phi_{2,j}(1)$ und $\gamma_j\colon [0,1] \to X_1$ der durch*

$$\gamma_j(t) := \Phi_{2,j}(e^{2\pi i t})$$

gegebene geschlossene Weg und θ_j ein Weg von x_0 nach y_j in X_1. Dann gilt:

(a) *$i_*\colon \pi_1(X_1, x_0) \to \pi_1(X, x_0)$ ist ein surjektiver Gruppen-Homomorphismus, also*

$$\pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(X_1, x_0)/N$$

mit dem Kern N von i_*.

(b) *N ist gleich dem von den Elementen*

$$(\theta_j^-)_\sharp([\gamma_j]) = [\theta_j]\,[\gamma_j]\,[\theta_j]^{-1}$$

mit $j \in J_2$ erzeugten Normalteiler K von $\pi_1(X_1, x_0)$.

Zur Vorbereitung des Beweises untersuchen wir zunächst Fundamentalgruppen beim Anheften einer einzelnen 2-Zelle.

Lemma B.28 *Es sei Y ein Hausdorffscher topologischer Raum und $\Phi\colon \mathbb{D}_2 \to Y$ eine stetige Abbildung derart, dass $e := \Phi(\mathbb{D}_2^0)$ offen in Y ist und $\Phi|_{\mathbb{D}_2^0}^{e}$ ein Homöomorphismus, mit $\mathbb{D}_2^0 := \mathbb{D}_2 \setminus \mathbb{S}_1 \subseteq \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$. Es sei $X := Y \setminus e$; weiter sei $i\colon X \to Y$ die Inklusionsabbildung und $x_0 \in X$. Schließlich sei $\gamma\colon [0,1] \to X$ der durch*

$$\gamma(t) := \Phi(e^{2\pi i t})$$

gegebene geschlossene Weg und $y_0 := \Phi(1)$; wir nehmen an, dass es einen Weg $\theta\colon [0,1] \to X$ von x_0 nach y_0 in X gibt. Dann ist

$$i_*\colon \pi_1(X,x_0) \to \pi_1(Y,x_0)$$

surjektiv und es ist $\ker(i_*)$ *gleich dem vom Element*

$$(\theta^-)_\sharp([\gamma]) = [\theta]\,[\gamma]\,[\theta]^{-1}$$

erzeugten Normalteiler N von $\pi_1(X,x_0)$.

Beweis. Es sind

$$U_1 := X \cup \Phi(\mathbb{D}_2 \setminus \{0\}) \quad \text{und} \quad U_2 := \Phi(\mathbb{D}_2^0)$$

wegzusammenhängende offene Teilmengen von Y, die beide das Element $z_0 := \Phi(1/2)$ enthalten. Weiter ist $Y = U_1 \cup U_2$ und es ist

$$U_1 \cap U_2 = \Phi(\mathbb{D}_2^0 \setminus \{0\})$$

wegzusammenhängend. Da U_2 kontrahierbar ist, ist $\pi_1(U_2,z_0) = \{e\}$ und somit der kanonische Homomorphismus

$$\lambda_1\colon \pi_1(U_1,z_0) \to \ast_{\alpha\in\{1,2\}}\,\pi_1(U_\alpha,z_0)$$

ein Isomorphismus. Wir betrachten die Inklusionsabbildung $j\colon U_1 \to Y$ und schreiben j'' für den zugehörigen Morphismus $(U_1,z_0) \to (Y,z_0)$ punktierter topologischer Räume; dieser induziert einen Homomorphismus

$$j''_*\colon \pi_1(U_1,z_0) \to \pi_1(Y,z_0)\,.$$

Weiter sei $\mu\colon U_1 \cap U_2 \to U_1$ die Inklusionsabbildung und

$$\mu_*\colon \pi_1(U_1 \cap U_2, z_0) \to \pi_1(U_1, z_0)$$

der induzierte Homomorphismus. Aus dem Satz von Seifert und van Kampen folgern wir, dass j''_* surjektiv ist und $\pi_1(Y, z_0)$ isomorph zu

$$\pi_1(U_1, z_0)/K$$

mit $K := \ker(j''_*)$, wobei K übereinstimmt mit dem von $\mu_*(\pi_1(U_1 \cap U_2, z_0))$ erzeugten Normalteiler von $\pi_1(U_1, z_0)$. Da $\Phi(\frac{1}{2}\mathbb{S}_1)$ ein starker Deformationsretrakt von $U_1 \cap U_2$ ist, ist

$$\pi_1(U_1 \cap U_2, z) \cong \mathbb{Z}$$

eine unendliche zyklische Gruppe, die durch das Element $[\eta]$ mit

$$\eta\colon [0,1] \to U_1 \cap U_2, \quad t \mapsto \Phi((1/2)e^{2\pi i t})$$

erzeugt wird. Es ist dann also $\operatorname{im}(\mu_*)$ eine zyklische Gruppe mit Erzeuger $[\mu \circ \eta]$ und folglich K der von $[\mu \circ \eta]$ erzeugte Normalteiler von $\pi_1(U_1, z_0)$. Wir schreiben j' für j, betrachtet als Morphismus $(U_1, y_0) \to (Y, y_0)$ punktierter topologischer Räume und erhalten den induzierten Homomorphismus

$$j'_*\colon \pi_1(U_1, y_0) \to \pi_1(Y, y_1)\,.$$

Es ist

$$\sigma\colon [0,1] \to U_1, \quad t \mapsto \Phi(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}t)$$

ein Weg von y_0 nach z_0 und $j \circ \sigma\colon [0,1] \to Y$ der entsprechende Weg in Y. Wir erhalten ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(U_1, z_0) & \xrightarrow{j''_*} & \pi_1(Y, z_0) \\ (\sigma^-)_\sharp \uparrow & & \uparrow (j \circ \sigma^-)_\sharp \\ \pi_1(U_1, y_0) & \xrightarrow{j'_*} & \pi_1(Y, y_0), \end{array}$$

in welchem die vertikalen Pfeile Isomorphismen sind (vgl. Satz 9.36). Also ist

$$\ker(j'_*) = \sigma_\sharp(\ker(j''_*))$$

der von $\sigma_\sharp([\mu\circ\eta])$ erzeugte Normalteiler von $\pi_1(U_1,y_0)$. Mit der Inklusionsabbildung

$$k\colon X\to U_1$$

ist hierbei $[\mu\circ\eta]=[k\circ\gamma]$ in $\pi_1(U_1,y_0)$, wie wir gleich nachprüfen werden. Definieren wir

$$r\colon U_1\to X$$

durch $r(x):=x$ für $x\in X$, $r(\Phi(sy)):=\Phi(y)$ für $s\in]0,1]$ und $y\in\mathbb{S}_1$, so erhalten wir eine starke Deformationsretraktion, denn $F\colon[0,1]\times U_1\to U_1$,

$$(t,x)\mapsto\begin{cases} x & \text{wenn } x\in X;\\ \Phi((1-t)sy+ty) & \text{wenn } z=sy \text{ mit } s\in]0,1] \text{ und } y\in\mathbb{S}_1\end{cases}$$

ist eine Homotopie relativ X von id_{U_1} nach $k\circ r$. Also ist

$$[0,1]\times[0,1]\to U_1,\quad (t,s)\mapsto F(t,(\sigma^-\cdot((\mu\circ\eta)\cdot\sigma))(s))$$

eine Homotopie relativ $\{0,1\}$ von $\sigma^-\cdot((\mu\circ\eta)\cdot\sigma)$ nach

$$\underbrace{(r\circ\sigma^-)}_{=c_{y_0}}\cdot\underbrace{(k\circ r\circ\mu\circ\eta)}_{=k\circ\gamma}\cdot\underbrace{(r\circ\sigma)}_{=c_{y_0}}$$

und folglich

$$[\sigma^-]\,[\mu\circ\eta]\,[\sigma]=[k\circ\gamma]\,.$$

Es definiert k einen Morphismus $k'\colon(X,y_0)\to(U_1,y_0)$ von Raumpaaren; ebenso definiert i einen Morphismus $i'\colon(X,y_0)\to(Y,y_0)$. Da X ein starker Deformationsretrakt von U_1 ist, ist k eine Homotopieäquivalenz und somit

$$k'_*\colon\pi_1(X,y_0)\to\pi_1(U_1,y_0)$$

ein Isomorphismus. Da $j'\circ k'=i'$, ist $j'_*\circ k'_*=i'_*$. Jetzt müssen wir nur noch den Basispunkt wechseln von y_0 nach x_0. Wir betrachten hierzu k als Morphismus $(X,x_0)\to(U_1,x_0)$ von Raumpaaren und j als Morphismus $(U_1,x_0)\to(Y,x_0)$. Dann ist $i=j\circ k$ und folglich $i_*=j_*\circ k_*$. Wir haben ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccccc}\pi_1(X,y_0) & \xrightarrow{k'_*} & \pi_1(U_1,y_0) & \xrightarrow{j'_*} & \pi_1(Y,y_0)\\ \theta_\sharp\uparrow & & \uparrow(j\circ\theta)_\sharp & & \uparrow(i\circ\theta)_\sharp\\ \pi_1(X,x_0) & \xrightarrow{k_*} & \pi_1(U_1,x_0) & \xrightarrow{j_*} & \pi_1(Y,x_0),\end{array}$$

in dem die vertikalen Pfeile Isomorphismen sind. Wir schließen, dass

$$\begin{aligned}\ker(i_*) &= \ker(j_* \circ k_*) = \ker((i \circ \theta)_\sharp \circ j_* \circ k_*) = \ker(j'_* \circ k'_* \circ \theta_\sharp) \\ &= (k'_* \circ \theta_\sharp)^{-1}(\ker(j'_*))\,.\end{aligned}$$

Wir wissen, dass $\ker(j_*)$ der von

$$[k \circ \gamma] = k'_*([\gamma]) = (k'_* \circ \theta_\sharp)((\theta^-)_\sharp([\gamma]))$$

erzeugte Normalteiler von $\pi_1(U_1, y_0)$ ist. Da $k'_* \circ \theta_\sharp$ ein Isomorphismus ist, ist $\ker(i_*) = (k'_* \circ \theta_\sharp)^{-1}(\ker(j'_*))$ also der von $(k'_* \circ \theta_\sharp)^{-1}([k \circ \gamma]) = (\theta^-)_\sharp([\gamma])$ erzeugte Normalteiler von $\pi_1(X, x_0)$. □

Lemma B.29 *Es sei $q\colon G \to H$ ein surjektiver Gruppenhomomorphismus. Es sei $\ker(q)$ der von einer Teilmenge $R \subseteq G$ erzeugte Normalteiler von G. Weiter sei $S \subseteq H$ eine Teilmenge und $N \subseteq H$ der von S erzeugte Normalteiler von H. Für jede Teilmenge $S' \subseteq G$ mit $q(S') = S$ ist dann*

$$q^{-1}(N)$$

gleich dem von $R \cup S'$ erzeugten Normalteiler K von G.

Beweis. Es ist $q^{-1}(N)$ ein Normalteiler von G, welcher $R \cup S'$ enthält; somit ist $K \subseteq q^{-1}(N)$. Da K ein Normalteiler von G ist und R enthält, ist der von R erzeugte Normalteiler in K enthalten, also

$$\ker(q) \subseteq K\,. \tag{55}$$

Da q surjektiv ist, ist $q(K)$ ein Normalteiler von H. Da dieser S enthält, ist $N \subseteq q(K)$ und folglich

$$q^{-1}(N) \subseteq q^{-1}(q(K)) = K,$$

wobei die letzte Gleichheit wegen (55) gilt. □

Beweis von Satz B.27. Teil (a) ist ein Spezialfall von Satz 10.16 (a).

(b) Für die Inklusionsabbildung $\ell\colon X_2 \to X$ ist $\ell_*\colon \pi_1(X_2, x_0) \to \pi_1(X, x_0)$ nach Satz 10.16 (b) ein Isomorphismus und $i_* = \ell_* \circ (i|^{X_2})_*$, also $\ker(i_*) = \ker((i|^{X_2})_*)$. Wir dürfen also annehmen, dass $X = X_2$ ein Zellenkomplex der

Dimension ≤ 2 ist.

Für eine endliche Teilmenge $\mathcal{E} \subseteq J_2$ sei $K_\mathcal{E} \subseteq \pi_1(X_1, x_0)$ der von den Elementen $[\theta_j]\,[\gamma_j]\,[\theta_j^-]$ mit $j \in \mathcal{E}$ erzeugte Normalteiler von $\pi_1(X_1, x_0)$ und $X_\mathcal{E}$ der Unterkomplex

$$X_\mathcal{E} := X_1 \cup \bigcup_{j \in \mathcal{E}} \Phi_{2,j}(\mathbb{D}_2)$$

von X. Die Inklusionsabbildung $i_\mathcal{E} \colon X_1 \to X_\mathcal{E}$ induziert einen Homomorphismus

$$(i_\mathcal{E})_* \colon \pi_1(X_1, x_0) \to \pi_1(X_\mathcal{E}, x_0)\,.$$

Dann ist

$$\ker(i_*) = \bigcup_{\mathcal{E} \in \mathcal{F}} \ker((i_\mathcal{E})_*) \tag{56}$$

mit der Menge $\mathcal{F}$ aller endlichen Teilmengen von J_2. Für jedes $\mathcal{E} \in \mathcal{F}$ ist nämlich

$$i = j_\mathcal{E} \circ i_\mathcal{E}$$

mit der Inklusionsabbildung $j_\mathcal{E} \colon X_\mathcal{E} \to X$ und somit

$$i_* = (j_\mathcal{E})_* \circ (i_\mathcal{E})_*,$$

woraus $\ker((i_\mathcal{E})_*) \subseteq \ker(i_*)$ folgt. Sei umgekehrt $[\eta] \in \ker(i_*)$. Dann ist $[i \circ \eta] = [c_{x_0}]$ in $\pi_1(X, x_0)$, es gibt also eine Homotopie $F \colon [0,1] \times [0,1] \to X$ relativ $\{0,1\}$ von η nach c_{x_0}. Nach Satz 3.20 (c) ist dann

$$F([0,1]^2) \subseteq X_1 \cup \bigcup_{j \in \mathcal{E}} \Phi_{2,j}(\mathbb{D}_2)$$

für eine endliche Teilmenge $\mathcal{E} \subseteq J_2$. Dann ist $F|^{X_\mathcal{E}}$ eine Homotopie relativ $\{0,1\}$ von $i_\mathcal{E} \circ \eta$ nach c_{x_0} in $X_\mathcal{E}$, also

$$(i_\mathcal{E})_*([\eta]) = [i_\mathcal{E} \circ \eta] = [c_{x_0}] = e$$

in $\pi_1(X_\mathcal{E}, x_0)$ und somit $[\eta] \in \ker((i_\mathcal{E})_*)$.

Wir behaupten, dass

$$\ker((i_\mathcal{E})_*) = K_\mathcal{E} \tag{57}$$

für alle endlichen Teilmengen $\mathcal{E} \subseteq J_2$. Stimmt dies, so ist

$$\bigcup_{\mathcal{E} \in \mathcal{F}} \ker((i_\mathcal{E})_*) = \bigcup_{\mathcal{E} \in \mathcal{F}} K_\mathcal{E} \tag{58}$$

eine Untergruppe von $\pi_1(X_1, x_0)$ (da $K_{\mathcal{E}_1} \cup K_{\mathcal{E}_2} \subseteq K_{\mathcal{E}_1 \cup \mathcal{E}_2}$) und somit ein Normalteiler. Da dieser $[\theta_j]\,[\gamma_j]\,[\theta_j^-]$ enthält für alle $j \in J_2$, ist

$$K \subseteq \bigcup_{\mathcal{E} \in \mathcal{F}} K_{\mathcal{E}}. \tag{59}$$

Da K für alle $j \in \mathcal{E}$ das Element $[\theta_j]\,[\gamma_j]\,[\theta_j^-]$ enthält, ist $K_{\mathcal{E}} \subseteq K$. Es gilt dann also auch die umgekehrte Inklusion in (59) und somit Gleichheit. Mit (56) und (58) folgt dann

$$N = \ker(i_*) = \bigcup_{\mathcal{E} \in \mathcal{F}} \ker((i_{\mathcal{E}})_*) = \bigcup_{\mathcal{E} \in \mathcal{F}} K_{\mathcal{E}} = K,$$

was den Beweis beendet.

Die Behauptung ist trivial für $\mathcal{E} = \emptyset$, da dann $X_{\mathcal{E}} = X_1$ und $i_{\mathcal{E}} = \mathrm{id}$. Wir nehmen nun $\mathcal{E} \neq \emptyset$ an und beweisen die Behauptung per Induktion nach der Anzahl $|\mathcal{E}| \in \mathbb{N}$ der Elemente von $\mathcal{E}$. Der Induktionsanfang $|\mathcal{E}| = 1$ ist ein Spezialfall von Lemma B.28. Sei nun $\mathcal{E}$ eine endliche Teilmenge von J_2 mit $n := |\mathcal{E}| \geq 2$ und gelte die Behauptung bereits für Teilmengen mit $n-1$ Elementen. Es seien $j_1, \ldots, j_n$ die paarweise verschiedenen Elemente von $\mathcal{E}$ und

$$\mathcal{G} := \{j_1, \ldots, j_{n-1}\}\,.$$

Per Induktionsvoraussetzung ist $\ker((i_{\mathcal{G}})_*)$ der von den Elementen $[\theta_j]\,[\gamma_j]\,[\theta_j^-]$ mit $j \in \{1, \ldots, n-1\}$ erzeugte Normalteiler von $\pi_1(X_1, x_0)$. Es ist

$$i_{\mathcal{E}} = k \circ i_{\mathcal{G}}$$

mit der Inklusionsabbildung $k\colon X_{\mathcal{G}} \to X_{\mathcal{E}} = X_{\mathcal{G}} \cup \Phi_{2,j_n}(\mathbb{D}_2)$, also

$$(i_{\mathcal{E}})_* = k_* \circ (i_{\mathcal{G}})_*$$

und folglich

$$\ker((i_{\mathcal{E}})_*) = ((i_{\mathcal{G}})_*)^{-1}(\ker(k_*))\,.$$

Nach Lemma B.28 ist $\ker(k_*)$ der von

$$[i_{\mathcal{G}} \circ \theta_{j_n}]\,[i_{\mathcal{G}} \circ \gamma_{j_n}]\,[i_{\mathcal{G}} \circ \theta_{j_n}^-] = (i_{\mathcal{G}})_*([\theta_{i_n}]\,[\gamma_{j_n}]\,[\theta_{j_n}^-])$$

erzeugte Normalteiler von $\pi_1(X_{\mathcal{G}}, x_0)$. Nach Lemma B.29 ist der Kern $\ker(i_{\mathcal{E}}) = ((i_{\mathcal{G}})_*)^{-1}(\ker(k_*))$ also der von den Elementen

$$[\theta_j]\,[\gamma_j]\,[\theta_j^-]$$

mit $j \in \mathcal{E}$ erzeugte Normalteiler von $\pi_1(X_1, x_0)$ und somit gleich $K_{\mathcal{E}}$. Dies beendet den Beweis der Behauptung. $\square$

Bemerkung B.30 Wir haben den Beweis von Satz B.27 zurückgeführt auf den Fall von Zellenkomplexen mit endlich vielen 2-Zellen und per Induktion schließlich auf Lemma B.28 über das Anheften einer einzelnen 2-Zelle. Zu dessen Beweis wurde der Satz von Seifert und van Kampen benutzt, jedoch nur in einer simplen Fassung mit zwei offenen Mengen U_1 und U_2 (statt einer Familie $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$). Einen völlig anderen Beweis für Satz B.27 finden Sie im Buch von Hatcher (Seite 50–51).

Anwendung auf geschlossene Flächen

Wir betrachten nun die Fundamentalgruppen der geschlossenen Flächen.

Satz B.31 *Für jedes $g \in \mathbb{N}_0$ gilt*

$$\pi_1(\mathbb{M}_g)_{\mathrm{ab}} \cong \mathbb{Z}^{2g} .$$

Für jedes $g \in \mathbb{N}$ gilt

$$\pi_1(\mathbb{N}_g)_{\mathrm{ab}} \cong \mathbb{Z}^{g-1} \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) .$$

Bemerkung B.32 Aus Satz B.31 folgt Satz 4.16. Es kann dort sogar das Wort “homöomorph” durch “homopotieäquivalent” ersetzt werden und “$\sim$” durch “$\simeq$”.

Beweis von Satz B.31. Für $g = 0$ ist $\pi_1(\mathbb{M}_0) = \pi_1(\mathbb{S}_2) = \{e\}$ mit abelsch gemachter Gruppe $\{0\} \cong \mathbb{Z}^0 = \mathbb{Z}^{2g}$. Für $g = 1$ ist $\mathbb{M}_1$ ein Torus homöomorph zu $\mathbb{S}_1 \times \mathbb{S}_1$, also

$$\pi_1(\mathbb{M}_1) \cong \pi_1(\mathbb{S}_1 \times \mathbb{S}_1) \cong \pi_1(\mathbb{S}_1) \times \pi_1(\mathbb{S}_1) \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} = \mathbb{Z}^2 = \mathbb{Z}^{2g} .$$

Im Falle $g \geq 3$ konstruieren wir $\mathbb{M}_g$ wie in 4.8, ersetzen jedoch das $4g$-Eck durch die Einheitskreisscheibe $\mathbb{D}_2$ und die Kanten durch die entsprechenden Kreisbögen. Wir bilden ein Bukett X_1 von $2g$ Kreisen mit dem Basispunkt x_0 und bezeichen die Schleifen um x_0, die je einen Kreis einfach durchlaufen, mit

$$\alpha_1, \beta_1, \ldots, \alpha_g, \beta_g .$$

Nun heften wir die Kreisscheibe an X_1 an derart, dass längs jeder der mit a_j markierten Strecken α_j durchlaufen wird, längs jeder der mit b_j markierten Strecken β_j. Ist $\Phi\colon \mathbb{D}_2 \to \mathbb{M}_g$ die entsprechende charakteristische Abbildung, so ist

$$\gamma\colon [0,1] \to X_1, \quad t \mapsto \Phi(e^{2\pi i t})$$

dann also ein Weg, der nacheinander α_1, β_1, α_1^-, β_1^-, …, α_g, β_g, α_g^-, β_g^- durchläuft und folglich

$$[\gamma] = [\alpha_1][\beta_1][\alpha_1]^{-1}[\beta_1]^{-1} \cdots [\alpha_g][\beta_g][\alpha_g]^{-1}[\beta_g]^{-1}\,. \tag{60}$$

Es ist $\pi_1(X_1, x_0)$ eine freie Gruppe in den Erzeugern $[\alpha_j]$ und $[\beta_j]$ für $j \in \{1, \ldots, g\}$ (vergleiche Beispiel B.5). Ist N der von $[\gamma]$ erzeugte Normalteiler von $\pi_1(X_1, x_0)$, so ist für die Inklusionsabbildung $i\colon X_1 \to \mathbb{M}_g$

$$i_*\colon \pi_1(X_1, x_0) \to \pi_1(\mathbb{M}_g, x_0) =: H$$

ein surjektiver Homomorphismus und $\ker(i_*)$ der von $[\gamma]$ erzeugte Normalteiler, nach Satz B.27. Die Kommutatorgruppe H' ist das Bild der Kommutatorgruppe von $G := \pi_1(X_1, x_0)$ unter i_*, also $(i_*)^{-1}(H')$ nach Lemma B.29 der von G' und $[\gamma]$ erzeugte Normalteiler. Betrachten wir den kanonischen Homomorphismus

$$\alpha\colon \pi_1(X_1, x_0) \to \pi_1(X_1, x_0)_{\mathrm{ab}} \cong \mathbb{Z}^{2g},$$

von G nach G_{ab}, so ist G' der Kern. Weiter ist $\alpha([\gamma]) = 0$ wegen (60) und somit $\ker(\alpha) = G'$ ebenfalls gleich dem von G' und $[\gamma]$ erzeugten Normalteiler. Es ist somit

$$H_{\mathrm{ab}} = H/H' \cong G/(i_*)^{-1}(H') = G/G' = G_{\mathrm{ab}} \cong \mathbb{Z}^{2g}\,.$$

Entsprechend entsteht $\mathbb{N}_g$ für $g \in \mathbb{N}$ durch Anheften einer 2-Zelle $\mathbb{D}_2$ an ein Bukett X_1 von g Kreisen mit Basispunkt x_0. Ist $\Phi\colon \mathbb{D}_2 \to X_1$ die charakteristische Abbildung, so erfüllt die Schleife

$$\gamma\colon [0,1] \to X_1, \quad t \mapsto \Phi(e^{2\pi i t})$$

die Bedingung

$$[\gamma] = [\alpha_1]^2 \cdots [\alpha_g]^2 \tag{61}$$

mit den Schleifen α_j, welche vom Basispunkt ausgehend je einen der Kreise einfach durchlaufen. Es ist $\pi_1(X_1, x_0)$ eine freie Gruppe in den Erzeugern

$[\alpha_j]$ für $j \in \{1, \ldots, g\}$ (vergleiche Beispiel B.5). Ist N der von $[\gamma]$ erzeugte Normalteiler von $\pi_1(X_1, x_0)$, so ist für die Inklusionsabbildung $i\colon X_1 \to \mathbb{N}_g$

$$i_*\colon \pi_1(X_1, x_0) \to \pi_1(\mathbb{N}_g, x_0) =: H$$

ein surjektiver Homomorphismus und $\ker(i_*)$ der von $[\gamma]$ erzeugte Normalteiler, nach Satz B.27. Die Kommutatorgruppe H' ist das Bild der Kommutatorgruppe von $G := \pi_1(X_1, x_0)$ unter i_*, also $(i_*)^{-1}(H')$ nach Lemma B.29 der von G' und $[\gamma]$ erzeugte Normalteiler. Betrachten wir den kanonischen Homomorphismus

$$\alpha\colon \pi_1(X_1, x_0) \to \pi_1(X_1, x_0)_{\mathrm{ab}} \cong \mathbb{Z}^g$$

von G nach G_{ab}, so ist G' der Kern. Die von $\alpha([\gamma])$ erzeugte Untergruppe K der abelschen Gruppe G_{ab} ist ein Normalteiler, somit $\alpha^{-1}(K)$ ebenfalls gleich dem von G' und $[\gamma]$ erzeugten Normalteiler. Es ist somit

$$H_{\mathrm{ab}} = H/H' \cong G/(i_*)^{-1}(H') = G/\alpha^{-1}(K) \cong G_{\mathrm{ab}}/K\,.$$

Da G_{ab} abelsch ist, gilt

$$\alpha([\eta]) = \alpha([\gamma])$$

für das Element

$$[\eta] := ([\alpha_1] \cdots [\alpha_g])^2,$$

unter Benutzung von (61). Identifizieren wir G_{ab} mit $\mathbb{Z}^g$, indem wir $\alpha([\alpha_j])$ mit $e_j = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$ identifizieren, so ist K also die von

$$2e_1 + \cdots + 2e_g$$

erzeugte Untergruppe. Nun ist $\mathbb{Z}^g$ auch die freie abelsche Gruppe über $e_1, \ldots, e_{g-1}, e_1 + \cdots + e_g$, denn jedes Gruppenelement $x = (n_1, \ldots, n_g)$ ist wegen

$$x = \sum_{k=1}^{g} n_k e_k = \sum_{k=1}^{g-1} (n_k - n_g) e_k \;+ n_g \sum_{k=1}^{g} e_k$$

in der von den neuen Elementen $f_1, \ldots, f_g$ erzeugten Untergruppe und die Koeffizienten der Darstellung

$$x = \sum_{k=1}^{g-1} m_k e_k + m_g \sum_{k=1}^{g} e_k$$

sind eindeutig, da

$$x = \sum_{k=1}^{g-1} (m_k + m_g)e_k + m_g e_k$$

impliziert, dass $m_g = n_g$ und $n_k = m_k + m_g$, also $m_k = n_k - m_g = n_k - n_g$. Folglich ist $H_{\mathrm{ab}} \cong G_{\mathrm{ab}}/K \cong \left(\bigoplus_{j=1}^{g} \mathbb{Z} f_k\right)/2\mathbb{Z} f_g \cong \mathbb{Z}^{g-1} \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$. $\square$

Literatur

Hauptreferenzen für die Vorlesung sind

- Allen Hatcher, Algebraic Topology,
`https://pi.math.cornell.edu/~hatcher/AT/AT.pdf`
- Richard S. Palais, Homotopy theory of infinite dimensional manifolds, Topology 5 (1966), 1–16.

Viele der vorgestellten Ergebnisse und Beweise über Homotopietheorie, Überlagerungen und Zellenkomplexe finden Sie in Hatchers Buch; unsere Anwendungen auf offene Mengen in Banachräumen und Banachmannigfaltigkeiten basieren auf der Arbeit von Palais. Hatcher setzt jedoch solide Kenntnisse der mengentheoretischen Topologie voraus (etwa, was in Kapitel 1 und 2 hier zusammengestellt wurde). Mehr Details hierzu können Sie nachlesen in Lehrbüchern wie

- Klaus Jänich, Topologie, Springer-Verlag, 3. Auflage, 1990;
- Horst Schubert, Topologie, Verlag B. G. Teubner, 1964, sowie
- Boto von Querenburg, Mengentheoretische Topologie, Springer-Verlag, 2. Auflage, 1979

(wobei Schubert auch Aspekte der algebraischen Topologie behandelt) oder dem Nachschlagewerk

- Ryszard Engelking, General Topology, Herldermann-Verlag, 1989.

Als klassische Werke zur mengentheoretischen Topologie seien weiter

- James Dugundji, Topology, Allyn and Bacon, 1973 und
- John L. Kelley, General Topology, Springer-Verlag, Nachdruck des Originals von 1955

erwähnt. Grundlegende Resultate der Gruppentheorie für nicht notwendig endliche Gruppen (etwa über freie Gruppen und freie Produkte von Gruppen) findet man zum Beispiel in

- Derek J. S. Robinson, A Course in the Theory of Groups, Springer-Verlag sowie
- Joseph J. Rotman, An Introduction to the Theory of Groups, Springer-Verlag.