Vorlesungsskript zur Analysis 2 im SoSe 2019

Prof. Dr. Helge Glöckner

Vorwort

Das vorliegende Vorlesungsskript wurde begleitend zur Analysis 2 von Prof. Glöckner an der Universität Paderborn im Sommersemester 2019 erstellt. Dieses Vorwort richtet sich vor allem an Studierende, die die Vorlesung bereits gehört haben, und möchte ihnen etwas Orientierung zum Stoff und auch Hinweise zur Prüfungsrelevanz geben. (Es ist also eher ein Nachwort).

Kapitel 1–7 bildeten Teil I der Vorlesung; hier wird die in der Analysis 1 des WS 18/19 begonnene Differential- und Integralrechnung für reellwertige Funktionen einer reellen Variablen abgeschlossen.[1] Die aus der Analysis 1 benötigten Grundlagen über das Riemann-Integral sind in Anhang A des Skripts zusammengestellt; in den ersten Kapiteln des Skripts werden diese Grundlagen aufgegriffen und weiterentwickelt.

In der Vorlesung wurde das Lebesgue-Kriterium ohne Beweis benutzt, welches Riemann-integrierbare Funktionen charakterisiert; der in Kapitel 3 gegebene Beweis ist nicht prüfungsrelevant. Das Lebesgue-Kriterium wird im Skript im wesentlichen nur benutzt, um für Riemann-integrierbare Funktionen f und g auf $[a,b]$ auch die Funktionen $x \mapsto |f(x)|$ und $x \mapsto \sqrt{f(x)^2 + g(x)^2}$ als Riemann-integrierbar erkennen zu können. Sind f und g stetig, so sind letztere Funktionen ebenfalls stetig und somit Riemann-integrierbar: Das Lebesgue-Kriterium wird dann nicht benötigt. Wenn Sie in Teil I also durchweg nur stetige Funktionen betrachten (was keine gravierende Einschränkung bedeutet), so sind alle Beweise auch ohne Kapitel 3 vollständig. Kapitel 3 ist natürlich in sich geschlossen, wird jedoch einfacher verständlich, wenn Sie es erst nach Kapitel 14 über Kompaktheit lesen (da Spezialfälle der allgemeinen Theorie in Kapitel 3 soweit nötig *ad hoc* bewiesen und benutzt werden).

In Kapitel 5 wird die Integration rationaler Funktionen mittels Partialbruch-

[1] In der Analysis 1 wurden Potenzreihen gründlich studiert, jedoch Konvergenz allgemeiner Funktionenfolgen nur kursorisch. Auch wurde eine Diskussion von Taylorapproximation noch zurückgestellt. Metrische Räume kamen vor, jedoch keine normierten Räume und keine Topologien – was die Stoffauswahl und Reihenfolge von Teil I wesentlich beeinflusst hat.

zerlegung diskutiert und insbesondere die Existenz von Partialbruchzerlegungen vollständig bewiesen (die nötigen Grundlagen über komplexe Polynome und reelle Polynome sind in Anhang B mit Beweisen zusammengestellt; diese sollten aus der Linearen Algebra bekannt sein).

Teil II des Skripts ist dem Studium von Funktionen mehrerer Variablen gewidmet. Solche sind wichtig für die Anwendungen, denn natürlich hängen z.B. physikalische Größen oft von vielen Variablen ab. Ein Beispiel ist der Druck p eines aus N Teilchen bestehenden idealen Gases, das bei Temperatur T in einem Volumen V eingeschlossen ist: dieser ist von der Form

$$p(N,T,V) = \frac{Nk_BT}{V}$$

(wobei k_B die Boltzmann-Konstante ist), also eine Funktion von (N,T,V).

Zuerst begnügen wir uns mit einer Untersuchung der Stetigkeit solcher Funktionen: Die ersten sieben Kapitel von Teil II (Kapitel 8–14) vertiefen die in Analysis 1 begonnene Theorie metrischer Räume (deren Anfangsgründe in Anhang C noch einmal zusammengestellt sind) und stellen Grundlagen über Metriken, Normen, Topologien und Stetigkeit bereit, die für die Untersuchung von Funktionen in mehreren Variablen benötigt werden.

Die folgenden elf Kapitel (Kapitel 15–25) enthalten die Kernresultate der Analysis 2, die Differential- und Integralrechnung für vektorwertige Funktionen in mehreren reellen Variablen.

Als Hilfsmittel (und im Hinblick auf Anwendungen) betrachten wir zunächst vektorwertige Funktionen eine Variablen (sogenannte "Wege" oder "Kurven") und beweisen für diese eine Fassung des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung sowie weitere Resultate, die manchmal auch erst in der "Reellen Analysis" behandelt werden (Wegintegrale, Existenz von Potentialfunktionen für Vektorfelder).

Hauptgegenstand sind dann differenzierbaren Funktionen

$$f\colon U \to \mathbb{R}^m$$

auf einer offenen Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}^n$. Gegeben $x \in U$ und $y \in \mathbb{R}^n$ ist für eine kleine 0-Umgebung $I \subseteq \mathbb{R}$

$$I \to \mathbb{R}^m, \quad t \mapsto f(x+ty)$$

ein Weg, was uns wiederholt ermöglicht, Aussagen über Funktionen mehrerer Variablen auf den Fall vektorwertiger Funktionen einer Variablen (also Wege) zurückzuführen.

Für Funktionen mehrerer Variablen werden dann die üblichen Resultate einer Analysis 2 bewiesen.

Insbesondere diskutieren wir lokale Extrema für reellwertige Funktionen mehrerer Variablen. Das hier nützliche Hurwitz-Kriterium für positive Definitheit symmetrischer reeller Matrizen wurde in der Vorlesung ohne Beweis erwähnt (den nicht prüfungsrelevanten Beweis finden Sie bei Interesse hier im Skript). Taylorentwicklung für Funktionen einer reellen Variablen wurde in Kapitel 6 ausführlich in beliebiger Ordnung diskutiert, inklusive vieler nützlicher Darstellungen des Restglieds. Für die Diskussion lokaler Extrema genügt uns Taylorentwicklung zweiter Ordnung für reellwertige C^2-Funktionen mehrerer Variablen, und wir stellen im Skript daher nur diese vor unter Benutzung der Hessematrix (Multiindex-Notation wird anderswo eingeführt – an dieser Stelle vermeiden wir sie).

Wir stellen dann den Banachschen Fixpunktsatz vor – ein zentrales Hilfsmttel der modernen Analysis – und benutzen diesen zum Beweis des sogenannten Satzes über die Umkehrfunktion. Hierbei zeigen wir etwas mehr, als in der Analysis 2 traditionell üblich sein mag, nämlich eine *quantitative* Fassung des Satzes (Satz 23.7), die uns über viele Eigenschaften von f und der lokalen Inversen quantitative Informationen gibt (etwa über die Größe des Bildes). Dies ermöglicht unmittelbar ein Kriterium für die Existenz einer Nullstelle und Konvergenz des vereinfachten Newtonverfahrens zur approximativen Berechnung der Nullstelle (Satz 23.3). Auch (nicht prüfungsrelevante) Konvergenzaussagen für das Newton-Verfahren sind nun leicht zu erhalten (und können bei Interesse in Kapitel 26 nachgelesen werden).

Dem traditionellen Vorgehen folgend, können wir aus dem Satz über die Umkehrfunktion (Satz 23.9) den sogenannten Satz über implizite Funktionen folgern, ein weiteres wichtiges Hilfsmittel der Analysis (Satz 24.1).

Als eine erste Anwendung folgern wir aus diesem im Skript ein (nicht prüfungsrelevantes) Resultat über die C^k-Abhängigkeit von Fixpunkten von Parametern (Satz 24.8), das in der Vorlesung aus Zeitgründen übersprungen wurde.

Als eine weitere Anwendung des Satzes über implizite Funktionen charakterisieren wir die Tangentialräume T_xM einer Hyperfläche M in $\mathbb{R}^n$, die durch eine skalarwertige Gleichung $g(x) = 0$ gegeben ist (im Falle $n = 3$ also einer Fläche in $\mathbb{R}^3$, und im Falle $n = 2$ einer Kurve in $\mathbb{R}^2$). Die Charakterisierung ermöglicht uns, lokale Extremstellen einer Funktion f von x unter einer gegebenen Nebenbedingung $g(x) = 0$ zu diskutieren (Satz 25.1).

Das Studium von Nullstellenmengen wird in der Reellen Analysis fortgesetzt; wir werden dann systematisch sogenannte Untermannigfaltigkeiten von $\mathbb{R}^n$ betrachten (wobei Hyperflächen Beispiele $n-1$-dimensionaler Untermannigfaltigkeiten sind und selbige lokal immer so aussehen).

Ein nicht prüfungsrelevantes, in der Vorlesung nicht mehr behandeltes Kapitel (Kapitel 26) enthält Ergänzungen zur Differential- und Integralrechnung in mehreren Variablen: Wie schon erwähnt, wird dort das Newton-Verfahren und vereinfachte Newton-Verfahren behandelt, das im Hinblick auf die Numerik interessant sein kann und im einfachsten Spezialfall von Funktionen einer reellen Variablen auch schulrelevant sein könnte.

Paderborn, 22.7.2019 Prof. Dr. Helge Glöckner

Contents

Teil I: Ergänzungen zur Analysis von Funktionen einer Veränderlichen

1 Integrale: Grundlagen und Hauptsatz

In der Analysis 1 erfolgte bereits ein Einstieg in die Riemannsche Integrationstheorie, wobei jedoch einige Hilfsmittel ohne Beweis benutzt werden mussten. Im Anhang A dieses Skripts finden Sie eine leicht abgespeckte Fassung des entsprechenden Teils von Prof. Glöckners Analysis 1-Skript; dort sind ausschließlich diejenigen Ergebnisse und Beweise aufgeführt, die nun in der Analysis 2 vorausgesetzt werden.

Im aktuellen Kapitel wird zunächst an grundlegende Definitionen und Ergebnisse erinnert; dann wird die Integrationstheorie weitergeführt.

In der Riemannschen Integrationstheorie betrachten wir Funktionen $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, welche beschränkt sind, d.h. $f([a,b])$ ist eine beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}$. Also existieren reelle Zahlen $m \leq M$ derart, dass

$$m \leq f(x) \leq M \quad \text{für alle } x \in [a,b];$$

oder, äquivalent hierzu, es ist

$$\|f\|_\infty := \sup_{x\in[a,b]} |f(x)| < \infty.$$

Wir nennen die Zahl $\|f\|_\infty \in [0,\infty[$ die *Supremums-Norm* von f. Später werden wir Normen systematisch untersuchen; im Moment ist für uns $\|f\|_\infty$ einfach eine nützliche Zahl (die in geeignetem Sinn die "Größe von f" misst).

Zur Erinnerung:

Definition 1.1 Seien $a \leq b$ reelle Zahlen. Eine Funktion $\phi\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ heißt *Treppenfunktion*, wenn es eine Zerlegung $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ von $[a,b]$ derart gibt, dass $\phi|_{]t_{k-1},t_k[}$ konstant ist (etwa mit Funktionswert c_k) für alle $k \in \{1,\ldots,n\}$. Das Integral der Treppenfunktion ϕ ist definiert als

$$\int_a^b \phi(x)\,dx := \sum_{k=1}^n (t_k - t_{k-1})c_k$$

(und unabhängig von der Zerlegung $t_0 < \cdots < t_n$, wie wir in der Analysis 1 gesehen haben).

Mit Hilfe von Treppenfunktionen konnten wir Riemann-integrierbare Funktionen und ihr Riemann-Integral definieren:[2]

Definition 1.2 Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion (d.h. $f([a,b])$ ist beschränkt in $\mathbb{R}$). Wir defineren das *Oberintegral* von f über $[a,b]$ als

$$\int_a^{b*} f(x)\,dx := \inf\left\{\int_a^b \psi(x)\,dx\colon \psi \in T_a^b \text{ mit } f \leq \psi\right\}.$$

Das *Unterintegral* von f über $[a,b]$ ist

$$\int_{a\,*}^{b} f(x)\,dx := \sup\left\{\int_a^b \phi(x)\,dx\colon \phi \in T_a^b \text{ mit } \phi \leq\right\}.$$

Ist $\int_a^{b*} f(x)\,dx = \int_{a*}^b f(x)\,dx$, so nennen wir die Funktion f *Riemann-integrierbar* und definieren das (Riemann-) Integral von f über $[a,b]$ als

$$\int_a^b f(x)\,dx := \int_a^{b*} f(x)\,dx = \int_{a\,*}^{b} f(x)\,dx.$$

Weiter definieren wir in diesem Fall $\int_b^a f(x)\,dx := -\int_a^b f(x)\,dx$.

Wir haben gesehen, dass Riemann-Integrierbarkeit wie folgt charakterisiert werden kann:

Satz 1.3 *Eine beschränkte Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ ist genau dann Riemann-integrierbar, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ Treppenfunktionen $\phi, \psi \in T_a^b$ mit $\phi \leq f \leq \psi$ existieren derart, dass $\int_a^b \psi(x)\,dx - \int_a^b \phi(x)\,dx \leq \varepsilon$.* $\square$

Mit Hilfe der vorigen Charakterisierung konnten aus einfachen Regeln für Integrale von Treppenfunktionen die folgenden Regeln für Riemannintegrale hergeleitet werden:

Satz 1.4 *Seien $a \leq b$ reelle Zahlen.*

(a) (Linearität). *Sind $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ und $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbare Funktionen und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, so ist auch die Funktion $\lambda f + \mu g$ Riemann-integrierbar und*

$$\int_a^b \lambda f(x) + \mu g(x)\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx + \mu \int_a^b g(x)\,dx.$$

[2] Zur Erinnerung: Sind $f\colon X \to \mathbb{R}$ und $g\colon X \to \mathbb{R}$ Funktionen auf einer Menge X derart, dass $f(x) \leq g(x)$ für alle $x \in X$, so schreiben wir $f \leq g$.

(b) (Monotonie). *Sind* $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *und* $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *Riemann-integrierbare Funktionen mit* $f \leq g$, *so folgt*

$$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx.$$

Insbesondere gilt

$$(b-a)m \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq (b-a)M \tag{1}$$

mit $m := \inf\{f(x)\colon x \in [a,b]\}$ *und* $M := \sup\{f(x)\colon x \in [a,b]\}$.

(c) (Intervalladditivität). *Sei* $c \in [a,b]$. *Eine Funktion* $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *ist genau dann Riemann-integrierbar, wenn* $f|_{[a,c]}$ *und* $f|_{[c,b]}$ *Riemann-integrierbar sind. In diesem Fall gilt*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

und weiter auch

$$\int_\alpha^\gamma f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(x)\,dx + \int_\beta^\gamma f(x)\,dx$$

für alle $\alpha, \beta, \gamma \in [a,b]$.

(d) (Integralabschätzung). *Ist* $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *Riemann-integrierbar, so gilt* $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq (b-a)\|f\|_\infty$. □

Wir beweisen nun das folgende, in der Analysis 1 schon erwähnte Resultat:

Satz 1.5 *Jede stetige Funktion* $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *ist Riemann-integrierbar.*

Der Beweis von Satz 1.5 basiert auf der gleichmäßigen Stetigkeit der stetigen Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$. Wir erinnern an den Begriff:

Definition 1.6 Es seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume. Eine Funktion $f\colon X \to$ heißt *gleichmäßig stetig*, wenn

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in X)(\forall y \in X)\; d_X(x,y) < \delta \;\Rightarrow\; d_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon. \tag{2}$$

Eine Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ ist also gleichmäßig stetig, wenn

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in X)(\forall y \in X)\; |x-y| < \delta \;\Rightarrow\; |f(x) - f(y)| < \varepsilon. \tag{3}$$

Bemerkung 1.7 Eine Funktion $f\colon X \to Y$ ist stetig, wenn sie an jeder Stelle $x \in X$ stetig ist, also

$$(\forall x \in X)(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall y \in X)\; d_X(x,y) < \delta \Rightarrow\; d_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

Hier hängt δ im allgemeinen von x ab. Gleichmäßige Stetigkeit impliziert Stetigkeit; durch die veränderte Reihenfolge der Quantoren in (1.6) kann im Falle einer gleichmäßig stetigen Funktion δ sogar unabhängig von x gewählt werden.[3]

Satz 1.8 *Jede stetige Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ ist gleichmäßig stetig.*

Beweis. Wenn nicht, so existiert ein $\varepsilon > 0$ derart, dass für jedes $\delta > 0$ Punkte $x, y \in [a,b]$ existieren derart, dass $|x - y| < \delta$ und $|f(x) - f(y)| > \varepsilon$. Wir wenden dies für $n \in \mathbb{N}$ mit $\delta := \frac{1}{n}$ an und erhalten $x_n, y_n \in [a,b]$ derart, dass $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$ und

$$|f(x_n) - f(y_n)| > \varepsilon. \tag{4}$$

Nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß hat $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$. Dann ist $n_k \geq k$ und somit

$$|x_{n_k} - y_{n_k}| < \frac{1}{n_k} \leq \frac{1}{k}.$$

Nach Ersetzen der Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ durch $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ bzw. $(y_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ dürfen wir also annehmen, dass $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert, etwa gegen $x \in [a,b]$. Da $|x_n - y_n| \leq \frac{1}{n} \to 0$, konvergiert dann auch $y_n = x_n + (y_n - x_n)$ gegen x. Da aber f an der Stelle x stetig ist, gibt es ein $\rho > 0$ derart, dass

$$|f(y) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{für alle } y \in [a,b] \text{ mit } |y - x| < \rho$$

und somit

$$|f(y) - f(z)| \leq |f(y) - f(x)| + |f(x) - f(z)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \tag{5}$$

für alle $y, z \in [a,b]$ mit $|y - x| < \rho$ und $|z - x| < \rho$. Es existiert ein $N \in \mathbb{N}$ derart, dass $|x_n - x| < \rho$ und $|y_n - x| < \rho$ für alle $n \geq N$. Nach (5) ist dann $|x_n - y_n| \leq \varepsilon$ für alle $n \geq N$, im Widerspruch zu (4). $\square$

Beweis von Satz 1.5. Ist $a = b$, so ist f eine Treppenfunktion und die Aussage ist trivial. Sei nun $b > a$. Gegeben $\varepsilon > 0$ existiert wegen der

[3] Es existiert ein $\delta > 0$ derart, dass für alle x...

gleichmäßigen Stetigkeit von f siehe Satz 1.8) ein $\delta > 0$ derart, dass

$$|f(x) - f(y)| \leq \frac{\varepsilon}{b-a} \quad \text{für alle } x, y \in [a, b] \text{ mit } |x - y| < \delta.$$

Wir wählen $n \in \mathbb{N}$ so groß, dass $(b-a)/n < \delta$ und setzen

$$t_k := a + \frac{k}{n}(b-a) \quad \text{für } k \in \{0, 1, \ldots, n\}.$$

Dann ist $Z = \{t_0 < t_1 < \cdots < t_n\}$ eine Zerlegung von $[a, b]$. Wir definieren

$$C_k := \max f([t_{k-1}, t_k]) \quad \text{und} \quad c_k := \min f([t_{k-1}, t_k]) \quad \text{für } k \in \{1, \ldots, n\}.$$

Dann ist also $C_k \geq c_k$. Für jedes $k \in \{1, \ldots, n\}$ gibt es $x_k, y_k \in [t_{k-1}, t_k]$ mit $C_k = f(x_k)$ und $c_k = f(y_k)$. Dann ist $|x_k - y_k| \leq t_k - t_{k-1} = \frac{b-a}{n} < \delta$ und somit

$$C_k - c_k = |C_k - c_k| = |f(x_k) - f(y_k)| \leq \frac{\varepsilon}{b-a}. \tag{6}$$

Weiter definieren wir Treppenfunktionen $\phi, \psi \colon [a, b] \to \mathbb{R}$ via

$$\phi(x) := c_k \quad \text{und} \quad \psi(x) := C_k \quad \text{für } k \in \{1, \ldots, n\} \text{ und } x \in [t_{k-1}, t_k[$$

sowie $\phi(b) := c_n$ und $\psi(b) := C_n$. Dann gilt $\phi \leq f \leq \psi$ und

$$\begin{aligned} \int_a^b \psi(x)\,dx - \int_a^b \phi(x)\,dx &= \sum_{k=1}^n (C_k - c_k)(t_k - t_{k-1}) \\ &\leq \frac{\varepsilon}{b-a} \underbrace{\sum_{k=1}^n (t_k - t_{k-1})}_{=t_n - t_0} = \frac{\varepsilon}{ba}(b-a) = \varepsilon, \end{aligned}$$

wobei die Ungleichung aus (6) folgt. Also ist f nach Satz 1.3 Riemann-integrierbar. □

Wir erinnern an den Begriff einer Stammfunktion:

Definition 1.9 Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall mit mehr als einem Punkt und $f \colon I \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Eine differenzierbare Funktion $F \colon I \to \mathbb{R}$ wird eine *Stammfunktion* für f genannt, wenn $F' = f$.

Stammfunktionen sind eindeutig bis auf eine additive Konstante. In der Analysis 1 haben wir bereits den Hauptsatz der Integral- und Differentialrechnung kennen gelernt, der die Berechnung von Integralen mit Hilfe von Stammfunktionen ermöglicht:

Satz 1.10 (Hauptsatz der Integral- und Differentialrechnung) *Seien $a < b$ reelle Zahlen.*

(a) *Für jede stetige Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ ist*

$$F\colon [a,b] \to \mathbb{R}, \quad F(x) := \int_a^x f(t)\,dt$$

eine Stammfunktion für f.

(b) *Ist $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und $F\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Stammfunktion für f, so gilt*

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) =: [F(x)]_a^b \tag{7}$$

und $\int_b^a f(x)\,dx = F(a) - F(b) =: [F(x)]_b^a$.

(c) *Ist $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, so gilt*

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)\,dt \quad \text{für alle } x \in [a,b].$$

Wir beweisen nun diesen zentralen Satz. Der Beweis beruht auf dem Mittelwertsatz, der ebenfalls bisher nur ohne Beweis erwähnt wurde:

Satz 1.11 (Mittelwertsatz der Integralrechnung) *Sind $a < b$ reelle Zahlen und $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, so existiert ein $\xi \in [a,b]$ mit*

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi). \tag{8}$$

Die linke Seite von (8) stimmt auch mit $\frac{1}{a-b}\int_b^a f(x)\,dx$ überein.

Beweis. Mit der konstanten Funktion $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 1$ ist die erste Aussage ein Spezialfall des folgenden Satzes, da $\int_a^b g(x)\,dx = b - a$. Die zweite Aussage folgt aus der ersten, da $\frac{1}{a-b}\int_b^a f(x)\,dx = \frac{(-1)}{a-b}\int_a^b f(x)\,dx = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$. □

Satz 1.12 (Verallgemeinerter Mittelwertsatz) *Seien $a < b$ reelle Zahlen und $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ sowie $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen. Ist $g \geq 0$, so existiert ein $\xi \in [a,b]$ derart, dass*

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(\xi)\int_a^b g(x)\,dx. \tag{9}$$

Beweis. Ist $g(x) = 0$ für alle $x \in [a,b]$, so ist die Aussage trivial, da für jedes ξ beide Seiten von (9) verschwinden. Sei nun also g nicht konstant 0. Dann ist $g(x_0) > 0$ für ein $x_0 \in [a,b]$, somit wegen der Stetigkeit $g(x) > g(x_0)/2$ auf einem Intervall $I \subseteq [a,b]$ der Form $I = [x_0, x_0 + \delta]$ oder $I = [x_0 - \delta, x_0]$ und somit

$$\int_a^b g(x)\,dx \geq \int_a^b \frac{g(x_0)}{2}\mathbf{1}_I(x)\,dx = \delta g(x_0)/2 > 0,$$

wobei $\mathbf{1}_I\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ die charakteristische Funktion (Indikatorfunktion) des Intervalls I ist, also $\mathbf{1}_I(x) = 1$ wenn $x \in I$, sonst $\mathbf{1}_I(x) = 0$; dies ist eine Treppenfunktion. Definieren wir $m := \inf\{f(x)\colon x \in [a,b]\}$ und $M := \sup\{f(x)\colon x \in [a,b]\}$, so ist

$$mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x) \text{ für alle } x \in [a,b], \tag{10}$$

weil $g(x) \geq 0$ angenommen ist. Nach dem Satz vom Maximum ist $m = f(x_*)$ und $M = f(x^*)$ für geeignete $x_*, x^* \in [a,b]$. Wegen der Monotonie des Riemann-Integrals folgt aus (10)

$$m\int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b mg(x)\,dx \leq \int_a^b f(x)g(x)\,dx \leq \int_a^b Mg(x)\,dx = M\int_a^b g(x)\,dx.$$

Also ist $y := \int_a^b f(x)g(x)\,dx / \int_a^b g(x)\,dx$ eine reelle Zahl derart, dass

$$f(x_*) = m \leq y \leq M = f(x^*).$$

Da f stetig ist, gibt es nach dem Zwischenwertsatz ein ξ zwischen x_* und x^*

(womit $\xi \in [a,b]$) derart, dass $f(\xi) = y$. Folglich gilt (9). $\square$

Beweis von Satz 1.10. Sei $x \in [a,b]$. Gegeben $y \in [a,b] \setminus \{x\}$ existiert nach Satz 1.11 ein ξ_y zwischen x und y derart, dass

$$\begin{aligned} \frac{F(y)-F(x)}{y-x} - f(x) &= \frac{1}{y-x}\left(\underbrace{\int_a^y f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt}_{=\int_x^y f(t)\,dt}\right) - f(x) \\ &= \frac{1}{y-x}\int_x^y f(t)\,dt - f(x) = f(\xi_y) - f(x); \end{aligned}$$

hierbei wurde die Intervalladditivität des Riemann-Integrals benutzt, um die Differenz der zwei Integrale zu einem Integral zusammenzufassen. Da ξ_y zwischen x und y liegt, folgt $\xi_y \to x$ für $y \to x$ und somit $f(\xi_x) \to f(x)$, da f stetig ist.[4] Also gilt

$$\frac{F(y)-F(x)}{y-x} - f(x) \to 0$$

für $y \to x$ und folglich $\frac{F(y)-F(x)}{y-x} \to f(x)$. Also ist F an der Stelle x differenzierbar mit Ableitung $F'(x) = f(x)$ und somit ist F eine Stammfunktion für f.

(c) Nach (a) ist $F\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, $f(x) := \int_a^x f'(t)\,dt$ eine Stammfunktion für f', also $F' = f$. Somit ist

$$(f-F)' = f' - F' = f' - f' = 0.$$

Folglich ist $f - F$ konstant (siehe Analysis 1), etwa $f - F$ die Funktion mit dem konstanten Wert $C \in \mathbb{R}$. Dann ist also $f = C + F$. Um die Konstante zu bestimmen, setzen wir $x = a$ ein:

$$f(a) = C + F(a) = C + \underbrace{\int_a^a f(t)\,dt}_{=0} = C.$$

[4]Die Grenzwerte sind hier im Sinne von Funktionenlimites zu verstehen, d.h. Sie nehmen eine Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $y_n \to x$, betrachten die zugehörigen ξ_{y_n} und $f(\xi_{y_n})$ und lassen $n \to \infty$ streben.

Also ist $f(x) = C + F(x) = f(a) + \int_a^c f(t)\,dt$. Insbesondere folgt mit $x := b$:

$$f(b) = f(a) + \int_a^b f'(t)\,dt. \tag{11}$$

(b) Sei F eine Stammfunktion von f. Ersetzen wir f durch F in (11) und f' durch $F' = f$, so folgt $F(b) = F(a) + \int_a^b f(t)\,dt$. Wir substrahieren $F(a)$ auf beiden Seiten und erhalten (7). Weiter ist $\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx = F(a) - F(b) = [F(x)]_b^a$. $\square$

Zwei Integrationsregeln, die auf dem Hauptsatz basieren (Partielle Integration; Substitutionsregel) wurden in der Analysis 1 geübt und brauchen hier nicht wiederholt zu werden.

Ergänzung: Riemannsche Summen

Im Beweis der Riemann-Integrierbarkeit stetiger Funktionen (Satz 1.5) haben wir mit dem Maximum und Minimum der Funktionswerte von f auf einem Teilintervall $[t_{k-1}, t_k]$ gearbeitet, um das Integral $\int_a^b f(x)\,dx$ approximierende Treppenfunktionen zu konstruieren. Manchmal ist es nützlich, auch mit Hilfe anderer Funktionswerte $f(b_k)$ mit $b_k \in [t_{k-1}, t_k]$ Treppenfunktionen zu bauen. Dies führt auf den Begriff einer Riemannschen Summe. Wir werden sehen, dass Riemann-Integrale sich als Grenzwerte Riemannscher Summen beschreiben lassen (Satz 1.15). Diese Sichtweise ist manchmal von Nutzen (wir werden später zwei Beispiele kennenlernen).[5]

Definition 1.13 Sei $Z = \{a = t_0 < \cdots < t_n = b\}$ eine Zerlegung eines Intervalls $[a, b]$ mit $a < b$. Eine *Belegung* von Z ist ein n-Tupel $B = (b_1, \ldots, b_n)$ von Zahlen

$$b_k \in [t_{k-1}, t_k]$$

für $k \in \{1, \ldots, n\}$. Ist $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion, so definieren wie ihre *Riemannsche Summe* $\Sigma_f(Z, B)$ zur Zerlegung Z und Belegung B als

$$\Sigma_f(Z, B) := \sum_{k=1}^{n} (t_k - t_{k-1}) f(b_k).$$

Die *Maschenweite* $\Delta(Z)$ der Zerlegung $Z = \{a = t_0 < \cdots < t_n = b\}$ ist

$$\Delta(Z) := \max\{t_1 - t_0, t_2 - t_1, \ldots, t_n - t_{n-1}\}.$$

[5] Bernhard Riemann führte seine Integrale übrigens mit Hilfe von Riemannschen Summen ein; der Zugang zur Riemannschen Integrationstheorie mittels Ober- und Unterintegralen geht auf Jean Gaston Darboux zurück.

Bemerkung 1.14 Man beachte, dass

$$\Sigma_f(Z,B) = \int_a^b \phi(x)\,dx \tag{12}$$

für die Treppenfunktion

$$\phi := \phi_{f,Z,B}\colon [a,b] \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} f(b_k) & \text{wenn } x \in [t_{k-1}, t_k[\text{ mit } k \in \{1,\ldots,n\}; \\ f(b_n) & \text{wenn } x = b. \end{cases} \tag{13}$$

Satz 1.15 *Sei $a < b$ und $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Ist $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Zerlegungen von $[a,b]$ mit Maschenweite $\Delta(Z_n) \to 0$ und $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Belegungen B_n von Z_n, so konvergiert die Folge $(\Sigma_f(Z_n,B_n))_{n\in\mathbb{N}}$ der Riemannschen Summen gegen $\int_a^b f(x)\,dx$ für $n \to \infty$, also*

$$\lim_{n\to\infty} \Sigma_f(Z_n, B_n) = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Beweis. Definieren wir $\phi_n := \phi_{f,Z_n,B_n} \in T_a^b$ wie in (13), so ist nach (12)

$$\Sigma_f(Z_n, B_n) = \int_a^b \phi_n(x)\,dx.$$

Sei $\varepsilon > 0$. Da f nach Satz 1.8 gleichmäßig stetig ist, existiert ein $\delta > 0$ derart, dass

$$|f(y) - f(x)| \le \frac{\varepsilon}{b-a} \quad \text{für alle } x, y \in [a,b] \text{ mit } |x-y| \le \delta.$$

Da $\Delta(Z_n) \to 0$, existiert ein $N \in \mathbb{N}$ derart, dass $\Delta(Z_n) \le \delta$ für alle $n \ge N$. Gegeben $n \ge N$ schreibe $Z_n = \{t_0 < \ldots < t_m\}$ und $B_n = (b_1, \ldots, b_m)$. Für $k \in \{1,\ldots,m\}$ ist $b_k \in [t_{k-1}, t_k]$. Für jedes $x \in [t_{k-1}, t_k]$ gilt somit $|x - b_k| \le t_k - t_{k-1}| \le \delta$ und somit $|f(x) - f(b_k)| \le \varepsilon/(b-a)$. Also gilt $|f(x) - \phi_n(x)| = |f(x) - f(b_k)| \le \varepsilon/(b-a)$ für alle $x \in [t_{k-1}, t_k]$ (wenn $k \in \{1,\ldots,m-1\}$) bzw. $x \in [t_{k-1}, t_k]$ (wenn $k = m$). Somit ist

$$|f(x) - \phi_n(x)| \le \frac{\varepsilon}{b-a} \quad \text{für alle } x \in [a,b]$$

und für das Supremum dieser Zahlen folgt

$$\|f - \phi_n\|_\infty \le \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

Nach der Integralabschätzung ist also

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b \phi_n(x)\,dx\right| \le (b-a)\|f-\phi_n\|_\infty \le \varepsilon$$

für alle $n \ge N$. Also $\Sigma_f(Z_n, B_n) = \int_a^b \phi_n(x)\,dx \to \int_a^b f(x)\,dx$. $\square$

2 Lebesgue-Kriterium für Integrierbarkeit

Wir stellen nun ein nützliches weiteres Kriterium für Riemann-Integrierbarkeit bereit und geben einige Anwendungen. Das Kriterium besagt:

Satz 2.1 (Lebesgue-Kriterium) *Eine beschränkte Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ ist genau dann Riemann-integrierbar, wenn f fast überall stetig ist.*

Stetigkeit fast überall ist hierbei wie folgt definiert.

Definition 2.2 (a) Die Länge eines beschränkten offenen Intervalls $I :=]a,b[$ mit reellen Zahlen $a < b$ ist $L(I) := b - a$. Eine Teilmenge $M \subseteq \mathbb{R}$ heißt *Lebesgue-Nullmenge*, wenn es für jedes $\varepsilon > 0$ eine Folge $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von beschränkten offenen Intevallen $I_n \subseteq \mathbb{R}$ gibt mit

$$M \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n \;\text{ und }\; \sum_{n=1}^{\infty} L(I_n) \le \varepsilon.$$

(b) Eine Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ heißt *fast überall stetig*, wenn die Menge

$$\operatorname{disc}(f) := \{x \in [a,b]\colon f \text{ ist an der Stelle } x \text{ unstetig}\}$$

ihrer Unstetigkeitsstellen eine Lebesgue-Nullmenge ist.[6]

Beispiel 2.3 *Jede abzählbare Teilmenge $M \subseteq \mathbb{R}$ ist eine Lebesgue-Nullmenge.*

Ist nämlich $M = \{x_n\colon n \in \mathbb{N}\}$, so ist für gegebenes $\varepsilon > 0$

$$M \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}}]x_n - \varepsilon/2^{n+1}, x_n + \varepsilon/2^{n+1}[$$

mit $\sum_{n=1}^{\infty} L(]x_n - \varepsilon/2^{n+1}, x_n + \varepsilon/2^{n+1}[) = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon/2^n = \varepsilon$ (Geometrische Reihe!).

[6] Mit "disc" wie "discontinuous".

Beispiel 2.4 *Ist $M \subseteq \mathbb{R}$ eine Lebesgue-Nullmenge und $N \subseteq M$ eine Teilmenge, so ist auch N eine Lebesgue-Nullmenge.*

(Ist $M \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n$, so auch $N \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n$).

Das folgende Beispiel überspringen wir in der Vorlesung und benutzen es auch nicht.

Beispiel 2.5 *Sind M_1 und M_2 Lebesgue-Nullmengen von $\mathbb{R}$, so ist auch die Vereinigung $M_1 \cup M_2$ eine Lebesgue-Nullmenge.*

Gegeben $\varepsilon > 0$ gibt es nämlich Folgen beschränkter offener Intervalle I_n bzw. J_n derart, dass

$$M_1 \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n, \quad M_2 \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} J_n$$

und $\sum_{n=1}^\infty L(I_n) \le \varepsilon/2$ sowie $\sum_{n=1}^\infty L(J_n) \le \varepsilon/2$. Setzen wir $K_{2n-1} := I_n$ und $K_{2n} := J_n$ für $n \in \mathbb{N}$, so ist $M_1 \cup M_2 \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n$ und $\sum_{n=1}^\infty L(K_n) \le \varepsilon$, weil für alle $N \in \mathbb{N}$

$$\sum_{n=1}^N L(K_n) \le \sum_{n=1}^N L(I_n) + \sum_{n=1}^N L(J_n) \le \sum_{n=1}^\infty L(I_n) + \sum_{n=1}^\infty L(J_n) \le \varepsilon.$$

Bevor wir das Lebesgue-Kriterium beweisen, halten wir Anwendungen fest.

Folgerung 2.6 *Es seien $a < b$ reelle Zahlen und $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar. Dann gilt:*

(a) *Für jede stetige beschränkte Funktion $\phi\colon f([a,b]) \to \mathbb{R}$ ist die Komposition $\phi \circ f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \phi(f(x))$ Riemann-integrierbar.*

(b) *Die Funktionen*

$$\begin{aligned} |f|\colon [a,b] \to \mathbb{R}, &\quad x \mapsto |f(x)|, \\ f^2\colon [a,b] \to \mathbb{R}, &\quad x \mapsto f(x)^2, \\ f_+\colon [a,b] \to \mathbb{R}, &\quad x \mapsto \max\{f(x), 0\} \\ f_-\colon [a,b] \to \mathbb{R}, &\quad x \mapsto \max\{-f(x), 0\} \end{aligned}$$

sind alle Riemann-integrierbar und wenn $f \ge 0$ ist, so auch

$$\sqrt{f}\colon [a,b] \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \sqrt{f(x)}.$$

(c) *Sei auch* $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *eine Riemann-integrierbare Funktion. Dann sind auch die Funktionen*

$$\begin{aligned} fg\colon [a,b] \to \mathbb{R}, \qquad & x \mapsto f(x)g(x) \text{ und} \\ \max(f,g)\colon [a,b] \to \mathbb{R}, \qquad & x \mapsto \max\{f(x), g(x)\} \end{aligned}$$

Riemann-integrierbar.

Beweis. (a) Ist f stetig an der Stelle x, so auch $\phi \circ f$ (weil ϕ stetig angenommen ist). Also ist $\operatorname{disc}(\phi \circ f) \subseteq \operatorname{disc}(f)$. Nun ist $\operatorname{disc}(f)$ eine Lebesgue-Nullmenge, da f Riemann-integrierbar ist (nach dem Lebesgue-Kriterium). Nach Beispiel 2.4 ist auch $\operatorname{disc}(\phi \circ f)$ eine Lebesgue-Nullmenge (als Teilmenge einer solchen). Folglich ist $\phi \circ f$ Riemann-integrierbar, nach dem Lebesgue-Kriterium.

(b) Die Funktionen

$$\begin{aligned} \alpha\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad & \alpha(y) := |y| \\ \beta\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad & \beta(y) := y^2 \\ \gamma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad & \gamma(y) := \max\{y, 0\} \text{ und} \\ \eta\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad & \eta(y) := \gamma(-y) = \max\{-y, 0\} \end{aligned}$$

sind stetig.[7] Nach dem Satz vom Maximum sind all diese stetigen Funktionen auf $[-r, r]$ beschränkt für jedes $r > 0$, und somit beschränkt auf jeder beschränkten Teilmenge von $\mathbb{R}$. Nach (a) sind also $|f| = \alpha \circ f$, $f^2 = \beta \circ f$, $f_+ = \gamma \circ f$ und $f_- = \eta \circ f$ Riemann-integrierbar. Weiter ist $\psi\colon [0, \infty[\to \mathbb{R}$, $\psi(y) := \sqrt{y}$ stetig und auf jeder beschränkten Teilmenge von $[0, \infty[$ beschränkt. Ist $f \geq 0$, so ist nach (a) also $\sqrt{f} = \psi \circ f$ Riemann-integrierbar.

(c) folgt aus (b) und Satz 1.4(a), denn es ist

$$fg = \frac{1}{4}\big((f+g)^2 - (f-g)^2\big)$$

und $\max(f, g) = f + (g - f)_+$. $\square$

[7] Beachten Sie, dass man γ auch stückweise definieren könnte als $\gamma(y) := 0$ wenn $y \leq 0$ bzw. $\gamma(y) := y$ wenn $y \geq 0$.

Bemerkung 2.7 Ist $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar, so sind nach Folgerung 2.6 auch der *Positivteil* $f_+ := \max(f,0)$ und *Negativteil* $f_- := (-f)_+ = \max(-f,0)$ Riemann-integrierbar. Beachten Sie, dass $f_+ \geq 0$, $f_- \geq 0$ und $f = f_+ - f_-$, somit

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f_+(x)\,dx - \int_a^b f_-(x)\,dx.$$

Das Integral von f lässt sich also als Differenz des oberhalb der x-Achse mit dem Graphen von f eingeschlossenen Flächeninhalts und des unterhalb der x-Achse mit dem Graphen eingeschlossenen Flächeninhalt interpretieren.

3 Beweis des Lebesgue-Kriteriums*

In der Vorlesung überspringen wir zunächst einmal den Beweis des Lebesgue-Kriteriums und benutzen es als *black box.* Wenn die Zeit es zulässt, tragen wir den Beweis am Semesterende nach. Der folgende Beweis ist zwar so aufgeschrieben, dass er nur Bekanntes benutzt und im Prinzip jetzt für Sie lesbar ist. Einige der dem Beweis zugrunde liegenden Ideen werden aber im Semester noch systematisch eingeführt und geübt (z.B. im Kapitel über Kompaktheit). Hat man die Ideen bereits an anderer Stelle verinnerlicht, ist der Beweis viel leichter lesbar.

Wir benötigen zunächst eine Verallgemeinerung von Beispiel 2.5: *Abzählbare Vereinigungen von Lebesgue-Nullmengen sind Lebesgue-Nullmengen.* Genauer:

Lemma 3.1 *Ist $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Lebesgue-Nullmengen $M_n \subseteq \mathbb{R}$, so ist auch $M := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} M_n$ eine Lebesgue-Nullmenge.*

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ finden wir eine Folge $(I_{n,m})_{m\in\mathbb{N}}$ von beschränkten offenen Intervallen $I_{n,m} \subseteq \mathbb{R}$ derart, dass

$$M_n \subseteq \bigcup_{m\in\mathbb{N}} I_{n,m} \text{ und } \sum_{m=1}^{\infty} L(I_{n,m}) < \varepsilon/2^n.$$

Weil $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ abzählbar ist, gibt es eine surjektive Abbildung $q\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Dann ist $(I_{q(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge von beschränkten offenen Intervallen mit

$$M = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} M_n \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{m\in\mathbb{N}} I_{n,m} = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} I_{q(k)}.$$

Weiter ist $\sum_{k=1}^{\infty} L(I_{q(k)}) \leq \varepsilon$ (was den Beweis beendet), denn für jedes $K \in \mathbb{N}$ gibt es ein $\ell \in \mathbb{N}$ derart, dass

$$\{q(1), \ldots, q(K)\} \subseteq \{1, \ldots, \ell\} \times \{1, \ldots, \ell\};$$

folglich ist $\sum_{k=1}^{K} L(I_{q(k)}) \leq \sum_{n=1}^{\ell} \sum_{m=1}^{\ell} L(I_{n,m}) \leq \sum_{n=1}^{\ell} \sum_{m=1}^{\infty} L(I_{n,m}) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} L(I_{n,m}) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon/2^n = \varepsilon$. $\square$

Das folgende Lemma wird uns ermöglichen, in geeigneten Situationen die obigen abzählbaren Vereinigungen $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n$ von beschränkten offenen Intervallen durch endliche Vereinigungen $I_1 \cup I_2 \cup \cdots \cup I_N$ (mit $N \in \mathbb{N}$) zu ersetzen.

Lemma 3.2 *Es sei $K \subseteq \mathbb{R}$ eine beschränkte abgeschlossene Teilmenge. Ist*

$$K \subseteq \bigcup_{j \in J} V_j$$

für eine Familie von offenen Teilmengen $V_j \subseteq \mathbb{R}$, so gilt $K \subseteq V_{j_1} \cup \cdots \cup V_{j_n}$ für ein $n \in \mathbb{N}$ und geeignete Indizes $j_1, \ldots, j_n \in J$.

Man sagt auch, die offene Überdeckung $(V_j)_{j \in J}$ der Menge K habe eine *endliche Teilüberdeckung.*

Beweis. (a) Sei zunächst $K = [a, b]$ ein abgeschlossenes beschränktes Intervall und $(V_j)_{j \in J}$ wie im Lemma. Wir definieren $I \subseteq [a, b]$ als die Menge aller $t \in [a, b]$, für welche eine endliche Teilmenge $F_t \subseteq J$ existiert mit

$$[a, t] \subseteq \bigcup_{j \in F_t} V_j.$$

Da aus $t \in I$ offenbar $[a, t] \subseteq I$ folgt, ist I ein Intervall, also $I = [a, c[$ für ein $c \in]a, b]$ (Fall 1) oder $I = [a, c]$ für ein $c \in [a, b]$ (Fall 2). In beiden Fällen gibt es ein $j_0 \in J$ mit $c \in V_{j_0}$. Weil V_{j_0} eine Umgebung von c in $\mathbb{R}$ ist, gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit

$$]c - \varepsilon, c + \varepsilon[\subseteq V_{j_0}.$$

Läge Fall 1 vor, so fänden wir ein t im Intervall $[a, b] \cap]c - \varepsilon, c[$. Dann ist

$$[a, c] = [a, t] \cup [t, c] \subseteq \Big(\bigcup_{j \in F_t} V_j \Big) \cup V_{j_0},$$

somit $c \in I = [a, c[$, Widerspruch. Also liegt Fall 2 vor. Wäre $c < b$, so fänden wir ein t im Intervall $[a, b] \cap]c, c + \varepsilon[$. Dann ist

$$[a, c] = [a, c] \cup [c, t] \subseteq \Big(\bigcup_{j \in F_c} V_j \Big) \cup V_{j_0},$$

somit $t \in I = [a, c]$ im Widerspruch zu $c < t$. Also muss $c = b$ sein und folglich $I = [a, b]$. Da $b \in I$, ist $K = [a, b] \subseteq \bigcup_{j \in F_b} V_j$; die gewünschte endliche Teilüberdeckung ist gefunden.

(b) Ist nun $K \subseteq \mathbb{R}$ eine beliebige beschränkte abgeschlossene Teilmenge von $\mathbb{R}$, so gibt es reelle Zahlen $a < b$ mit $K \subseteq [a, b]$. Dann ist $(V_j)_{j \in J}$, zusammen mit der offenen Menge $\mathbb{R} \setminus K$, eine offene Überdeckung von $[a, b]$. Nach (a) gibt es $j_1, \ldots, j_n \in J$ mit

$$[a, b] \subseteq V_{j_1} \cup \cdots \cup V_{j_n} \cup (\mathbb{R} \setminus K).$$

Folglich ist $K \subseteq V_{j_1} \cup \cdots \cup V_{j_n}$. □

Bemerkung 3.3 In der Situation von Lemma 3.2 gibt es weiter ein $\delta > 0$ derart, dass

$$(\forall x \in K)(\exists j \in J) \ ]x - \delta, x + \delta[\subseteq V_j.$$

[Für jedes $x \in K$ existiert ein $j(x) \in J$ mit $x \in V_{j(x)}$. Da $V_{j(x)}$ offen ist, existiert ein $\delta(x) > 0$ mit

$$]x - 2\delta(x), x + 2\delta(x)[\subseteq V_{j(x)}.$$

Dann ist $K \subseteq \bigcup_{x \in K}]x - \delta(x), x + \delta(x)[$. Nach Lemma 3.2 existieren ein $n \in \mathbb{N}$ und $x_1, \ldots, x_n \in [a, b]$ mit

$$K \subseteq \bigcup_{k=1}^{n}]x_k - \delta(x_k), x_k + \delta(x_k)[\,.$$

Dann leistet $\delta := \min\{\delta(x_1), \ldots, \delta(x_n)\}$ das Gewünschte: Ist $x \in K$, so ist $x \in]x_k - \delta(x_k), x_k + \delta(x_k)[$ für ein $k \in \{1, \ldots, n\}$, folglich $]x - \delta, x + \delta[\subseteq]x_k - \delta(x_k) - \delta, x_k + \delta(x_k) + \delta[\subseteq]x_k - 2\delta(x_k), x_k + 2\delta(x_k)[\subseteq V_{j(x_k)}$.]

Wir nennen eine Familie $(X_j)_{j \in J}$ von Mengen eine Familie *disjunkter* Mengen, wenn $X_j \cap X_k = \emptyset$ für alle $j, k \in J$ mit $j \neq k$.

Lemma 3.4 *Es seien $I_1, \dots, I_n$ beschränkte offene Intervalle und $a < b$ reelle Zahlen. Dann gilt:*

(a) *Es existieren ein $m \leq n$ und disjunkte offene Intervalle $J_1, \dots, J_m$ derart, dass*
$$I_1 \cup \cdots \cup I_n = J_1 \cup \cdots \cup J_m.$$

(b) *In der Situation von* (a) *ist $L(J_1) + \cdots + L(J_m) \leq L(I_1) + \cdots + L(I_n)$.*

(c) *Es existieren ein $\ell \leq m+1$ und disjunkte abgeschlossene Intervalle $K_1, \dots, K_\ell$ derart, dass*
$$[a, b] \setminus (I_1 \cup \cdots \cup I_n) = K_1 \cup \cdots \cup K_\ell.$$

Beweis. (a) Der Beweis ist per Induktion nach n. Für $n = 1$ ist nichts zu zeigen. Sei nun $n = 2$. Sind I_1 und I_2 disjunkt, so nehmen wir $m := 2$, $J_1 := I_1$ und $J_2 := I_2$. Ist $I_1 \subseteq I_2$ (bzw. $I_2 \subseteq I_1$), so nehmen wir $m = 1$ und $J_1 := I_2$ (bzw. $J_1 := I_1$). Sei nun keine der Mengen I_1 und I_2 in der anderen enthalten und ihr Schnitt nicht leer. Nachdem wir ggf. die zwei Mengen vertauschen, dürfen wir annehmen, dass
$$I_1 =]\alpha, \beta[\text{ und } I_2 =]\gamma, \delta[\text{ mit } \alpha < \gamma < \beta < \delta.$$
Wir wählen nun $m = 1$ und $J_1 :=]\alpha, \delta[$.

Sei nun $n > 2$ und gelte die Ausage bereits für $n - 1$ statt n. Sind all die Mengen $I_1, \dots, I_n$ disjunkt, so nehmen wir $m := n$, $J_k := I_k$ für $k \in \{1, \dots, n\}$. Andernfalls haben zwei der Mengen nicht-leeren Schnitt und wir dürfen annehmen, dass $I_n \cap I_{n-1} \neq \emptyset$. Dann ist $I_{n-1} \cup I_n$ ein Intervall (nach dem Fall $n = 2$) und wir können den Fall $n - 1$ anwenden auf
$$I_1 \cup \cdots \cup I_n = I_1 \cup \cdots \cup I_{n-2} \cup (I_{n-1} \cup I_n).$$
(b) Wählen wir reelle Zahlen $A < B$ derart, dass $I_1 \cup \cdots \cup I_n \subseteq [A, B]$, so gilt für die charakteristischen Funktionen auf $[A, B]$
$$\mathbf{1}_{I_1} + \cdots + \mathbf{1}_{I_n} \geq \mathbf{1}_{I_1 \cup \cdots \cup I_n} = \mathbf{1}_{J_1} + \cdots + \mathbf{1}_{J_m}.$$
Integrieren über $[A, B]$ liefert
$$\sum_{j=1}^{n} L(I_j) = \int_A^B \sum_{j=1}^{n} \mathbf{1}_{I_j}(x)\, dx \geq \int_A^B \sum_{k=1}^{m} \mathbf{1}_{J_k}(x)\, dx = \sum_{k=1}^{m} L(J_k).$$

(c) Die zu betrachtende Menge bleibt unverändert, wenn wir alle der Mengen $I_1, \ldots, I_n$ weglassen, die leeren Schnitt mit $[a, b]$ haben. Wir dürfen daher annehmen, dass jede der Mengen $I_1, \ldots, I_n$ nichtleeren Schnitt mit $[a, b]$ besitzt. Sei $J_k =]\alpha_k, \beta_k[$ für $k \in \{1, \ldots, m\}$; nach Umnummerieren dürfen wir

$$\alpha_1 < \beta_1 \leq \alpha_2 < \beta_2 \leq \cdots \leq \alpha_m < \beta_m$$

annehmen. Ist $a \in J_1$ und $b \in J_m$, so ist

$$[a, b] \setminus (I_1 \cup \cdots \cup I_n) = [a, b] \setminus \bigcup_{k=1}^{m} J_k = [\beta_1, \alpha_2] \cup [\beta_2, \alpha_3] \cup \cdots \cup [\beta_{m-1}, \alpha_m]$$

von der gewünschten Form. Ist $a \in J_1$ und $b \notin J_m$, so ist

$$[a, b] \setminus \bigcup_{k=1}^{m} J_k = [\beta_1, \alpha_2] \cup [\beta_2, \alpha_3] \cup \cdots \cup [\beta_{m-1}, \alpha_m] \cup [\beta_m, b].$$

Ähnliche Formeln erhält man im Fall $a \notin J_1$, $b \in J_m$ sowie im Fall $a \notin J_1$, $b \notin J_m$. □

Im nächsten Beweis nutzen wir die offene Kugel $B_\delta(x) := \{y \in X : d(x, y) < \delta\}$.

Lemma 3.5 *Sei (X, d) ein metrischer Raum, $f : X \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $x \in X$. Dann sind äquivalent:*

(a) *f is stetig an der Stelle x;*

(b) *Für jedes $\varepsilon > 0$ existiert eine offene x-Umgebung $V \subseteq X$ derart, dass $|f(z) - f(y)| < \varepsilon$ für alle $y, z \in V$.*

Beweis. Gilt (a), so gibt es zu $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ derart, dass

$$|f(y) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ für alle } y \in B_\delta(x).$$

Für alle $y, z \in V := B_\delta(x)$ ist folglich

$$\begin{aligned} |f(z) - f(y)| &= |f(z) - f(x) + f(x) - f(y)| \\ &\leq |f(z) - f(x)| + |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

und somit (b) erfüllt.

Ist umgekehrt (b) angenommen, so wählen wir zu $\varepsilon > 0$ eine offene x-Umgebung V wie in (b). Es gibt ein $\delta > 0$ mit $B_\delta(x) \subseteq V$. Für alle $y \in B_\delta(x)$ gilt $x, y \in V$, somit $|f(y) - f(x)| < \varepsilon$. Also ist f stetig an der Stelle x. $\square$

Zum Beweis des Lebesgue-Kriteriums führen wir nun noch Notationen ein. Wir betrachten $X := [a, b]$ als metrischen Raum mit der durch $d(x, y) := |x - y|$ gegebenen Metrik. Offene Kugeln in (X, d) sind von der Form

$$B_\delta(x) = \{y \in [a, b] \colon |y - x| < \delta\} = [a, b] \cap \,]x - \delta, x + \delta[.$$

Ist $f \colon [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $\varepsilon > 0$, so sei $\operatorname{cont}_\varepsilon(f)$ die Menge aller $x \in [a, b]$, für welche eine offene x-Umgebung V in (X, d) existiert derart, dass

$$|f(z) - f(y)| < \varepsilon \text{ für alle } y, z \in V.$$

Ist $x \in \operatorname{cont}_\varepsilon(f)$ und V wie eben, so ist $V \subseteq \operatorname{cont}_\varepsilon(f)$. Somit ist $\operatorname{cont}_\varepsilon(f)$ eine offene Teilmenge von (X, d), folglich $[a, b] \setminus \operatorname{cont}_\varepsilon(f)$ abgeschlossen in (X, d). Nach Lemma 3.5 ist f genau dann an der Stelle x stetig, wenn $x \in \operatorname{cont}_\varepsilon(f)$ für jedes $\varepsilon > 0$. Die Menge $\operatorname{cont}(f)$ aller Stetigkeitsstellen von f ist somit

$$\operatorname{cont}(f) = \bigcap_{\varepsilon > 0} \operatorname{cont}_\varepsilon(f). \tag{14}$$

Für die Menge aller Unstetigkeitsstellen von f ergibt sich also

$$\operatorname{disc}(f) = [a, b] \setminus \operatorname{cont}(f) = [a, b] \setminus \bigcap_{\varepsilon > 0} \operatorname{cont}_\varepsilon(f) = \bigcup_{\varepsilon > 0} \big([a, b] \setminus \operatorname{cont}_\varepsilon(f)\big). \tag{15}$$

Per Definition ist

$$\operatorname{cont}_\varepsilon(f) \subseteq \operatorname{cont}_\theta(f) \text{ für alle } \theta > \varepsilon > 0. \tag{16}$$

Lemma 3.6 *Ist $f \colon [a, b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar, so gibt es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\ell \in \mathbb{N}$ und beschränkte offene Intervalle $I_1, \ldots, I_\ell \subseteq \mathbb{R}$ derart, dass*

$$[a, b] \setminus \operatorname{cont}_\varepsilon(f) \subseteq \bigcup_{k=1}^{\ell} I_k \text{ und } \sum_{k=1}^{\ell} L(I_k) < \sqrt{\varepsilon}.$$

Beweis. Nach Satz 1.3 gibt es Treppenfunktionen $\phi \colon [a, b] \to \mathbb{R}$ sowie $\psi \colon [a, b] \to \mathbb{R}$ mit $\phi \leq f \leq \psi$ derart, dass $\int_a^b (\psi(x) - \phi(x))\, dx < \varepsilon$. Sei

$$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$$

eine Zerlegung von $[a, b]$ derart, dass $\phi|_{]t_{k-1},t_k[}$ und $\psi|_{]t_{k-1},t_k[}$ konstant sind für alle $k \in \{1, \ldots, n\}$; sei c_k bzw. C_k der jeweilige konstante Funktionswert. Sei nun Φ die Menge aller $k \in \{1, \ldots, n\}$ derart, dass $C_k - c_k \geq \sqrt{\varepsilon}$. Diese Menge ist daher für uns interessant, weil für alle $k \in \{1, \ldots, n\} \setminus \Phi$

$$\sqrt{\varepsilon} > C_k - c_k \geq |f(y) - f(z)| \text{ für alle } y, z \in]t_{k-1}, t_k[$$

gilt und somit $x \in \mathrm{cont}_{\sqrt{\varepsilon}}(f)$ für alle $x \in]t_{k-1}, t_k[$, also $]t_{k-1}, t_k[\subseteq \mathrm{cont}_{\sqrt{\varepsilon}}(f)$. Folglich ist

$$[a, b] \setminus \mathrm{cont}_{\sqrt{\varepsilon}}(f) \subseteq \{t_0, t_1, \ldots, t_n\} \cup \bigcup_{k\in\Phi}]t_{k-1}, t_k[. \tag{17}$$

Nun gilt

$$\varepsilon > \int_a^b (\psi(x) - \phi(x))\, dx \geq \sum_{k\in\Phi} \underbrace{(C_k - c_k)}_{\geq\sqrt{\varepsilon}} \underbrace{(t_k - t_{k-1})}_{=L(]t_{k-1},t_k[)} \geq \sqrt{\varepsilon} \sum_{k\in\Phi} L(]t_{k-1}, t_k[)$$

und somit $s := \sum_{k\in\Phi} L(]t_{k-1}, t_k[) < \sqrt{\varepsilon}$. Seien $k_1 < \cdots < k_m$ die Elemente von Φ; wir setzen $I_j :=]t_{k_j-1}, t_{k_j}[$ für $j \in \{1, \ldots, m\}$. Wir finden beschränkte offene Intervalle $I_{m+1}, \ldots, I_{m+n+1}$ mit $t_j \in I_{m+j+1}$ für alle $j \in \{0, \ldots, n\}$ derart, dass

$$\sum_{j=0}^{n} L(I_{m+j+1}) < \sqrt{\varepsilon} - s$$

(vgl. Beispiel 2.3). Nach (17) ist dann $[a, b] \setminus \mathrm{cont}_{\sqrt{\varepsilon}}(f) \subseteq \bigcup_{j=1}^{m+n+1} I_j$ und $\sum_{j=1}^{n+m+1} L(I_j) = \sum_{k\in\Phi} L(]t_{k-1}, t_k[) + \sum_{j=0}^{n} L(I_{m+j+1}) < s + \sqrt{\varepsilon} - s = \sqrt{\varepsilon}$. □

Beweis von Satz 2.1. Sei f Riemann-integrierbar. Ist $\varepsilon > 0$, so existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{n^2} \leq \varepsilon$ (da $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty$). Nach (14) und (16) ist dann

$$\mathrm{cont}(f) = \bigcap_{n\geq n_0} \mathrm{cont}_{\frac{1}{n^4}}(f).$$

Die Menge aller Unstetigkeitsstellen von f ist folglich

$$\mathrm{disc}(f) = [a, b] \setminus \mathrm{cont}(f) = \bigcup_{n\geq n_0} \left([a, b] \setminus \mathrm{cont}_{\frac{1}{n^4}}(f)\right).$$

Nach Lemma 3.6 gibt es für jedes $n \geq n_0$ ein $m_n \in \mathbb{N}$ und beschränkte offene Intervalle $I_{n,1}, I_{n,2}, \ldots, I_{n,m_n}$ derart, dass

$$[a,b] \setminus \mathrm{cont}_{\frac{1}{n^4}}(f) \subseteq \bigcup_{i=1}^{m_n} I_{n,i} \;\text{ und }\; \sum_{i=1}^{m_n} L(I_{n,i}) < \frac{1}{n^2}.$$

Sei nun $(I_k)_{k\in\mathbb{N}}$ die Folge der vorigen Intervalle in der Reihenfolge

$$I_{n_0,1}, \ldots, I_{n_0,m_{n_0}};\; I_{n_0+1,1}, \ldots, I_{n_0+1,m_{n_0+1}};\; \ldots$$

Dann gilt

$$\mathrm{disc}(f) \subseteq \bigcup_{n\geq n_0} \big([a,b] \setminus \mathrm{cont}_{\frac{1}{n^4}}(f)\big) \subseteq \bigcup_{k\in\mathbb{N}} I_k.$$

Weiter gilt $\sum_{k=1}^{\infty} L(I_k) \leq \varepsilon$ (womit $\mathrm{disc}(f)$ als Lebesgue-Nullmenge erkannt ist), weil die Folge der Partialsummen monoton wächst und

$$\sum_{k=1}^{m_{n_0}+m_{n_0+1}+\cdots+m_{n_0+\ell}} L(I_k) = \sum_{j=n_0}^{n_0+\ell} \sum_{i=1}^{m_j} L(I_{j,i}) \leq \sum_{j=n_0}^{n_0+\ell} \frac{1}{j^2} \leq \sum_{j=n_0}^{\infty} \frac{1}{j^2} \leq \varepsilon$$

für jedes $\ell \in \mathbb{N}_0$.

Umgekehrt sei nun angenommen, dass $\mathrm{disc}(f)$ eine Lebesgue-Nullmenge ist. Da f beschränkt ist, gibt es ein $M \in]0,\infty[$ derart, dass

$$|f(x)| \leq M \;\text{ für alle } x \in [a,b].$$

Gegeben $\varepsilon' > 0$ sei $\varepsilon := \varepsilon'/(2M+b-a)$. Nach (15) ist $K := [a,b] \setminus \mathrm{cont}_\varepsilon(f) \subseteq \mathrm{disc}(f)$ und somit K eine Lebesgue-Nullmenge (siehe Beispiel 2.4). Also gibt es eine Folge $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ offener beschränkter Intervalle derart, dass $K \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n$ und $\sum_{n=1}^{\infty} L(I_n) \leq \varepsilon$. Wir wissen aus unseren Vorüberlegungen, dass K in $[a,b]$ abgeschlossen ist. Nach Lemma 3.2 gibt es also ein $N \in \mathbb{N}$ derart, dass

$$K \subseteq \bigcup_{n=1}^{N} I_n.$$

Dann ist $\mathrm{cont}_\varepsilon(f) = [a,b] \setminus K \supseteq [a,b] \setminus \bigcup_{n=1}^{N} I_n$ und nach Lemma 3.4 gilt

$$[a,b] \setminus \bigcup_{n=1}^{N} I_n = [a_1,b_1] \cup [a_2,b_2] \cup \cdots \cup [a_\ell,b_\ell] =: C$$

mit einem $\ell \in \mathbb{N}$ und disjunkten Intervallen $[a_1, b_1], \ldots, [a_\ell, b_\ell]$. Für jedes $v \in C$ ist $v \in \operatorname{cont}_\varepsilon(f)$, also existiert ein $\delta_v > 0$ derart, dass

$$|f(z) - f(y)| \le \varepsilon \text{ für alle } y, z \in [a, b] \text{ mit } |z - v|, |y - v| < \delta_v. \tag{18}$$

Da C in $\mathbb{R}$ abgeschlossen und (als Teilmenge von $[a, b]$) beschränkt ist, gibt es nach Bemerkung 3.3 ein $\delta > 0$ derart, dass

$$(\forall x \in C)(\exists v \in C)\ ]x - \delta, x + \delta[\subseteq]v - \delta_v, v + \delta_v[. \tag{19}$$

Wir wählen Zerlegungen $Z_1, \ldots, Z_\ell$ der Intervalle $[a_1, b_1], \ldots, [a_\ell, b_\ell]$, mit Maschenweiten $\Delta(Z_1), \ldots, \Delta(Z_\ell) < \delta$. Dann ist

$$Z := \{a, b\} \cup Z_1 \cup \cdots \cup Z_\ell$$

eine Zerlegung des Intervalls $[a, b]$. Wir definieren nun Treppenfunktionen $\phi\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ und $\psi\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ mit $\phi \le f \le \psi$ durch

$$\phi(x) := -M \text{ und } \psi(x) := M$$

wenn $x \in [a, b] \setminus C$;

$$\phi(x) := \inf\{f(y)\colon y \in [t_{j-1}, t_j]\} \text{ und } \psi(x) := \sup\{f(z)\colon z \in [t_{j-1}, t_j]\}$$

wenn $x \in [a_i, b_i]$, $Z_i = \{a_i = t_0 < \cdots < t_\nu = b_i\}$ und $x \in [t_{j-1}, t_j[$ oder $j = \nu$ und $x \in [t_{\nu-1}, t_\nu]$. Für alle $x \in [a, b]$ ist dann $-M \le \phi(x) \le f(x) \le \psi(x) \le M$ und somit

$$\psi(x) - \phi(x) \le 2M.$$

Ist $x \in C$, so sei $x \in [t_{j-1}, t_j] \subseteq [a_i, b_i]$ mit Notation wie oben. Dann gilt

$$f(z) - f(y) \le \varepsilon \tag{20}$$

für all $y, z \in [t_{j-1}, t_j] \subseteq C \cap\,]x - \delta, x + \delta[$ nach (19) und (18). Gehen wir in (20) bzgl. z zum Supremum über und dann bzgl. y zum Infimum, so folgt

$$\psi(x) - \phi(x) \le \varepsilon.$$

Aus Lemma 3.4 folgt, dass $[a, b] \setminus C = [a, b] \cap \bigcup_{n=1}^N I_n$ eine disjunkte Vereinigung $\bigcup_{k=1}^m J_k$ von Intervallen J_k der Form $J_k =]\alpha_k, \beta_k[$ oder $[\alpha_k, \beta_k[$ mit $\alpha_k = a$ oder $]\alpha_k, \beta_k]$ mit $\beta_k = b$ ist, wobei

$$\sum_{k=1}^m L(J_k) \le \sum_{n=1}^N L(I_n) \le \varepsilon.$$

Wir erhalten

$$\begin{aligned}
\int_a^b (\psi(x)-\phi(x))\,dx &= \sum_{k=1}^m \int_{\alpha_k}^{\beta_k} \underbrace{(\psi(x)-\phi(x))}_{\le 2M}\,dx + \sum_{j=1}^\ell \int_{a_j}^{b_j} \underbrace{(\psi(x)-\phi(x))}_{\le\varepsilon}\,dx \\
&\le 2M \underbrace{\sum_{k=1}^m I(J_k)}_{\le\varepsilon} + \varepsilon \underbrace{\sum_{j=1}^\ell (b_j-a_j)}_{\le b-a} \le 2M\varepsilon + (b-a)\varepsilon \le \varepsilon'.
\end{aligned}$$

Nach Satz 1.3 ist f also Riemann-integrierbar. □

4 Uneigentliche Integrale

Bisher haben wir geeignete Funktionen über beschränkte abgeschlossene Intervalle $[a,b]$ integriert. Für manche Anwendungen möchte man Funktionen auch über andere Intervalle integrieren, z.B. über unbeschränkte Intervalle der Form $[a,\infty[$. Solche "uneigentlichen Integrale" definiert man als Grenzwerte von gewöhnlichen Riemann-Integralen über beschränkte abgeschlossene Teilintervalle.

Definition 4.1 Seien $a,b\in\mathbb{R}\cup\{\infty\}$ mit $a<b$ und $f\colon [a,b[\,\to\mathbb{R}$ eine Funktion derart, dass $f|_{[a,r]}$ für alle $r\in[a,b[$ Riemann-integrierbar ist.[8]

(a) Das *uneigentliche Integral von f* über $[a,b[$ ist definiert als

$$\int_a^b f(x)\,dx := \lim_{r\nearrow b}\int_a^r f(x)\,dr,$$

wenn der linksseitige Grenzwert in $\mathbb{R}$ existiert. Ist dies der Fall, so sagen wir auch, dass das uneigentliche Integral $\int_a^b f(x)\,dx$ *konvergiert.* Verlangt ist also, dass

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^{r_n} f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$$

für jede Folge $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $[a,b[$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = b$.

[8]Dies ist automatisch erfüllt, wenn f stetig ist.

(b) Ist $f \geq 0$, so ist die Funktion $[a,b[\to [0,\infty[$, $r \mapsto \int_a^r f(x)\,dx$ monoton wachsend.[9] Setzen wir

$$\int_a^b f(x)\,dx := \sup\left\{\int_a^r f(x)\,dx \colon r \in [a,b[\right\} \in [0,\infty],$$

so gilt für $n \to \infty$ also $\int_a^{r_n} f(x)\,dx \to \int_a^b f(x)\,dx$ im Sinne von Konvergenz bzw. bestimmter Divergenz, für jede Folge $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $[a,b[$ mit $r_n \to b$.

Satz 4.2 *Sind $a < b$ reelle Zahlen und ist $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar, so gilt*

$$\lim_{r \nearrow b} \int_a^r f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Das Riemann-Integral von f über $[a,b]$ stimmt also mit dem uneigentlichen Integral von $f|_{[a,b[}\colon [a,b[\to \mathbb{R}$ über $[a,b[$ überein.

Beweis. Sei $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $[a,b[$ mit $r_n \to b$. Wegen der Intervalladditivität des Integrals gilt dann

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx - \int_a^{r_n} f(x)\,dx\right| = \left|\int_{r_n}^b f(x)\,dx\right| \leq \|f\|_\infty (b - r_n) \to 0$$

für $n \to \infty$ und somit $\int_a^{r_n} f(x)\,dx \to \int_a^b f(x)\,dx$ (wobei auch die Integralabschätzung aus Satz 1.4(d) benutzt wurde). $\square$

Beispiel 4.3 Wir betrachten die Funktion $f\colon [-\pi, 0[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{\sin(x)}{x}$ und zeigen, dass das uneigentliche Integral $\int_{-\pi}^0 \frac{\sin(x)}{x}\,dx$ konvergiert.

Da $\sin(x)/x \to 1$ für $x \to 0$ (z.B. nach der l'Hospitalschen Regel), ist

$$\widetilde{f}\colon [-\pi, 0] \to \mathbb{R},\;\; x \mapsto \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x} & \text{wenn } x \in [-\pi, 0[; \\ 1 & \text{wenn } x = 0 \end{cases}$$

eine stetige Funktion auf $[-\pi, 0]$ und somit Riemann-integrierbar. Nach Satz 4.2 konvergiert das uneigentliche Integral

$$\int_{-\pi}^0 \frac{\sin(x)}{x}\,dx = \lim_{r \nearrow 0} \int_{-\pi}^r \widetilde{f}(x)\,dx$$

und stimmt mit $\int_{-\pi}^0 \widetilde{f}(x)\,dx$ überein.

[9] Denn $\int_a^R f(x)\,dx - \int_a^r f(x)\,dx = \int_r^R f(x)\,dx \geq 0$ für alle $r \leq R$ in $[a,b[$.

Wir erinnern an allgemeine Potenzen: $x^n = (e^{\ln(x)})^n = e^{n\ln(x)}$ mit $x > 0$ und $n \in \mathbb{Z}$ verallgemeinernd definiert man

$$x^\alpha := e^{\alpha \ln(x)} \text{ für } \alpha \in \mathbb{R} \text{ und reelle Zahlen } x > 0.$$

Die Funktion $]0, \infty[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^\alpha$ ist differenzierbar mit Ableitung

$$\frac{d}{dx}(x^\alpha) = \frac{d}{dx}(e^{\alpha \ln(x)}) = e^{\alpha \ln(x)} \alpha \frac{1}{x} = \alpha x^{\alpha - 1},$$

wobei die Kettenregel benutzt wurde. Stammfunktionen sind also

$$\int x^\alpha \, dx = \begin{cases} \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C & \text{wenn } \alpha \neq -1; \\ \ln(x) + C & \text{wenn } \alpha = -1. \end{cases}$$

Satz 4.4 *Sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann gilt:*

(a) $\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha} \, dx < \infty$ *genau dann, wenn* $\alpha > 1$*;*

(b) $\int_e^\infty \frac{1}{x(\ln x)^\alpha} \, dx < \infty$ *genau dann, wenn* $\alpha > 1$*.*

Beweis. (a) Der Fall $\alpha = 1$: Es gilt $\int_1^r \frac{1}{x} \, dx = \ln(r) \to \infty$ für $r \to \infty$. Ist $\alpha \neq 1$, so ist

$$\int_1^r \frac{1}{x^\alpha} \, dx = \frac{r^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha}.$$

Ist $1 - \alpha > 0$ (also $\alpha < 1$), so divergiert die rechte Seite der vorigen Gleichung bestimmt gegen ∞ für $r \to \infty$. Ist $1 - \alpha < 0$ (also $\alpha > 1$), konvergiert die rechte Seite gegen $\frac{1}{\alpha - 1} < \infty$.

(b) Sei $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $[1, \infty[$ mit $r_n \to \infty$. Dann gilt $\ln(r_n) \to \infty$. Die Substitution $u = \ln(x)$, $du = \frac{1}{x} \, dx$ führt auf

$$\int_1^{r_n} \frac{1}{x(\ln(x))^\alpha} \, dx = \int_0^{\ln(r_n)} \frac{1}{u^\alpha} \, du.$$

Nach (a) ist die rechte Seite voriger Gleichung für $n \to \infty$ genau dann konvergent, wenn $\alpha > 1$, andernfalls bestimmt divergent. $\square$

Satz 4.5 (Majorantenkriterium) *Es seien $a, b \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ mit $a < b$ und $f, g \colon [a, b[\to \mathbb{R}$ Funktionen derart, dass $f|_{[a,r]}$ und $g|_{[a,r]}$ Riemann-integrierbar sind für alle $r \in [a, b[$. Sei weiter $|f| \leq g$ (insbesondere also $g \geq 0$) und $\int_a^b g(x) \, dx < \infty$. Dann konvergiert das uneigentliche Integral $\int_a^b f(x) \, dx$.*

Beweis. Sei $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $[a,b[$ mit $r_n \to b$. Wir zeigen, dass die Integrale $y_n := \int_a^{r_n} f(x)\,dx$ für $n \in \mathbb{N}$ eine Cauchy-Folge bilden. Sei hierzu $\varepsilon > 0$. Da $\int_a^{r_n} g(x)\,dx \to \int_a^b g(x)\,dx$, ist $(\int_a^{r_n} g(x)\,dx)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge. Also existiert ein $N \in \mathbb{N}$ derart, dass $|\int_a^{r_n} g(x)\,dx - \int_a^{r_m} g(x)\,dx| < \varepsilon$ für alle $n, m \geq N$. Nachdem wir eventuell m und n vertauschen, ist $r_n \geq r_m$ und somit

$$\varepsilon > \left| \int_a^{r_n} g(x)\,dx - \int_a^{r_m} g(x)\,dx \right| = \left| \int_{r_m}^{r_n} g(x)\,dx \right| = \int_{r_m}^{r_n} g(x)\,dx.$$

Für n, m wie zuvor ist folglich

$$\begin{aligned} |y_n - y_m| &= \left| \int_a^{r_n} f(x)\,dx - \int_a^{r_m} f(x)\,dx \right| = \left| \int_{r_m}^{r_n} f(x)\,dx \right| \\ &\leq \int_{r_m}^{r_n} |f(x)|\,dx \leq \int_{r_m}^{r_n} g(x)\,dx < \varepsilon. \end{aligned}$$

Also ist $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge und somit konvergent gegen ein $y \in \mathbb{R}$. Der Grenzwert y ist unabhängig von der gewählten Folge $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Ist nämlich auch $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $[a,b[$ mit $s_n \to b$, so konvergiert nach dem Vorigen $z_n := \int_a^{s_n} f(x)\,dx$ für $n \to \infty$ gegen ein $z \in \mathbb{R}$. Dann ist $r_1, s_1, r_2, s_2, \ldots$ eine Folge $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $[a,b[$ mit $t_n \to b$ und somit $w_n := \int_a^{t_n} f(x)\,dx$ für $n \to \infty$ konvergent gegen ein $w \in \mathbb{R}$. Dann sind $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Teilfolgen von $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (denn diese Folge ist ja $y_1, z_1, y_2, z_2, \ldots$). Die Teilfolgen konvergieren nun ebenfalls gegen w und somit ist $y = w = z$. Also ist $y = \int_a^b f(x)\,dx$. □

Beispiel 4.6 Das uneigentliche Integral $\int_1^\infty \frac{\sin(x)}{x^2}\,dx$ konvergiert, denn die Funktion $[1,\infty[\to \mathbb{R}$ ist stetig und somit über jedes Intervall der Form $[1,r]$ Riemann-integrierbar. Weiter ist

$$\left| \frac{\sin(x)}{x^2} \right| \leq \frac{1}{x^2} =: g(x)$$

und $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx < \infty$ nach Satz 4.4(a). Das Majorantenkriterum ist also anwendbar.

Definition 4.7 Es seien $a, b \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ mit $a < b$ und $f\colon [a,b[\to \mathbb{R}$ eine Funktion derart, dass $f|_{[a,r]}$ Riemann-integrierbar ist für alle $r \in [a,b[$. Ist $\int_a^b |f(x)|\,dx < \infty$, so sagen wir, das uneigentliche Integral $\int_a^b f(x)\,dx$ konvergiere *absolut*.

In diesem Fall konvergiert insbesondere das uneigentliche Integral $\int_a^b f(x)\,dx$, denn wir können das Majorantenkriterium anwenden mit $g(x) := |f(x)|$.

Das folgende Beispiel ist ein Analogon der aus der Analysis 1 bekannten Tatsache, dass die alternierende harmonische Reihe $\sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ konvergiert, jedoch nicht absolut.

Beispiel 4.8 *Das uneigentliche Integral $\int_\pi^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$ konvergiert, jedoch nicht absolut.*

Zum Beweis kürzen wir $C := \int_0^\pi \sin(x)\,dx > 0$ ab sowie $a_n := \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin(x)|}{x}\,dx$ für $n \in \mathbb{N}$ und

$$x_n := \int_\pi^{(n+1)\pi} \frac{\sin(x)}{x}\,dx.$$

Konvergenz des Integrals. Da $|\sin(u+\pi)| = |-\sin(u)| = |\sin(u)|$, liefert die Substitution $u := x - \pi$

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \int_{(n+1)\pi}^{(n+2)\pi} \frac{|\sin(x)|}{x}\,dx = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin(u+\pi)|}{u+\pi}\,du \\ &= \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin(u)|}{u+\pi}\,du \le \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin(u)|}{u}\,du = a_n. \end{aligned}$$

Wegen $\frac{1}{x} \le \frac{1}{n\pi}$ für $x \in [n\pi, (n+1)\pi]$ gilt weiter

$$a_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin(x)|}{x}\,dx \le \frac{1}{n\pi} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\sin(x)|\,dx = \frac{C}{n\pi},$$

somit $a_n \to 0$ für $n \to \infty$. Nach dem Leibniz-Kriterium ist die Reihe

$$\sum_{n=1}^\infty (-1)^n a_n$$

also konvergent. Da

$$\sum_{k=1}^n (-1)^k a_k = \sum_{k=1}^n \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{\sin(x)}{x}\,dx = \int_\pi^{(n+1)\pi} \frac{\sin(x)}{x}\,dx = x_n$$

für $n \in \mathbb{N}$, existiert weiter $\lim_{n\to\infty} x_n$ und stimmt mit $\sum_{n=1}^\infty (-1)^n a_n$ überein. Ist nun $(r_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $[\pi, \infty[$ mit $r_k \to \infty$ für $k \to \infty$, so sei $n_k \in \mathbb{N}$ die natürliche Zahl mit

$$r_k \in [\pi n_k, (n_k+1)\pi[.$$

Da $n_k \to \infty$ für $k \to \infty$, folgt mit Lemma C.18

$$x_{n_k} \to \lim_{n\to\infty} x_n \text{ für } k \to \infty.$$

Nun ist aber

$$\int_\pi^{r_k} \frac{\sin(x)}{x}\,dx = \int_\pi^{n_k\pi} \frac{\sin(x)}{x}\,dx + \int_{n_k\pi}^{r_k} \frac{\sin(x)}{x}\,dx = x_k + \int_{n_k\pi}^{r_k} \frac{\sin(x)}{x}\,dx$$

mit

$$\left|\int_{\pi n_k}^{r_k} \frac{\sin(x)}{x}\,dx\right| \leq \int_{n_k\pi}^{r_k} \frac{|\sin(x)|}{x}\,dx \leq \frac{1}{\pi n_k} C$$

und somit $\int_{n_k\pi}^{r_k} \frac{\sin(x)}{x}\,dx \to 0$ für $k \to \infty$. Also konvergiert auch die Folge $\int_\pi^{r_k} \frac{\sin(x)}{x}\,dx = x_k + \int_{\pi n_k}^{r_k} \frac{\sin(x)}{x}\,dx$ gegen $\sum_{n=1}^\infty (-1)^n a_n$.

Absolute Konvergenz: Wegen $\int_\pi^{n\pi} \frac{|\sin(x)|}{x}\,dx = \sum_{k=1}^{n-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin(x)|}{x}\,dx \geq \frac{C}{\pi}\sum_{k=2}^n \frac{1}{k} \to \infty$ für $n \to \infty$ ist $\int_\pi^\infty \frac{|\sin(x)|}{x}\,dx = \infty$. Das uneigentliche Integral $\int_\pi^\infty \frac{\sin(x)}{x}\,dx$ konvergiert also nicht absolut.

Satz 4.9 (Integralvergleichskriterium) *Es sei $f\colon [1,\infty[\to [0,\infty[$ eine monoton fallende Funktion derart, dass für alle $r \in [1,\infty[$ die Einschränkung $f|_{[1,r]}$ Riemann-integrierbar ist.*[10] *Dann ist $\sum_{n=1}^\infty f(n) < \infty$ genau dann, wenn $\int_1^\infty f(x)\,dx < \infty$.*

Beweis. Für all $n \in \mathbb{N}$ gilt $f(n) \geq f(x) \geq f(n+1)$ für alle $x \in [n, n+1]$. Integrieren über $[n, n+1]$ liefert

$$f(n) \geq \int_n^{n+1} f(x)\,dx \geq f(n+1).$$

Folglich ist

$$\sum_{n=1}^N f(n) \geq \sum_{n=1}^N \int_n^{n+1} f(x)\,dx \geq \sum_{n=1}^N f(n+1),$$

also

$$\sum_{n=1}^N f(n) \geq \int_1^{N+1} f(x)\,dx \geq \sum_{n=2}^{N+1} f(n) \tag{21}$$

[10] Letztere Bedingung ist in Wirklichkeit automatisch erfüllt und bräuchte nicht vorausgesetzt zu werden – siehe Satz 4.13.

für alle $N \in \mathbb{N}$. Ist $\sum_{n=1}^{\infty} f(n) < \infty$, so folgt aus (21), dass

$$\int_1^N f(x)\,dx \le \int_1^{N+1} f(x)\,dx \le \sum_{n=2}^{N+1} f(n) \le \sum_{n=1}^{\infty} f(n)$$

für alle $N \in \mathbb{N}$. Also ist

$$\int_1^{\infty} f(x)\,dx = \sup\left\{ \int_1^N f(x)\,dx \colon N \in \mathbb{N} \right\} \le \sum_{n=1}^{\infty} f(n) < \infty.$$

Ist $\int_1^{\infty} f(x)\,dx < \infty$, so folgt aus (21), dass $\sum_{n=1}^{N} f(n) \le f(1) + \int_1^N f(x)\,dx \le f(1) + \int_1^{\infty} f(x)\,dx$ für alle $N \in \mathbb{N}$, also $\sum_{n=1}^{\infty} f(n) = \sup\{\sum_{n=1}^{N} f(n) \colon N \in \mathbb{N}\}$ $\le f(1) + \int_1^{\infty} f(x)\,dx < \infty$. □

Beispiel 4.10 *Gegeben $\alpha \in \mathbb{R}$ konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ genau dann, wenn $\alpha > 1$.*

Für $\alpha < 0$ gehen nämlich die Summanden nicht gegen 0, so dass die Reihe nicht konvergieren kann. Ist $\alpha \ge 0$, so ist die stetige Funktion $f \colon [1, \infty[\to [0, \infty[$, $x \mapsto \frac{1}{x^{\alpha}}$ monoton fallend und somit

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} < \infty \;\Leftrightarrow\; \int_1^{\infty} \frac{1}{x^{\alpha}}\,dx < \infty \;\Leftrightarrow\; \alpha > 1$$

nach dem Integralvergleichskriterium und Satz 4.4(a).

Bevor wir ein zweites Beispiel für das Integralvergleichskriterium geben, halten wir eine simple Tatsache fest:

Lemma 4.11 *Seien $a, b \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ mit $a < b$ und $f \colon [a, b[\to \mathbb{R}$ eine Funktion derart, dass $f|_{[a,r]}$ Riemann-integrierbar ist für alle $r \in [a, b[$. Sei $c \in [a, b[$. Dann gilt: Das uneigentliche Integral $\int_a^b f(x)\,dx$ konvergiert genau dann, wenn das uneigentliche Integral $\int_c^b f(x)\,dx$ konvergiert. In diesem Fall ist $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$.*

Beweis. Ist $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $[c, b[$ mit $r_n \to b$, so konvergiert $\int_c^{r_n} f(x)\,dx = \int_a^{r_n} f(x)\,dx - \int_a^c f(x)\,dx$ gegen $\int_a^b f(x)\,dx - \int_a^c f(x)\,dx$ für $n \to \infty$, falls

$\int_a^b f(x)\,dx$ konvergiert. Also konvergiert $\int_c^b f(x)\,dx$ mit Grenzwert $\int_a^b f(x)\,dx - \int_a^c f(x)\,dx$.

Konvergiert $\int_c^b f(x)\,dx$ und ist $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $[a,b[$ mit $r_n \to b$, so existiert ein $N \in \mathbb{N}$ derart, dass $r_n \geq c$ für alle $n \geq N$. Dann konvergiert $\int_a^{r_n} f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^{r_n} f(x)\,dx$ gegen $\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$. Also konvergiert $\int_a^b f(x)\,dx$ mit dem Grenzwert $\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$. $\square$

Beispiel 4.12 *Gegeben $\alpha \in \mathbb{R}$ konvergiert die Reihe $\sum_{n=2}^\infty \frac{1}{n(\ln n)^\alpha}$ genau dann, wenn $\alpha > 1$.*

Für $\alpha < 0$ ist wegen $\frac{1}{n(\ln(n))^\alpha} \geq \frac{1}{n}$ nämlich $\infty = \sum_{n=2}^\infty \frac{1}{n} \leq \sum_{n=2}^\infty \frac{1}{(\ln(n))^\alpha}$. Ist $\alpha \geq 0$, so ist die stetige Funktion $f\colon [1,\infty[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{(x+1)(\ln(x+1))^\alpha}$ monoton fallend und somit nach dem Integralvergleichskriterium

$$\sum_{n=2}^\infty \frac{1}{n(\ln(n))^\alpha} = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{(n+1)(\ln(n+1))^\alpha} < \infty$$

genau dann, wenn $\int_1^\infty f(x)\,dx = \int_2^\infty \frac{1}{u(\ln(u))^\alpha}\,du < \infty$ (wobei $u = x+1$ substituiert wurde). Letzteres gilt nach Satz 4.4(b) und Lemma 4.11 genau für $\alpha > 1$.

Für die Allgemeinbildung erwähnen wir folgende Tatsache, überspringen in der Vorlesung jedoch den Beweis.

Satz 4.13 *Seien $a < b$ reelle Zahlen. Dann ist jede monotone Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar.*

Beweis. Wir zeigen, dass jede monoton wachsende Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar ist. Dann ist auch jede monoton fallende Funktion g Riemann-integrierbar, denn $-g$ ist monoton wachsend, somit Riemann-integrierbar und folglich auch $g = -(-g)$. Wir dürfen annehmen, dass f nicht konstant ist (denn dieser Fall ist trivial) und somit $f(a) < f(b)$. Gegeben $\varepsilon > 0$ wählen wir $n \in \mathbb{N}$ so groß, dass

$$\frac{2(f(b) - f(a))(b-a)}{n} < \varepsilon.$$

Sei $t_k := a + (b-a)\frac{k}{n^2}$ für $k \in \{0, 1, \ldots, n^2\}$ und Φ die Menge aller k derart, dass

$$f(t_k) - f(t_{k-1}) > \frac{f(b) - f(a)}{n}.$$

Sei $|\Phi|$ die Anzahl der Elemente von Φ. Dann ist

$$f(b)-f(a)=\sum_{k=1}^{n^2}(f(t_k)-f(t_{k-1}))\geq\sum_{k\in\Phi}(f(t_k)-f(t_{k-1}))\geq\frac{f(b)-f(a)}{n}|\Phi|$$

und somit $|\Phi|\leq n$. Wir definieren nun Treppenfunktionen $\phi\colon[a,b]\to\mathbb{R}$ und $\psi\colon[a,b]\to\mathbb{R}$ mit $\phi\leq f\leq\psi$ via

$$\phi(x):=f(t_{k-1})\;\text{ und }\;\psi(x):=f(t_k)$$

für $k\in\{1,\ldots,n^2-1\}$ und $x\in[t_{k-1},t_k[$, bzw. für $k=n^2$ und $x\in[t_{k-1},t_k]$. Dann ist wegen $t_k-t_{k-1}=(b-a)/n^2$

$$\begin{aligned}\int_a^b(\psi(x)-\phi(x))\,dx &= \sum_{k=1}^{n^2}(f(t_k)-f(t_{k-1}))(t_k-t_{k-1})\\ &\leq \sum_{k\in\Phi}\underbrace{(f(t_k)-f(t_{k-1}))}_{\leq f(b)-f(a)}\frac{b-a}{n^2}+\sum_{k\notin\Phi}\underbrace{(f(t_k)-f(t_{k-1}))}_{\leq(f(b)-f(a))/n}\frac{b-a}{n^2}\\ &\leq \frac{(f(b)-f(a))(b-a)}{n}+\frac{(f(b)-f(a))(b-a)}{n}<\varepsilon;\end{aligned}$$

hierbei wurde benutzt, dass die letzte Summe in der vorletzten Zeile höchstens n^2 Summanden besitzt, die vorige höchstens n Summanden. Nach Satz 1.3 ist f also Riemann-integrierbar. □

Analog zu den bisher behandelten uneigentlichen Integralen für $f\colon[a,b[\to\mathbb{R}$ lassen sich andere Integrationsintervalle behandeln.

Definition 4.14 (a) Seien $a,b\in\mathbb{R}\cup\{-\infty\}$ mit $a<b$ und $f\colon\,]a,b]\to\mathbb{R}$ eine Funktion derart, dass für alle $r\in]a,b]$ die Einschränkung $f|_{[r,b]}$ Riemann-integrierbar ist. Wir definieren

$$\int_a^b f(x)\,dx:=\lim_{r\searrow a}\int_r^b f(x)\,dx$$

wenn der Grenzwert in $\mathbb{R}$ existiert.

(b) Seien $a,b\in\mathbb{R}\cup\{-\infty,\infty\}$ mit $a<b$ und $f\colon\,]a,b[\to\mathbb{R}$ eine Funktion derart, dass für alle $r<R$ in $]a,b[$ die Einschränkung $f|_{[r,R]}$ Riemann-integrierbar ist. Wir wählen $c\in\,]a,b[$ und definieren

$$\int_a^b f(x)\,dx:=\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b f(x)\,dx=\lim_{r\searrow a}\int_r^c f(x)\,dx+\lim_{r\nearrow b}\int_c^r f(x)\,dx,$$

wenn beide Grenzwerte in $\mathbb{R}$ existieren.

In (b) ist die Existenz der Grenzwerte und die Summe $\int_a^b f(x)\,dx$ der zwei Summanden unabhängig von der Wahl von c (vgl. Lemma 4.11 und sein Analogon für Funktionen auf $]a,b]$).

Satz 4.15 *Für $\alpha \in \mathbb{R}$ konvergiert das uneigentliche Integral $\int_0^1 x^\alpha\,dx$ genau dann, wenn $\alpha > -1$.*

Beweis. Sei $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $]0,1]$ mit $r_n \to 0$. Dann gilt $u_n := \frac{1}{r_n} \to \infty$. Wir substituieren $u = \frac{1}{x}$, $du = -\frac{1}{x^2}\,dx$ und erhalten

$$\int_{r_n}^1 x^\alpha\,dx = \int_1^{u_n} \frac{1}{u^{\alpha+2}}\,du.$$

Nach Satz 4.4(a) konvergiert die rechte Seite für $n \to \infty$ genau dann, wenn $\alpha + 2 > 1$, also $\alpha > -1$; in diesem Fall ist der Grenzwert $\int_1^\infty \frac{1}{u^{\alpha+2}}\,du$ unabhängig von der Wahl von $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Wir schließen, dass $\int_0^1 x^\alpha\,dx = \int_1^\infty \frac{1}{u^{\alpha+2}}\,du$. □

5 Integration via Partialbruchzerlegung

In diesem Kapitel erklären wir, wie sich Integrale von rationalen Funktionen berechnen lassen, also von Funktionen der Form

$$f\colon \{x \in \mathbb{R}\colon q(x) \neq 0\} \to \mathbb{R},\;\; x \mapsto \frac{p(x)}{q(x)} \tag{22}$$

mit Polynomen (Polynomfunktionen) $p, q\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derart, dass $q \neq 0$. Eine Polynomdivision erlaubt uns, $p = p_1 q + p_2$ zu schreiben mit einem Polynom p_2 vom Grad $\deg(p_2) < \deg(q)$ und einem Polynom p_1. Also ist

$$\frac{p(x)}{q(x)} = p_1(x) + \frac{p_2(x)}{q(x)}.$$

Eine Stammfunktion für p_1 können wir sofort hinschreiben und brauchen nur noch eine solche für p_2/q. Im folgenden betrachten wir daher nur noch rationale Funktionen f (wie in (22)) derart, dass $\deg(p) < \deg(q)$. Um das weitere Vorgehen zu motivieren, studieren wir ein Beispiel.

Beispiel 5.1 Wir betrachten die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}\setminus\{1,3\}\to\mathbb{R},\quad x\mapsto \frac{1}{(x-1)(x-3)}.$$

Da diese Pole an den Stellen $x=1$ und $x=3$ besitzt, ist es naheliegend, zu versuchen, sie als Linearkombinaton der Funktionen $1/(x-1)$ und $1/(x-3)$ zu schreiben:

$$\frac{1}{(x-1)(x-3)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-3}\ \text{ für alle } x\in\mathbb{R}\setminus\{1,3\}.$$

Multiplizieren mit $(x-1)(x-3)\neq 0$ zeigt, dass diese Gleichung zu

$$1=A(x-3)+B(x-1)=(A+B)x+(-3A-B)\ \text{ für alle } x\in\mathbb{R}\setminus\{1,3\}$$

äquivalent ist und somit (siehe Lemma B.1(c)) zu

$$1=A(x-3)+B(x-1)=(A+B)x+(-3A-B)\ \text{ für alle } x\in\mathbb{R}.$$

Dies gilt genau dann, wenn

$$A+B=0\ \text{ und }\ -3A-B=1$$

(Koeffizientenvergleich!), also wenn $B=-A$ und $-3A+A=1$, also wenn $A=-\frac{1}{2}$ und $B=\frac{1}{2}$. Folglich ist

$$\frac{1}{(x-1)(x-3)}=-\frac{1}{2}\,\frac{1}{x-1}+\frac{1}{2}\,\frac{1}{x-3};\tag{23}$$

auf jedem der Intervalle $]-\infty,1[$, $]1,3[$ bzw. $]3,\infty[$ hat die gegebene rationale Funktion also eine Stammfunktion der Form

$$\int\frac{1}{(x-1)(x-3)}\,dx=-\frac{1}{2}\ln|x-1|+\frac{1}{2}\ln|x-3|+C.$$

Wir zeigen, dass zu (23) analoge "Partialbruchzerlegungen" für jede rationale Funktion möglich sind. Eine Komplikation entsteht allerdings dadurch, dass das Nennerpolynom q nicht immer über $\mathbb{R}$ in Linearfaktoren zerfällt, sondern nicht-reelle komplexe Nullstellen besitzen kann. Im Anhang B finden Sie Sachverhalte über reelle und komplexe Polynome zusammengestellt, die wir nun benutzen (und die aus der Linearen Algebra bekannt sein sollten).

5.2 Wir betrachten ein normiertes Polynom[11]

$$q(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

mit $a_0, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$. Hat q eine komplexe, nicht reelle Nullstelle λ in dem Sinne, dass

$$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0 = 0 \;\text{ in } \mathbb{C},$$

so ist auch die komplex konjugierte Zahl $\overline{\lambda}$ eine Nullstelle von q; zudem stimmt die Vielfachheit m der Nullstelle λ mit derjenigen von $\overline{\lambda}$ überein (siehe Lemma B.1(k)). Das Produkt der entsprechenden Linearfaktoren ist

$$(x-\lambda)^m (x-\overline{\lambda})^m = (p_\lambda(x))^m$$

mit

$$p_\lambda(x) := (x-\lambda)(x-\overline{\lambda}) = x^2 - (\lambda+\overline{\lambda})x + \lambda\overline{\lambda} = x^2 - 2\operatorname{Re}(\lambda)x + |\lambda|^2.$$

Dies ist ein normiertes reelles Polynom zweiten Grades ohne reelle Nullstellen. Seien $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ die paarweise verschiedenen reellen Nullstellen von q mit den Vielfachheiten $n_1, \ldots, n_k$ und $\lambda_1, \overline{\lambda_1}, \lambda_2, \overline{\lambda_2}, \ldots, \lambda_\ell, \overline{\lambda_\ell}$ die paarweise verschiedenen komplexen, nicht reellen Nullstellen von q; seien $m_1, \ldots, m_\ell$ die Vielfachheiten von $\lambda_1, \ldots, \lambda_\ell$. Dann ist

$$q(x) = \prod_{j=1}^{k} (x-\alpha_j)^{n_j} \prod_{j=1}^{\ell} (x-\lambda_j)^{m_j} (x-\overline{\lambda_j})^{m_j}$$

und somit

$$q(x) = \prod_{j=1}^{k} (x-\alpha_j)^{n_j} \prod_{j=1}^{\ell} (p_{\lambda_j}(x))^{m_j}. \tag{24}$$

Im Laufe des Kapitels beweisen wir das folgende Resultat über Partialbrüche.

Satz 5.3 (Partialbruchzerlegung im Reellen) *Seien $p, q\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Polynomfunktionen mit $\deg(q) \geq 1$ und $\deg(p) < \deg(q)$. Mit Notationen wie in (24) existieren dann reelle Zahlen $A_{j,\nu}$ für $j \in \{1, \ldots, k\}$ und $\nu \in \{1, \ldots, n_j\}$ sowie reelle Zahlen $B_{j,\nu}$ und $C_{j,\nu}$ für $j \in \{1, \ldots, \ell\}$ und $\nu \in \{1, \ldots, m_j\}$ derart, dass für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $q(x) \neq 0$*

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \sum_{j=1}^{k} \sum_{\nu=1}^{n_j} \frac{A_{j,\nu}}{(x-\alpha_j)^\nu} + \sum_{j=1}^{\ell} \sum_{\nu=1}^{m_j} \frac{B_{j,\nu} + C_{j,\nu}x}{(p_{\lambda_j}(x))^\nu}. \tag{25}$$

[11] Der Leitkoeffizient ist also 1.

Beispiel 5.4 Wir suchen die Partialbruchzerlegung für die durch

$$f(x) = \frac{1}{(x-4)^2(x-2)}$$

gegebene rationale Funktion. Das Nennerpolynom $q(x) = (x-4)^2(x-2)$ hat zwei Nullstellen, die beide reell sind, nämlich die Nullstelle $\alpha_1 = 4$ mit Vielfachheit $n_1 = 2$ und die Nullstelle $\alpha_2 = 2$ mit Vielfachheit $n_2 = 1$. Es ist also $k = 2$ und $\ell = 0$. Nach Satz 5.3 gibt es reelle Zahlen $A := A_{1,1}$, $B := A_{1,2}$ und $C := A_{2,1}$ derart, dass

$$\frac{1}{(x-4)^2(x-2)} = \frac{A}{x-4} + \frac{B}{(x-4)^2} + \frac{C}{x-2}$$

für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{2,4\}$. Äquivalent hierzu ist (nach Multiplizieren beider Seiten mit $q(x)$)

$$1 = A(x-4)(x-2) + B(x-2) + C(x-4)^2 \tag{26}$$

für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{2,4\}$ (und somit für alle $x \in \mathbb{R}$, siehe Lemma B.1(c)). Einsetzen von $x = 2$ in (26) liefert die Bedingung $1 = 4C$, somit

$$C = \frac{1}{4}.$$

Einsetzen von $x = 4$ in (26) liefert die Bedingung $1 = 2B$, also

$$B = \frac{1}{2}.$$

Wir setzen diese Werte von B und C in (26) ein und erhalten die Bedingung

$$1 = A(x-4)(x-2) + \frac{1}{2}(x-2) + \frac{1}{4}(x-4)^2 = Ax^2 + \frac{1}{4}x^2 + \text{ein Polynom vom Grad} < 2.$$

Koeffizientengleich rechts und links vor dem Monom x^2 liefert die Bedingung $0 = A + \frac{1}{4}$, so dass also

$$A = -\frac{1}{4}$$

(stattdessen könnten Sie natürlich auch in (26) einen Koeffizientenvergleich vor x^2, x^1 und x^0 durchführen und ein lineares Gleichungssystem mit drei Gleichungen für A, B, C erhalten und nach diesen auflösen). Also ist

$$f(x) := \frac{1}{(x-4)^2(x-2)} = -\frac{1}{4}\frac{1}{x-4} + \frac{1}{2}\frac{1}{(x-4)^2} + \frac{1}{4}\frac{1}{x-2}$$

mit Stammfunktionen der Form

$$\int f(x)\,dx = -\frac{1}{4}\ln|x-4| - \frac{1}{2}\,\frac{1}{x-4} + \frac{1}{4}\ln|x-2| + \text{Konst.}$$

auf jedem der Teilintervalle $]-\infty, 2[$, $]2, 4[$ bzw. $]4, \infty[$.

Beispiel 5.5 Wir suchen die Partialbruchzerlegung für die durch

$$f(x) = \frac{1}{x(x^2+1)}$$

gegebene rationale Funktion. Das Nennerpolynom $q(x) = x(x^2+1)$ hat drei Nullstellen, nämlich die einfache reelle Nullstelle $\alpha_1 = 0$ und die einfachen komplexen, nicht reellen Nullstellen $\lambda_1 = i$ und $\overline{\lambda_1} = -i$, die zueinander komplex konjugiert sind. Also ist $k = 1$, $n_1 = 1$, $\ell = 1$ und $m_1 = 1$. Nach Satz 5.3 gibt es reelle Zahlen $A := A_{1,1}$, $B := B_{1,1}$ und $C := C_{1,1}$ derart, dass

$$\frac{1}{x(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B + Cx}{x^2+1}$$

für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Äquivalent hierzu ist (nach Multiplizieren beider Seiten mit $q(x)$)

$$1 = A(x^2+1) + (B + Cx)x \tag{27}$$

für alle $x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ (und somit für alle $x \in \mathbb{C}$, siehe Lemma B.1(c)). Einsetzen von $x = 0$ in (27) liefert $A = 1$. Einsetzen von $x = i$ liefert die Bedingung

$$1 = (B + Ci)i = Bi - C;$$

Vergleich der Real- bzw. Imaginärteile beider Seiten liefert $C = -1$ und $B = 0$. Folglich ist

$$f(x) := \frac{1}{x(x^2+1)} = \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1}$$

mit Stammfunktionen der Form

$$\int f(x)\,dx = \ln|x| - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + \text{Konst.}$$

auf jedem der Teilintervalle $]-\infty, 0[$ bzw. $]0, \infty[$.

Als Hilfsmittel für den Beweis von Satz 5.3 untersuchen wir zunächst Partialbruchzerlegungen im Komplexen; dann ist jedes normierte Polynom q ein Produkt von Linearfaktoren (siehe Lemma B.1(j)). Den Spezialfall von Satz 5.3, in welchem das Nennerpolynom ausschließlich reelle Nullstellen besitzt, können wir gleich mit behandeln.

Satz 5.6 (Partialbruchzerlegung im Komplexen) *Seien* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{K}$ *paarweise verschieden und* $n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$. *Sei weiter* $p\colon \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ *eine Polynomfunktion vom Grad* $\deg(p) < n_1 + \cdots + n_k$. *Dann gibt es eindeutige Zahlen* $A_{j,\nu} \in \mathbb{K}$ *für* $j \in \{1, \ldots, k\}$ *und* $\nu \in \{1, \ldots, n_j\}$ *derart, dass*

$$\frac{p(z)}{(z-\alpha_1)^{n_1} \cdots (z-\alpha_k)^{n_k}} = \sum_{j=1}^{k} \sum_{\nu=1}^{n_j} \frac{A_{j,\nu}}{(z-\alpha_j)^\nu} \tag{28}$$

für alle $z \in \mathbb{K} \setminus \{\alpha_1, \ldots, \alpha_k\}$.

Beweis. Sei $q(z) := (z-\alpha_1)^{n_1} \cdots (z-\alpha_k)^{n_k}$. Der Beweis ist per Induktion nach $N := n_1 + \cdots + n_k$. Ist $N = 1$, so ist $k = 1$, $p = A$ ein konstantes Polynom und

$$\frac{p(z)}{q(z)} = \frac{A}{z-\alpha_1}$$

bereits von der gewünschten Form (wobei A offenbar eindeutig ist, denn wir können ein $z \neq \alpha_1$ einsetzen und nach A auflösen).

Sei nun $N > 1$ und gelte die Aussage bereits für $N-1$ statt N. Multiplikation von (28) mit $q(z)$ führt auf die äquivalente Gleichung[12]

$$p(z) = \sum_{j=1}^{k} \sum_{\nu=1}^{n_j} A_{j,\nu}(z-\alpha_j)^{n_j-\nu} \prod_{m \neq j} (z-\alpha_m)^{n_m}$$

für alle $z \in \mathbb{K} \setminus \{\alpha_1, \ldots, \alpha_k\}$ (bzw. äquivalent für alle $z \in \mathbb{K}$, siehe Lemma B.1(c)). Setzen wir $z := \alpha_k$ ein, so verschwinden alle bis auf einen Summanden (mit $j = k$, $\nu = n_k$); es folgt

$$p(\alpha_k) = A_{k,n_k} \prod_{m \neq k} (\alpha_k - \alpha_m)^{n_m}.$$

[12] Der Index m durchläuft hier die Menge $\{1, \ldots, k\} \setminus \{j\}$.

Somit ist bei Gültigkeit von (28) notwendig

$$A_{k,n_k} = \frac{p(\alpha_k)}{\prod_{m\neq k}(\alpha_k - \alpha_m)^{n_m}}, \tag{29}$$

somit A_{k,n_k} eindeutig festgelegt. Wir definieren nun A_{k,n_k} durch (29) und beobachten, dass dann (28) äquivalent ist zu

$$\sum_{j=1}^{k}\sum_{\nu=1}^{n'_j} \frac{A_{j,\nu}}{(z-\alpha_j)^\nu} = \frac{p(z)}{q(z)} - \frac{A_{k,n_k}}{(z-\alpha_k)^{n_k}} = \frac{Q(z)}{q(z)} \tag{30}$$

mit

$$n'_j := \begin{cases} n_j & \text{wenn } j \in \{1,\ldots,k-1\}, \\ n_k - 1 & \text{wenn } j = k \end{cases}$$

und dem Polynom

$$Q(z) := p(z) - p(\alpha_k)\prod_{m\neq k}\left(\frac{z-\alpha_m}{\alpha_k-\alpha_m}\right)^{n_m}$$

vom Grad $\deg(Q) \leq \deg(p)$ (wobei für das zweite Gleichheitszeichen in (30) der zweite Bruch mit $\prod_{m\neq k}(z-\alpha_m)^{n_m}$ erweitert wurde). Da $Q(\alpha_k) = 0$, ist

$$Q(z) = (z-\alpha_k)P(z)$$

mit einer Polynomfunktion $P\colon \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ vom Grad $\deg(P) = \deg(Q) - 1 < \deg(q) - 1 = N - 1$. Also ist (30) äquivalent zu

$$\frac{P(z)}{(z-\alpha_1)^{n'_1}\cdots(z-\alpha_k)^{n'_k}} = \sum_{j=1}^{k}\sum_{\nu=1}^{n'_j}\frac{A_{j,\nu}}{(z-\alpha_j)^\nu} \tag{31}$$

mit $n'_1 + \cdots + n'_k = N - 1$ und per Induktionsvoraussetzung gibt es eindeutig bestimmte $A_{j,\nu}$ mit $j \in \{1,\ldots,k\}$ und $\nu \in \{1,\ldots,n'_j\}$ derart, dass (31) für alle $z \in \mathbb{K} \setminus \{\alpha_1,\ldots,\alpha_k\}$ erfüllt ist. □

Beweis von Satz 5.3. Der Beweis ist per Induktion nach $M := \sum_{j=1}^{\ell} m_j$. Ist $M = 0$, so ist $\ell = 0$; das Nennerpolynom q zerfällt dann über $\mathbb{R}$ in Linearfaktoren, so dass die Schlussfolgerung von Satz 5.3 ein Spezialfall von Satz 5.6 ist. Ist $M \geq 1$, so gibt es nach Theorem 5.6 und Lemma B.1(i) eindeutige komplexe Zahlen $A_{j,\nu}$ für $j \in \{1,\dots,k\}$ und $\nu \in \{1,\dots,n_j\}$ sowie $a_{j,\nu}$ und $b_{j,\nu}$ für $j \in \{1,\dots,\ell\}$ und $\nu \in \{1,\dots,m_j\}$ derart, dass

$$f(x) := \frac{p(x)}{q(x)} = \sum_{j=1}^{k}\sum_{\nu=1}^{n_j} \frac{A_{j,\nu}}{(x-\alpha_j)^\nu} + \sum_{j=1}^{\ell}\sum_{\nu=1}^{m_j} \left(\frac{a_{j,\nu}}{(x-\lambda_j)^\nu} + \frac{b_{j,\nu}}{(x-\overline{\lambda_j})^\nu} \right) \quad (32)$$

für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{\alpha_1,\dots,\alpha_k\}$. Da $f(x)$ reell ist, liefert komplexes Konjugieren

$$f(x) = \overline{f(x)} = \sum_{j=1}^{k}\sum_{\nu=1}^{n_j} \frac{\overline{A_{j,\nu}}}{(x-\alpha_j)^\nu} + \sum_{j=1}^{\ell}\sum_{\nu=1}^{m_j} \left(\frac{\overline{a_{j,\nu}}}{(x-\overline{\lambda_j})^\nu} + \frac{\overline{b_{j,\nu}}}{(x-\lambda_j)^\nu} \right) \quad (33)$$

für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{\alpha_1,\dots,\alpha_k\}$. Die rechten Seiten von (32) und (33) stimmen dann auch für alle $x \in \mathbb{C}$ außerhalb $\{\alpha_1,\dots,\alpha_k\} \cup \{\lambda_1, \overline{\lambda_1},\dots,\lambda_\ell,\overline{\lambda_\ell}\}$ überein, nach Lemma B.1(i). Wegen der Eindeutigkeit der Koeffizienten in Satz 5.6 ist also $\overline{A}_{j,\nu} = A_{j,\nu}$ und $\overline{a_{j,\nu}} = b_{j,\nu}$ für alle Indizes, somit $A_{j,\nu} \in \mathbb{R}$ und

$$\begin{aligned}\frac{a_{j,\nu}}{(x-\lambda_j)^\nu} + \frac{b_{j,\nu}}{(x-\overline{\lambda_j})^\nu} &= \frac{a_{j,\nu}}{(x-\lambda_j)^\nu} + \overline{\left(\frac{a_{j,\nu}}{(x-\lambda_j)^\nu}\right)} = 2\,\mathrm{Re}\left(\frac{a_{j,\nu}}{(x-\lambda_j)^\nu}\right) \\ &= 2\,\frac{\mathrm{Re}(a_{j,\nu}(x-\overline{\lambda_j})^\nu)}{(x-\lambda_j)^\nu(x-\overline{\lambda_j})^\nu} = 2\,\frac{\mathrm{Re}(a_{j,\nu}(x-\overline{\lambda_j})^\nu)}{(p_{\lambda_j}(x))^\nu}.\end{aligned}$$

Der Nenner des letzten Terms ist ein reelles Polynom vom Grad 2ν, der Zähler ein reelles Polynom vom Grad $\leq \nu$ (somit $< 2\nu$). Für $j = \ell$ und $\nu = m_\ell$ führen wir eine Polynomdivision durch:

$$2\,\mathrm{Re}(a_{\ell,m_\ell}(x-\overline{\lambda_\ell})^{m_\ell}) = p_{\lambda_\ell}(x)P(x) + r(x)$$

mit einem Polynom $r\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vom Grad ≤ 1 und einer Polynomfunktion $P\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vom Grad $\leq m_\ell - 2$. Dann ist also $r(x) = B_{\ell,m_\ell} + C_{\ell,m_\ell}x$ mit geeigneten $B_{\ell,m_\ell}, C_{\ell,m_\ell} \in \mathbb{R}$ und

$$\frac{a_{\ell,m_\ell}}{(x-\lambda_\ell)^{m_\ell}} + \frac{b_{\ell,m_\ell}}{(x-\overline{\lambda_\ell})^{m_\ell}} = \frac{B_{\ell,m_\ell} + C_{\ell,m_\ell}x}{(p_{\lambda_\ell}(x))^{m_\ell}} + \frac{P(x)}{(p_{\lambda_\ell}(x))^{m_\ell - 1}}.$$

Sei $q_1(x) := \prod_{j=1}^{k}(x-\alpha_j)^{n_j} \prod_{j=1}^{\ell}(p_{\lambda_j}(x))^{m'_j}$ mit $m'_j := m_j$ für $j \in \{1,\dots,\ell-1\}$ und $m'_\ell := m_\ell - 1$. Dann ist

$$\begin{aligned}&\frac{p(x)}{q(x)} - \frac{B_{\ell,m_\ell} + C_{\ell,m_\ell}x}{(p_{\lambda_\ell}(x))^{m_\ell}} \\ &\quad = \frac{P(x)}{(p_{\lambda_\ell}(x))^{m_\ell-1}} + \sum_{j=1}^{k}\sum_{\nu=1}^{n_j} \frac{\overline{A_{j,\nu}}}{(x-\alpha_j)^\nu} + \sum_{j=1}^{\ell}\sum_{\nu=1}^{m'_j} 2\,\frac{\mathrm{Re}(a_{j,\nu}(x-\overline{\lambda_j})^\nu)}{(p_{\lambda_j}(x))^\nu}. \quad (34)\end{aligned}$$

Also gilt

$$\frac{p(x)}{q(x)} - \frac{B_{\ell,m_\ell} + C_{\ell,m_\ell}x}{(p_{\lambda_\ell}(x))^{m_\ell}} = \frac{p_1(x)}{q_1(x)} \tag{35}$$

mit einem Polynom $p_1\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vom Grad $\deg(p_1) < \deg(q_1)$ (das wir erhalten, indem wir die rechte Seite von (34) auf den Hauptnenner $q_1(x)$ bringen). Per Induktion ist nun

$$\frac{p_1(x)}{q_1(x)} = \sum_{j=1}^{k}\sum_{\nu=1}^{n_j} \frac{A_{j,\nu}}{(x-\alpha_j)^\nu} + \sum_{j=1}^{\ell}\sum_{\nu=1}^{m'_j} \frac{B_{j,\nu} + C_{j,\nu}x}{(p_{\lambda_j}(x))^\nu}$$

mit geeigneten reellen Zahlen $A_{j,\nu}$, $B_{j,\nu}$ und $C_{j,\nu}$. Setzen wir dies in (18) ein und lösen nach $p(x)/q(x)$ auf, so ergibt sich (25). $\square$

Für die einzelnen Summanden in der reellen Partialbruchzerlegung lässt sich stets eine Stammfunktion angeben.

Satz 5.7 (a) *Für $\alpha \in \mathbb{R}$ ist*

$$\int \frac{1}{x-\alpha}\,dx = \ln|x-\alpha| + \text{Konst.}$$

auf $]-\infty,\alpha[$ bzw. $]\alpha,\infty[$.

(b) *Für $\alpha \in \mathbb{R}$ und natürliche Zahlen $n \geq 2$ ist*

$$\int \frac{1}{(x-\alpha)^n}\,dx = \frac{1}{1-n}\,\frac{1}{(x-\alpha)^{n-1}} + \text{Konst.}$$

auf $]-\infty,\alpha[$ bzw. $]\alpha,\infty[$.

(c) *Für alle reellen Zahlen a, b, B, C mit $b \neq 0$ ist*

$$\int \frac{B+Cx}{(x-a)^2+b^2}\,dx = \frac{C}{2}\ln\left((x-a)^2+b^2\right) + \frac{B+aC}{b}\arctan\left(\frac{x-a}{b}\right) + \text{Konst.} \tag{36}$$

auf $\mathbb{R}$.

Beweis. (a) und (b) verifiziert man direkt durch Ableiten.

(c) Ersetzen von Cx durch $C(x-a)+Ca$ im Zähler von $\frac{B+Cx}{(x-a)^2+b^2}$ liefert

$$\begin{aligned}\frac{B+Cx}{(x-a)^2+b^2} &= \frac{C(x-a)}{(x-a)^2+b^2} + \frac{B+aC}{(x-a)^2+b^2} \\ &= \frac{C}{2}\,\frac{2(x-a)}{(x-a)^2+b^2} + \frac{B+aC}{b}\,\frac{1/b}{(\frac{x-a}{b})^2+1}.\end{aligned}$$

Um den ersten Summanden zu integrieren, substituieren wir $u=(x-a)^2+b^2$, $du = 2(x-a)\,dx$; um den zweiten zu integrieren, substituieren wir $v=\frac{x-a}{b}$, $dv = \frac{1}{b}\,dx$. Dies liefert die in (36) angegebene Stammfunktion. □

Bemerkung 5.8 Sei $n \in \mathbb{N}$. Auf dem 2. Übungsblatt zeigen Sie:

(a) Eine Stammfunktion für $\frac{B+Cx}{((x-a)^2+b^2)^{n+1}}$ lässt sich hinschreiben, sobald wir eine für $\frac{1}{((x-a)^2+b^2)^{n+1}}$ kennen.

(b) Für die Stammfunktion von $\frac{1}{((x-a)^2+b^2)^{n+1}}$ gibt es eine Rekursionsformel, welche diese auf die Stammfunktion von $\frac{1}{((x-a)^2+b^2)^{n}}$ zurückführt.

6 Taylorentwicklung von C^k-Funktionen

In diesem Kapitel untersuchen wir zunächst, wie gut eine differenzierbare Funktion durch ihre Tangente um eine Stelle x_0 approximiert wird. Die Tangente ist der Graph einer affin-linearen Funktion (also eines Polynoms vom Grad ≤ 1). Anschließend untersuchen wir die Approximation nahe x_0 durch Polynome höheren Grades.

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein nicht entartetes Intervall. Einer an einer Stelle $x_0 \in I$ differenzierbaren Funktion $f\colon I \to \mathbb{R}$ haben wir ihre Tangente zugeordnet, also die Gerade mit der Gleichung

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0).$$

Wir gut wird die Funktion f nahe x_0 durch ihre Tangente approximiert? Die Differenz der beiden ist

$$R_1(x) := f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x-x_0).$$

Wir zeigen nun, dass $R_1(x) \to 0$ für $x \to x_0$ und sogar

$$\lim_{x \to x_0} \frac{R_1(x)}{x - x_0} = 0.$$

Letztere Eigenschaft legt die Tangente zudem eindeutig fest:

Satz 6.1 *Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein nicht entartetes Intervall und $x_0 \in I$. Eine Funktion $f\colon I \to \mathbb{R}$ ist genau dann an der Stelle x_0 differenzierbar, wenn für ein $a \in \mathbb{R}$ der Fehler*

$$R(x) := f(x) - f(x_0) - a(x - x_0)$$

der linearen Approximation $f(x) - f(x_0) = a(x - x_0) + R(x)$ die Bedingung

$$\lim_{x \to x_0} \frac{R(x)}{x - x_0} = 0 \tag{37}$$

erfüllt. In diesem Fall gilt $a = f'(x_0)$.

Beweis. Gilt (37), so folgt

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = a + \frac{R(x)}{x - x_0} \to a$$

für $x \to x_0$, d.h. f ist an der Stelle x_0 differenzierbar mit Ableitung $f'(x_0) = a$. Ist umgekehrt f an der Stelle x_0 differenzierbar und setzen wir $a := f'(x)$, so gilt

$$\frac{R(x)}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \to f'(x_0) - f'(x_0) = 0$$

für $x \to x_0$. $\square$

Wir kennen die Ableitungen und höheren Ableitungen von Polynomen.

Lemma 6.2 *Wie betrachten ein Polynom $p\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vom Grad $\leq n$, von der Form $p(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j$ mit $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$. Dann gilt für jedes $k \in \mathbb{N}$*

$$p^{(k)}(0) = \begin{cases} k!\, a_k & \text{wenn } k \in \{0, \ldots, n\}; \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Beweis. Für ein Monom x^j mit $j \in \mathbb{N}_0$ berechnen wir per Induktion nach $k \in \mathbb{N}_0$:

$$\frac{d^k}{dx^k}(x^j) = \begin{cases} j(j-1)\cdots(j-k+1)x^{j-k} & \text{wenn } k \in \{0,\ldots,j\}; \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Setzen wir $x = 0$ ein, so folgt

$$\frac{d^k}{dx^k}\Big|_{x=0}(x^j) = \begin{cases} k! & \text{wenn } j = k; \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Also ist

$$\frac{d^k}{dx^k}\Big|_{x=0}(x^j) = k!\,\delta_{j,k}$$

mit dem Kronecker-Delta

$$\delta_{j,k} := \begin{cases} 1 & \text{wenn } j = k; \\ 0 & \text{wenn } j \neq k. \end{cases}$$

Es folgt $p^{(k)}(0) = \sum_{j=0}^n a_j\, k!\, \delta_{j,k}$ und somit die behauptete Formel. □

Definition 6.3 Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein nicht entartetes Intervall, $n \in \mathbb{N}_0$ und $f\colon I \to \mathbb{R}$ eine C^n-Funktion. Gegeben $x_0 \in I$ definieren wir ein Polynom $P^n_{x_0} f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vom Grad $\leq n$ via

$$P^n_{x_0} f(h) := \sum_{j=0}^n \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!} h^j \quad \text{für } h \in \mathbb{R}.$$

Wir nennen $P^n_{x_0} f$ das *Taylorpolynom von f an der Stelle x_0 von der Ordnung n* (oder auch den *n-Jet* von f an der Stelle x_0).

Bemerkung 6.4 (a) Nach Lemma 6.2 ist das Taylorpolynom $P^n_{x_0} f$ das eindeutig festgelegte Polynom p vom Grad $\leq n$ mit den Ableitungen

$$p^{(k)}(0) = f^{(k)}(x_0) \quad \text{für alle } k \in \{0,\ldots,n\}.$$

(b) Viele Autoren nennen abweichend vom Obigen das Polynom $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto P^n_{x_0} f(x - x_0) = \sum_{j=0}^n \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!}(x - x_0)^j$ das Taylorpolynom; passen Sie immer auf, was jeweils gemeint ist!

Beispiel 6.5 Es ist $\sin(0) = 0$, $\sin'(0) = \cos(0) = 1$, $\sin''(0) = -\sin(0) = 0$ und $\sin'''(0) = -\cos(0) = -1$. Die Taylorpolynome der Ordnungen $n \in \{0, 1, 2, 3\}$ der Sinusfunktion an der Stelle $x_0 = 0$ sind also

$$P_0^0(\sin)(h) = 0, \qquad P_0^1(\sin)(h) = P_0^2(\sin)(h) = h, \qquad P_0^3(\sin)(h) = h - \frac{1}{6}h^3.$$

Da $\cos(0) = 1$, $\cos'(0) = -\sin(0) = 0$, $\cos''(0) = -\cos(0) = -1$ und $\cos'''(0) = \sin(0) = 0$, lauten die Taylorpolynome der Ordnungen $n \in \{0, 1, 2, 3\}$ der Cosinusfunktion an der Stelle $x_0 = 0$

$$P_0^0(\cos)(h) = P_0^1(\cos)(h) = 1, \qquad P_0^2(\cos)(h) = P_0^3(\cos)(h) = 1 - \frac{1}{2}h^2.$$

Da $\exp' = \exp$ und somit $\exp^{(k)} = \exp$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$, ist $\exp^{(k)}(0) = \exp(0) = 1$ und folglich

$$P_0^0(\exp)(h) = 1, \quad P_0^1(\exp)(h) = 1 + h, \quad P_0^2(\exp)(h) = 1 + h + \frac{1}{2}h^2,$$

und $P_0^3(\exp)(h) = 1 + h + \frac{1}{2}h^2 + \frac{1}{6}h^3$.

Wir fragen uns nun, wie gut $f(x)$ durch $P_{x_0}^n f(x - x_0)$ approximiert wird, untersuchen also das Restglied $R_n(x)$ der Taylorapproximation

$$f(x) = P_{x_0}^n f(x - x_0) + R_n(x).$$

Satz 6.6 (Satz von Taylor) *Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein nicht entartetes Intervall, $x_0 \in I$ und $f\colon I \to \mathbb{R}$ eine C^n-Funktion mit $n \in \mathbb{N}_0$. Für $x \in I$ sei*

$$R_n(x) := f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) - \cdots - \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n,$$

so dass also $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n(x)$.

(a) *Es gilt*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{R_n(x)}{(x - x_0)^n} = 0.$$

Ist f sogar C^{n+1}, so lässt sich das Restglied $R_n(x)$ auch wie folgt schreiben:

(b) (*Restglied in Integralform*). *Es ist $R_n(x) = \frac{1}{n!} \int_{x_0}^{x} (x - t)^n f^{(n+1)}(t)\, dt$.*

(c) (*Restglied von Lagrange*). *Es ist* $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$ *für eine reelle Zahl* ξ *zwischen* x_0 *und* x.

Beweis. Der Beweis ist per Induktion nach $n \in \mathbb{N}_0$. Im Fall $n = 0$ ist

$$R_0(x) = f(x) - f(x_0) \tag{38}$$

für $x \in I$. Da f stetig ist, gilt

$$\frac{R_0(x)}{(x-x_0)^0} = R_0 f(x) = f(x) - f(x_0) \to f(x_0) - f(x_0) = 0$$

für $x \to x_0$, was (a) verifiziert. Ist f sogar C^1, so gilt nach dem Hauptsatz der Integral- und Differentialrechnung

$$R_0(x) = f(x) - f(x_0) = \int_{x_0}^{x} f'(t)\,dt = \frac{1}{0!}\int_{x_0}^{x} (x-t)^0 f'(t)\,dt \tag{39}$$

und somit (b). Indem wir den Mittelwertsatz der Integralrechung (Satz 1.11) auf das mittlere Integral in (39) anwenden, erhalten wir weiter

$$R_0(x) = f'(\xi)(x-x_0) = \frac{f'(\xi)}{1!}(x-x_0)$$

für ein ξ zwischen x und x_0 und somit (c).

Induktionsschritt: Angenommen, die Aussagen des Satzes gelten bereits für ein $n \in \mathbb{N}_0$. Sei f eine C^{n+1}-Funktion. Wegen

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + R_n(x) \\ &= f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \\ &\quad + \underbrace{R_n(x) - \frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}}_{=R_{n+1}(x)} \end{aligned}$$

ist dann

$$\begin{aligned} R_{n+1}(x) &= R_n(x) - \frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \\ &= \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} - \frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \end{aligned} \tag{40}$$

für ein ξ zwischen x_0 und x, nach (c). Es folgt

$$\frac{R_{n+1}(x)}{(x-x_0)^{n+1}} = \frac{f^{(n+1)}(\xi) - f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!} \to 0$$

für $x \to x_0$, unter Benutzung der Stetigkeit von $f^{(n+1)}$. Also gilt (a) für $n+1$ statt n. Sei nun f sogar eine C^{n+2}-Funktion. Nach (c) gilt

$$R_n(x) = \frac{1}{n!} \int_{x_0}^{x} (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\, dt.$$

Eine partielle Integration mit $u'(t) = (x-t)^n/n!$, $u(t) = -(x-t)^{n+1}/(n+1)!$, $v(t) = f^{(n+1)}(t)$, $v'(t) = f^{(n+2)}(t)$ liefert

$$\begin{aligned} R_n(x) &= \Big[-f^{(n+1)}(t)(x-t)^{n+1}/(n+1)! \Big]_{t=x_0}^{x} + \frac{1}{(n+1)!} \int_{x_0}^{x} (x-t)^{n+1} f^{(n+2)}(t)\, dt \\ &= \frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} + \frac{1}{(n+1)!} \int_{x_0}^{x} (x-t)^{n+1} f^{(n+2)}(t)\, dt. \end{aligned}$$

Also ist

$$f(x) = P_{x_0}^n f(x-x_0) + R_n(x) = P_{x_0}^{n+1} f(x-x_0) + \frac{1}{(n+1)!} \int_{x_0}^{x} (x-t)^{n+1} f^{(n+2)}(t)\, dt. \tag{41}$$

Das Integral rechts in (41) ist dann $R_{n+1}(x)$ und somit ist (b) für $n+1$ statt n gezeigt. Da $(x-t)^{n+1} \geq 0$ für alle t zwischen x_0 und x oder $(x-t)^{n+1} \leq 0$ für alle solchen t, gibt es nach dem Verallgemeinerten Mittelwertsatz (Satz 1.12) ein ξ zwischen x_0 und x derart, dass

$$\begin{aligned} R_{n+1}(x) &= \frac{1}{(n+1)!} \int_{x_0}^{x} (x-t)^{n+1} f^{(n+2)}(t)\, dt \\ &= \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+2)}(\xi) \int_{x_0}^{x} (x-t)^{n+1}\, dt = \frac{f^{(n+2)}(\xi)}{(n+2)!}(x-x_0)^{n+2}, \end{aligned}$$

wobei $\int_{x_0}^{x} (x-t)^{n+1}\, dt = \Big[-(x-t)^{n+2}/(n+2) \Big]_{t=x_0}^{x} = (x-x_0)^{n+2}/(n+2)$ benutzt wurde. Also gilt auch (c) mit $n+1$ statt n. $\square$

Bemerkung 6.7 (a) Im Falle einer C^n-Funktion mit $n \in \mathbb{N}_0$ ist

$$R_n(x) = \frac{f^{(n)}(\xi) - f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

mit einem ξ zwischen x_0 und x (vgl. (38) und (40)). Diese Darstellung des Restglieds heißt *Peano-Restglied*.

(b) Im Falle einer C^n-Funktion mit $n \in \mathbb{N}_0$ ist auch folgende Integralform des Restglieds möglich:

$$R_n(x) = \frac{1}{(n-1)!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^{n-1}(f^{(n)}(t) - f^{(n)}(x_0))\,dt.$$

Wegen $\frac{1}{(n-1)!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^{n-1}\,dt = (x-x_0)^n/n!$ ist nämlich

$$\begin{aligned} R_{n-1}(x) &= \frac{1}{(n-1)!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^{n-1}f^{(n)}(t)\,dt \\ &= \underbrace{f^{(n)}(x_0)\frac{1}{(n-1)!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^{n-1}\,dt}_{=f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n/n!} + \underbrace{\frac{1}{(n-1)!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^{n-1}(f^{(n)}(t) - f^{(n)}(x_0))\,dt}_{=R_n(x)}. \end{aligned}$$

(c) Wir werden später auch vektorwertige C^n-Funktionen (etwa $f\colon I \to \mathbb{R}^m$) kennenlernen. Die Integralform des Restglieds aus (b) bleibt hier gültig (und ebenso die Integralform aus Satz 6.6(b), wenn f sogar C^{n+1} ist). Hingegen lassen sich Restglieder vektorwertiger Funktionen nicht mittels Zwischenstellen ξ berechnen.

Beispiel 6.8 Berechnen Sie $\sin(1)$ näherungsweise mit einem Fehler, der $< \frac{1}{10}$ ist. Lösung: Wir benutzen die Taylorentwicklung 3. Ordnung der Sinusfunktion um die Stelle $x_0 = 0$. Wir benutzen das Lagrange-Restglied: Da der Sinus eine C^4-Funktion ist, gibt es ein $\xi \in [0,1]$ derart, dass

$$R_4(1) = \frac{\sin^{(4)}(\xi)}{4!}(1-0)^4 = \frac{-\sin(\xi)}{24}.$$

Da $\sin(\xi) \in [-1,1]$, folgt

$$|R_4(x)| \leq \frac{1}{24}.$$

Unter Benutzung des Taylorpolynoms $T_0^3(\sin)$ aus Beispiel 6.5 folgt

$$\sin(1) = 1 - \frac{1^3}{6} + R_4(1) = \frac{5}{6} + R_4(1).$$

Also ist $\sin(1)$ etwa $5/6$ mit einem Fehler vom Betrag $\leq 1/24 < 1/10$. Da $5/6 = 0,8\overline{3} = 0,8 + \frac{1}{30}$, ist $\sin(1)$ auch etwa $0,8$ mit einem Fehler $\leq \frac{1}{24} + \frac{1}{30} < \frac{1}{10}$.

7 Taylorreihen; reell analytische Funktionen

Definition 7.1 Ist $I \subseteq \mathbb{R}$ ein nicht entartetes Intervall, $f\colon I \to \mathbb{R}$ eine C^∞-Funktion und $x_0 \in I$, so nennt man die Potenzreihe

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!} h^j$$

die *Taylorreihe* von f am Entwicklungspunkt x_0.

Definition 7.2 Eine glatte Funktion $f\colon I \to \mathbb{R}$ auf einem offenen Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ heißt *reell analytisch*, wenn Sie um jeden Punkt $x_0 \in I$ lokal durch ihre Taylorreihe in $x - x_0$ gegeben ist, d.h. es existiert ein $\varepsilon > 0$ derart, dass

$$f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!} (x - x_0)^j$$

für alle $x \in I$ mit $|x - x_0| < \varepsilon$.

Bemerkung 7.3 (a) Taylorreihen können Konvergenzradius 0 haben (denn nach einem Satz von Borel tritt jede Potenzreihe auf als Taylorreihe einer geeigneten glatten Funktion; siehe Proseminar).

(b) Selbst wenn die Taylorreihe positiven Konvergenzradius hat, braucht $x \mapsto \sum_{j=0}^{\infty} \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!}(x - x_0)^j$ auf keiner x_0-Umgebung mit f übereinzustimmen. Zum Beispiel werden wir gleich nachrechnen, dass die Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) := \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & \text{wenn } x > 0; \\ 0 & \text{wenn } x \leq 0 \end{cases}$$

eine C^∞-Funktion ist mit $f^{(j)}(0) = 0$ für alle $j \in \mathbb{N}_0$. Die Taylorreihe von f um $x_0 = 0$ ist also die Reihe

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{0}{j!} h^j$$

mit Konvergenzradius $R = \infty$ und Grenzfunktion 0. Da $f(x) = e^{-1/x} > 0$ für alle $x > 0$, stimmt $f(x)$ auf keiner 0-Umgebung mit $\sum_{j=0}^{\infty} \frac{f^{(j)}(0)}{j!} x^j = 0$ überein. Also ist f nicht reell analytisch.

Lemma 7.4 *Es sei $f\colon\,]a,b[\, \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $-\infty \leq a < b \leq \infty$ und $c \in\,]a,b[$ derart, dass die Einschränkungen $f|_{]a,c[}$ und $f|_{]c,b[}$ stetig differenzierbar sind. Weiter seien folgende Grenzwerte existent und gleich:*

$$\eta := \lim_{x \nearrow c} f'(x) = \lim_{x \searrow c} f'(x).$$

Dann ist f stetig differenzierbar und $f'(c) = \eta$.

Beweis. Die Abbildung $\phi\colon\,]a,b[\, \to \mathbb{R}$,

$$x \mapsto \begin{cases} f'(x) & \text{wenn } x \neq c; \\ \eta & \text{wenn } x = c \end{cases}$$

ist stetig. Es genügt zu zeigen, dass $g := f|_{[c,b[}$ und $h := f|_{]a,c]}$ stetig differenzierbar sind; dann ist f an der Stelle c rechtsseitig differenzierbar mit rechtsseitiger Ableitung $g'(c) = \lim_{x \searrow c} g'(x) = \lim_{x \searrow c} f'(x) = \eta$; analog ist f an der Stelle c linksseitig differenzierbar mit Ableitung $h'(c) = \eta$. Also ist f an der Stelle c differenzierbar mit Ableitung $f'(c) = \eta = \phi(c)$ und folglich $f' = \phi$, eine stetige Funktion. Wir wählen $\beta \in\,]c,b]$ und definieren

$$G\colon [c,b[\, \to \mathbb{R}, \;\; x \mapsto f(\beta) + \int_\beta^x \phi(t)\, dt.$$

Nach dem Hauptsatz der Integral- und Differentialrechnung ist G stetig differenzierbar mit Ableitung $G'(x) = \phi(x)$ für alle $x \in [c,b[$. Also sind sowohl $G_{]c,b[}$ als auch $f|_{]c,b[}$ Stammfunktionen für $\phi|_{]c,b[}$. Da $f(\beta) = G(\beta)$, folgt

$$f|_{]c,b[} = G|_{]c,b[}.$$

Da f und G stetig sind, ist weiter

$$f(c) = \lim_{x \searrow c} f(x) = \lim_{x \searrow c} G(x) = G(c).$$

Also ist $f|_{[c,b[} = G$, eine C^1-Funktion. Analog sieht man, dass $f|_{]a,c]}$ eine C^1-Funktion ist. □

Das folgende Lemma wird uns helfen, die Diskussion des Beispiels aus Bemerkung 7.3(b) zu beenden.

Lemma 7.5 *Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ wie in Bemerkung* 7.3(b).

(a) *Für jede Polynomfunktion $p\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist die folgende Funktion stetig:*

$$\mathbb{R} \to \mathbb{R}, \;\; x \mapsto \begin{cases} p(1/x)f(x) & \text{wenn } x > 0; \\ 0 & \text{wenn } x \le 0. \end{cases}$$

(b) *f is C^∞ mit $f^{(j)}(0) = 0$ für alle $j \in \mathbb{N}_0$.*

Beweis. (a) Sei $p(x) = \sum_{j=0}^n a_j x^j$ mit $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$. Für $x > 0$ gilt dann

$$|p(1/x)f(x)| = \frac{|p(1/x)|}{e^{1/x}} \le \frac{|p(1/x)|}{1/((n+1)!\, x^{n+1})} \le (n+1)! \sum_{j=0}^n |a_j| x^{n+1-j} \to 0$$

für $x \to 0$. Also ist die zu untersuchende Funktion an der Stelle 0 stetig und somit stetig (da sie auf $]-\infty, 0[$ sowie $]0, \infty[$ offenbar stetig ist).

(b) Wir zeigen per Induktion nach $k \in \mathbb{N}_0$, dass f eine C^k-Funktion ist und es eine Polynomfunktion $p_k\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gibt derart, dass

$$f^{(k)}(x) = \begin{cases} p_k(1/x)f(x) & \text{wenn } x > 0; \\ 0 & \text{wenn } x \le 0. \end{cases} \tag{42}$$

Induktionsanfang $k = 0$: Offenbar gilt (42) für $f^{(0)} = f$ mit der durch $p_0(x) := 1$ gegebenen konstanten Polynomfunktion. Nach (a) ist f also stetig, somit C^0.

Ist $k \in \mathbb{N}_0$ gegeben und gilt (42), so ist $(f^{(k)})'(x) = 0$ für $x < 0$, da $f^{(k)}|_{]-\infty,0[} = 0$. Für $x > 0$ erhalten wir mit der Produktregel und der Kettenregel

$$(f^{(k)})'(x) = -\frac{1}{x^2}\, p_k'(1/x)\, e^{-1/x} + \frac{1}{x^2}\, p_k(1/x)\, e^{-1/x} = p_{k+1}(1/x)\, e^{-1/x}$$

mit $p_{k+1}(t) := -t^2\, p_k'(t) + t^2\, p_k(t)$ für $t \in \mathbb{R}$. Nach Teil (a) gilt also

$$\lim_{x \searrow 0} (f^{(k)})'(x) = 0 = \lim_{x \nearrow 0} (f^{(k)})'(x).$$

Somit ist $f^{(k)}$ nach Lemma 7.4 stetig differenzierbar (und folglich f eine C^{k+1}-Funktion), mit

$$f^{(k+1)}(x) = (f^{(k)})'(x) = \begin{cases} p_{k+1}(1/x)f(x) & \text{wenn } x > 0; \\ 0 & \text{wenn } x \le 0. \end{cases}$$

Dies beendet den induktiven Beweis. $\square$

Die folgenden Resultate erwähnen wir nur für die Allgemeinbildung.

Satz 7.6 *Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall. Eine Funktion $f\colon I \to \mathbb{R}$ ist genau dann reell analytisch, wenn es für jedes $x_0 \in I$ eine Potenzreihe $\sum_{j=0}^{\infty} b_j h^j$ mit $b_j \in \mathbb{R}$ und positivem Konvergenzradius R gibt und ein $\varepsilon \in]0, R]$ derart, dass*

$$f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} b_j (x - x_0)^j$$

für alle $x \in I$ mit $|x - x_0| < \varepsilon$.

Beweis. Die Notwendigkeit der Bedingung ist klar: Ist f reell analytisch, so können wir $b_j := \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!}$ wählen.

Ist umgekehrt die Bedingung erfüllt, so ist die Funktion

$$g\colon]-R, R[\to \mathbb{R}, \;\; x \mapsto \sum_{j=0}^{\infty} b_j x^j$$

nach Analysis 1 eine C^∞-Funktion und wir dürfen gliedweise differenzieren, woraus für alle $j \in \mathbb{N}_0$

$$b_j = \frac{g^{(j)}(0)}{j!}$$

folgt. Da $f(x) = g(x - x_0)$ für alle $x \in I$ mit $|x - x_0| < \varepsilon$, ist f dort glatt und mit der Kettenregel zeigt man per Induktion nach $j \in \mathbb{N}_0$, dass $f^{(j)}(x) = g^{(j)}(x - x_0)$ für diese x, so dass also $f(x) = g(x - x_0) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{g^{(j)}(0)}{j!}(x - x_0)^j = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!}(x - x_0)^j$. $\square$

Bemerkung 7.7 (a) Für jede Potenzreihe $\sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j$ mit $a_j \in \mathbb{R}$ und positivem Konvergenzradius R ist die Funktion

$$f\colon \;]-R, R[\to \mathbb{R}, \;\; x \mapsto \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j$$

reell analytisch (denn für jedes $x_0 \in]-R, R[$ gibt es $b_j \in \mathbb{R}$ derart, dass $f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} b_j (x - x_0)^j$ für x nahe x_0, siehe Analysis 1).

(b) Nach (a) sind insbesondere die reelle Exponentialfunktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto e^x = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{j!}$ sowie $\sin\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $\cos\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ reell analytisch.

(c) Linearkombinationen von $\lambda f + \mu g$ sowie punktweise Produkte fg von reell analytischen Funktionen $f, g\colon I \to \mathbb{R}$ sind reell analytisch, da Linearkombinationen und (wegen der Cauchyschen Produktformel) auch Produkte konvergenter Potenzreihen wieder konvergente Potenzreihen sind.

(d) Wir erwähnen ohne Beweis, dass auch Kompositionen $f \circ g$ reell-analytischer Funktionen reell analytisch sind (weil man zeigen kann, dass Kompositionen von reellen Potenzreihen lokal wieder Potenzreihen sind). Ein direkter Beweis ist möglich, wäre aber etwas anstrengend und wird hier weggelassen. Ein Umweg über komplexe Potenzreihen ist einfacher; dass deren Kompositionen lokal durch Potenzreihen gegeben sind, wird in der Vorlesung "Funktionentheorie" bewiesen.

Teil II: Analysis in mehreren Veränderlichen

8 Normierte Räume; Normen auf $\mathbb{R}^n$

Auf $\mathbb{R}$ haben wir den Betrag

$$|.|\colon \mathbb{R} \to [0,\infty[, \quad x \mapsto |x|$$

zur Verfügung und betrachten üblicherweise die Metrik

$$d\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to [0,\infty[, \quad d(x,y) := |x-y|.$$

Analog auf $\mathbb{C}$. Entsprechend wollen wir nun auf $\mathbb{R}^n$ Metriken d betrachten, die nur von der Differenz $x-y$ zweier Punkte abhängen. Sie werden von der Form

$$d(x,y) := \|x-y\|$$

sein mit einer sogenannten"Norm" $\|.\|$ auf $\mathbb{R}^n$ (die ähnliche Eigenschaften wie der Betrag hat).

Definition 8.1 Es sei E ein (reeller) Vektorraum. Eine Abbildung

$$\|.\|\colon E \to [0,\infty[, \quad x \mapsto \|x\|$$

heißt *Norm*, wenn gilt:

Definitheit. Für alle $x \in E \setminus \{0\}$ ist $\|x\| > 0$.

Subadditivität. Für alle $x, y \in E$ ist $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Positive Homogenität. Für alle $t \in \mathbb{R}$ und $x \in E$ ist $\|tx\| = |t| \cdot \|x\|$.

Für den Nullvektor $0 \in E$ gilt stets $\|0\| = 0$, denn aufgrund der positiven Homogenität ist $\|0\| = \|0 \cdot 0\| = |0| \cdot \|0\| = 0 \cdot \|0\| = 0$ (wobei die linke Null stets $0 \in \mathbb{R}$ meint).

Ist E ein Vektorraum und $\|.\|$ eine Norm auf E, so nennt man das Paar $(E, \|.\|)$ einen *normierten Raum.*

Satz 8.2 *Ist* $(E, \|.\|)$ *ein normierter Raum, so ist*

$$d\colon E \times E \to [0,\infty[, \quad d(x,y) := \|x-y\|$$

eine Metrik auf E.

Beweis. Für $x, y \in E$ ist $0 = d(x,y) = \|x-y\|$ genau dann, wenn $x-y=0$, also $x=y$.

Sind $x, y, z \in E$, so gilt

$$d(x,z) = \|x-z\| = \|x-y+y-z\| \leq \|x-y\| + \|y-z\| = d(x,y) + d(y,z)$$

unter Benutzung der Subadditivität. Also erfüllt d die Dreiecksungleichung.

Schließlich gilt $d(y,x) = \|y-x\| = \|(-1)(x-y)\| = |-1| \cdot \|x-y\| = 1 \cdot d(x,y) = d(x,y)$, d.h. d ist symmetrisch. $\square$

Definition 8.3 Ist $(E, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum, so versehen wir E stets mit der durch $d(x,y) := \|x-y\|$ gegebenen Metrik wie in Satz 8.2, wenn nichts anderes gesagt wird. Sprechen wir von offenen oder abgeschlossenen Kugeln, offenen oder abgeschlossenen Mengen, konvergenten Folgen oder Cauchyfolgen in $(E, \|\cdot\|)$, so meinen wir solche im metrischen Raum (E,d). Insbesondere ist

$$B_\varepsilon^{\|\cdot\|}(x) := B_\varepsilon(x) := \{y \in E \colon \|y-x\| < \varepsilon\}$$

die offene Kugel vom Radius $\varepsilon > 0$ um $x \in E$ und

$$\overline{B}_\varepsilon^{\|\cdot\|}(x) := \overline{B}_\varepsilon(x) := \{y \in E \colon \|y-x\| \leq \varepsilon\}$$

die entsprechende abgeschlossene Kugel. Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in E konvergiert gegen $x \in E$, wenn

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \geq N) \;\; \|x_n - x\| < \varepsilon.$$

Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in E ist eine Cauchyfolge, wenn

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n, m \geq N) \;\; \|x_n - x_m\| < \varepsilon$$

(vgl. Anhang C für eine Wiederholung der vorigen Grundbegriffe).

Wenn in E jede Cauchyfolge konvergiert (also der metrische Raum (E,d) vollständig ist), so nennen wir den normierten Raum $(E, \|\cdot\|)$ einen *Banachraum*.

Beispiele 8.4 (a) $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ ist ein Banachraum, denn der Betrag $|\cdot|\colon \mathbb{R} \to [0,\infty[$ ist eine Norm und $\mathbb{R}$ ist bezüglich der durch $d(x,y) := |x-y|$ definierten Metrik vollständig (wie in der Analysis 1 gezeigt).

(b) Für $n \in \mathbb{N}$ ist die *euklidische Norm* die Abbildung

$$\|\cdot\|_2\colon \mathbb{R}^n \to [0,\infty[, \quad \|x\|_2 := \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$$

für $x = (x_1, \ldots, x_n)$. Die zugehörige Metrik

$$d\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to [0,\infty[, \quad d(x,y) := \|x-y\|_2 = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + \cdots + (x_n-y_n)^2}$$

heißt *euklidischer Abstand*. In Ebene und Raum ist also $\|x-y\|_2$ der übliche, aus der Schule bekannte Abstand der Vektoren x und y.

(c) Die Abbildung

$$\|\cdot\|_\infty\colon \mathbb{R}^n \to [0,\infty[, \quad \|x\|_\infty := \max\{|x_1|, \ldots, |x_n|\}$$

heißt *Maximum-Norm*. Der zugehörige Abstand ist für $x = (x_1, \ldots, x_n)$ und $y = (y_1, \ldots, y_n)$ gegeben durch

$$\|x-y\|_\infty = \max\{|x_1-y_1|, \ldots, |x_n-y_n|\}.$$

Dies ist also das Maximum der Abstände der einzelnen Komponenten. Für Rechnungen ist dieser Abstand oft bequemer als der euklidische.

(d) Die Abbildung

$$\|.\|_1\colon \mathbb{R}^n \to [0,\infty[, \quad \|x\|_1 := |x_1| + \cdots + |x_n|$$

heißt 1-*Norm*. Der zugehörige Abstand ist für $x = (x_1, \ldots, x_n)$ und $y = (y_1, \ldots, y_n)$ gegeben durch

$$\|x-y\|_1 = |x_1-y_1| + \cdots + |x_n-y_n|.$$

Satz 8.5 *Die euklidische Norm, die* 1*-Norm und die Maximum-Norm sind Normen auf* $\mathbb{R}^n$.

Beweis. Seien $x = (x_1, \ldots, x_n)$ und $y = (y_1, \ldots, y_n)$ aus $\mathbb{R}^n$ und $t \in \mathbb{R}$.

Maximum-Norm:

Definitheit. Es ist $0 = \|x\|_\infty = \max\{|x_1|, \ldots, |x_n|\}$ genau dann, wenn $|x_1| = \cdots = |x_n| = 0$, also $x = 0$.

Subadditivität. Für jedes $k \in \{1, \ldots, k\}$ ist

$$|x_k + y_k| \leq |x_k| + |y_k| \leq \|x\|_\infty + \|y\|_\infty.$$

Bilden des Maximums über alle k liefert

$$\|x + y\|_\infty \leq \|x\|_\infty + \|y\|_\infty.$$

Positive Homogenität. Es ist $\|tx\|_\infty = \max\{|tx_1|, \ldots, |tx_n|\} = \max\{|t| \cdot tx_1|, \ldots, |t| \cdot |x_n|\} = |t| \max\{|x_1|, \ldots, |x_n|\} = |t| \cdot \|x\|_\infty$.

Euklidische Norm:

Definitheit: Es ist $0 = \|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$ genau dann, wenn $x_1 = \cdots = x_n = 0$, also $x = 0$.

Subadditivität: Als Hilfsmittel benutzen wir das Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$,

$$\langle x, y \rangle := \sum_{k=1}^{n} x_k y_k \in \mathbb{R}.$$

Dieses erfüllt $\langle y, x \rangle = \langle x, y \rangle$ und ist für festes x linear in y. Dann ist also

$$\|x\|_2 = \sqrt{\langle x, x \rangle}.$$

Nach der (aus der Linearen Algebra bekannten) Cauchy-Schwarzschen Ungleichung gilt

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\|_2 \|y\|_2.$$

Somit ist

$$\begin{aligned}
(\|x + y\|_2)^2 &= \langle x + y, x + y \rangle = \langle x, x \rangle + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle \\
&= (\|x\|_2)^2 + 2\langle x, y \rangle + (\|y\|_2)^2 \leq (\|x\|_2)^2 + 2\|x\|_2\|y\|_2 + (\|y\|_2)^2 \\
&= (\|x\|_2 + \|y\|_2)^2.
\end{aligned}$$

Da die Quadratwurzel eine monoton wachsende Funktion ist, bleibt die vorige Ungleichung bestehen, wenn wir die Wurzel ziehen:

$$\|x + y\|_2 \leq \|x\|_2 + \|y\|_2.$$

Positive Homogenität: Es ist

$$\begin{aligned}\|tx\|_2 &= \sqrt{(tx_1)^2 + \cdots + (tx_n)^2} = \sqrt{t^2x_1^2 + \cdots + t^2x_n^2} \\ &= \sqrt{t^2(x_1^2 + \cdots + x_n^2)} = \sqrt{t^2}\sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2} = |t| \cdot \|x\|_2.\end{aligned}$$

1-Norm: Es ist $0 = \|(x_1, \ldots, x_n)\|_1 = |x_1| + \cdots + |x_n| = 0$ genau dann, wenn $x_1 = \cdots = x_n = 0$, also $(x_1, \ldots, x_n) = 0$. Gegeben $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ und $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ ist weiter

$$\|x + y\|_1 = \sum_{j=1}^n \underbrace{|x_j + y_j|}_{\leq |x_j| + |y_j|} \leq \sum_{j=1}^n |x_j| + \sum_{j=1}^n |y_j| = \|x\|_1 + \|y\|_1.$$

Für $t \in \mathbb{R}$ ist weiter $\|tx\| = |tx_1| + \cdots + |tx_n| = |t| \cdot |x_1| + \cdots + |t| \cdot |x_n| = |t| \cdot (|x_1| + \cdots + |x_n|) = |t| \cdot \|x\|_1$. □

Wie sehen Kugeln aus für die gerade diskutierten Normen auf $\mathbb{R}^n$?

8.6 Kugeln bzgl. der euklidischen Norm in $\mathbb{R}^n$ sind übliche Kugeln,

$$B_r^{\|\cdot\|_2}(x) = \{y \in \mathbb{R}^n \colon \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + \cdots + (y_n - x_n)^2} < r\}.$$

Für $n = 2$ ist insbesondere $B_1^{\|\cdot\|_2}(0)$ die offene Einheitskreisscheibe.

Im Fall der Maximum-Norm ist $r > \|y - x\|_\infty = \max\{|y_1 - x_1|, \ldots, |y_n - x_n|\}$ genau dann, wenn $|y_k - x_k| < r$ für $k \in \{1, \ldots, n\}$, also $y_k \in]x_k - r, x_k + r[$. Somit ist

$$B_r^{\|\cdot\|_\infty}(x) =]x_1 - r, x_1 + r[\times \cdots \times]x_n - r, x_n + r[$$

ein Würfel im $\mathbb{R}^n$. Für $n = 2$ ist insbesondere

$$B_1^{\|\cdot\|_\infty}(0) =]-1, 1[\times]-1, 1[$$

(ein Quadrat).

Im Falle der 1-Norm ist im Zweidimensionalen $B_r^{\|\cdot\|_1}(x)$ das Quadrat mit den Eckpunkten $(x_1 - r, x_2)$, $(x_1, x_2 - r)$, $(x_1 + r, x_2)$, $(x_1, x_2 + r)$ (siehe Übung). Rechnen wir das auch hier noch einmal nach: Zur Vereinfachung stellen wir zunächst fest, dass

$$B_r^{\|\cdot\|_1}(x) = x + B_r^{\|\cdot\|_1}(0),$$

d.h. die Kugel um x entsteht durch Verschieben aus der Kugel um 0 (Begründung: Es ist $y = x+(y-x)$ und $y-x$ ist genau dann in $B_r^{\|\cdot\|_1}(0)$, wenn $\|y-x\|_1 < r$, also wenn $y \in B_r^{\|\cdot\|_1}(x)$. Ist nun $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, etwa im ersten Quadranten (also $x_1, x_2 \geq 0$), so ist $(x_1, x_2) \in B_r^{\|\cdot\|_1}(0)$ genau dann, wenn

$$r > |x_1| + |x_2| = x_1 + x_2,$$

d.h. (x_1, x_2) liegen im von der x-Achse, y-Achse und der Geraden $x_1 + x_2 = r$ eingeschlossenen Gebiet (ausschließlich der Geraden). Analog in den anderen Quadranten.

$B_1(0)$ nennt man übrigens auch die (offene) *Einheitskugel*. Die vorigen Beispiele von Kugeln sind konvex, d.h. mit je zwei Punkten enthalten sie auch deren Verbindungsstrecke. Dies ist ein allgemeines Phänomen.

Definition 8.7 Es sei E ein reeller Vektorraum. Eine Teilmenge $M \subseteq E$ heißt *konvex*, wenn für alle $x, y \in M$ ihre Verbindungsstrecke

$$\{x + t(y - x) \colon t \in [0, 1]\}$$

in M liegt, d.h.

$$(\forall t \in [0, 1]) \quad (1 - t)x + ty \in M.$$

Satz 8.8 *Für jeden normierten Raum $(E, \|.\|)$, $x \in E$ und $r > 0$ sind die Kugeln $B_r^{\|\cdot\|}(x)$ und $\overline{B}_r^{\|\cdot\|}(x)$ konvexe Teilmengen von E.*

Beweis. Seien $y, z \in B_r^{\|\cdot\|}(x)$ und $t \in [0, 1]$. Ist $t = 0$ oder $t = 1$, so ist $(1 - t)y + tz \in \{y, z\}$, also in der Kugel. Nun sei $t \in]0, 1[$. Dann ist auch $1 - t > 0$ und folglich $(1 - t)\|y - x\| < (1 - t)r$ und $t\|z - x\| < tr$. Subadditivität und positive Homogenität liefern nun

$$\begin{aligned}
\|(1-t)y + tz - x\| &= \|(1-t)y + tz - (1-t)x + tx\| \\
&\leq \|(1-t)(y-x)\| + \|t(z-x)\| \\
&= |1-t| \cdot \|y-x\| + |t| \cdot \|z-x\| \\
&= (1-t)\|y-x\| + t\|z-x\| < (1-t)r + tr = r.
\end{aligned}$$

Also ist $(1 - t)y + tz \in B_r^{\|\cdot\|}(x)$.

Entsprechend erhalten wir für $y, z \in \overline{B}_r^{\|\cdot\|}(x)$ und $t \in [0, 1]$, dass $\|(1-t)y+tz-x\| \leq \|(1-t)(y-x)\|+\|t(z-x)\| = |1-t|\cdot\|y-x\|+|t|\cdot\|z-x\| = (1-t)\|y-x\| + t\|z-x\| \leq (1-t)r + tr = r$. Also $(1-t)y + tz \in \overline{B}_r^{\|\cdot\|}(x)$. □

8.9 (Normieren von Vektoren) Ist $(E, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum, so lässt sich jeder Vektor $y \in E \setminus \{0\}$ als Vielfaches eine Einheitsvektors (der Länge 1) schreiben. In der Tat ist

$$y = \|y\| u \quad \text{mit} \quad u := \frac{1}{\|y\|} y$$

und $\|u\| = \frac{1}{\|y\|} \|y\| = 1$ unter Benutzung der positiven Homogenität der Norm.

Wir erinnern an die Definition von Lipschitz-Stetigkeit (Definition C.25(b)).

Satz 8.10 *Für jeden normierten Raum $(E, \|\cdot\|)$ ist die Norm $\|\cdot\| \colon E \to [0, \infty[\subseteq \mathbb{R}$ Lipschitz-stetig und somit stetig.*

Beweis. Für $x, y \in E$ ist $\|x\| = \|x - y + y\| \leq \|x - y\| + \|y\|$ wegen der Subadditivität und somit

$$\|x\| - \|y\| \leq \|x - y\|.$$

Vertauschen der Rollen von x und y liefert

$$-(\|x\| - \|y\|) = \|y\| - \|x\| \leq \|y - x\| = \|x - y\|.$$

Also ist $\big|\|x\| - \|y\|\big| \leq \|x - y\| = L\|x - y\|$ mit $L = 1$. □

Sei $n \in \mathbb{N}$.

Satz 8.11 *Versehen wir $\mathbb{R}^n$ mit der Maximum-Norm $\|\cdot\|_\infty$, so gilt:*

(a) *Für jedes $k \in \{1, \ldots, n\}$ ist die Projektion*

$$\mathrm{pr}_k \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad (x_1, \ldots, x_n) \mapsto x_k$$

Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante $L = 1$ und somit stetig.

(b) *Eine Folge $(x_m)_{m \in \mathbb{N}}$ von Punkten $x_m = (x_{m,1}, \ldots, x_{m,n}) \in \mathbb{R}^n$ konvergiert genau dann gegen ein $y = (y_1, \ldots, y_n)$ in $\mathbb{R}^n$, wenn sie komponentenweise gegen y konvergiert, also*

$$x_{m,k} \to y_k \quad \text{für} \quad m \to \infty,$$

für alle $k \in \{1, \ldots, n\}$.

(c) *Eine Folge* $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ *von Punken* $x_m = (x_{m,1}, \dots, x_{m,n}) \in \mathbb{R}^n$ *ist genau dann eine Cauchyfolge, wenn* $(x_{m,k})_{m\in\mathbb{N}}$ *eine Cauchyfolge in* $\mathbb{R}$ *ist für alle* $k \in \{1, \dots, n\}$.

(d) $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$ *ist ein Banachraum.*

(e) *Ist* (Z, d_Z) *ein metrischer Raum und* $z \in Z$*, so ist eine Abbildung*

$$f = (f_1, \dots, f_n)\colon Z \to \mathbb{R}^n, \quad y \mapsto (f_1(y), \dots, f_n(y))$$

genau dann stetig nach $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$ *an der Stelle* z*, wenn all ihre Komponenten* $f_1, \dots, f_n\colon Z \to \mathbb{R}$ *an der Stelle* z *stetig sind.*

Beweis. Das ist ein Spezialfall des folgenden Satzes über Produkte metrischer Räume, angewandt mit $X_1 = X_2 = \cdots = X_n = \mathbb{R}$. □

Beispiel 8.12 Die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \quad (x, y) \mapsto (x, x\cos(y), \sin(xy))$$

ist stetig, denn ihre Komponenten f_1, f_2 und f_3 sind stetig: Mit den stetigen Projektionen $\mathrm{pr}_1\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \to x$ und $\mathrm{pr}_2\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto y$ sind

$$f_1 = \mathrm{pr}_1, \quad f_2 = \mathrm{pr}_1 \cdot (\cos \circ \mathrm{pr}_2), \quad f_3 = \sin \circ (\mathrm{pr}_1 \cdot \mathrm{pr}_2)$$

stetig (vgl. Satz C.15 und Satz C.16).

Definition 8.13 Sind für $n \in \mathbb{N}$ metrische Räume (X_1, d_1), …, (X_n, d_n) gegeben, so sei $X := X_1 \times \cdots \times X_n$ das kartesische Produkt. Die *Maximummetrik* auf X ist die durch

$$d\colon X \times X \to [0, \infty[\,, \quad (x, y) \mapsto \max\{d_1(x_1, y_1), \dots, d_n(x_n, y_n)\}$$

für $x = (x_1, \dots, x_n) \in X$, $y = (y_1, \dots, y_n) \in X$ gegebene Abbildung.

Bemerkung 8.14 (a) Die Maximummetrik ist eine Metrik: Es ist $d(x, y) = \max\{d_1(x_1, y_1), \dots, d_n(x_n, y_n)\} = 0$ genau dann, wenn $d_1(x_1, y_1) = \cdots = d_n(x_n, y_n) = 0$, also $x_j = y_j$ für alle $j \in \{1, \dots, n\}$, also $x = y$. Weiter ist

$$d(y, x) = \max\big\{\underbrace{d_j(y_j, x_j)}_{=d_j(x_j, y_j)} \colon j \in \{1, \dots, n\}\big\} = d(x, y).$$

Ist auch $z = (z_1, \dots, z_n) \in X$, so ist $d_j(x_j, y_j) \le d_j(x_j, z_j) + d_j(z_j, y_j) \le d(x, z) + d(z, y)$ für $j \in \{1, \dots, n\}$, folglich

$$d(x, y) = \max\big\{d_j(x_j, y_j)\colon j \in \{1, \dots, n\}\big\} \le d(x, z) + d(z, y).$$

(b) Sind $(E_j, \|\cdot\|_j)$ normierte Räume für $j \in \{1, \dots, n\}$ und $E_1 \times \cdots \times E_n =: E$, so definiert

$$\|(x_1, \dots, x_n)\| := \max\big\{\|x_j\|_j\colon j \in \{1, \dots, n\}\big\}$$

eine Norm $\|\cdot\|$ auf E, die wir die *Maximumnorm* nennen.[13] Ist

$$d_j\colon E_j \times E_j \to [0, \infty[, \quad (x, y) \mapsto \|x - y\|_j$$

die zu $(E_j, \|\cdot\|_j)$ gehörige Metrik, so ist die zu $(E, \|\cdot\|)$ gehörige Metrik die Maximummetrik d; für $x = (x_1, \dots, x_n) \in E$ und $y = (y_1, \dots, y_n) \in E$ ist nämlich

$$\begin{aligned} \|x - y\| &= \max\big\{\|x_j - y_j\|_j\colon j \in \{1, \dots, n\}\big\} \\ &= \max\{d_j(x_j, y_j)\colon j \in \{1, \dots, n\}\big\} = d(x, y). \end{aligned}$$

(c) Nehmen wir $(E_j, \|\cdot\|) := (\mathbb{R}, |\cdot|)$ für $j \in \{1, \dots, n\}$, so ist die gerade definierte Maximumnorm genau die Maximumnorm $\|\cdot\|_\infty$ auf $\mathbb{R}^n$, wie eingangs des Kapitels definiert.

Satz 8.15 *Gegeben metrische Räume* (X_1, d_1), …, (X_n, d_n) *versehen wir* $X := X_1 \times \cdots \times X_n$ *mit der Maximummetrik. Dann gilt*

(a) *Für jedes* $k \in \{1, \dots, n\}$ *ist die Projektion*

$$\mathrm{pr}_k\colon X_1 \times \cdots \times X_n \to X_k, \quad (x_1, \dots, x_n) \mapsto x_k$$

Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante $L = 1$ *und somit stetig.*

(b) *Eine Folge* $(x_m)_{m \in \mathbb{N}}$ *von Punkten* $x_m = (x_{m,1}, \dots, x_{m,n}) \in X_1 \times \cdots \times X_n$ *konvergiert genau dann gegen ein* $y = (y_1, \dots, y_n)$ *in* $X_1 \times \cdots \times X_n$, *wenn sie komponentenweise gegen* y *konvergiert, also*

$$x_{m,k} \to y_k \quad \textit{für} \;\; m \to \infty,$$

für alle $k \in \{1, \dots, n\}$.

[13] Die Normeigenschaft von $\|\cdot\|$ sieht man wie diejenige der Maximumnorm im Beweis von Satz 8.5, wo man lediglich $x_j, y_j \in E_j$ nimmt und $|x_j|$ durch $\|x_j\|_j$ ersetzt.

(c) *Eine Folge* $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ *von Punken* $x_m = (x_{m,1}, \ldots, x_{m,n}) \in X_1 \times \cdots \times X_n$ *ist genau dann eine Cauchyfolge, wenn* $(x_{m,k})_{m\in\mathbb{N}}$ *eine Cauchyfolge in* (X_k, d_k) *ist für alle* $k \in \{1, \ldots, n\}$.

(d) *Ist der metrische Raum* (X_k, d_k) *vollständig für alle* $k \in \{1, \ldots, n\}$, *so ist auch* (X, d) *vollständig.*

(e) *Ist* (Z, d_Z) *ein metrischer Raum und* $z \in Z$, *so ist eine Abbildung*

$$f = (f_1, \ldots, f_n) \colon Z \to X_1 \cdots \times X_n, \quad y \mapsto (f_1(y), \ldots, f_n(y))$$

genau dann stetig nach (X, d) *an der Stelle* z, *wenn all ihre Komponenten* $f_k \colon Z \to X_k$ *an der Stelle* z *stetig sind.*

Beweis. (a) Für $x = (x_1, \ldots, x_n)$ und $y = (y_1, \ldots, y_n)$ in X ist

$$\begin{aligned} d_k(\mathrm{pr}_k(x), \mathrm{pr}_k(y)) &= d_k(x_k, y_k) \le \max\left\{d_j(x_j, y_j) \colon j \in \{1, \ldots, n\}\right\} \\ &= d(x, y) = L\, d(x, y) \end{aligned}$$

mit $L := 1$.

(b) Da pr_k für $k \in \{1, \ldots, n\}$ stetig ist, folgt aus $x_m \to y$, dass

$$x_{m,k} = \mathrm{pr}_k(x_m) \to \mathrm{pr}_k(y) = y_k \quad \text{für } m \to \infty.$$

Gilt umgekehrt für alle Komponenten $x_{m,k} \to y_k$ für $k \to \infty$, so existiert zu $\varepsilon > 0$ ein $N_k \in \mathbb{N}$ derart, dass

$$(\forall m \ge N_k) \;\; d_k(y_k, x_{m,k}) < \varepsilon.$$

Setzen wir $N := \max\{N_1, \ldots, N_n\}$, so gilt für alle $m \ge N$

$$d(y, x_m) = \max\{d_1(y_1, x_{m,1}), \ldots, d_n(y_n, x_{m,n})\} < \varepsilon.$$

Also gilt $x_m \to y$.

(c) Sei $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ eine Folge in X, wobei $x_m = (x_{m,1}, \ldots, x_{m,n})$ mit $x_{m,k} \in X_k$.

Ist $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in X, so existiert zu $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ derart, dass

$$(\forall m, \ell \ge N) \;\; d(x_m, x_\ell) < \varepsilon.$$

Für $k \in \{1, \ldots, n\}$ ist wegen (a) dann

$$d_k(x_{m,k}, x_{\ell,k}) = d_k(\mathrm{pr}_k(x_m), \mathrm{pr}_k(x_\ell)) \leq d(x_m, x_\ell) < \varepsilon$$

für alle $m, \ell \geq N$, somit $(x_{m,k})_{m\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in X_k.

Ist umgekehrt $(x_{m,k})_{m\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in (X_k, d_k) für alle $k \in \{1, \ldots, n\}$, so finden wir zu $\varepsilon > 0$ ein $N_k \in \mathbb{N}$ derart, dass

$$(\forall m, \ell \geq N_k) \;\; d_k(x_{m,k}, x_{\ell,k}) < \varepsilon.$$

Setzen wir $N := \max\{N_1, \ldots, N_n\}$, so gilt für alle $m, \ell \geq N$

$$d(x_m, x_\ell) = \max\{d_1(x_{m,1}, x_{\ell,1}), \ldots, d_n(x_{m,n}, x_{\ell,n})\} < \varepsilon.$$

Also ist $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ ene Cauchyfolge in (X, d).

(d) Seien (X_1, d_1), …, (X_n, d_n) vollständig und $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in X, mit $x_m = (x_{m,1}, \ldots, x_{m,n}) \in X_1 \times \cdots \times X_n$. Für alle $k \in \{1, \ldots, n\}$ ist nach (c) dann $(x_{m,k})_{m\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in (X_k, d_k) und somit konvergent gegen ein $y_k \in X_k$. Setzen wir $y := (y_1, \ldots, y_n)$, so konvergiert x_m komponentenweise gegen y, so dass nach (b) also $x_m \to y$ in X, für $m \to \infty$. Somit ist (X, d) vollständig.

(e) Ist $f = (f_1, \ldots, f_n)$ stetig an der Stelle z, so auch die Komposition $f_k = \mathrm{pr}_k \circ f$, da pr_k nach Teil (a) des Satzes stetig ist.

Seien umgekehrt $f_1 \ldots, f_n$ an der Stelle z stetig. Damit f an der Stelle z stetig ist, müssen wir zeigen, dass es für jedes $\varepsilon > 0$ eine Umgebung W von z in Z gibt derart, dass

$$(\forall y \in W)\; d(f(y), f(z)) < \varepsilon.$$

Da f_k stetig ist an der Stelle z, gibt es eine Umgebung W_k von z in Z mit

$$(\forall y \in W_k)\; d_k(f_k(y), f_k(z)) < \varepsilon.$$

Dann ist $W := \bigcap_{k=1}^n W_k$ eine Umgebung von z und für alle $y \in W$ ist auch $y \in W_k$ für alle k, somit

$$d(f_k(y), f_k(z)) < \varepsilon.$$

Somit auch $d(f(y), f(z)) = \max\big\{d_k(f_k(y), f_k(z)) \colon k \in \{1, \ldots, n\}\big\} < \varepsilon.$ $\square$

Während wir auf $\mathbb{R}$ immer die gleiche Norm benutzen (den Betrag $|\cdot|$), gibt es auf $\mathbb{R}^n$ für $n \geq 2$ viele verschiedenen Normen. Für viele Zwecke ist es egal, welche Norm benutzt wird, wie wir nun ausführen.

Definition 8.16 Eine Norm $\|\cdot\|$ auf einem reellen Vektorraum E wird *äquivalent* zu einer Norm $\|\cdot\|'$ auf E genannt, wenn es reelle Zahlen $a, b > 0$ gibt derart, dass

$$(\forall x \in E) \qquad a\|x\|' \leq \|x\| \leq b\|x\|'. \tag{43}$$

Lemma 8.17 *Sei E ein reeller Vektorraum. Äquivalenz von Normen ist eine Äquivalenzrelation auf der Menge aller Normen auf E.*

Beweis. Jede Norm $\|\cdot\|$ auf E ist zu sich selbst äquivalent, da wir im Falle $\|\cdot\|' := \|\cdot\|$ in (43) einfach $a := b := 1$ wählen können. Äquivalenz von Normen ist also eine reflexive Relation.

Symmetrie: Ist $\|\cdot\|$ zu $\|\cdot\|'$ äquivalent, so finden wir $a, b > 0$ mit (43). Dann ist

$$\frac{1}{b}\|\cdot\| \leq \|\cdot\|' \leq \frac{1}{a}\|\cdot\|,$$

also $\|\cdot\|'$ zu $\|\cdot\|$ äquivalent.

Transitivität: Ist $\|\cdot\|$ zur Norm $\|\cdot\|$ äquivalent und $\|\cdot\|'$ zu einer Norm $\|\cdot\|''$, so gibt es reelle Zahlen $a, b, a'b' > 0$ derart, dass (43) gilt und $a'\|\cdot\|'' \leq \|\cdot\|' \leq b'\|\cdot\|''$. Somit gilt

$$\|\cdot\| \leq b\|\cdot\|' \leq bb'\|\cdot\|''$$

und

$$\|\cdot\| \geq a\|\cdot\|' \geq aa'\|\cdot\|'';$$

folglich sind $\|\cdot\|$ und $\|\cdot\|''$ äquivalent. □

Satz 8.18 *Alle Normen auf $\mathbb{R}^n$ sind zueinander äquivalent.*

Beweis. Nach Lemma 8.17 ist Äquivalenz von Normen eine Äquivalenzrelation auf der Menge aller Normen auf $\mathbb{R}^n$. Wir brauchen daher nur zu zeigen, dass jede Norm $\|\cdot\|\colon \mathbb{R}^n \to [0, \infty[$ zur Maximumnorm

$$\|\cdot\|_\infty\colon \mathbb{R}^n \to [0, \infty[, \qquad \|x\|_\infty := \max\{|x_1|, \ldots, |x_n|\}$$

(für $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$) äquivalent ist. Mit den Standard-Einheitsvektoren $e_1 = (1, 0, \ldots, 0)$, ..., $e_n = (0, \ldots, 0, 1)$ erhalten wir mit Subadditivität und positiver Homogenität von $\|\cdot\|$ zunächst

$$\begin{aligned}\|x\| &= \left\|\sum_{k=1}^n x_k e_k\right\| \leq \sum_{k=1}^n \|x_k e_k\| = \sum_{k=1}^n |x_k|\cdot\|e_k\| \\ &\leq \sum_{k=1}^n \max\{|x_1|,\ldots,|x_n|\}\|e_k\| = b\|x\|_\infty\end{aligned}$$

für alle $x=(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n$, mit

$$b := \sum_{k=1}^n \|e_k\|.$$

Also gilt

$$(\forall x\in\mathbb{R}^n)\quad \|x\|\leq b\|x\|_\infty \tag{44}$$

und somit auch $\|x-y\|\leq b\|x-y\|_\infty$ für alle $x,y\in\mathbb{R}^n$. Die Abbildung

$$f\colon \mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n,\quad x\mapsto x$$

ist also Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante $L:=b$ als Abbildung von $(\mathbb{R}^n,\|\cdot\|_\infty)$ nach $(\mathbb{R}^n,\|\cdot\|)$, und somit stetig. Nun ist die Menge

$$S:=\{x\in\mathbb{R}^n\colon \|x\|_\infty=1\} = \|\cdot\|_\infty^{-1}(\{1\})$$

in $(\mathbb{R}^n,\|\cdot\|_\infty)$ abgeschlossen (da die Norm $\|\cdot\|_\infty$ nach Satz 8.10 stetig ist und S das Urbild der einpunktigen (also abgeschlossenen) Menge $\{1\}\subseteq\mathbb{R}$ unter der stetigen Abbildung $\|\cdot\|_\infty$ ist). Wir wählen eine Folge $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ in S derart, dass

$$\|x_m\|\to\inf\{\|x\|\colon x\in S\}\quad \text{für } m\to\infty.$$

Schreiben wir $x_m=(x_{m,1},\ldots,x_{m,n})\in\mathbb{R}^n$, so ist $(x_{m,1})_{m\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $[-1,1]$ (also beschränkt), da $|x_{m,1}|\leq\|x_m\|_\infty=1$. Nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß hat $(x_{m,1})_{m\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge $(x_{m_k,1})_{k\in\mathbb{N}}$. Nach Ersetzen von $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ durch $(x_{m_k})_{k\in\mathbb{N}}$ dürfen wir also ohne Einschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass die Folge $(x_{m,1})_{m\in\mathbb{N}}$ gegen ein $y_1\in\mathbb{R}$ konvergiert. Nun ist auch $x_{m,2}\in[-1,1]$ und nach erneutem Übergang zu einer Teilfolge dürfen wir annehmen, dass $(x_{m,2})_{m\in\mathbb{N}}$ gegen ein $y_2\in\mathbb{R}$ konvergiert. Weiteres Auswählen von Teilfolgen ermöglicht uns, ebenso die Konvergenz von $x_{m,k}$ gegen ein y_k anzunehmen für $k\in\{3,\ldots,n\}$. Setzen wir $y:=(y_1,\ldots,y_n)$, so gilt nach Satz 8.11(b)

$$x_m\to y\quad \text{für } m\to\infty$$

in $(\mathbb{R}^n \|\cdot\|_\infty)$. Da $x_m \in S$ für alle $m \in \mathbb{N}$ und S in $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$ abgeschlossen ist, folgt mit Satz C.11, dass

$$y = \lim_{m\to\infty} x_m \in S;$$

insbesondere ist $\|y\|_\infty = 1$ und somit $y \neq 0$. Da $\|\cdot\| \circ f$ auf $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$ stetig ist mit f wie oben, folgt

$$\|x_m\| = \|f(x_m)\| \to \|f(y)\| = \|y\|$$

für $m \to \infty$. Folglich ist

$$a := \inf\{\|x\| \colon x \in S\} = \|y\| > 0.$$

Sei $x \in \mathbb{R}^n$. Für $x = 0$ ist $\|x\| \geq a\|x\|_\infty$ trivial. Weiter gilt für alle $x \in \mathbb{R}^n$ mit $x \neq 0$:

$$\|x\| = \left\| \|x\|_\infty \frac{1}{\|x\|_\infty} x \right\| = \|x\|_\infty \left\| \frac{1}{\|x\|_\infty} x \right\| \geq a\|x\|_\infty,$$

weil $\left\| \frac{1}{\|x\|_\infty} x \right\|_\infty = \frac{1}{\|x\|_\infty}\|x\|_\infty = 1$ und somit $\frac{1}{\|x\|_\infty} x \in S$. Also gilt

$$(\forall x \in \mathbb{R}^n) \qquad a\|x\|_\infty \leq \|x\|. \tag{45}$$

Wegen (44) und (45) sind $\|\cdot\|$ und $\|\cdot\|_\infty$ äquivalent. □

Äquivalenz von Normen ist u.a. wegen folgender Tatsache von Interesse:

Lemma 8.19 *Für Normen $\|\cdot\|$ und $\|\cdot\|'$ auf einem reellen Vektorraum E sind die folgenden Bedingungen äquivalent:*

(a) *$\|\cdot\|$ und $\|\cdot\|'$ sind äquivalente Normen.*

(b) *Die Normen $\|\cdot\|$ und $\|\cdot\|'$ führen zu den gleichen offenen Mengen in E, d.h. für jede Teilmenge $V \subseteq E$ gilt: V ist genau dann in $(E, \|\cdot\|)$ offen, wenn V in $(E, \|\cdot\|')$ offen ist.*

Beweis. Wir beweisen nur "(a)⇒(b)", da die umgekehrte Implikation irrelevant für uns ist. Es genügt zu zeigen, dass jede in $(E, \|\cdot\|)$ offene Menge V auch in $(E, \|\cdot\|')$ offen ist (da wir die Rollen von $\|\cdot\|$ und $\|\cdot\|'$ vertauschen können). Seien $a > 0$ und $b > 0$ wie in (43). Gegeben $x \in V$ existiert ein

$\varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon^{\|\cdot\|}(x) \subseteq V$. Dann ist $B_{\varepsilon/b}^{\|\cdot\|'}(x) \subseteq V$ (und somit Offenheit von V in $(E, \|\cdot\|')$ gezeigt); ist nämlich $y \in B_{\varepsilon/b}^{\|\cdot\|'}(x)$, so ist $\|y - x\|' < \varepsilon/b$, somit unter Benutzung von (43)

$$\|y - x\| \leq b\|y - x\|' < b\varepsilon/b = \varepsilon$$

und folglich $y \in B_\varepsilon^{\|\cdot\|}(x)$. □

Bemerkung 8.20 Da nach Satz 8.18 jede Norm $\|\cdot\|$ auf $\mathbb{R}^n$ zur Maximumnorm $\|\cdot\|_\infty$ äquivalent ist, definiert sie nach Lemma 8.17 die gleichen offenen Mengen, somit die gleichen Umgebungen eines Punkts (vgl. Bemerkung C.6 (c) und (d)) und somit die gleichen konvergenten Folgen (siehe Lemma C.10(b)). Nach Satz 8.11(b) gilt somit:

Eine Folge $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}^n$ konvergiert genau dann gegen ein $y = (y_1, \ldots, y_n)$ in $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$, wenn $\mathrm{pr}_k(x_m) \to y_k$ für alle $k \in \{1, \ldots, n\}$.

Weiter sind nach Satz 8.11(a) auf $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ die Projektionen $\mathrm{pr}_k\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ alle stetig. Zudem ist für einen metrischen Raum Y eine Funktion $f = (f_1, \ldots, f_n)\colon Y \to \mathbb{R}^n$ genau dann stetig nach $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$, wenn jede der Komponenten $f_k\colon Y \to \mathbb{R}$ stetig ist (unter Benutzung von Satz 8.11(e)). Schließlich erhalten wir:

$(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ ist ein Banachraum.

Um dies einzusehen, sei $b > 0$ mit $\|\cdot\|_\infty \leq b\|\cdot\|$. Ist nun $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$, so existiert zu $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ derart, dass

$$\|x_m - x_\ell\| < \frac{\varepsilon}{b} \quad \text{für alle } m, \ell \geq N$$

und somit $\|x_m - x_\ell\|_\infty \leq b\|x_m - x_\ell\| < \varepsilon$. Also ist $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$, somit dort konvergent (nach Satz 8.11(d)) und somit auch in $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$, da beide normierten Räume die gleichen konvergenten Folgen haben.

Bemerkung 8.21 Normen auf einem komplexen Vektorraum E lassen sich analog diskutieren. Die Bedingung für positive Homogenität lautet hier

$$(\forall z \in \mathbb{C})(\forall x \in E)\ \|zx\| = |z| \cdot \|x\|.$$

Dann ist $\|\cdot\|$ insbesondere auch eine Norm auf E, betrachtet als reeller Vektorraum. Aus Satz 8.18 und Satz 8.11(d) folgt also, dass alle Normen auf dem komplexen Vektorraum $\mathbb{C}^n$ (der reell zu $\mathbb{R}^{2n}$ isomorph ist) äquivalent sind und $\mathbb{C}^n$ mit jeder solchen ein komplexer Banachraum ist. Alle wesentlichen Begriffe und Resultate lassen sich unmittelbar vom reellen auf den komplexen Fall übertragen, indem wir in den Formulierungen und Beweisen einfach $\mathbb{R}$ durch $\mathbb{C}$ ersetzen (worauf hier verzichtet wird).

Definition 8.22 Ist $(E, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum, so nennen wir eine Teilmenge $M \subseteq E$ *beschränkt*, wenn

$$\sup\{\|x\| \colon x \in M\} < \infty.$$

Bemerkung 8.23 Äquivalente Normen auf einem Vektorraum E führen offenbar zu den gleichen beschränkten Mengen; insbesondere liefern alle Normen auf $\mathbb{R}^n$ die gleichen beschränkten Teilmengen.

Wir schließen mit interessanten Beispielen stetiger reellwertiger Funktionen auf $\mathbb{R}^n$ und zugehöriger Notation.

Beispiel 8.24 Für einen sogenannten *Multi-Index* $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in (\mathbb{N}_0)^n$ mit $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{N}_0$ können wir das Monom

$$f \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad x = (x_1, \ldots, x_n) \mapsto (x_1)^{\alpha_1} \cdots (x_n)^{\alpha_n} =: x^\alpha$$

betrachten. Dieses ist stetig, denn es ist ein Produkt

$$f = (\mathrm{pr}_1)^{\alpha_1} \cdots (\mathrm{pr}_n)^{\alpha_n}$$

stetiger Funktionen, mit Notation wie in Satz 8.11(a). Hierbei haben wir Satz C.16(a) benutzt.

Beispiel 8.25 Per Definition ist ein Polynom p in n Variablen eine Linearkombination von Monomen wie in Beispiel 8.24. Schreiben wir

$$|\alpha| := \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$$

für einen Multi-Index $\alpha \in \mathbb{N}_0$, so ist also p eine Funktion $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ der Form

$$p(x) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha \, x^\alpha$$

mit einem $m \in \mathbb{N}_0$ und Koeffizienten $a_\alpha \in \mathbb{R}$. Jedes Polynom ist stetig, als Linearkombination stetiger Funktionen (siehe Satz C.16(b)).

9 Konvergenz von Funktionenfolgen; Supremumsnorm

Ist X eine Menge und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Funktionen $f_n\colon X \to \mathbb{R}$, so wollen wir von Konvergenz der Folge gegen eine Funktion $f\colon X \to \mathbb{R}$ sprechen können. Hierfür stehen mehrere Konvergenzbegriffe zur Verfügung; wir betrachten die zwei wichtigsten.

Definition 9.1 Sei X eine Menge, $f\colon X \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Funktionen $f_n\colon X \to \mathbb{R}$.

(a) Man sagt, die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert *punktweise* gegen f, wenn für jedes $x \in X$
$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$$
gilt, also
$$(\forall x \in X)(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \geq N)\ |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon.$$

(b) Gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ derart, dass für alle $x \in X$
$$|f(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon$$
gilt, so sagt man, die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert *gleichmäßig* gegen f. Gefordert ist also
$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \geq N)(\forall x \in X)\ |f(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon.$$

Bemerkung 9.2 (a) Beachten Sie die verschiedene Reihenfolge der Quantoren in Definition 9.1 (a) bzw. (b). Jede gegen f gleichmäßig konvergente Funktionenfolge ist auch punktweise gegen f konvergent; gegeben ε kann N sogar *unabhängig von* $x \in X$ gewählt werden.

(b) Ist $f\colon X \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $\varepsilon > 0$, so nennt man die Teilmenge
$$\big\{(x, y)\colon x \in X,\ y \in [f(x) - \varepsilon, f(x) + \varepsilon]\big\} \subseteq X \times \mathbb{R}$$
den *ε-Schlauch* um den Graphen von f. Gleichmäßige Konvergenz von $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen f bedeutet, dass für jedes $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert derart, dass für alle $n \geq N$ der Graph von f_n im ε-Schlauch um den Graphen von f liegt.

Beispiel 9.3 Wir betrachten die stetigen Funktionen $f_n\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) := 1 - nx$ wenn $x \in [0, \frac{1}{n}]$, $f_n(x) := 0$ sonst (Skizze!). Zunächst beobachten wir, dass $f_n(0) = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und somit $f_n(0) \to 1$ für $n \to \infty$. Für jedes $x > 0$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$ derart, dass $\frac{1}{N} < x$. Für alle $n \geq N$ ist dann $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < x$ und somit $f_n(x) = 0$. Also konvergiert $f_n(x)$ gegen 0 für festes $x > 0$ und somit gilt $f_n \to f$ punktweise für die Funktion $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$,

$$x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{wenn } x = 0; \\ 0 & \text{wenn } x \in \,]0,1]. \end{cases}$$

Jedoch konvergiert f_n nicht gleichmäßig gegen eine Funktion g. Dann würde f_n nämlich auch punktweise gegen g konvergieren (wie auch gegen f) und somit wäre für jedes $x \in [0,1]$

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = g(x),$$

also $g = f$. Aufgrund der gleichmäßigen Konvergenz gäbe es ein $N \in \mathbb{N}$ derart, dass für alle $n \geq N$ und alle $x \in [0,1]$

$$|f(x) - f_n(x)| \leq \frac{1}{2}.$$

Mit $n := N$ und $x := \frac{1}{4n}$ ist jedoch

$$|f(x) - f_n(x)| = \left|0 - \left(1 - \frac{n}{4n}\right)\right| = \frac{3}{4} > \frac{1}{2},$$

Widerspruch. Die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ kann also doch nicht gleichmäßig konvergent sein.

Im vorigen Beispiel war die Grenzfunktion f unstetig, obwohl alle f_n stetig waren. Punktweise Konvergenz ist also zu schwach, um Stetigkeit auf die Grenzfunktion vererben zu können. Anders verhält es sich bei gleichmäßiger Konvergenz.

Satz 9.4 *Es sei (X,d) ein metrischer Raum. Konvergiert eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ stetiger Funktionen $f_n\colon X \to \mathbb{R}$ gleichmäßig gegen eine Funktion $f\colon X \to \mathbb{R}$, so ist auch f stetig.*

Beweis. Sei $x \in X$. Gegeben $\varepsilon > 0$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$ derart, dass $|f(y) - f_n(y)| \leq \frac{\varepsilon}{3}$ für alle $y \in X$ und alle $n \geq N$. Insbesondere gilt

$$|f(y) - f_N(y)| \leq \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{für alle } y \in X. \tag{46}$$

Da f_N an der Stelle x stetig ist, existiert ein $\delta > 0$ derart, dass

$$|f_N(y) - f_N(x)| \leq \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{für alle } y \in X \text{ mit } d(x,y) \leq \delta. \tag{47}$$

Für all $y \in X$ mit $d(x,y) \leq \delta$ folgt

$$\begin{aligned} |f(y) - f(x)| &= |f(y) - f_N(y) + f_N(y) - f_N(x) + f_N(x) - f(x)| \\ &\leq |f(y) - f_N(y)| + |f_N(y) - f_N(x)| + |f_N(x) - f(x)| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Hierbei wurde (47) benutzt und zweimal (46) (einmal mit dem gegebenen y, einmal mit x an Stelle von y). Also ist f stetig an der Stelle x. □

Auch Riemann-Integrierbarkeit überträgt sich auf gleichmäßige Limites von Funktionenfolgen.

Satz 9.5 *Konvergiert eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Riemann-integrierbarer Funktionen $f_n\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ gleichmäßig gegen eine Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, so ist auch f Riemann-integrierbar und*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx. \tag{48}$$

Beweis. Die Aussage ist trivial wenn $a = b$; sei daher nun $a < b$. Gegeben $\varepsilon > 0$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$ derart, dass für alle $n \geq N$

$$|f(x) - f_n(x)| \leq \frac{\varepsilon}{3(b-a)} \quad \text{für alle } x \in [a,b]. \tag{49}$$

Sei $n \geq N$. Da f_n Riemann-integrierbar ist, gibt es Treppenfunktionen $\phi, \psi \in T_a^b$ derart, dass $\phi \leq f_n \leq \psi$ und

$$\int_a^b \psi(x)\,dx - \int_a^b \phi(x)\,dx \; < \; \frac{\varepsilon}{3}.$$

Definieren wir

$$\Phi(x) := \phi(x) - \frac{\varepsilon}{3(b-a)} \quad \text{und} \quad \Psi(x) := \psi(x) + \frac{\varepsilon}{3(b-a)}$$

für $x \in [a,b]$, so sind $\Phi, \Psi \in T_a^b$ und

$$\Phi(x) \leq f_n(x) - \frac{\varepsilon}{3(b-a)} \leq f(x)$$

für alle $x \in [a,b]$ wegen (49). Analog gilt

$$\Psi(x) \geq f_n(x) + \frac{\varepsilon}{3(b-a)} \geq f(x).$$

Somit haben wir $\Phi \leq f \leq \Psi$, woraus

$$-\infty < \inf \Phi([a,b]) \leq \inf f([a,b]) \leq \sup f([a,b]) \leq \sup \Psi([a,b]) < \infty$$

und somit Beschränktheit der Funktion f folgt. Weiter gilt

$$\begin{aligned}
&\int_a^b \Psi(x)\,dx - \int_a^b \Phi(x)\,dx \\
&\quad = \int_a^b \psi(x)\,dx + \int_a^b \frac{\varepsilon}{3(b-a)}\,dx - \int_a^b \phi(x)\,dx + \int_a^b \frac{\varepsilon}{3(b-a)}\,dx \\
&\quad = \int_a^b (\psi - \phi)(x)\,dx + \frac{2\varepsilon}{3} < \varepsilon.
\end{aligned}$$

Nach Lemma A.11 ist also f Riemann-integrierbar. Wegen der Monotonie und Linearität des Integrals folgt aus

$$f_n - \frac{\varepsilon}{3(b-a)} \leq f \leq f_n + \frac{\varepsilon}{3(b-a)},$$

dass

$$\int_a^b f_n(x)\,dx - \underbrace{\int_a^b \frac{\varepsilon}{3(b-a)}\,dx}_{=\varepsilon/3} \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b f_n(x)\,dx + \underbrace{\int_a^b \frac{\varepsilon}{(3(b-a)}\,dx}_{=\varepsilon/3}$$

und somit

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b f_n(x)\,dx \right| \leq \frac{\varepsilon}{3}$$

für alle $n \geq N$. Also gilt (48). □

Aus punktweiser Konvergenz einer Folge stetiger Funktionen folgt nicht Stetigkeit der Grenzfunktion, wenn lediglich punktweise Konvergenz vorliegt (siehe Beispiel 9.3). Das folgende Beispiel zeigt, dass punktweise Grenzwerte Riemann-integrierbarer Funktionen nicht Riemann-integrierbar zu sein brauchen. Die gleichmäßige Konvergenz ist also wesentlich sowohl in Satz 9.4 als auch in Satz 9.5.

Beispiel 9.6 Die Dirichletfunktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist definiert via $f(x) := 1$ wenn $x \in \mathbb{Q}$ und $f(x) := 0$ wenn $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ irrational ist. Die Funktion $f|_{[0,1]}\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ ist nicht Riemann-integrierbar. Ist nämlich $\phi\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ eine Treppenfunktion mit $\phi \leq f|_{[0,1]}$, so sei $Z = \{0 = t_0 < t_1 \cdots < t_n = 1\}$ eine Zerlegung derart, dass ϕ für jedes $k \in \{1, \ldots, n\}$ auf $]t_{k-1}, t_k[$ konstant ist mit Funktionswert c_k. Da das Intervall $]t_{k-1}, t_k[$ eine rationale Zahl q enthält, folgt $c_k = \phi(q) \leq f(q) = 0$, somit $\int_0^1 \phi(x)\,dx = \sum_{k=1}^n (t_k - t_{k-1})c_k \leq 0$; also ist

$$\int_{a\,*}^{b} f(x)\,dx \leq 0.$$

Da jedes nicht entartete Teilintervall von $[a,b]$ auch ein irrationale Zahl z enthält und $f(z) = 1$ ist, folgt analog $\int_a^{b*} f(x)\,dx \geq \int_0^1 1\,dx = 1$. da Ober- und Unterintegral nicht übereinstimmen, ist die Funktion $f|_{[0,1]}$ nicht Riemann-integrierbar. Nun ist aber die Menge $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ abzählbar unendlich, es gibt also eine bijektive Abbildung

$$\mathbb{N} \to \mathbb{Q} \cap [0,1], \quad n \mapsto q_n.$$

Defnieren wir $f_n\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ via $f(x) = 1$ falls $x \in \{q_1, \ldots, q_n\}$, $f(x) = 0$ falls $x \in [0,1] \setminus \{q_1, \ldots, q_n\}$, so ist f nach Beispiel A.4 eine Treppenfunktion und somit Riemann-integrierbar. Weiter gilt $f_n \to f|_{[0,1]}$ punktweise, denn für irrationales $x \in [0,1]$ ist $f_n(x) = 0 = f(x)$ für alle $n \in \mathbb{N}$; für rationale Zahlen $x \in [0,1]$ ist $x = q_N$ für ein $N \in \mathbb{N}$ und $f_n(x) = 1 = f(x)$ für alle $n \geq N$. Riemann-Integrierbarkeit überträgt sich also nicht auf alle punktweisen Grenzwerte Riemann-integrierbarer Funktionen (anders als bei gleichmäßiger Konvergenz).

Wir erinnern an die Definition der Supremumsnorm.

Definition 9.7 Ist X eine Menge und $f\colon X \to \mathbb{R}$ eine Funktion, so definieren wir

$$\|f\|_\infty := \sup\{|f(x)|\colon x \in X\} \in [0, \infty].$$

Eine Funktion $f\colon X \to \mathbb{R}$ ist also genau dann beschränkt, wenn $\|f\|_\infty < \infty$.

Bemerkung 9.8 Eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Funktionen $f_n\colon X \to \mathbb{R}$ konvergiert genau dann gleichmäßig gegen eine Funktion $f\colon X \to \mathbb{R}$, wenn

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall x \in X) \;\; |f(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon.$$

Hierbei ist die Bedingung $(\forall x \in X)\ |f(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon$ zu

$$\sup\{|f(x) - f_n(x)|\colon x \in X\} \ \leq \ \varepsilon$$

äquivalent, also zu $\|f - f_n\|_\infty \leq \varepsilon$. Somit gilt:

Eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Funktionen $f_n\colon X \to \mathbb{R}$ konvergiert genau dann gleichmäßig gegen eine Funktion $f\colon X \to \mathbb{R}$, wenn $\|f - f_n\|_\infty \to 0$ für $n \to \infty$.

Definition 9.9 Ist X eine nicht-leere Menge, so bezeichnet $\ell^\infty(X, \mathbb{R})$ die Menge aller beschränkten Funktionen $f\colon X \to \mathbb{R}$. Dies ist ein Untervektorraum des Vektorraums $\mathbb{R}^X$ aller Funktionen von X nach $\mathbb{R}$. Wir schreiben kürzer auch $\ell^\infty(X) := \ell^\infty(X, \mathbb{R})$. Wir versehen $\ell^\infty(X)$ mit der Supremumsnorm

$$\|\cdot\|_\infty\colon \ell^\infty(X) \to [0, \infty[, \quad \|f\|_\infty := \sup\{|f(x)|\colon x \in X\}.$$

Ist $X = \mathbb{N}$, so schreibt man auch einfach $\ell^\infty := \ell^\infty(\mathbb{N})$. Also ist ℓ^∞ die Menge aller beschränkten reellen Folgen $f = (f(n))_{n\in\mathbb{N}}$.

Lemma 9.10 *$\|\cdot\|_\infty$ ist eine Norm auf $\ell^\infty(X)$.*

Beweis. Definitheit. Es ist $0 = \|f\|_\infty = \sup\{|f(x)|\colon x \in X\}$ genau dann, wenn $|f(x)| = 0$ für alle $x \in X$, also $x = 0$.

Subadditivität. Seien $f, g \in \ell^\infty(X)$. Für jedes $x \in X$ ist

$$|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty.$$

Bilden des Supremums über alle x liefert

$$\|f + g\|_\infty = \sup\{|f(x) + g(x)|\colon x \in X\} \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty.$$

Positive Homogenität. Es ist $\|tf\|_\infty = \sup\{|tf(x)|\colon x \in X\} = \sup\{|t| \cdot |f(x)|\colon x \in X\} = |t| \sup\{|f(x)|\colon x \in X\} = |t| \cdot \|f\|_\infty$. □

Bemerkung 9.11 Es sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge beschränkter Funktionen $f_n\colon X \to \mathbb{R}$ und $f\colon X \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion. Nach Bemerkung 9.8 konvergiert die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ genau dann gleichmäßig gegen f, wenn $f_n \to f$ in $(\ell^\infty(X), \|\cdot\|_\infty)$.

Satz 9.12 *Für jede nicht-leere Menge X ist $(\ell^\infty(X), \|.\|_\infty)$ ein Banachraum.*

Beweis. Es sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $(\ell^\infty(X), \|\cdot\|_\infty)$. Gegeben $\varepsilon > 0$ existiert also ein $N \in \mathbb{N}$ derart, dass

$$(\forall n, m \geq N)\ \|f_n - f_m\|_\infty \leq \varepsilon,$$

also

$$(\forall n, m \geq N)(\forall x \in X)\ |f_n(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon. \tag{50}$$

Halten wir $x \in X$ fest, so gilt also $|f_n(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon$ für alle $n, m \geq N$. Somit ist $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge im Banachraum $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ und folglich konvergent gegen eine reelle Zahl $f(x)$. Übergang zum Grenzwert $n \to \infty$ in (50) liefert

$$(\forall n \geq N)\ |f(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon.$$

Da dies für alle x gilt, ist also

$$(\forall m \geq N)\ \|f - f_m\|_\infty \leq \varepsilon. \tag{51}$$

Zudem ist $\|f\|_\infty \leq \varepsilon + \|f_N\|_\infty < \infty$ weil

$$|f(x)| = |f(x) - f_N(x) + f_N(x)| \leq |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x)| \leq \varepsilon + \|f_N\|_\infty$$

für alle $x \in X$. Also ist f eine beschränkte Funktion. Wegen (51) gilt $f_m \to f$ für $m \to \infty$ in $(\ell^\infty(X), \|\cdot\|_\infty)$. □

Ist (X, d) ein metrischer Raum, so ist die Menge $BC(X) := BC(X, \mathbb{R})$ aller beschränkten, stetigen Funktionen $f\colon X \to \mathbb{R}$ offenbar ein Untervektorraum von $\ell^\infty(X)$. Wir schreiben auch $\|\cdot\|_\infty$ für die Supremumsnorm auf $BC(X)$,

$$\|\cdot\|_\infty\colon BC(X) \to [0, \infty[,\quad f \mapsto \|f\|_\infty.$$

Dies ist eine Norm wegen des folgenden Lemmas.

Lemma 9.13 *Ist $(E, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum und $F \subseteq E$ ein Untervektorraum, so ist*

$$F \to [0, \infty[,\quad x \mapsto \|x\| \tag{52}$$

eine Norm auf F.

Die in (52) definierte Norm nennt man die auf F *induzierte Norm.*

Beweis. Sei $\|x\|_F := \|x\|$ für $x \in F$. Gegeben $x, y \in F$ gilt $\|x\|_F = 0$ genau dann, wenn $\|x\| = 0$, also $x = 0$. Weiter ist $\|x+y\|_F = \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\| = \|x\|_F + \|y\|_F$. Für $t \in \mathbb{R}$ gilt zudem $\|tx\|_F = \|tx\| = |t| \cdot \|x\| = |t| \cdot \|x\|_F$. □

Aus Satz 9.12 und Satz 9.4 folgt nun unmittelbar:

Folgerung 9.14 *Für jeden metrischen Raum* (X, d) *ist* $(BC(X), \|\cdot\|_\infty)$ *ein Banachraum.*

Beweis. Ist $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $(BC(X), \|\cdot\|_\infty)$, so auch im Banachraum $(\ell^\infty(X), \|\cdot\|_\infty)$. Also existiert ein $f \in \ell^\infty(X)$ derart, dass $f_n \to f$ in $(\ell^\infty(X), \|\cdot\|_\infty)$. Nach Bemerkung 9.11 konvergiert die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen f. Nach Satz 9.4 ist f folglich stetig. Wegen $\|f - f_n\|_\infty \to 0$ konvergiert f_n gegen f in $(BC(X), \|\cdot\|_\infty)$. □

Beispiel 9.15 Man schreibt $C[a, b] := C([a, b], \mathbb{R})$ für die Menge aller stetigen reellwertigen[14] Funktionen $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ auf dem abgeschlossenen Intervall $[a, b]$. Da jede solche Funktion $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ nach dem Satz vom Maximum der Analysis 1 ein Maximum und ein Minimum annimmt und somit beschränkt ist, ist

$$C[a, b] = BC([0, 1]).$$

Nach Folgerung 9.14 ist $C[a, b]$ mit der Supremums-Norm also ein Banachraum.

Bemerkung 9.16 Der Banachraum $(C[a, b], \|\cdot\|_\infty)$ ist von großer Wichtigkeit für die Analysis. Zum Beispiel werden wir in der Reellen Analysis diesen Banachraum (und seine Vollständigkeit) benutzen, um die Existenz von Lösungen von Differentialgleichungen zu beweisen.

Definition 9.17 Eine *Reihe* in einem normierten Raum $(E, \|.\|)$ ist eine Folge $(\sum_{k=1}^n a_k)_{n\in\mathbb{N}}$ von Anfangssummen mit Summanden $a_k \in E$. Die Reihe heißt *konvergent*, wenn der Limes

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^n a_k$$

der Anfangssummen in E existiert; in diesem Fall schreiben wir auch $\sum_{n=1}^\infty a_n$ für diesen Limes. Die Reihe heißt *absolut konvergent*, wenn

$$\sum_{n=1}^\infty \|a_n\| < \infty.$$

[14]Das Symbol $C[a, b]$ wird manchmal auch für die stetigen *komplexwertigen* Funktionen benutzt.

Satz 9.18 *Ein normierter Raum $(E, \|\cdot\|)$ ist genau dann ein Banachraum, wenn in E jede absolut konvergente Reihe konvergiert.*

Beweis. Sei zunächst $(E, \|\cdot\|)$ ein Banachraum und $a_n \in E$ mit $\sum_{n=1}^{\infty} \|a_n\| < \infty$. Für $\varepsilon > 0$ existiert dann ein $N \in \mathbb{N}$ derart, dass für alle $n \geq N$

$$\varepsilon > \left| \sum_{k=1}^{\infty} \|a_k\| - \sum_{k=1}^{n} \|a_k\| \right| = \sum_{k=n+1}^{\infty} \|a_k\|.$$

Für alle $n, m \geq N$, mit $n \geq m$ etwa, gilt dann

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{m} a_k \right\| = \left\| \sum_{k=m+1}^{n} a_k \right\| \leq \sum_{k=m+1}^{n} \|a_k\| \leq \sum_{k=m+1}^{\infty} \|a_k\| < \varepsilon.$$

Also ist $(\sum_{k=1}^{n} a_k)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in E und somit konvergent.

Sei umgekehrt jede absolut konvergente Reihe in E konvergent und $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in E. Wir brauchen nur zu zeigen, dass die Cauchyfolge eine konvergente Teilfolge besitzt - die Cauchyfolge konvergiert dann ebenfalls gegen den Grenzwert der Teilfolge (siehe Lemma C.22).

Nun finden wir nacheinander $N_1 < N_2 < \cdots$ derart, dass

$$(\forall n, m \geq N_k) \; \|x_n - x_m\| \leq 2^{-k}.$$

Somit ist $(x_{N_k})_{k \in \mathbb{N}}$ eine Teilfolge derart, dass $\|x_{N_i} - x_{N_j}\| \leq 2^{-k}$ für alle $i, j \geq k$. Nach Ersetzen von $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ durch die Teilfolge $(x_{N_k})_{k \in \mathbb{N}}$ dürfen wir also annehmen, dass

$$(\forall i, j \geq k) \; \|x_i - x_j\| \leq 2^{-k}.$$

Insbesondere ist nun $\|x_{k+1} - x_k\| \leq 2^{-k}$ und somit

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|x_{k+1} - x_k\| \leq \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} < \infty$$

(Abschätzung durch geometrische Reihe). Per Voraussetzung existiert also

$$\sum_{n=1}^{\infty} (x_{n+1} - x_n) = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} (x_{k+1} - x_k).$$

Also konvergiert auch $x_1 + \sum_{k=1}^{n} (x_{k+1} - x_k) = x_{n+1}$ für $n \to \infty$ und somit auch die Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$. $\square$

Satz 9.19 (Weierstraßscher Konvergenzsatz) *Ist (X,d) ein metrischer Raum und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge beschränkter stetiger Funktionen $f_n\colon X\to\mathbb{R}$ derart, dass*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\|f_n\|_\infty<\infty,$$

so ist die Funktionenreihe $(\sum_{k=1}^n f_k)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig konvergent gegen eine beschränkte stetige Funktion $f\colon X\to\mathbb{R}$. Zudem konvergiert für jedes $x\in X$ die Reihe $\sum_{n=1}^\infty f_n(x)$ absolut und für ihren Limes gilt $\sum_{n=1}^\infty f_n(x)=f(x)$.

Beweis. Per Voraussetzung ist die Funktionenreihe absolut konvergent. Da $(BC(X),\|\cdot\|_\infty)$ ein Banachraum ist, konvergiert die Reihe $(\sum_{k=1}^n f_k)_{n\in\mathbb{N}}$ in $(BC(X),\|\cdot\|_\infty)$ gegen ein $f\in BC(X)$. Nach Bemerkung 9.11 konvergiert dann $\sum_{k=1}^n f_k$ für $n\to\infty$ gleichmäßig gegen f. Gegeben $x\in X$ ist wegen $|f_n(x)|\leq\|f_n\|_\infty$ mit $\sum_{n=1}^\infty\|f_n\|_\infty<\infty$ die Zahlenreihe $\sum_{n=1}^\infty f_n(x)$ nach dem Majorantenkriterium der Analysis 1 absolut konvergent. Da aus gleichmäßiger Konvergenz gegen f die punktweise Konvergenz folgt, gilt $f(x)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^n f_n(x)=\sum_{n=1}^\infty f_n(x)$. □

Mit dem Weierstraßschen Konvergenzsatz gewinnen wir wertvolle neue Einsichten über Potenzreihen.

Folgerung 9.20 *Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge reeller Zahlen derart, dass die Potenzreihe $\sum_{n=0}^\infty a_nx^n$ positiven Konvergenzradius $R\in\,]0,\infty]$ besitzt. Also existiert insbesondere der Limes $f(x):=\sum_{n=0}^\infty a_nx^n$ in $\mathbb{R}$ für alle $x\in\mathbb{R}$ mit $|x|<R$ und definiert eine Funktion*

$$f\colon\ ]-r,r[\,\to\mathbb{R},\quad x\mapsto\sum_{n=0}^\infty a_nx^n.$$

Dann konvergieren die Anfangssummen $\sum_{k=0}^n a_kx^k$ für $n\to\infty$ auf $[-r,r]$ gleichmäßig gegen $f(x)$, für alle $r\in\,]0,R[$. Insbesondere ist f stetig.

Beweis. Die erste Aussage ist aus der Analysis 1 bekannt und ebenso, dass für jedes $r\in\,]0,R[$

$$\sum_{n=0}^\infty|a_n|r^n<\infty. \tag{53}$$

Wir betrachten nun die Funktionen $f_n\colon [-r,r] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) := a_n x^n$ und beobachten, dass

$$\|f_n\|_\infty = \sup\{\underbrace{|a_n x^n|}_{=|a_n|\cdot|x|^n} : x \in [-r,r]\} = |a_n| r^n.$$

Wir können nun also (53) so lesen, dass

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|f_n\|_\infty = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n < \infty.$$

Nach dem Weierstraßschen Konvergenzsatz konvergiert die Funktionenfolge $(\sum_{k=0}^{n} f_k)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen $f|_{[-r,r]}$. Insbesondere konvergiert die Folge $(\sum_{k=0}^{n} f_k|_{]-r,r[})_{n\in\mathbb{N}}$ stetiger Funktionen gleichmäßig gegen $f|_{]-r,r[}$, also ist $f|_{]-r,r[}$ stetig. Da $]-R,R[$ die Vereinigung der offenen Mengen $]-r,r[$ mit $r \in]0,R[$ ist und f auf jeder dieser offenen Mengen stetig, ist f stetig. □

Bemerkung 9.21 Die Stetigkeit der Funktion f aus Satz 9.20 wurde mit einem anderen Argument schon in der Analysis 1 gezeigt. Die gleichmäßige Konvergenz auf den Teilintervallen $[-r,r]$ ist ein neuer Aspekt.

Bemerkung 9.22 In der Situation von Satz 9.20 braucht die Potenzreihe nicht auf ganz $]-R,R[$ gleichmäßig zu konvergieren. Ein Gegenbeispiel ist die geometrische Reihe mit $R = 1$ und Grenzfunktion

$$f\colon\ ]-1,1[\to \mathbb{R},\quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}.$$

Würde $f_n\colon\ ]-1,1[\to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k$ für $n \to \infty$ gleichmäßig konvergieren, so gäbe es ein $N \in \mathbb{N}$ mit $\|f - f_n\|_\infty \le 1$ für alle $n \ge N$. Also wäre

$$|f(x)| \le \underbrace{|f(x) - f_N(x)|}_{\le 1} + \underbrace{|f_N(x)|}_{\le N+1} \le N+2$$

für alle $x \in]-1,1[$. Die Funktion f ist wegen $\lim_{x\to 1} \frac{1}{1-x} = \infty$ jedoch nicht beschränkt, Widerspruch.

Potenzreihen können gliedweise integriert werden.

Folgerung 9.23 *Für f wie in Folgerung* 9.20 *ist der Konvergenzradius der Potenzreihe* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ *ebenfalls gleich R und es ist*

$$F\colon\ ]-R,R[\to \mathbb{R}, \quad F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x a_n t^n \, dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$$

eine Stammfunktion für f.

Beweis. Nach dem Hauptsatz der Integral- und Differentialrechnung ist

$$F\colon\ ]-R,R[\to \mathbb{R}, \quad F(x) := \int_0^x f(t)\, dt$$

eine Stammfunktion für f. Gegeben $x \in]-R,R[$ wählen wir $r \in]0,R[$ mit $r \geq |x|$. Da $\sum_{k=0}^{n} a_k t^k \to f(t)$ gleichmäßig für $t \in [-r,r]$ für $n \to \infty$ (siehe Folgerung 9.20), erhalten wir mit Satz 9.5

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_0^x f(t)\, dt = \int_0^x \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k t^k \, dt \\ &= \lim_{n\to\infty} \int_0^x \sum_{k=0}^{n} a_k t^k \, dt = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k \int_0^x t^k \, dt \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_0^x t^k \, dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}. \end{aligned}$$

Die gewünschten Formeln sind also gezeigt und für den Konvergenzradius S der Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ gilt $S \geq R$. Aus der Analysis 1 wissen wir, dass die durch die vorige Potenzreihe festgelegte Funktion

$$g\colon\ ]-S,S[\to \mathbb{R}, \quad g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$$

differenzierbar ist und gliedweise differenziert werden darf, wobei der Reihe der Ableitungen $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dx} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ mindestens den Konvergenzradius S hat. Also ist auch $R \geq S$ und somit $R = S$. □

Im Falle von gleichmäßiger Konvergenz können nach Satz 9.5 Integral und Grenzwert vertauscht werden:

$$\int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)\, dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\, dx.$$

Die folgende Bedingung erlaubt Vertauschen von Grenzwert und Ableitung.

Lemma 9.24 *Gegeben reelle Zahlen $a < b$ sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge stetig differenzierbarer Funktionen $f_n\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ mit folgenden Eigenschaften:*

(a) *Die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gleichmäßig gegen eine stetige Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$; und*

(b) *Die Folge der Ableitungen $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gleichmäßig gegen eine stetige Funktion $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$.*

Dann ist f stetig differenzierbar und $f' = g$, also

$$\Big(\lim_{n\to\infty} f_n\Big)' = \lim_{n\to\infty} f_n'.$$

Beweis. Nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung ist die Funktion

$$G\colon [a,b] \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(a) + \int_a^x g(t)\,dt$$

stetig differenziebar mit $G' = g$. Es genügt daher zu zeigen, dass für jedes $x \in [a,b]$

$$f(x) = f(a) + \int_a^x g(t)\,dt \tag{54}$$

gilt (und somit $f = G$). Nach dem Hauptsatz ist für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$f_n(x) = f_n(a) + \int_a^x f_n'(t)\,dt. \tag{55}$$

Da aus gleichmäßiger Konvergenz punktweise Konvergenz folgt, konvergiert die linke Seite von (55) für $n \to \infty$ gegen $f(x)$ and der erste Summand der rechten Seite gegen $f(a)$. Da

$$f_n'|_{[a,x]} \to g|_{[a,x]}$$

gleichmäßig für $n \to \infty$, konvergiert $\int_a^x f_n'(t)\,dt$ gegen $\int_a^x g(t)\,dt$ für $n \to \infty$, nach Satz 9.5. Der Grenzübergang $n \to \infty$ in (55) liefert also (54). □

Wir erwähnen Varianten, die weniger zentral sind.

Definition 9.25 Für $k \in \mathbb{N}_0$ und reelle Zahlen $a < b$ sei $C^k[a,b] := C^k([a,b],\mathbb{R})$ der Vektorraum der C^k-Funktionen $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$. Man sieht unmittelbar, dass dann

$$\|f\|_{C^k} := \max\{\|f\|_\infty, \|f'\|_\infty, \ldots, \|f^{(k)}\|_\infty\}$$

eine Norm auf $C^k[a,b]$ definiert.

Satz 9.26 *Für jedes $k \in \mathbb{N}_0$ ist $(C^k[a,b], \|\cdot\|_{C^k})$ ein Banachraum.*

Beweis. Für $k = 0$ wissen wir dies aus Beispiel 9.15, dürfen nun also $k \geq 1$ annehmen. Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $(C^k([a,b], \|\cdot\|_{C^k})$. Gegeben $\varepsilon > 0$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$ derart, dass

$$(\forall n, m \geq N) \;\; \|f_n - f_m\|_{C^k} \leq \varepsilon.$$

Für jedes $j \in \{0, 1, \ldots, k\}$ gilt dann für die $j$ten Ableitungen

$$(\forall n, m \geq N) \;\; \|f_n^{(j)} - f_m^{(j)}\|_\infty = \|(f_n - f_m)^{(j)}\|_\infty \leq \|f_n - f_m\|_{C^k} \leq \varepsilon. \quad (56)$$

Also ist $(f_n^{(j)})_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge im Banachraum $(C[a,b], \|\cdot\|_\infty)$, somit gleichmäßig konvergent gegen eine stetige Funktion $g_j \colon [a,b] \to \mathbb{R}$. Für jedes $j \in \{0, 1, \ldots, k-1\}$ ist nach Lemma 9.24 die Funktion g_j stetig differenzierbar mit $g_j' = g_{j+1}$. Also ist $f := g_0$ eine C^k-Funktion mit $f^{(j)} = g_j$ für alle $j \in \{0, 1, \ldots, k\}$. Mit $n \to \infty$ folgt aus (56), dass

$$\|f^{(j)} - f_m^{(j)}\|_\infty = \|g_j - f_m^{(j)}\|_\infty \leq \varepsilon$$

für alle $m \geq N$ und $j \in \{0, 1, \ldots, k\}$. Also ist

$$\|f - f_m\|_{C^k} \leq \varepsilon$$

für alle $m \geq N$. Folglich gilt $f_m \to f$ in $(C^k[a,b], \|\cdot\|_{C^k})$ für $m \to \infty$. □

Satz 9.27 *Gegeben $k \in \mathbb{N}_0$ und reelle Zahlen $a > b$ sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von C^k-Funktionen $f_n \colon [a,b] \to \mathbb{R}$ derart, dass*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n^{(j)}\|_\infty < \infty \quad \textit{für alle } j \in \{0, 1, \ldots, k\}.$$

Dann konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^\infty f_n$ in $(C^k[a,b], \|\cdot\|_{C^k})$ gegen eine C^k-Funktion $f \colon [a,b] \to \mathbb{R}$. Für alle $x \in [a,b]$ und $j \in \{0, 1, \ldots, k\}$ gilt in $\mathbb{R}$

$$f^{(j)}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(j)}(x).$$

Beweis. Es ist

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_{C^k} \leq \sum_{n=1}^{\infty} (\|f_n\|_\infty + \|f_n'\|_\infty + \cdots + \|f_n^{(k)}\|_\infty) = \sum_{j=0}^{k} \sum_{n=1}^{\infty} \|f_n^{(j)}\|_\infty < \infty.$$

Also ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ im Banachraum $(C^k[a,b], \|\cdot\|_{C^k})$ absolut konvergent und somit konvergent, nach Satz 9.18, etwa gegen f. Da

$$\left\| f^{(j)} - \sum_{m=1}^{n} f_m^{(j)} \right\|_\infty \leq \left\| f - \sum_{m=1}^{n} f_m \right\|_{C^k} \to 0$$

für $n \to \infty$, konvergiert die Funktionenreihe $(\sum_{m=1}^{n} f_m^{(j)})_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen $f^{(j)}$ und somit punktweise. Also ist $f^{(j)}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(j)}(x)$. $\square$

Bemerkung 9.28 Punktweise und gleichmäßige Konvergenz von Folgen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Funktionen $f_n \colon X \to F$ mit Werten in einem Banachraum $(F, \|\cdot\|_F)$ kann man analog zum reellwertigen Fall behandeln: Man ersetze lediglich überall $\mathbb{R}$ durch F und $|\cdot|$ durch $\|\cdot\|_F$. Insb. können Folgen komplexwertiger Funktionen analog diskutiert werden. Auch ist $(\ell^\infty(X,F), \|\cdot\|_\infty)$ ein Banachraum für jede Menge X, mit

$$\|f\|_\infty := \sup\{\|f(x)\|_F \colon x \in X\}$$

für beschränkte stetige Funktionen $f \colon X \to F$. Ebenso der Vektorraum $(BC(X,F), \|\cdot\|_\infty)$ der beschränkten stetigen Funktionen $f \colon X \to F$, für jeden metrischen Raum (X,d).

Bemerkung 9.29 Mit etwas mehr Umschreiben kann man punktweise und gleichmäßige Konvergenz von Funktionen $f_n \colon X \to Y$ gegen $f \colon X \to Y$ behandeln, wenn (Y, d_Y) ein metrischer Raum ist, nämlich via

$$(\forall x \in X)(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \geq N)\ d_Y(f(x), f_n(x)) \leq \varepsilon$$

bzw.

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \geq N)(\forall x \in X)\ d_Y(f(x), f_n(x)) \leq \varepsilon.$$

Dieser Fall ist aber kaum relevant für die Analysis 2 und erfordert andere Notation, weswegen wir darauf ganz verzichten.

Bemerkung 9.30 In der Analysis 2 interessiert uns an Satz 9.18 vor allem, dass in Banachräumen jede absolut konvergent Reihe konvergiert. In der Reellen Analysis wir auch die umgekehrte Implkation nützlich sein:

Im dann betrachteten normierten Raum $(L^1[a,b], \|\cdot\|_{L^1})$ der (Äquivalenzklassen von) Lebesgue-integrierbaren Funktionen werden wir leicht die Konvergenz absolut konvergenter Reihen zeigen können; also ist $(L^1[a,b], \|\cdot\|_{L^1})$ ein Banachraum.

10 Stetigkeit linearer Abbildungen; Operatornorm

Satz 10.1 *Sind* $(E, \|\cdot\|)$ *und* $(F, \|\cdot\|_F)$ *normierte Räume und ist* $A\colon E \to F$ *eine lineare Abbildung,*[15] *so definiert man die Operator-Norm von* A *als*

$$\|A\|_{\mathrm{op}} := \sup\{\|Ax\|_F \colon x \in E \ \mathit{mit}\ \|x\|_E \leq 1\} \in [0, \infty].$$

Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

(a) $A\colon E \to F$ *ist stetig an der Stelle* 0*;*

(b) $A\colon E \to F$ *ist stetig;*

(c) A *ist ein sogenannter* beschränkter *linearer Operator, d.h.* $\|A\|_{op} < \infty$.

In diesem Fall ist A *Lipschitz-stetig, insb. gleichmäßig stetig. Weiter gilt*

$$(\forall x \in E) \qquad \|Ax\|_F \leq \|A\|_{\mathrm{op}} \|x\|_E. \tag{57}$$

Beweis. (b)$\Rightarrow$(a) ist trivial.

(a)$\Rightarrow$(b): Gegeben $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$ derart, dass

$$(\forall y \in E)\ \|y\|_E < \delta \Rightarrow \|Ay\|_F < \varepsilon.$$

Für $x \in E$ und alle $y \in E$ mit $\|y - x\| < \delta$ gilt dann

$$\|A(y) - A(x)\|_F = \|A(y - x)\|_F < \varepsilon.$$

Also ist A an der Stelle x stetig.

[15] Also $A(tx + sy) = tA(x) + sA(y)$ für alle $x, y \in E$, $t, s \in \mathbb{R}$.

(a)⇒(c): Ist A stetig in 0, so gibt es ein $\delta > 0$ derart, dass $\|Ax\|_F \leq 1$ für alle $x \in E$ mit $\|x\|_E \leq \delta$. Für alle $x \in E$ mit $\|x\|_E \leq 1$ ist $\|\delta x\|_E = \delta\|x\|_E \leq \delta$, somit

$$\|Ax\|_F = \frac{1}{\delta}\|A\delta x\|_F \leq \frac{1}{\delta},$$

somit $\|A\|_{\mathrm{op}} = \sup\{\|Ax\|_F \colon \|x\|_E \leq 1\} \leq \frac{1}{\delta} < \infty$.

(c)⇒(a): Wir überlegen zunächst, dass aus (c) die Abschätzung (57) folgt. Ist $x = 0$, so ist (57) klar. Ist $x \neq 0$, so ist wegen der positiven Homogenität

$$\left\| \frac{1}{\|x\|_E} x \right\|_E = \frac{1}{\|x\|_E}\|x\|_E = 1 \leq 1,$$

somit

$$\|Ax\|_F = \|x\|_E \left\| A \frac{1}{\|x\|_E} x \right\|_F \leq \|x\|_E \|A\|_{\mathrm{op}}.$$

Also gilt (57). Ersetzen wir dort x durch $x - y$, so sehen wir, dass

$$(\forall x, y \in E) \qquad \|Ax - Ay\|_F = \|A(x-y)\|_F \leq \|A\|_{\mathrm{op}}\|x - y\|_E.$$

Also ist A Lipschitz-stetig mit Lipschitzkonstante $L = \|\cdot\|_{\mathrm{op}}$. □

Beispiele 10.2 (a) Für jedes $k \in \{1, \ldots, n\}$ ist die Projektion

$$\mathrm{pr}_k \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad (x_1, \ldots, x_n) \mapsto x_k$$

auf die $k$te Komponente stetig auf $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$ mit $\|\mathrm{pr}_k\|_{\mathrm{op}} = 1$. Ist nämlich $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ mit $1 \geq \|x\|_\infty = \max\{|x_1|, \ldots, |x_n|\}$, so ist $|\mathrm{pr}_k(x)| = |x_k| \leq 1$. Bildung des Supremums über alle x liefert $\|\mathrm{pr}_k\|_{\mathrm{op}} \leq 1$. Der Enheitsvektor $x := e_k$ erfüllt $\|x\|_\infty = 1$ und $\mathrm{pr}_k(x) = 1$. Also ist $\|\mathrm{pr}_k\|_{\mathrm{op}} = 1$.

(b) Der Ableitungsoperator

$$D \colon C^1[0,1] \to C[0,1], \quad f \mapsto f'$$

ist linear und stetig, wenn wir $C^1[0,1]$ mit $\|\cdot\|_{C^1}$ und $C[0,1]$ mit $\|\cdot\|_\infty$ versehen. Ist $1 \geq \|f\|_{C^1} = \max\{\|f\|_\infty, \|f'\|_\infty\}$, so ist nämlich $\|D(f)\|_\infty = \|f'\|_\infty \leq \|f\|_{C^1} \leq 1$. Bildung des Supremums über alle f liefert $\|D\|_{\mathrm{op}} \leq 1$.

(c) Wie zuvor sei $C[0,1]$ der Raum der stetigen reellwertigen Funktionen auf $[0,1]$ und $C^1[0,1]$ der Raum der C^1-Funktionen. Versehen wir (was recht unnatürlich ist) beide Räume mit der Maximumnorm, so ist der Ableitungsoperator $D\colon C^1[0,1] \to C^0[0,1]$ unstetig. Sei nämlich $f_n(t) := \sin(nt)$ für $n \in \mathbb{N}$, $t \in [0,1]$. Dann ist $\|f_n\|_\infty = 1$ aber wegen $f_n'(t) = n\cos(nt)$

$$\|Df_n\|_\infty = \|f_n'\|_\infty = n$$

für alle $n \in \mathbb{N}$, somit $\|D\|_{\mathrm{op}} \geq n$ für jedes n und somit $\|D\|_{\mathrm{op}} = \infty$.

(d) Analog zu (b) sehen wir, dass

$$D\colon C^{n+1}[0,1] \to C^n[0,1], \quad f \mapsto f'$$

stetig ist von $(C^{n+1}[0,1], \|\cdot\|_{C^{n+1}})$ nach $(C^n[0,1], \|\cdot\|_{C^n})$, mit Operatornorm $\|D\|_{\mathrm{op}} \leq 1$.

In Teil (c) des folgenden Satzes versehen wir $E \times E$ mit der Maximum-Norm,

$$\|(x,y)\|_\infty := \max\{\|x\|, \|y\|\} \quad \text{für } x, y \in E,$$

wie in Bemerkung 8.14(b). Ebenso versehen wir in Teil (e) das kartesische Produkt $\mathbb{R} \times E$ mit der Maximum-Norm,

$$\|(t,x)\|_\infty := \max\{|t|, \|x\|\} \quad \text{für } t \in \mathbb{R} \text{ und } x \in E.$$

Satz 10.3 *Für jeden normierten Raum $(E, \|.\|)$ sind folgende Abbildungen stetig:*

(a) *Für festes $t \in \mathbb{R}$ die Homothetie $h_t\colon E \to E$, $x \mapsto tx$;*

(b) *Für festes $x \in E$ die Translation $t_x\colon E \to E$, $y \mapsto y + x$;*

(c) *Die Addition $\alpha\colon E \times E \to E$, $\alpha(x,y) := x + y$;*

(d) *Für jedes $x \in E$ die Abbildung $\iota_x\colon \mathbb{R} \to E$, $t \mapsto tx$.*

Weiter ist folgende bilineare Abbildung stetig:

(e) *Die Multiplikation μ mit Skalaren, $\mu\colon \mathbb{R} \times E \to E$, $\mu(t,x) := tx$.*

Beweis. Wir beweisen (und benutzen) zunächst nur (a)–(d):

(a) h_t ist linear. Für $x \in E$ mit $\|x\| \leq 1$ ist $\|h_t(x)\| = \|tx\| = |t| \cdot \|x\| \leq |t|$, somit $\|h_t\|_{\mathrm{op}} \leq |t|$.

(b) Es ist $\|t_x(y)-t_x(z)\| = \|(x+y)-(x+z)\| = \|y-z\| \leq L\|y-z\|$ mit $L=1$, d.h. t_x ist Lipschitz-stetig mit Lipschitzkonstante $L=1$.

(c) Die Abbildung α ist linear. Sei $(x,y) \in E \times E$ mit $1 \geq \|(x,y)\|_\infty = \max\{\|x\|,\|y\|\}$. Dann ist $\|\alpha(x,y)\| = \|x+y\| \leq \|x\|+\|y\| \leq 1+1=2$. Also ist $\|\alpha\|_{\mathrm{op}} \leq 2$.

(d) Die Abbildung ι_x ist linear. Sei $t \in \mathbb{R}$ mit $|t| \leq 1$. Dann ist $\|\iota_x(t)\| = \|tx\| = |t| \cdot \|x\| \leq \|x\|$, also $\|\iota_x\|_{\mathrm{op}} \leq \|x\|$. $\square$

Ist $t \neq 0$, so ist $h_t \circ h_{t^{-1}} = h_{t^{-1}} \circ h_t = \mathrm{id}_E$. Also ist $h_t \colon E \to E$ eine stetige invertierbare Abbildung mit stetiger Umkehrfunktion, ein sogenannter Homöomorphismus:

Definition 10.4 Eine Abbildung

$$f \colon X \to Y$$

zwischen metrischen Räumen wird *Homöomorphismus* genannt, wenn f stetig ist, invertierbar und die Umkehrfunktion $f^{-1} \colon Y \to X$ ebenfalls stetig.[16]

Wegen $t_x \circ t_{-x} = t_{-x} \circ t_x = \mathrm{id}_E$ ist auch $t_x \colon E \to E$ stets ein Homöomorphismus.

Die Multiplikation $\mu \colon \mathbb{R} \times E \to E$ in Satz 10.3(e) ist bilinear. Folgender Satz hilft bei ihrer Diskussion:

Satz 10.5 *Es seien $(E_1, \|\cdot\|_1)$, $(E_2, \|\cdot\|_2)$ und $(F, \|\cdot\|_F)$ normierte Räume. Für eine bilineare Abbildung $\beta \colon E_1 \times E_2 \to F$ sind äquivalent:*

(a) *β ist stetig.*

(b) *β ist stetig in $(0,0)$.*

(c) *Es ist*

$$\|\beta\|_{\mathrm{op}} := \sup\{\|\beta(x,y)\|_F \colon (x,y) \in E_1 \times E_2 \text{ mit } \|x\|_1 \leq 1 \text{ und } \|y\|_2 \leq 1\} < \infty.$$

In diesem Fall gilt

$$(\forall x \in E_1)(\forall y \in E_2) \quad \|\beta(x,y)\|_F \leq \|\beta\|_{\mathrm{op}} \|x\|_1 \|y\|_2. \tag{58}$$

[16] Ebenso bei Abbildungen zwischen topologischen Räumen (die wir später betrachten werden).

Hierbei wird in (a) und (b) $E_1 \times E_2$ mit der Maximumnorm versehen,

$$\|(x,y)\|_\infty := \max\{|x\|_1, \|y\|_2\} \quad \text{für } (x,y) \in E_1 \times E_2.$$

Beweis. Die Implikation (a)$\Rightarrow$(b) ist trivial.

Gilt (b), so existiert ein $\varepsilon > 0$ derart, dass

$$\overline{B}_\varepsilon^{E_1 \times E_2}(0,0) \subseteq \beta^{-1}(\overline{B}_1^F(0)),$$

wobei

$$\begin{aligned}
\overline{B}_\varepsilon^{E_1 \times E_2}(0,0) &= \{(x,y) \in E_1 \times E_2 \colon \max\{\|x|_1, \|y\|_2\} = \|(x,y)\|_\infty \leq \varepsilon\} \\
&= \overline{B}_\varepsilon^{E_1}(0) \times \overline{B}_\varepsilon^{E_2}(0).
\end{aligned}$$

Sind $(x,y) \in E_1 \times E_2$ mit $\|(x,y)\|_\infty \leq 1$, so ist $\|(\varepsilon x, \varepsilon y)\|_\infty \leq \varepsilon$, folglich

$$\|\beta(x,y)\|_F = \left\| \frac{1}{\varepsilon^2} \beta(\varepsilon x, \varepsilon y) \right\|_F = \frac{1}{\varepsilon^2} \underbrace{\|\beta(\varepsilon x, \varepsilon y)\|_F}_{\leq 1} \leq \frac{1}{\varepsilon^2}.$$

Also ist $\|\beta\|_{\mathrm{op}} \leq \frac{1}{\varepsilon^2} < \infty$ und (c) gilt.

Wir zeigen nun, dass aus (c) die Abschätzung (58) folgt. Seien $(x,y) \in E_1 \times E_2$ und $t, s > 0$ positive reelle Zahlen mit $t \geq \|x\|_1$ und $s \geq \|y\|_2$. Dann gilt $\|\frac{1}{t}x\|_1 = \frac{1}{t}\|x\|_1 \leq 1$ und $\|\frac{1}{s}y\|_2 \leq 1$, somit

$$\|\beta(x,y)\|_F = \left\| ts\, \beta\Big(\frac{1}{t}x, \frac{1}{s}y\Big) \right\|_F = ts \underbrace{\left\| \beta\Big(\frac{1}{t}x, \frac{1}{s}y\Big) \right\|_F}_{\leq \|\beta\|_{\mathrm{op}}} \leq ts\|\beta\|_{\mathrm{op}}.$$

Übergang zum Infimum in t und dann in s liefert $\|\beta(x,y)\|_F \leq \|x\|_1\|y\|_2\|\beta\|_{\mathrm{op}}$.

Gilt (c), so zeigen wir die Stetigkeit von β an einer gegebenen Stelle $(x,y) \in E_1 \times E_2$. Seien hierzu $(x_n, y_n) \in E_1 \times E_2$ mit $(x_n, y_n) \to (x,y)$, also $x_n \to x$ und $y_n \to y$ für $n \to \infty$. Wegen Satz 8.10 gilt dann $\|x_n\|_1 \to \|x\|_1$ für $n \to \infty$. Unter Benutzung von (58) schließen wir, dass

$$\begin{aligned}
\|\beta(x,y) - \beta(x_n,y_n)\|_F &\leq \|\beta(x,y) - \beta(x_n,y)\|_F + \|\beta(x_n,y) - \beta(x_n,y_n)\|_F \\
&= \|\beta(x - x_n, y)\|_F + \|\beta(x_n, y - y_n)\|_F \\
&\leq \underbrace{\|x - x_n\|_1}_{\to 0} \|y\|_2 \|\beta\|_{\mathrm{op}} + \underbrace{\|x_n\|_1}_{\to \|x\|_1} \underbrace{\|y - y_n\|_2}_{\to 0} \|\beta\|_{\mathrm{op}} \to 0
\end{aligned}$$

für $n \to \infty$ und somit $\beta(x_n, y_n) \to \beta(x, y)$. Also ist β an der Stelle (x, y) stetig. □

Beweis von Satz 10.3(e). Sind $t \in \mathbb{R}$ mit $|t| \leq 1$ und $x \in E$ mit $\|x\| \leq 1$, so ist $\|\mu(t, x)\| = \|tx\| = |t| \cdot \|x\| \leq 1$, also $\|\mu\|_{\mathrm{op}} \leq 1 < \infty$ und folglich μ stetig. □

Lineare und bilineare Abbildungen auf endlich-dimensionalen Definitionsbereichen sind automatisch stetig.

Satz 10.6 *Seien $n, m, k \in \mathbb{N}$ und $(F, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum. Dann gilt:*

(a) *Jede lineare Abbildung $\alpha\colon \mathbb{R}^n \to E$ ist stetig. Insbesondere ist jede lineare Abbildung $\alpha\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ stetig.*

(b) *Jede bilineare Abbildung $\beta\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to E$ ist stetig. Insbesondere ist jede bilineare Abbildung $\beta\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ stetig.*

Beweis. Es seien $e_1 = (1, 0, \cdots, 0)$, $\ldots$, $e_n = (0, \ldots, 0, 1)$ die Standard-Basisvektoren des $\mathbb{R}^n$. Analog dazu seien $f_1, \ldots, f_m$ die Standard-Basisvektoren des $\mathbb{R}^m$.

(a) Für $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ mit $\|x\|_\infty \leq 1$ gilt $|x_i| \leq 1$ für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$. Mit $x = \sum_{i=1}^n x_i\, e_i$ erhalten wir

$$\|\alpha(x)\| = \left\| \sum_{i=1}^n x_i \alpha(e_i) \right\| \leq \sum_{i=1}^n |x_i|\, \|\alpha(e_i)\| \leq \sum_{i=1}^n \|\alpha(e_i)\|.$$

Also ist $\|\alpha\|_{\mathrm{op}} \leq \sum_{i=1}^n \|\alpha(e_i)\| < \infty$, folglich α stetig.

(b) Für $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $y = (y_1, \ldots, y_m) \in \mathbb{R}^m$ mit $\|x\|_\infty \leq 1$ und $\|y\|_\infty \leq 1$ folgt mit $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$, $y = \sum_{j=1}^m y_j f_j$, dass

$$\|\beta(x, y)\| = \left\| \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m x_i y_j \beta(e_i, f_j) \right\| \leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m |x_i|\, |y_j|\, \|\beta(e_i, f_j)\| \leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \|\beta(e_i, f_j)\|.$$

Also ist $\|\beta\|_\infty \leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \|\beta(e_i, f_j)\| < \infty$, folglich β stetig. □

Sind $(E, \|\cdot\|_E)$ und $(F, \|\cdot\|_F)$ normierte Räume, so schreiben wir $\mathcal{L}(E, F)$ für die Menge aller stetigen linearen Abbildungen (beschränkten linearen Operatoren) $A\colon E \to F$. Man kürzt weiter ab:

$$\mathcal{L}(E) := \mathcal{L}(E, E)$$

und $E' := \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$.

Satz 10.7 *Sind $(E, \|\cdot\|_E)$ und $(F, \|\cdot\|_F)$ normierte Räume, so ist $\mathcal{L}(E, F)$ ein Untervektorraum des Vektorraums F^E aller Abbildungen von E nach F. Weiter ist $\mathcal{L}(E, F)$ mit $\|\cdot\|_{\mathrm{op}}$ ein normierter Raum.*

Beweis. Die konstante Abbildung $E \to F$, $x \mapsto 0$ ist stetig, also in $\mathcal{L}(E, F)$. Sind $A, B \in \mathcal{L}(E, F)$ und $t \in \mathbb{R}$, so ist

$$\|(A + B)x\|_F = \|Ax + Bx\|_F \leq \|Ax\| + \|Bx\|_F \leq \|A\|_{\mathrm{op}} + \|B\|_{\mathrm{op}}$$

für alle $x \in E$ mit $\|x\|_E \leq 1$. Also ist $A + B \in \mathcal{L}(E, F)$ und

$$\|A + B\|_{\mathrm{op}} \leq \|A\|_{\mathrm{op}} + \|B\|_{\mathrm{op}}.$$

Weiter ist $\|(tA)(x)\|_F = |t| \, \|Ax\|_F \leq |t| \, \|A\|_{\mathrm{op}}$, somit $\|tA\|_{\mathrm{op}} \leq |t| \, \|A\|_{\mathrm{op}} < \infty$ und insbesondere $tA \in \mathcal{L}(E, F)$. Ist $t = 0$, so folgt Gleichheit. Andernfalls erhalten wir analog $\|A\|_{\mathrm{op}} = \|t^{-1}(tA)\|_{\mathrm{op}} \leq |t|^{-1}\|tA\|_{\mathrm{op}}$ und folgern $\|tA\|_{\mathrm{op}} \geq |t| \, \|A\|_{\mathrm{op}}$. Wiederum ergibt sich $\|tA\|_{\mathrm{op}} = |t| \, \|A\|_{\mathrm{op}}$.

Nach dem Vorigen ist $\mathcal{L}(E, F)$ ein Untervektorraum von F^E. Weiter ist $\|\cdot\|_{\mathrm{op}}$ eine Norm; wir haben nur noch Definitheit zu prüfen: Ist $A \neq 0$, so existiert ein $x \in E$ mit $Ax \neq 0$. Dann ist $x \neq 0$, und nach Ersetzen von x durch den normierten Vektor $\frac{1}{\|x\|_E}x$ dürfen wir annehmen, dass $\|x\|_E = 1$. Dann ist $\|x\|_E \leq 1$, also $\|A\|_{\mathrm{op}} = \sup\{\|Ay\|_F \colon y \in E \text{ mit } \|y\|_E \leq 1\} \geq \|Ax\|_F > 0$. □

Satz 10.8 *Ist $(F, \|\cdot\|_F)$ ein Banachraum, so ist auch $\mathcal{L}(E, F)$ mit $\|\cdot\|_{\mathrm{op}}$ ein Banachraum.*

Beweis. Spezialfall: Ist $E = \mathbb{R}^n$ und $F = \mathbb{R}^m$, so können wie eine lineare Abbildung $A \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ durch eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ beschreiben (wobei wir auf $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{R}^m$ die Standardbasen benutzen), wie aus der Linearen Algebra bekannt ist. Wir erhalten also einen Isomorphismus von Vektorräumen

$$\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \to \mathbb{R}^{m \times n} \cong \mathbb{R}^{mn}.$$

Da $\mathbb{R}^{mn}$ bezüglich jeder Norm vollständig ist, folgt die Vollständigkeit von $(\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m), \|\cdot\|_{\mathrm{op}})$.

Den allgemeinen Fall überspringen wir in der Vorlesung (wer ihn sehen möchte, findet ihn am Ende des Kapitels). □

Lemma 10.9 *Sind* $(E_1, \|\cdot\|_1)$, $(E_2, \|\cdot\|_2)$ *und* $(E_3, \|\cdot\|_3)$ *normierte Räume,* $A \in \mathcal{L}(E_2, E_3)$ *und* $B \in \mathcal{L}(E_1, E_2)$*, so ist* $A \circ B \colon E_1 \to E_3$ *stetig und linear, also* $A \circ B \in \mathcal{L}(E_1, E_3)$*. Weiter gilt*

$$\|A \circ B\|_{\mathrm{op}} \leq \|A\|_{\mathrm{op}} \|B\|_{\mathrm{op}}. \tag{59}$$

Zudem gilt für einen normierten Raum $(E, \|\cdot\|)$ *mit* $E \neq \{0\}$ *stets*

$$\|\operatorname{id}_E\|_{\mathrm{op}} = 1$$

(ist $E = \{0\}$*, so ist* $\|\operatorname{id}_E\|_{\mathrm{op}} = 0$*).*

Beweis. Ist $x \in E_1$ mit $\|x\|_1 \leq 1$, so gilt $\|(A \circ B)(x)\|_3 = \|A(Bx)\|_3 \leq \|A\|_{\mathrm{op}} \|Bx\|_2 \leq \|A\|_{\mathrm{op}} \|B\|_{\mathrm{op}}$. Somit ist $\|A \circ B\|_{\mathrm{op}} \leq \|A\|_{\mathrm{op}} \|B\|_{\mathrm{op}}$.

Für $x \in E$ mit $\|x\| \leq 1$ ist $\|\operatorname{id}_E(X)\| = \|x\| \leq 1$, somit $\|\operatorname{id}_E\|_{\mathrm{op}} \leq 1$. Ist $x \in E$ mit $x \neq 0$, so folgt aus $0 < \|x\| = \|\operatorname{id}_E(x)\| \leq \|\operatorname{id}_E\|_{\mathrm{op}} \|x\|$, dass $\|\operatorname{id}_E\|_{\mathrm{op}} \geq 1$; also ist $\|\operatorname{id}_E\|_{\mathrm{op}} = 1$. □

Ergänzungen zur Stetigkeit linearer bzw. bilinearer Abbildungen

Wir erwähnen weitere Tatsachen und Details, die in der Vorlesung zunächst übersprungen werden.

Beweis von Satz 10.8. Wir beweisen nun den allgemeinen Fall des Satzes. Nach Satz 10.7 wissen wir schon, dass $(\mathcal{L}(E, F), \|\cdot\|_{\mathrm{op}})$ ein normierter Raum ist. Um die Vollständigkeit nachzuweisen, sei $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $\mathcal{L}(E, F)$. Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es also ein $N \in \mathbb{N}$ derart, dass

$$(\forall n, m \geq N) \quad \|A_n - A_m\|_{\mathrm{op}} \leq \varepsilon. \tag{60}$$

Für festes $x \in E$ folgt aus (60):

$$(\forall n, m \geq N) \quad \|A_n x - A_m x\|_F \leq \|A_n - A_m\|_{\mathrm{op}} \|x\|_E \leq \varepsilon \|x\|_E. \tag{61}$$

Also ist $(A_n x)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in F und somit konvergent. Wir definieren

$$Ax := \lim_{n \to \infty} A_n x$$

und erhalten so eine Abbildung $A \colon E \to F$, $x \mapsto Ax$. Für $x, y \in E$ und $t \in \mathbb{R}$ gilt[17]

$$A(x+y) = \lim_{n \to \infty} A_n(x+y) = \lim_{n \to \infty} (A_n x + A_n y) = \lim_{n \to \infty} A_n x + \lim_{n \to \infty} A_n y = Ax + Ay$$

[17] weil A_n linear ist und die Addition $E \times E \to E$ und Skalarmultiplikation $\mathbb{R} \times E \to E$ stetig sind (also mit Grenzwerten vertauscht werden können).

und

$$A(ty) = \lim_{n\to\infty} A_n(ty) = \lim_{n\to\infty} (tA_n y) = t \lim_{n\to\infty} A_n y = tAy;$$

somit ist A linear. Lassen wir $n \to \infty$ in (61), so erhalten wir

$$(\forall m \geq N)(\forall x \in E) \quad \|Ax - A_m x\|_F \leq \varepsilon \|x\|_E. \tag{62}$$

Insbesondere gilt für alle $x \in E$ mit $\|x\|_E \leq 1$:

$$\begin{aligned} \|Ax\|_F &= \|Ax - A_N x + A_N x\|_F \leq \|Ax - A_N x\|_F + \|A_N x\|_E \\ &\leq \varepsilon \|x\|_E + \|A_N\|_{\mathrm{op}} \|x\|_E \leq \varepsilon + \|A_N\|_{\mathrm{op}}. \end{aligned}$$

Bilden des Supremums über all diese x liefert

$$\|A_N\|_{\mathrm{op}} \leq \varepsilon + \|A_N\|_{\mathrm{op}} < \infty.$$

Also ist $A \in \mathcal{L}(E,F)$. Bilden wir in (62) das Supremum über alle $x \in E$ mit $\|x\|_E \leq 1$, so folgt

$$(\forall m \geq N) \quad \|A - A_m\|_{\mathrm{op}} \leq \varepsilon.$$

Also gilt $A_n \to A$ für $n \to \infty$. $\square$

Beispiele 10.10 (a) Sind $(E, \|\cdot\|_E)$ und $(F, \|\cdot\|_F)$ normierte Räume, so ist die bilineare Auswertungsabbildung

$$\mathrm{ev}\colon \mathcal{L}(E,F) \times E \to F, \quad \mathrm{ev}(A,x) := A(x)$$

bilinear. Nach (57) gilt für alle $A \in \mathcal{L}(E,F)$ mit $\|A\|_{\mathrm{op}} \leq 1$ und alle $x \in E$ mit $\|x\|_E \leq 1$

$$\|\mathrm{ev}(A,x)\|_F = \|A(x)\|_F \leq \|A\|_{\mathrm{op}} \|x\|_E \leq 1.$$

Bilden des Supremums über all diese (A,x) liefert

$$\|\mathrm{ev}\|_{\mathrm{op}} \leq 1.$$

Insbesondere is ev stetig.

(b) Es seien $(E_1, \|\cdot\|_1)$, $(E_2, \|\cdot\|_2)$ und $(E_3, \|\cdot\|_3)$ normierte Räume. Dann ist die Kompositionsabbildung

$$\Gamma\colon \mathcal{L}(E_2,E_3) \times \mathcal{L}(E_1,E_2) \to \mathcal{L}(E_1,E_3), \quad \Gamma(A,B) := A \circ B$$

bilinear. Nach (59) gilt

$$\|\Gamma(A,B)\|_{\mathrm{op}} = \|A \circ B\|_{\mathrm{op}} \leq \|A\|_{\mathrm{op}} \|B\|_{\mathrm{op}} \leq 1$$

für alle $(A,B) \in \mathcal{L}(E_2,E_3) \times \mathcal{L}(E_1,E_2)$ mit $\|A\|_{\mathrm{op}} \leq 1$ und $\|B\|_{\mathrm{op}} \leq 1$. Die bilineare Abbildung Γ ist also stetig mit $\|\Gamma\|_{\mathrm{op}} \leq 1$.

11 Topologien und Stetigkeit

Für $n \geq 2$ gbt es auf $\mathbb{R}^n$ viele verschiedene Normen, wie wir gesehen haben; jedoch ergibt jede Norm $\|\cdot\|$ auf $\mathbb{R}^n$ die gleiche Menge

$$\mathcal{O} := \{V \subseteq \mathbb{R}^n \colon (\forall x \in V)(\exists \varepsilon > 0)\, B_\varepsilon^{\|\cdot\|}(x) \subseteq V\}$$

von offenen Mengen (siehe Lemma 8.19). Für viele interessante Sachverhalte ist die gewählte Norm $\|\cdot\|$ (oder zugehörige Metrik $d(x,y) := \|x-y\|$) irrelevant und diese lassen sich allein unter Benutzung von $(\mathbb{R}^n, \mathcal{O})$ diskutieren. Dies öffnet den Blinkwinkel für Situationen, in denen vielleicht keine Metrik verfügbar oder naheliegend ist, aber dennoch ein System $\mathcal{O}$ von Teilmengen V einer Menge X. Wir erinnern an Eigenschaften der Menge $\mathcal{O}$ aller offenen Teilmengen eines metrischen Raums (X,d), wie in Satz C.7:

11.1 (O1) Es ist $\emptyset \in \mathcal{O}$ und $X \in \mathcal{O}$.

(O2) Für jede Familie $(V_j)_{j\in J}$ von Mengen $V_j \in \mathcal{O}$ ist $\bigcup_{j\in J} V_j \in \mathcal{O}$.

(O3) Für alle $V_1 \in \mathcal{O}$ und $V_2 \in \mathcal{O}$ ist $V_1 \cap V_2 \in \mathcal{O}$.

Definition 11.2 Sei X eine Menge und $\mathcal{P}(X)$ ihre Potenzmenge (die Menge aller Teilmengen von X). Eine Menge $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{P}(X)$ von Teilmengen von X wird eine *Topologie* auf X genannt, wenn die Bedingungen (O1), (O2) und (O3) aus 11.1 erfüllt sind. Ist X eine Menge und $\mathcal{O}$ eine Topologie auf X, so nennt man das Paar $(X, \mathcal{O})$ einen *topologischen Raum*.

Definition 11.3 Sei $(X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum.

(a) Wir nennen eine Teilmenge $V \subseteq X$ *offen*, wenn $V \in \mathcal{O}$.

(b) Eine Teilmenge $V \subseteq X$ heißt *offene Umgebung* eines Punkts $x \in X$, wenn V offen ist und $x \in V$.

(c) Eine Teilmenge $W \subseteq X$ heißt *Umgebung* eines Punkts $x \in X$, wenn eine offene Umgebung V von x existiert mit $V \subseteq W$.

(d) Eine Teilmenge $A \subseteq X$ heißt *abgeschlossen*, wenn $X \setminus A$ offen ist.

Jede offene Umgebung W eine Punkts x ist auch eine Umgebung von x (man nehme oben $V := W$).

Bemerkung 11.4 Mit den de Morganschen Regeln folgen aus (O1)–(O3) die folgenden Eigenschaften von abgeschlossenen Mengen in einem topologischen Raum $(X, \mathcal{O})$:

(a) $\emptyset$ und X sind abgeschlossene Mengen;

(b) Für jede Familie $(A_j)_{j \in J}$ von abgeschlossenen Mengen mit $J \neq \emptyset$ ist $\bigcap_{j \in J} A_j$ abgeschlossen.

(c) Sind A_1 und A_2 abgeschlossene Teilmengen von X, so ist $A_1 \cup A_2$ abgeschlossen.

Lemma 11.5 *Es sei $(X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum und $M \subseteq X$ eine Teilmenge. Dann sind äquivalent:*

(a) *M ist offen;*

(b) *M ist eine Umgebung von jedem $x \in M$.*

Beweis. (a)$\Rightarrow$(b): Ist M offen, so ist M eine offene Umgebung von jedem $x \in M$.

(b)$\Rightarrow$(a): Ist M eine Umgebung von jedem $x \in M$, so existiert eine offene Umgebung V_x von x mit $V_x \subseteq M$. Dann ist

$$M = \bigcup_{x \in M} \{x\} \subseteq \bigcup_{x \in M} V_x \subseteq M,$$

also $M = \bigcup_{x \in M} V_x$ offen als Vereinigung offener Mengen. $\square$

Definition 11.6 Es seien $(X, \mathcal{O}_X)$ und $(Y, \mathcal{O}_Y)$ topologische Räume und $f\colon X \to Y$ eine Abbildung.

(a) f heißt *stetig* an einer Stelle $x \in X$, wenn für jede Umgebung V von $f(x)$ in Y das Urbild $f^{-1}(V)$ eine Umgebung von x in X ist.

(b) f heißt *stetig*, wenn f an jeder Stelle $x \in X$ stetig ist.

Wegen Lemma C.13 ist im Falle metrischer Räume (X, d_X) und (Y, d_Y) die gerade gegebene Definition von Stetigkeit an einer Stelle x (und somit auch die Definition von Stetigkeit) äquivalent zur bei metrischen Räumen üblichen Definition.

Analog zu Satz C.14 haben wir:

Satz 11.7 *Seien* $(X, \mathcal{O}_X)$ *und* $(Y, \mathcal{O}_Y)$ *topologische Räume. Für eine Funktion* $f \colon X \to Y$ *sind äquivalent:*

(a) f *ist stetig, also stetig an jeder Stelle* $x \in X$*;*

(b) *Für jede offene Teilmenge* V *von* Y *ist das Urbild* $f^{-1}(V)$ *eine offene Teilmenge von* X*;*

(c) *Für jede abgeschlossene Teilmenge* A *von* Y *ist das Urbild* $f^{-1}(A)$ *eine abgeschlossene Teilmenge von* X*.*

Beweis. (a)⇒(b): Sei $V \subseteq Y$ offen und $x \in f^{-1}(V)$. Da V eine Umgebung von $f(x)$ ist, ist $f^{-1}(V)$ eine Umgebung von x. Nach Lemma 11.5 ist $f^{-1}(V)$ offen.

(b)⇒(c): Ist A eine abgeschlossene Teilmenge von Y, so ist $Y \setminus A$ eine offene Teilmenge von Y, somit nach (b)

$$f^{-1}(Y \setminus A) = X \setminus f^{-1}(A)$$

eine offene Teilmenge von X. Also ist $f^{-1}(A)$ abgeschlossen.

(c)⇒(b): Ist V eine offene Teilmenge von Y, so ist $Y \setminus V$ eine abgeschlossene Teilmenge von Y, somit nach (c)

$$f^{-1}(Y \setminus V) = X \setminus f^{-1}(V)$$

eine abgeschlossene Teilmenge von X. Also ist $f^{-1}(V)$ offen.

(b)⇒(a): Ist $x \in X$ und $W \subseteq Y$ eine Umgebung von $f(x)$, so gibt es eine offene Umgebung V von $f(x)$ in Y mit $V \subseteq W$. Nach (b) ist $f^{-1}(V)$ offen. Da $x \in f^{-1}(V)$, ist $f^{-1}(V)$ eine offene x-Umgebung und somit auch $f^{-1}(W) \supseteq f^{-1}(V)$ eine Umgebung von x in X. Also ist f an der Stelle x stetig. □

Definition 11.8 Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{O})$ heißt *Hausdorffsch*, wenn für alle $x, y \in X$ mit $x \neq y$ eine Umgebung P von x und eine Umgebung Q von y existieren mit $P \cap Q = \emptyset$.

Da jede Umgebung eine offene enthält, kann man P und Q in der vorigen Definition stets als offene Umgebungen wählen.

Beispiel 11.9 Es sei (X,d) eine metrischer Raum und

$$\mathcal{O} := \{V \subseteq X : (\forall x \in X)(\exists \varepsilon > 0)\; B_\varepsilon(x) \subseteq V\}$$

die zugrunde liegende Topologie. Dann ist $(X,\mathcal{O})$ Hausdorffsch.

[Sind $x, y \in X$ mit $x \neq y$, so ist $r := d(x,y) > 0$. Dann ist $P := B_{r/2}(x)$ eine Umgebung von x und $Q := B_{r/2}(y)$ eine Umgebung von y. Beide sind disjunkt, denn wäre $z \in P \cap Q$, so bekämen wir mit der Dreiecksungleichung den Widerspruch

$$d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y) < r/2 + r/2 = r = d(x,y).\,]$$

Beispiel 11.10 Ist X eine Menge, so ist $\mathcal{O} := \{\emptyset, X\}$ eine Topologie auf X, genannt die *indiskrete Topologie*. Hat X mehr als ein Element, so ist $(X,\mathcal{O})$ nicht Hausdorffsch. Seien nämlich $x, y \in X$ mit $x \neq y$. Ist P eine offene Umgebung von x in X und Q eine offene Umgebung von y, so ist $P = Q = X$ (da dies die einzige nicht-leere offene Teilmenge von X ist) und somit $P \cap Q = X \neq \emptyset$.

In der Analysis arbeiten wir meist nur mit Hausdorffräumen (also Hausdorffschen topologischen Räumen). In diesen sind Grenzwerte von Folgen eindeutig.

Definition 11.11 Sei $(X,\mathcal{O})$ ein topologischer Raum und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Elementen $x_n \in X$. Wir sagen, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergiert* gegen ein $x \in X$, wenn für jede Umgebung V von x ein $N \in \mathbb{N}$ existiert mit

$$(\forall n \geq N)\; x_n \in V.$$

In diesem Fall schreiben wir auch $x_n \to x$ für $n \to \infty$. Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X heißt *konvergent*, wenn sie gegen ein $x \in X$ konvergiert; anderenfalls heißt sie *divergent*.

In metrischen Räumen ist die gerade gegebene Konvergenzdefinition äquivalent zur üblichen, siehe Lemma C.10.

Lemma 11.12 *Sei $(X,\mathcal{O})$ ein Hausdorffscher topologischer Raum und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in X. Konvergiert $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $x \in X$ und gegen $y \in X$, so ist $x = y$.*

Beweis. Würde eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X gleichzeitig gegen x und ein Element $y \neq x$ konvergieren, so wählen wir disjunkte Umgebungen P von x und Q von y. Da $x_n \to x$, exstiert ein $N_1 \in \mathbb{N}$ derart, dass

$$(\forall n \geq N_1)\; x_n \in P.$$

Da $x_n \to y$, existiert ein $N_2 \in \mathbb{N}$ derart, dass

$$(\forall n \geq N_2)\; x_n \in Q.$$

Setzen wir $n := \max\{N_1, N_2\}$, so ist also $x_n \in P$ und $x_n \in Q$, folglich $P \cap Q \neq \emptyset$ im Widerspruch zur Annahme, dass P und Q disjunkt sind. □

Bemerkung 11.13 Da der Grenzwert x einer konvergenten Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in einem Hausdorffraum eindeutig festgelegt ist, können wir

$$\lim_{n\to\infty} x_n := x$$

setzen.

Satz 11.14 *Sei $(X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum. Ist eine Teilmenge $A \subseteq X$ abgeschlossen, so gilt für jede Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in A und jedes $x \in X$ mit $a_n \to x$, dass $x \in A$.*

Beweis. Sei A abgeschlossen und $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Elementen $a_n \in A$, welche in X gegen ein $x \in X$ konvergiert. Wäre $x \notin A$, so wäre $W := X \setminus A$ eine offene Menge mit $x \in W$, also eine Umgebung von x. Da $a_n \to x$, gäbe es also ein $N \in \mathbb{N}$ derart, dass $a_n \in W$ für alle $n \geq N$. Insbesondere wäre $a_N \in W = X \setminus A$, im Widerspruch zu $a_N \in A$. Also muss $x \in A$ sein. □

Bemerkung 11.15 Eine Warnung: Anders als in metrischen Räumen lässt sich Abgeschlossenheit von Teilmengen topologischer Räume nicht mittels Folgen nachrechnen: Ist A eine Teilmenge eines Hausdorffraums X und

$$\lim_{n\to\infty} a_n \in A$$

für jede in X konvergent Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in A, so braucht A nicht in X abgeschlossen zu sein. (Gegenbeispiele werden in späteren Vorlesungen des Bachelorstudiums gegeben, wenn Topologie weiter vertieft wird).

Satz 11.16 *Es seien $(X, \mathcal{O}_X)$ und $(Y, \mathcal{O}_Y)$ topologische Räume, $f\colon X \to Y$ eine Abbildung und $x \in X$. Ist f stetig an der Stelle x und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in X mit $x_n \to x$, so folgt $f(x_n) \to f(x)$.*

Beweis. Ist V eine Umgebung von $f(x)$ in Y, so $f^{-1}(V)$ eine Umgebung von x in X wegen der Stetigkeit von f an der Stelle x. Da $x_n \to x$, existiert ein $N \in \mathbb{N}$ derart, dass

$$(\forall n \geq N)\; x_n \in f^{-1}(V).$$

Also gilt $f(x_n) \in V$ für alle $n \geq N$ und somit $f(x_n) \to f(y)$. □

Auch hier eine Warnung:

Bemerkung 11.17 Ist $f\colon X \to Y$ eine Abbildung zwischen topologischen Räumen und $x \in X$ derart, dass

$$f(x_n) \to f(y)$$

für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X mit $x_n \to x$, so braucht f an der Stelle x nicht stetig zu sein. (Anders als bei Abbildungen zwischen metrischen Räumen). Auch hierzu können Sie später im Studium Gegenbeispiele kennen lernen.

Wir können den Beweis von Satz C.15 wörtlich abschreiben und erhalten:

Satz 11.18 *Seien X, Y und Z topologische Räume, $x \in X$ und $f\colon X \to Y$ sowie $g\colon Y \to Z$ Funktionen. Ist f stetig an der Stelle x und g stetig an der Stelle $f(x)$, so ist die Komposition*

$$g \circ f\colon X \to Z, \quad y \mapsto g(f(y))$$

stetig an der Stelle x. Insbesondere gilt: Sind f und g stetig, so auch $g \circ f$. □

12 Abschluss, Inneres und Rand einer Teilmenge

Im Falle von Funktionen einer Variablen war es oft ausreichend, Funktionen auf recht einfachen Teilmengen von $\mathbb{R}$ zu betrachten, den Intervallen. Typische Definitionsbereiche von Funktionen mehrerer Variablen können komplizierter sein. Dies motiviert, Teilmengen $M \subseteq \mathbb{R}^n$ besser verstehen zu wollen. Beispielsweise haben die Randpunkte a und b eines Intervalls $[a, b]$ mitunter eine besondere Rolle gespielt. Somit wollen wir auch bei Teilmengen $M \subseteq \mathbb{R}^n$ von Randpunkten reden können.

Da dies keine zusätzlichen Schwierigkeiten verursacht, diskutieren wir alle Begriffe allgemeiner für Teilmengen metrischer (oder topologischer Räume).

Definition 12.1 Es sei X ein topologischer Raum (z.B. ein metrischer Raum, z.B. $\mathbb{R}^n$) und $M \subseteq X$ eine Teilmenge.

(a) Das *Innere* M^0 von M ist definiert als

$$M^0 := \bigcup_{\substack{V \subseteq X \text{ offen} \\ \text{mit } V \subseteq M}} V,$$

die Vereinigung aller in M enthaltenen offenen Teilmengen von X. Da Vereinigungen offener Mengen offen sind, ist M^0 offen. Also ist M^0 die *größte in M enthaltene offene Menge* (d.h. M^0 ist eine offene Menge, die in M enthalten ist; und es ist $V \subseteq M^0$ für jede offene Menge V mit $V \subseteq M$).

Manche Autoren schreiben auch $\mathrm{int}(M)$ statt M^0 (mit "int" wie englisch "interior").

(b) Der *Abschluss* $\overline{M}$ von M ist definiert als

$$\overline{M} := \bigcap_{\substack{A \subseteq X \text{ abgeschlossen} \\ \text{mit } M \subseteq A}} A,$$

der Durchschnitt aller abgeschlossenen Teilmengen A von X, welche A enthalten.[18] Da Durchschnitte abgeschlossener Mengen abgeschlossen sind, ist $\overline{M}$ abgeschlossen. Also ist $\overline{M}$ die kleinste abgeschlossene Teilmenge von X, welche M enthält.[19]

(c) Der *Rand von M* ist definiert als die Menge ∂M aller $x \in X$ derart, dass jede Umgebung V von x sowohl einen Punkt aus M wie auch einen nicht zu M gehörenden Punkt enthält, also

$$V \cap M \neq \emptyset \quad \text{und} \quad V \cap (X \setminus M) \neq \emptyset.$$

[18]Eine solche Menge A gibt es immer, nämlich $A = X$.

[19]D.h. $\overline{M}$ ist eine abgeschlossene Menge, die M enthält; und es ist $\overline{M} \subseteq A$ für jede abgeschlossene Menge A mit $M \subseteq A$.

Die folgenden zwei Sätze helfen uns, Inneres, Abschluss und Rand besser zu verstehen und zu berechnen. Wir benutzen die Notation

$$C = A \,\dot{\cup}\, B$$

für eine *disjunkte Vereinigung*, d.h. $C = A \cup B$ mit $A \cap B = \emptyset$.

Satz 12.2 *Es sei X ein topologischer Raum und $M \subseteq X$ eine Teilmenge. Dann gilt:*

(a) *M^0 ist die Menge aller $x \in M$, für welche M eine Umgebung von x in X ist.*

(b) *$\overline{M}$ ist die Menge aller $x \in X$ derart, dass $V \cap M \neq \emptyset$ für jede offene Umgebung V von x.*

(c) *∂M ist in $\overline{M}$ enthalten.*

(d) *Es ist $\overline{M} = M^0 \,\dot{\cup}\, \partial M$. Insbesondere ist $\partial M = \overline{M} \setminus M^0$ abgeschlossen.*

(e) *M is genau dann abgeschlossen, wenn $M = \overline{M}$.*

(f) *M ist genau dann offen, wenn $M = M^0$.*

Beweis. (a) Sei $V := \{x \in M \colon M \text{ ist Umgebung von } x \text{ in } X\}$. Da M^0 offen ist, ist M^0 eine Umgebung von jedem $x \in M^0$ (und es ist dann $x \in M^0 \subseteq M$). Somit $M^0 \subseteq V$. Umgekehrt ist aber V in M enthalten und wir zeigen, dass V offen ist; somit ist $V \subseteq M^0$ per Definition des Inneren und somit $V = M^0$. Sei nämlich $x \in V$. Per Definition von V ist dann M eine Umgebung von x, es gibt also eine offene Teilmenge W_x von X mit $x \in W_x \subseteq M$. Dann ist M eine Umgebung von jedem $y \in W_x$, also $y \in V$, also $W_x \subseteq V$. Somit ist $V = \bigcup_{x \in V} W_x$ offen als Vereinigung offener Mengen.

(b) Wir erinnern daran, dass die Aussage (nicht A) $\Leftrightarrow$ (nicht B) äquivalent ist zur Aussage $A \Leftrightarrow B$. Wir brauchen daher nur erstere zu zeigen. Sei $x \in X$. Existiert eine offene Umgebung V von x mit $V \cap M = \emptyset$, so ist $X \setminus V$ eine abgeschlossene Teilmenge von X mit $M \subseteq X \setminus V$, somit $\overline{M} \subseteq X \setminus V$, somit $x \notin \overline{M}$ (da $x \in V$). Ist umgekehrt $x \in X \setminus \overline{M} =: W$, so ist W eine offene Umgebung von x mit $W \cap M = \emptyset$.

(c) Sei $x \in \partial M$. Per Definition des Randes enthält dann jede Umgebung von x ein Element aus M und somit ist $x \in \overline{M}$, nach (b). Also $\partial M \subseteq \overline{M}$.

(d) Sei $x \in \overline{M}$. Nach (b) hat dann jede Umgebung von x nichtleere Schnitt mit M. Nun gibt es entweder eine Umgebung V von x in X mit $V \subseteq M$ (in welchem Fall $x \in M^0$), oder es ist $V \cap (X \setminus M) \neq \emptyset$ für alle Umgebungen V von x in X. Da auch $V \cap M \neq \emptyset$ wie vorab festgestellt, ist dann $x \in \partial M$. Also ist $\overline{M}$ die disjunkte Vereingung von M^0 und ∂M. Insbesondere ist $\partial M = \overline{M} \setminus M^0 = \overline{M} \cap (X \setminus M^0)$ abgeschlossen in X.

(e) Ist $M = \overline{M}$, so ist M abgeschlossen (denn $\overline{M}$ ist abgeschlossen). Ist M abgeschlossen, so ist $A := M$ eine M enthaltende abgeschlossene Menge und somit $M \subseteq \overline{M} \subseteq A = M$, mthin $M = \overline{M}$.

(f) Ist $M = M^0$, so ist M (wie M^0) offen. Ist M offen, so ist $V := M$ eine in M enthaltene offene Teilmenge von X und somit $M = V \subseteq M^0 \subseteq M$, also $M = M^0$. □

Satz 12.3 *Es sei (X, d) ein metrischer Raum mit offenen Kugeln $B_r(x)$ und $M \subseteq X$ eine Teilmenge. Dann gilt:*

(a) *M^0 ist die Menge aller $x \in M$, für welche ein $\varepsilon > 0$ existiert mit*

$$B_\varepsilon(x) \subseteq M.$$

(b) *Der Abschluss $\overline{M}$ ist die Menge aller $x \in X$ derart, dass*

$$x = \lim_{n\to\infty} x_n$$

in X für eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in M.

Beweis. (a) $x \in M^0$ ist nach Satz 12.2 (a) dazu äquivalent, dass M eine Umgebung von x ist. Dies ist genau dann der Fall, wenn $B_\varepsilon(x) \subseteq M$ für ein $\varepsilon > 0$.

(b) Ist $x \in \overline{M}$, so existiert nach Satz 12.2 (b) für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein $x_n \in B_{1/n}(x) \cap M$. Wegen $d(x, x_n) < 1/n \to 0$ gilt $x_n \to x$ für $n \to \infty$.

Ist umgekehrt $x \in X$ und

$$x = \lim_{n\to\infty} x_n$$

mit Elementen $x_n \in M$, so existiert für jede Umgebung V von x in X (die ja eine geeignete ε-Umgebung enthält) ein $N \in \mathbb{N}$ derart, dass

$$(\forall n \geq N)\; x_n \in V.$$

Insbesondere ist $x_N \in V \cap M$, also $V \cap M \neq \emptyset$ und somit $x \in \overline{M}$ (nach Satz 12.2 (b)). □

Beispiele 12.4 (a) Seien $a < b$ in $\mathbb{R}$. dann ist

$$\begin{aligned} [a,b[^0 &=]a,b[\\ \overline{[a,b[} &= [a,b] \\ \partial[a,b[&= \{a,b\}. \end{aligned}$$

(b) Sei $(E, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum. Für Kugeln bzgl. $\|\cdot\|$ gilt dann

$$\begin{aligned} \overline{B_r(0)} &= \overline{B}_r(0), \\ \overline{B}_r(0)^0 &= B_r(0) \quad \text{und} \\ \partial B_r(0) &= \partial \overline{B}_r(0) = \{x \in E \colon \|x\| = r\} \end{aligned}$$

Beweis: Weil $\|\cdot\|$ stetig ist und $[0,r] \subseteq \mathbb{R}$ abgeschlossen, ist

$$\overline{B}_r(0) = \|\cdot\|^{-1}([0,r])$$

abgeschlossen (wie jedes Urbild einer abgeschlossenen Menge unter einer stetigen Funktion); somit ist $\overline{B_r(0)} \subseteq \overline{B}_r(0)$. Ist $x \in \overline{B}_r(0)$, so ist $\|x\| \leq r$, somit $(1-\frac{1}{k})\|x\| < r$ für $k \in \mathbb{N}$, somit $(1-\frac{1}{k})x \in B_r(0)$. Nun gilt aber $(1-\frac{1}{k}, x) \to (1, x)$ in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ für $k \to \infty$ (da dies komponentenweise gilt) und somit

$$\left(1-\frac{1}{k}\right)x \to 1x = x$$

für $k \to \infty$ wegen der Stetigkeit der Multiplikation $\mathbb{R} \times E \to E$ mit Skalaren. Also ist $x \in \overline{B_r(0)}$, somit $\overline{B}_r(0) \subseteq \overline{B_r(0)}$ und folglich $\overline{B_r(0)} = \overline{B}_r(0)$. Da $B_r(0)$ offen ist, ist $B_r(0)^0 = B_r(0)$. Somit

$$\partial B_r(0) = \overline{B_r(0)} \setminus B_r(0)^0 = \overline{B}_r(0) \setminus B_r(0).$$

Da $B_r(0)$ offen und in $\overline{B}_r(0)$ enthalten ist, ist $B_r(0) \subseteq \overline{B}_r(0)^0$. Ist $x \in \overline{B}_r(0) \setminus B_r(0)$, so ist $\|x\| = r$. Für jedes $\varepsilon > 0$ ist $x + \frac{\varepsilon}{2}x \in B_\varepsilon(x)$ und $x + \frac{\varepsilon}{2}x \notin \overline{B}_r(0)$, da $\|x + \frac{\varepsilon}{2}x\| = (1+\varepsilon/2)\|x\| = (1+\varepsilon/2)r > r$. Also ist $x \notin \overline{B}_r(0)^0$. Wir folgern $\overline{B}_r(0)^0 = B_r(x)$. Da $\overline{B}_r(0)$ abgeschlossen ist, ist $\overline{B}_r(0) = \overline{\overline{B}_r(0)}$. Folglich ist $\partial \overline{B}_r(0) = \overline{\overline{B}_r(0)} \setminus \overline{B}_r(0)^0 = \overline{B}_r(0) \setminus B_r(0)$.

(c) $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$, denn für jede reelle Zahl x existiert[20] eine Folge $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ rationaler Zahlen mit $q_n \to x$.

[20] Z.B. die endlichen Dezimalbrüche q_n der Darstellung von x als unendlicher Dezimalbruch, mit n Stellen hinter dem Komma.

Definition 12.5 Eine Teilmenge M eines topologischen Raums X heißt *dicht* (in X), wenn $\overline{M} = X$.

Beispiel 12.6 $\mathbb{Q}$ ist dicht in $\mathbb{R}$, da $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$.

Stetige Funktionen sind durch ihre Werte auf dichten Teilmengen festgelegt:

Satz 12.7 *Es seien $f\colon X \to Y$ und $g\colon X \to Y$ Funktionen zwischen metrischen Räumen. Ist $f|_M = g|_M$ für eine dichte Teilmenge $M \subseteq X$, so ist $f = g$.*

Analoges gilt, wenn allgemeiner X ein topologischer Raum ist und Y ein Hausdorffscher topologischer Raum.

Beweis. Seien zunächst X und Y metrische Räume. Für jedes $x \in X = \overline{M}$ existiert eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n \to x$. Dann ist $f(x_n) = g(x_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Da f und g stetig sind, folgt

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} g(x_n) = g(x).$$

Den allgemeinen Fall kann man durch einen Widerspruchsbeweis zeigen (den wir in der Vorlesung überspringen). Angenommen, $f(x) \neq g(x)$ für ein $x \in X$. Weil $f|_M = g|_M$, folgt $x \notin M$. Also ist

$$x \in X \setminus M = \overline{M} \setminus M \subseteq \overline{M} \setminus M^0 = \partial M.$$

Da Y Hausdorffsch ist, gibt es offene Umgebungen V von $f(x)$ und W von $g(x)$ mit

$$V \cap W = \emptyset. \tag{63}$$

Dann ist $f^{-1}(V) \cap g^{-1}(W)$ eine offene Menge, die x enthält. Da $x \in \partial M$, existiert ein

$$y \in f^{-1}(V) \cap g^{-1}(W), \tag{64}$$

das zudem in M ist. Da $y \in M$, ist $f(y) = g(y)$. Nach (64) ist also

$$f(y) = g(y) \in V \cap W.$$

Dies widerspricht (63). $\square$

Bemerkung 12.8 Sei X ein topologischer Raum. Eine Teilmenge $M \subseteq X$ ist genau dann dicht in X, wenn $V \cap M \neq \emptyset$ für jede offene, nicht-leere Teilmenge $V \subseteq X$.

[Ist M dicht und V wie zuvor, so wähle $x \in V$. Da $x \in \overline{M}$ und V eine Umgebung von x ist, existiert ein $y \in M \cap V$ (siehe Satz 12.2(b)).

Hat umgekehrt M die angegebene Eigenschaft, so ist für jedes $x \in X$ und jede offene Umgebung V von x der Durchschnitt $V \cap M$ nicht leer, somit $x \in \overline{M}$ nach Satz 12.2(b). Also ist $X = \overline{M}$, somit M dicht in X.]

13 Induzierte Topologie; Produkttopologie

Ist (X, d) ein metrischer Raum, so ist es naheliegend, auf einer Teilmenge $Y \subseteq X$ die Einschränkung

$$d_Y := d|_{Y \times Y} \colon Y \times Y \to [0, \infty[,\ d_Y(x, y) := d(x, y) \text{ für } x, y \in Y$$

als Metrik zu verwenden, die sogenannte *induzierte Metrik*.[21] Der folgende Satz beschreibt die offenen Mengen des metrischen Raums (Y, d_Y) und führt uns zum Begriff der induzierten Topologie $\mathcal{O}_Y$ auf einer Teilmenge $Y \subseteq X$ eines topologischen Raums $(X, \mathcal{O})$. Anschließend untersuchen wir die offenen Mengen in einem Produkt $X_1 \times \cdots \times X_n$ metrischer Räume (X_1, d_1), $\ldots$, (X_n, d_n) bezüglich der Maximummetrik und werden so auf den Begriff der *Produkttopologie* geführt. Insbesondere trägt $\mathbb{R}^n$ bezüglich jeder Norm die Produkttopologie von $\mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}$.

Satz 13.1 *Ist (X, d) ein metrischer Raum und d_Y die induzierte Metrik auf einer Teilmenge $Y \subseteq X$, so ist für eine Teilmenge $V \subseteq Y$ äquivalent:*

(a) *V ist offen im metrischen Raum (Y, d_Y);*

(b) *Es existiert eine offene Teilmenge U in (X, d) mit $V = U \cap Y$.*

Beweis. Gegeben $x \in X$ und $\varepsilon > 0$ sei $B_\varepsilon^X(x) := \{y \in X \colon d(x, y) < \varepsilon\}$. Gegeben $x \in Y$ und $\varepsilon > 0$ ist

$$B_\varepsilon^Y(x) := \{y \in Y \colon d_Y(x, y) < \varepsilon\} = \{y \in Y \colon d(x, y) < \varepsilon\};$$

[21] Dies ist eine Metrik, denn sind $x, y, z \in Y$, so gilt $0 = d_Y(x, y) = d(x, y)$ genau dann, wenn $x = y$. Weiter gilt $d_Y(y, x) = d(y, x) = d(x, y) = d_Y(x, y)$. Schließlich ist $d_Y(x, y) = d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) = d_Y(x, z) + d_Y(z, y)$.

dann ist also
$$B_\varepsilon^Y(x) = B_\varepsilon^X(x) \cap Y.$$
(a)⇒(b): Ist V offen in (Y, d_Y), so existiert für jedes $x \in V$ ein $\varepsilon(x) > 0$ mit $B_{\varepsilon(x)}^Y(x) \subseteq V$. Somit ist
$$V = \bigcup_{x \in V} B_{\varepsilon(x)}^Y(x) = \bigcup_{x \in V} (B_{\varepsilon(x)}^X(x) \cap Y) = U \cap Y$$
mit der offenen Teilmenge $U := \bigcup_{x \in V} B_{\varepsilon(x)}^X(x)$ von (X, d).

(b)⇒(a): Sei $V \subseteq Y$ eine Teilmenge der Form $V = U \cap Y$ mit einer offenen Teilmenge U von (X, d). Für jedes $x \in V$ ist $x \in U$, also existiert ein $\varepsilon > 0$ derart, dass $B_\varepsilon^X(x) \subseteq U$. Es folgt
$$B_\varepsilon^Y(x) = B_\varepsilon^X(x) \cap Y \subseteq U \cap Y = V;$$
da $x \in V$ beliebig war, ist V offen in (Y, d_Y). □

Definition 13.2 Ist $(X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum und $Y \subseteq X$ eine Teilmenge, so heißt
$$\mathcal{O}_Y := \{V \subseteq Y : (\exists U \in \mathcal{O})\, V = U \cap Y\}$$
die von $\mathcal{O}$ auf Y *induzierte Topologie* (oder auch: die *Spurtopologie*).[22] Die offenen Mengen $V \subseteq Y$ im topologischen Raum $(Y, \mathcal{O}_Y)$ nennt man zur Verdeutlichung auch *relativ offene Mengen* (später aber meist einfach: "offene Teilmengen von Y"). Wir versehen Teilmengen $Y \subseteq X$ immer mit der induzierten Topologie (wenn nichts anderes gesagt wird).

Bemerkung 13.3 Ist (X, d) ein metrischer Raum, so versehen wir eine Teilmenge $Y \subseteq X$ immer mit der induzierten Metrik d_Y (wenn nichts anderes gesagt wird). Sei $\mathcal{O}$ die Topologie des metrischen Raums (X, d). Nach Satz 13.1 ist die Topologie des metrischen Raums (Y, d_Y) genau die von $(X, \mathcal{O})$ auf Y induzierte Topologie $\mathcal{O}_Y$.

[22] $\mathcal{O}_Y$ ist eine Topologie auf Y: Es gilt $Y = X \cap Y \in \mathcal{O}_Y$, $\emptyset = \emptyset \cap Y \in \mathcal{O}_Y$. Sind $V_1, V_2 \in \mathcal{O}_Y$, so gibt es $U_1, U_2 \in \mathcal{O}$ mit $V_1 = U_1 \cap Y$ und $V_2 = U_2 \cap Y$. Da $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{O}$ ist, folgt $V_1 \cap V_2 = U_1 \cap U_2 \cap Y \in \mathcal{O}_Y$. Ist schließlich $(V_j)_{j \in J}$ eine Familie von Mengen $V_j \in \mathcal{O}_Y$, so existiert für jedes $j \in J$ eine Menge $U_j \in \mathcal{O}$ mit $V_j = U_j \cap Y$. Dann ist $U := \bigcup_{j \in J} U_j \in \mathcal{O}$ und somit $\bigcup_{j \in J} V_j = \bigcup_{j \in J}(U_j \cap Y) = U \cap Y \in \mathcal{O}_Y$.

Satz 13.4 *Es sei $(X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum. Versehen wir eine Teilmenge $Y \subseteq X$ mit der induzierten Topologie $\mathcal{O}_Y$, so gilt:*

(a) *Die Inklusion $j\colon Y \to X$, $x \mapsto x$ ist stetig als Abbildung von $(Y, \mathcal{O}_Y)$ nach $(X, \mathcal{O})$.*

(b) *Ist $(Z, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum, so ist eine Abbildung $f\colon Z \to Y$ genau dann stetig nach $(Y, \mathcal{O}_Y)$, wenn $j \circ f$ stetig nach $(X, \mathcal{O})$ ist.*

(c) *Eine Teilmenge $B \subseteq Y$ ist genau dann relativ abgeschlossen, wenn eine abgeschlossene Teilmenge A von X existiert mit $B = A \cap Y$.*

(d) *Ist $(X, \mathcal{O})$ Hausdorffsch, so ist auch $(Y, \mathcal{O}_Y)$ Hausdorffsch.*

(e) *Ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in Y und $x \in Y$, so gilt $x_n \to x$ für $n \to \infty$ in $(Y, \mathcal{O}_Y)$ genau dann, wenn $x_n \to x$ in $(X, \mathcal{O})$.*

Beweis. (a) Für jede offene Teilmenge $U \subseteq X$ ist

$$j^{-1}(U) = \{x \in Y : x = j(x) \in U\} = U \cap Y \in \mathcal{O}_Y,$$

somit f stetig nach Satz 11.7(b).

(b) Ist f stetig, so auch $j \circ f$ als Komposition stetiger Abbildungen (nach (a) und Satz 11.18). Ist $j \circ f$ stetig und $V \in \mathcal{O}_Y$ offen in Y, so existiert eine offene Teilmenge $U \subseteq X$ mit $V = U \cap Y = j^{-1}(U)$. Dann ist

$$f^{-1}(V) = f^{-1}(j^{-1}(U)) = (j \circ f)^{-1}(U)$$

offen in $(Z, \mathcal{T})$ wegen der Stetigkeit von $j \circ f$. Also ist f stetig.

(c) Ist $B \subseteq Y$ relativ abgeschlossen, so ist $Y \setminus B$ relativ offen, es existiert also eine offene Menge $U \subseteq X$ mit $Y \setminus B = U \cap Y$. Dann ist $A := X \setminus U$ abgeschlossen in X und $A \cap Y = (X \cap Y) \setminus (U \cap Y) = Y \setminus (Y \setminus B) = B$.

Existiert umgekehrt eine abgeschlossene Teilmenge A von X mit $B = A \cap Y$, so ist $X \setminus A$ offen, somit $Y \setminus B = Y \setminus (A \cap Y) = (X \setminus A) \cap Y$ relativ offen, also B relativ abgeschlossen in Y.

(d) Sind $x \neq y$ in Y, so gibt es disjunkte offene Teilmengen U_1 und U_2 von X mit $x \in U_1$ und $y \in U_2$. Dann sind $V_1 := U_1 \cap Y$ und $V_2 := U_2 \cap Y$ relativ offene Mengen mit $x \in V_1$, $y \in V_2$ und $V_1 \cap V_2 \subseteq U_1 \cap U_2 = \emptyset$.

(e) Gilt $x_n \to x$ in $(Y, \mathcal{O}_Y)$ und ist $U \subseteq X$ eine offene Umgebung von x in X, so ist $U \cap Y \in \mathcal{O}_Y$. Also existiert ein $N \in \mathbb{N}$ derart, dass $x_n \in U \cap Y$

für alle $n \geq N$ und somit $x_n \in U$, woraus $x_n \to x$ in $(X, \mathcal{O})$ folgt. Gilt umgekehrt $x_n \to x$ in $(X, \mathcal{O})$ und ist $V \in \mathcal{O}_Y$ mit $x \in V$, so existiert ein $U \in \mathcal{O}$ mit $V = U \cap Y$. Es existiert ein $N \in \mathbb{N}$ derart, dass $x_n \in U$ für alle $n \in \mathbb{N}$, also (da $x_n \in Y$) $x_n \in U \cap Y = V$. Ergo gilt $x_n \to x$ in $(Y, \mathcal{O}_Y)$. $\square$

Bemerkung 13.5 In der Situation des vorigen Satzes gilt:

(a) Für jede stetige Funktion $f\colon X \to Z$ in einen topologischen Raum $(Z, \mathcal{T})$ ist auch die Einschränkung $f|_Y$ stetig, denn es ist $f|_Y = f \circ j$ mit der stetigen Inklusion $j\colon Y \to X$ aus Satz 13.4(a).

(b) Für jeden topologischen Raum $(Z, \mathcal{T})$ und jede stetige Abbildung $f\colon Z \to X$ mit $f(Z) \subseteq Y$ ist die Ko-Einschränkung $f|^Y\colon Z \to Y$, $x \mapsto f(x)$ stetig nach Satz 13.4(b), denn $j \circ f|^Y = f$ ist stetig.

(c) Ist U eine offene Teilmenge von $(X, \mathcal{O})$ mit $U \subseteq Y$, so ist $U = U \cap Y$ auch relativ offen in Y.

(d) Ist B eine abgeschlossene Teilmenge von $(X, \mathcal{O})$ mit $B \subseteq Y$, so ist $B = B \cap Y$ auch relativ abgeschlossen in Y.

(e) Eine Teilmenge Y von X ist genau dann offen in $(X, \mathcal{O})$, wenn gilt: Für jede Teilmenge V von Y sind Offenheit von V in X und relative Offenheit von V in Y äquivalent.

[Ist Y offen, so ist $U \cap Y$ offen in X für jede offene Teilmenge U von X. Ist umgekehrt $U \cap Y$ offen in X für jede offene Teilmenge U von X, so gilt dies insbesondere für $U := X$; somit ist $Y = X \cap Y$ offen in X.]

(f) Eine Teilmenge Y von X ist genau dann abgeschlossen in $(X, \mathcal{O})$, wenn gilt: Für jede Teilmenge A von Y ist Abgeschlossenheit von A in $(X, \mathcal{O})$ äquivalent zur relativen Abgeschlossenheit von A in Y.

[Man ersetze das Wort "offen" durch "abgeschlossen" im Argument für (e)].

Satz 13.6 *Ist Y eine Teilmenge eines metrischen Raumes (X, d), so gilt:*

(a) *Ist Y bezüglich der induzierten Metrik d_Y vollständig, so ist Y in X abgeschlossen.*

(b) *Ist (X, d) ein vollständiger metrischer Raum, so ist Y genau dann abgeschlossen in X, wenn der metrische Raum (Y, d_Y) vollständig ist.*

Insbesondere ist jede abgeschlossene Teilmenge A eines Banachraums $(E, \|\cdot\|)$ vollständig, insbesondere also jede abgeschlossene Kugel $\overline{B}_r^E(x)$ in E.

Beweis von Satz 13.6. (a) Ist $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in Y, die in X gegen ein $x \in X$ konvergiert, so ist $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in (X,d) und somit auch in (Y, d_Y). Da (Y, d_Y) vollständig ist, existiert ein $y \in Y$ derart, dass $y_n \to y$ in (Y, d_Y). Dann gilt auch $y_n \to y$ in (X, d_X) und somit $x = y \in Y$ wegen der Eindeutigkeit von Grenzwerten von Folgen. Also ist $x \in Y$ und somit Y abgeschlossen in X.

(b) Ist Y abgeschlossen in X und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in Y, so ist diese auch eine Cauchyfolge in X und somit in (X,d) konvergent gegen ein $x \in X$. Da Y in X abgeschlossen ist, muss $x \in Y$ sein und es gilt dann auch $y_n \to x$ in (Y, d_Y). Also konvergiert in (Y, d_Y) jede Cauchyfolge und somit ist (Y, d_Y) vollständig. $\square$.

Satz 13.7 *Es seien (X_1, d_1), $\ldots$, (X_n, d_n) metrische Räume und $X := X_1 \times \cdots \times X_n$, versehen mit der durch*

$$d_\infty(x,y) := \max\{d_1(x_1,y_1), \ldots, d_n(x_n,y_n)\}$$

für $x = (x_1, \ldots, x_n)$ und $y = (y_1, \ldots, y_n)$ in X gegebenen Maximummetrik. Für jede Teilmenge $U \subseteq X$ sind dann äquivalent:

(a) *U ist offen im metrischen Raum (X, d_∞);*

(b) *Für jedes $x = (x_1, \ldots, x_n) \in U$ existieren für $j \in \{1, \ldots, n\}$ offene Teilmengen $V_j \subseteq X_j$ in (X_j, d_j) derart, dass*

$$x \in V_1 \times \cdots \times V_n \subseteq U.$$

Insbesondere ist $V_1 \times \cdots \times V_n$ offen in (X, d_∞), für alle offenen Teilmengen V_j von (X_j, d_j) für $j \in \{1, \ldots, n\}$.

Beweis. Sei $x = (x_1, \ldots, x_n) \in X$ und $\varepsilon > 0$. Für $y = (y_1, \ldots, y_n) \in X$ gilt

$$\max\{d_1(x_1,y_1), \ldots, d_n(x_n,y_n)\} = d_\infty(x,y) < \varepsilon$$

genau dann, wenn $d_j(x_j, y_j) < \varepsilon$ für alle $j \in \{1, \ldots, n\}$. Für die offene ε-Kugel um x in (X, d_∞) gilt also

$$B_\varepsilon^X(x) = \{y \in X : d_\infty(x,y) < \varepsilon\} = B_\varepsilon^{X_1}(x_1) \times \cdots \times B_\varepsilon^{X_n}(x_n), \tag{65}$$

sie ist das kartesische Produkt der ε-Kugeln um x_j in (X_j, d_j).

(a)$\Rightarrow$(b): Ist U offen in (X, d_∞), so gibt es zu $x \in U$ ein $\varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon^X(x) \subseteq U$. Für alle $j \in \{1, \ldots, n\}$ ist dann $V_j := B_\varepsilon^{X_j}(x_j)$ offen in (X_j, d_j) und nach (65) gilt

$$V_1 \times \cdots \times V_n = B_\varepsilon^X(x) \subseteq U.$$

Da weiter $x \in V_1 \times \cdots \times V_n$, folgt (b).

(b)$\Rightarrow$(a): Sei die Bedingung aus (b) erfüllt. Gegeben $x = (x_1, \ldots, x_n) \in U$ existieren dann offene Mengen $V_1 \subseteq X_1$, ..., $V_n \subseteq X_n$ mit

$$x \in V_1 \times \cdots \times V_n \subseteq U.$$

Für alle $j \in \{1, \ldots, n\}$ ist dann $x_j \in V_j$; da V_j in X_j offen ist, gibt es also ein $\varepsilon_j > 0$ mit $B_{\varepsilon_j}^{X_j}(x_j) \subseteq V_j$. Setzen wir

$$\varepsilon := \min\{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n\},$$

so ist $B_\varepsilon^{X_j}(x_j) \subseteq V_j$ für alle $j \in \{1, \ldots, n\}$, somit unter Benutzung von (65)

$$B_\varepsilon^X(x) = B_\varepsilon^{X_1}(x_1) \times \cdots \times B_\varepsilon^{X_n}(x_n) \subseteq V_1 \times \cdots \times V_n \subseteq U.$$

Da $x \in U$ beliebig war, ist U offen.

Die letzte Aussage gilt, da wir im Falle $U := V_1 \times \cdots \times V_n$ in (b) unabhängig von $x \in U$ immer die gegebenen offenen Mengen $V_1, \ldots, V_n$ benutzen können; es ist $V_1 \times \cdots \times V_n = U \subseteq U$. $\square$

Nach dem vorigen Satz definiert die Maximummetrik auf einem Produkt $X_1 \times \cdots \times X_n$ metrischer Räume die folgende Produkttopologie:

Definition 13.8 Es seien $X_1, \ldots, X_n$ topologische Räume und $\mathcal{O}$ die Menge aller Teilmengen

$$U \subseteq X_1 \times \cdots \times X_n$$

mit folgender Eigenschaft: Für jedes $x = (x_1, \ldots, x_n) \in U$ existieren offene Umgebungen V_k von x_k in X_k für $k \in \{1, \ldots, n\}$ derart, dass

$$V_1 \times \cdots \times V_n \subseteq U.$$

Dann ist $\mathcal{O}$ eine Topologie auf $X_1 \times \cdots \times X_n$ (wie wir gleich nachprüfen), genannt die *Produkttopologie.* Per Definition ist jedes Produkt

$$V_1 \times \cdots \times V_n$$

aus offenen Mengen $V_k \subseteq X_k$ in $\mathcal{O}$ (also offen in $X_1 \times \cdots \times X_n$); solche Produkte nennt man auch "offene Kästchen." Weiter gehört per Definition eine Teilmenge $U \subseteq X_1 \times \cdots \times X_n$ genau dann zu $\mathcal{O}$ (ist also offen in $X_1 \times \cdots \times X_n$), wenn sie eine Vereinigung offener Kästchen ist.

Wir versehen Produkte topologischer Räume immer mit der Produkttopologie (wenn nichts anderes gesagt wird).

$\mathcal{O}$ ist eine Topologie auf $X_1 \times \cdots \times X_n$: Da X_k offen in X_k ist, ist $X_1 \times \cdots \times X_n$ ein offenes Kästchen, also in $\mathcal{O}$. Weiter ist $\emptyset$ in $\mathcal{O}$, denn es gibt kein x, für das man etwas nachprüfen müsste.

Ist $(U_j)_{j \in J}$ eine Familie von Mengen $U_j \in \mathcal{O}$, so ist jedes U_j eine Vereinigung offener Kästchen, also auch $\bigcup_{j \in J} U_j$. Somit ist $\bigcup_{j \in J} U_j \in \mathcal{O}$.

Sind schließlich $V, W \in \mathcal{O}$, so ist $V \cap W \in \mathcal{O}$: Ist nämlich $x \in V \cap W$, so gibt es offene Kästchen $V_1 \times \cdots \times V_n \subseteq V$ und $W_1 \times \cdots \times W_n \subseteq W$, die x enthalten. Dann ist

$$(V_1 \cap W_1) \times \cdots \times (V_n \cap W_n)$$

ein offenes Kästchen, das x enthält und

$$(V_1 \cap W_1) \times \cdots \times (V_n \cap W_n) = (V_1 \times \cdots \times V_n) \cap (W_1 \times \cdots \times W_n) \subseteq V \cap W.$$

Beispiel 13.9 Die Topologie auf $\mathbb{R}^n$ kann über die zur Maximumnorm $\|\cdot\|_\infty$ gehörige Metrik $d_\infty \colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to [0, \infty[$,

$$d_\infty(x, y) := \|x - y\|_\infty = \max\{|x_1 - y_1|, \ldots, |x_n - y_n|\}$$

beschrieben werden. Diese ist die Maximummetrik, wenn wir jeden der n Faktoren $\mathbb{R}$ mit der Metrik $d \colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to [0, \infty[$, $d(x, y) := |x - y|$ versehen, die die Topologie auf $\mathbb{R}$ definiert. Nach Satz 13.7 ist die durch d_∞ definierte Topologie auf $\mathbb{R}^n$ die Produkttopologie.

Der folgende Satz verallgemeinert insbesondere einige Sachverhalte, die wir für Produkte metrischer Räume mit der Maximummetrik schon kennen (siehe Satz 8.15).

Satz 13.10 *Es seien $(X_1, \mathcal{O}_1), \ldots, (X_n, \mathcal{O}_n)$ topologische Räume; wir versehen $X := X_1 \times \cdots \times X_n$ mit der Produkttopologie $\mathcal{O}$. Dann gilt:*

(a) *Für jedes $j \in \{1, \ldots, n\}$ ist die Projektion*

$$\mathrm{pr}_j \colon X \to X_j,\ \ (x_1, \ldots, x_n) \mapsto x_j$$

auf die $j$te Komponente stetig.

(b) *Für jeden topologischen Raum $(Z, \mathcal{T})$ ist eine Abbildung*

$$f = (f_1, \ldots, f_n) \colon Z \to X, \quad x \mapsto (f_1(x), \ldots, f_n(x))$$

genau dann stetig an einer Stelle $z_0 \in Z$, wenn jede der Abbildungen $f_j \colon Z \to X_j$ an der Stelle z_0 stetig ist. Insbesondere ist f genau dann stetig, wenn jede der Abbildungen $f_1, \ldots, f_n$ stetig ist.

(c) *Ist jeder der topologischen Räume $(X_1, \mathcal{O}_1), \ldots, (X_n, \mathcal{O}_n)$ Hausdorffsch, so ist auch $(X, \mathcal{O})$ Hausdorffsch.*

(d) *Eine Folge $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ konvergiert genau dann gegen $y = (y_1, \ldots, y_n) \in X$ in $(X, \mathcal{O})$, wenn $\mathrm{pr}_j(x_m) \to y_j$ in $(X_j, \mathcal{O}_j)$ für $m \to \infty$, für alle $j \in \{1, \ldots, n\}$.*

(e) *Für jedes $j \in \{1, \ldots, n\}$ und alle $x_i \in X_i$ für $i \in \{1, \ldots, n\} \setminus \{j\}$ ist die Abbildung*

$$X_j \to X,\ \ t \mapsto (x_1, \ldots, x_{j-1}, t, x_{j+1}, \ldots, x_n) \tag{66}$$

stetig. Weiter ist für jede stetige Abbildung $f \colon X \to Z$ von $(X, \mathcal{O})$ in einen topologischen Raum $(Z, \mathcal{T})$ auch die "partielle Abbildung"

$$X_j \to Z, \quad t \mapsto f(x_1, \ldots, x_{j-1}, t, x_{j+1}, \ldots, x_n)$$

stetig.

Beweis. (a) Ist $V_j \subseteq X_j$ offen und setzen wir $V_i := X_i$ für $i \in \{1, \ldots, n\} \setminus \{j\}$, so ist

$$(\mathrm{pr}_j)^{-1}(V_j) = \{x \in X \colon \mathrm{pr}_j(x) \in V_j\} = V_1 \times \cdots \times V_n$$

ein offenes Kästchen, also offen. Somit ist pr_j stetig.

(b) Ist f an der Stelle z_0 stetig, so auch $f_j = \mathrm{pr}_j \circ f$ für jedes $j \in \{1, \ldots, n\}$, unter Benutzung von (a). Seien umgekehrt $f_1, \ldots, f_n$ an der Stelle

z_0 stetig und $U \subseteq X$ eine Umgebung von $f(z_0)$. Dann existieren offene Umgebungen V_j von $f_j(z_0)$ für $j \in \{1, \ldots, n\}$ derart, dass $V_1 \times \cdots \times V_n \subseteq U$. Dann ist

$$f^{-1}(U) \supseteq f^{-1}(V_1 \times \cdots \times V_n) = f_1^{-1}(V_1) \cap \cdots \cap f_n^{-1}(V_n)$$

eine Umgebung von z_0 in Z, somit f an der Stelle z_0 stetig.

(c) Sind $x = (x_1, \ldots, x_n)$ und $y = (y_1, \ldots, y_n)$ zwei verschiedene Elemente von X, so ist $x_k \neq y_k$ für ein $k \in \{1, \ldots, n\}$. Da X_k Hausdorffsch ist, gibt es offene Umgebungen V von x_k und W von y_k in X_k mit $V \cap W = \emptyset$. Dann sind die offenen Kästchen

$$X_1 \times \cdots \times X_{k-1} \times V \times X_{k+1} \times \cdots X_n$$

und

$$X_1 \times \cdots \times X_{k-1} \times W \times X_{k+1} \times \cdots X_n$$

offene Umgebungen von x bzw. y in X, deren Schnitt ebenfalls leer ist.

(d) Konvergiert x_m gegen y, so konvergiert für $j \in \{1, \ldots, n\}$ die Folge der $\mathrm{pr}_j(x_m)$ für $m \to \infty$ gegen $\mathrm{pr}_j(y) = y_j$, da pr_j stetig ist (siehe Satz 11.16). Konvergiere nun umgekehrt $x_{m,j} := \mathrm{pr}_j(x_m)$ gegen y_j in X_j für $m \to \infty$, für alle $j \in \{1, \ldots, n\}$. Ist U eine Umgebung von $y = (y_1, \ldots, y_n)$ in X, so existieren offene Umgebungen V_j von y_j in X_j für $j \in \{1, \ldots, n\}$ derart, dass $V_1 \times \cdots \times V_n \subseteq U$. Für jedes $j \in \{1, \ldots, n\}$ existiert ein $N_j \in \mathbb{N}$ derart, dass

$$(\forall m \geq N_j) \;\; x_{m,j} \in V_j.$$

Setzen wir $N := \max\{N_1, \ldots, N_n\}$, so gilt für alle $m \geq N$, dass $x_{m,j} \in V_j$ für alle $j \in \{1, \ldots, n\}$ und somit

$$x_m = (x_{m,1}, \ldots, x_{m,n}) \in V_1 \times \cdots \times V_n \subseteq U.$$

Also gilt $x_m \to y$ für $m \to \infty$.

(e) Sei $\lambda\colon X_j \to X$ die Abbildung aus (66). Für $i \neq j$ ist $\mathrm{pr}_i \circ \lambda$ die konstante Abbildung $X_j \to X_i$, $t \mapsto x_i$ und somit stetig. Weiter ist $\mathrm{pr}_j \circ \lambda$ die identische Abbildung $\mathrm{id}_{X_j}\colon X_j \to X_j$ und somit stetig. Nach (b) ist also λ stetig und folglich auch die partielle Abbildung $f \circ \lambda$ (wenn $f\colon X \to Z$ stetig ist). □

Satz 13.11 *Es seien $(X_1, \mathcal{O}_1)$, …, $(X_n, \mathcal{O}_n)$ topologische Räume und $X := X_1 \times \cdots \times X_n$ mit der Produkttopologie $\mathcal{O}$. Für $j \in \{1, \ldots, n\}$ sei $Y_j \subseteq X_n$ eine Teilmenge und $\mathcal{O}_{Y_j}$ die von $(X_j, \mathcal{O}_j)$ auf Y_j induzierte Topologie. Dann stimmen die folgenden Topologien auf $Y := Y_1 \times \cdots \times Y_n$ überein:*

(a) *Die Produkttopologie $\mathcal{T}$ auf $Y = Y_1 \times \cdots \times Y_n$, betrachtet als Produkt der topologischen Räume $(Y_1, \mathcal{O}_{Y_1})$, ..., $(Y_n, \mathcal{O}_{Y_n})$;*

(b) *Die von $(X, \mathcal{O})$ auf der Teilmenge $Y \subseteq X$ induzierte Topologie $\mathcal{O}_Y$.*

Beweis. Ist eine Teilmenge $V \subseteq Y$ offen in $(Y, \mathcal{T})$, so existieren zu $x \in V$ relativ offene Mengen $V_j \subseteq Y_j$ für $j \in \{1, \ldots, n\}$ derart, dass

$$x \in V_1 \times \cdots \times V_n \subseteq V.$$

Für jedes j gibt es eine offene Teilmenge $U_j \subseteq X_j$ mit $V_j = U_j \cap Y_j$. Dann ist $U_1 \times \cdots \times U_n$ offen in $(X, \mathcal{O})$ und

$$V_1 \times \cdots \times V_n = (U_1 \times \cdots \times U_n) \cap Y$$

offen in $(Y, \mathcal{O}_Y)$. Also ist V in $(Y, \mathcal{O}_Y)$ eine Umgebung jedes Punkts aus V und somit offen.

Sei umgekehrt eine Teilmenge $V \subseteq Y$ offen in $(Y, \mathcal{O}_Y)$. Dann existiert eine offene Menge $U \subseteq X$ derart, dass $V = U \cap Y$. Gegeben $x \in V$ ist $x \in U$, also gibt es offene Teilmengen $U_j \subseteq X_j$ für $j \in \{1, \ldots, n\}$ derart, dass

$$x \in U_1 \times \cdots \times U_n \subseteq U.$$

Dann ist $V_j := U_j \cap Y_j$ relativ offen in Y_j für $j \in \{1, \ldots, n\}$, also $V_1 \times \cdots \times V_n \in \mathcal{T}$. Wegen

$$V = U \cap Y \supseteq (U_1 \times \cdots \times U_n) \cap Y = V_1 \times \cdots \times V_n$$

ist V eine Umgebung von x in $(Y, \mathcal{T})$. Da x beliebig war, ist $V \in \mathcal{T}$. □

14 Kompaktheit und Anwendungen

In der Analysis 1 haben wir gesehen, dass jede stetige Funktion

$$f \colon K \to \mathbb{R}$$

auf einem abgeschlossenen, beschränkten Intervall $K = [a, b]$ ein Maximum annimmt. Weiter ist f gleichmäßig stetig. Ist f injektiv, so ist zudem die Umkehrabbildung $f^{-1} \colon f(K) \to K$ automatisch stetig. In diesem Kapitel verallgemeinern wir solche Ergebnisse weiter (insbesondere auf Teilmengen des $\mathbb{R}^n$). Wir werden sehen, dass die sogenannte *Kompaktheit* des Intervalls $K = [a, b]$ hinter den beschriebenen Phänomenen steckt.

Bemerkung 14.1 Bevor ich die etwas gewöhnungsbedürftige Definition von kompakten Mengen gebe, sage ich Ihnen schon einmal, welche Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ schließlich kompakt sein werden. Wir werden sehen:

Für eine Teilmenge $K \subseteq \mathbb{R}^n$ sind die folgenden drei Bedingungen äquivalent:

(a) *K ist kompakt*;

(b) *K ist abgeschlossen in $\mathbb{R}^n$ und beschränkt*;

(c) *Jede Folge $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ in K hat eine Teilfolge, die gegen ein $x \in K$ konvergiert.*

Zum Beispiel sind abgeschlossene Kugeln

$$\overline{B}_r(x) \subseteq \mathbb{R}^n$$

bezüglich einer Norm $\|\cdot\|$ auf $\mathbb{R}^n$ stets abgeschlossen (wie schon gezeigt) und beschränkt,[23] somit kompakt.

Als Hilfsmittel zur Definition kompakter Mengen benötigen wir sogenannte offene Überdeckungen.

Definition 14.2 Eine Familie $(V_j)_{j\in J}$ von Teilmengen eines topologischen Raums X heißt *offene Überdeckung von X*, wenn jedes V_j eine offene Teilmenge von X ist und

$$X = \bigcup_{j\in J} V_j. \tag{67}$$

Beispiele 14.3 (a) Die Intervalle $]n-1, n+1[$ bilden für $n \in \mathbb{Z}$ eine offene Überdeckung von $\mathbb{R}$.

(b) Auch die Intervalle $]-n, n[$ bilden eine offene Überdeckung von $\mathbb{R}$, für $n \in \mathbb{N}$.

In der folgenden Definition denken wir (wie immer) insbesondere an einen metrischen Raum K oder eine Teilmenge $K \subseteq \mathbb{R}^n$.

[23] Weil $\|y\| = \|x + (y - x)\| \leq \|x\| + \|y - x\| \leq \|x\| + r$ für alle y in $\overline{B}_r(x)$, ist das Supremum über alle y kleiner gleich $\|x\| + r < \infty$.

Definition 14.4 Ein topologischer Raum K heißt *kompakt*, wenn er Hausdorffsch ist und jede offene Überdeckung von K eine endliche Teilüberdeckung besitzt.

Damit ist gemeint: Für jede offene Überdeckung $(V_j)_{j\in J}$ von K existiert eine endliche Teilmenge $F \subseteq J$, so dass

$$K = \bigcup_{j\in F} V_j,$$

also $(V_j)_{j\in F}$ eine offene Überdeckung von K ist.

Bemerkung 14.5 Verzichtet man auf die Hausdorffeigenschaft und verlangt nur die endliche Überdeckungseigenschaft, so wird K *quasikompakt* genannt. Wir gehen auf diesen allgemeineren Begriff nicht näher ein.[24]

Beispiel 14.6 $\mathbb{R}$ ist nicht kompakt, denn die offenen Überdeckungen aus den Beispielen 14.3 haben keine endlichen Teilüberdeckungen.

Beispiel 14.7 Es sei $K = \{x_1, \ldots, x_m\}$ ein Hausdorffscher topologischer Raum, der aus endlich vielen Elementen besteht. Dann ist K kompakt. Ist nämlich $(V_j)_{j\in J}$ eine offene Überdeckung von K, so gibt es für jedes $k \in \{1, \ldots, m\}$ ein $j_k \in J$ mit $x_k \in V_{j_k}$. Dann ist

$$K = \bigcup_{k=1}^{m} V_{j_k} = \bigcup_{j\in F} V_j$$

mit $F := \{j_1, \ldots, j_m\}$.

Definition 14.8 Eine Teilmenge K eines topologischen Raums X (z.B. $X = \mathbb{R}^n$) wird kompakt genannt, wenn sie mit der induzierten Topologie ein kompakter topologischer Raum ist.

Lemma 14.9 *Ist X ein Hausdorffscher topologischer Raum und $K \subseteq X$ eine Teilmenge, so sind äquivalent:*

[24] Im englischen Sprachraum sind die Konventionen anders: “compact” = quasikompakt; “compact Hausdorff” = kompakt.

(a) *K ist kompakt als topologischer Raum (mit der induzierten Topologie), d.h. ist $(V_j)_{j\in J}$ eine Familie von relativ offenen Mengen V_j in K mit*

$$K = \bigcup_{j\in J} V_j,$$

so gibt es eine endliche Teilmenge $F \subseteq J$ mit $K = \bigcup_{j\in F} V_j$.

(b) *Für jede Familie $(W_j)_{j\in J}$ von offenen Teilmengen W_j von X mit*

$$K \subseteq \bigcup_{j\in J} W_j$$

so gibt es eine endliche Teilmenge $F \subseteq J$ mit $K \subseteq \bigcup_{j\in F} W_j$.

Abweichend von der obigen Terminologie werden auch solche Familien $(W_j)_{j\in J}$ "offene Überdeckungen" genannt; aus dem Zusammenhang ist klar, was gemeint ist.

Beweis. (a)$\Rightarrow$(b): Ist $(W_j)_{j\in J}$ eine Familie offener Teilmengen von X mit $K \subseteq \bigcup_{j\in J} W_j$, so sind $V_j := K \cap W_j$ relativ offene Teilmengen von K mit

$$\bigcup_{j\in J} V_j = \bigcup_{j\in J}(K \cap W_j) = K \cap \bigcup_{j\in J} W_j = K.$$

Per Voraussetzung gibt es eine endliche Teilmenge $F \subseteq J$ mit $K = \bigcup_{j\in F} V_j$. Da $V_j = K \cap W_j \subseteq W_j$, folgt $K \subseteq \bigcup_{j\in F} W_j$.

(b)$\Rightarrow$(a): Ist $(V_j)_{j\in J}$ eine Familie relativ offener Teilmengen von K mit $K = \bigcup_{j\in J} V_j$, so existieren offene Teilmengen $W_j \subseteq X$ mit $V_j = K \cap W_j$. Da $V_j \subseteq W_j$, ist

$$K \subseteq \bigcup_{j\in J} W_j$$

und per Voraussetzung existiert eine endliche Teilmenge $F \subseteq J$ derart, dass

$$K \subseteq \bigcup_{j\in F} W_j.$$

Somit ist

$$K = K \cap \bigcup_{j\in F} W_j = \bigcap_{j\in F}(K \cap W_j) = \bigcup_{j\in F} V_j$$

und K als kompakt erkannt. $\square$

Beispiel 14.10 Es sei $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge in $\mathbb{R}$ (oder einem Hausdorffschen topologischen Raum X) mit Grenzwert x. Dann ist die Menge

$$K := \{x_m \colon m \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$$

kompakt.

[Beweis: Sei $(V_j)_{j\in J}$ eine Familie offener Teilmengen von X mit $K \subseteq \bigcup_{j\in J} V_j$. Dann existiert ein $j_0 \in J$ mit $x \in V_{j_0}$. Weil V_{j_0} eine Umgebung von x ist und $x_m \to x$ für $m \to \infty$, existiert ein $m_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$(\forall m \geq m_0) \qquad x_m \in V_{j_0}.$$

Für jedes $m \in \{1, \ldots, m_0 - 1\}$ finden wir ein $j_m \in J$ mit $x_m \in V_{j_m}$. Dann ist

$$K \subseteq \bigcup_{j=0}^{m_0-1} V_{j_m},$$

denn x und die x_m mit $m \geq m_0$ liegen in V_{j_0}, die verbleibenden $x_1, \ldots, x_{m_0-1}$ in $V_{j_1} \cup \cdots \cup V_{j_{m_0-1}}$].

Satz 14.11 *Ist X ein Hausdorffscher topologischer Raum und $K \subseteq X$ eine kompakte Teilmenge, so ist K abgeschlossen in X. Insbesondere ist jede kompakte Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ abgeschlossen.*

Beweis. Wir zeigen, dass das Komplement $X \setminus K$ offen ist, also eine Umgebung für jedes $y \in X \setminus K$. Da X Hausdorffsch ist, existieren für jedes $x \in K$ offene Umgebungen P_x von x und Q_x von y in X mit

$$P_x \cap Q_x = \emptyset.$$

Dann ist $K \subseteq \bigcup_{x\in K} P_x$ und somit existiert (nach Lemma 14.9 (b)) eine endliche Teilmenge $F \subseteq K$ mit

$$K \subseteq \bigcup_{x\in F} P_x.$$

Die Menge $Q := \bigcap_{x\in F} Q_x$ ist eine offene Umgebung von y als Durchschnitt endlich vieler offener Umgebungen. Nun gilt

$$Q \cap K \subseteq Q \cap \bigcup_{x\in F} P_x = \bigcup_{x\in F} (Q \cap P_x) \subseteq \bigcup_{x\in F} (Q_x \cap P_x) = \bigcup_{x\in F} \emptyset = \emptyset,$$

also $Q \cap K = \emptyset$. Also ist $Q \subseteq X \setminus K$, also $X \setminus K$ eine Umgebung von y. $\square$

Satz 14.12 *Ist K ein kompakter topologischer Raum, so ist eine Teilmenge $A \subseteq K$ genau dann kompakt, wenn A abgeschlossen ist.*

Beweis. Als kompakter Raum ist K Hausdorffsch. Ist also A kompakt, so ist A in K nach Satz 14.11 abgeschlossen. Ist umgekehrt A abgeschlossen und ist $(W_j)_{j\in J}$ eine Familie von offenen Teilmengen von K mit

$$A \subseteq \bigcup_{j\in J} W_j,$$

so ist $K \setminus A$ offen in K (als Komplement einer abgeschlossenen Menge) und

$$K = (K \setminus A) \cup \bigcup_{j\in J} W_j.$$

Wegen der Kompaktheit von K existiert eine endliche Teilmenge $F \subseteq J$ derart, dass

$$K = (K \setminus A) \cup \bigcup_{j\in F} W_j.$$

Somit ist

$$A \subseteq \bigcup_{j\in F} W_j$$

und A als kompakt erkannt. □

Satz 14.13 *Ist K ein kompakter topologischer Raum und $f\colon K \to Y$ eine stetige Abbildung in einen Hausdorffschen topologischen Raum Y, so ist $f(K)$ kompakt. Weiter ist $f(A)$ kompakt (und somit in Y abgeschlossen) für jede abgeschlossene Teilmenge $A \subseteq K$.*

Beweis. Ist $(W_j)_{j\in J}$ eine Familie offener Teilmengen von Y mit

$$f(K) \subseteq \bigcup_{j\in J} W_j,$$

so sind die Urbilder $f^{-1}(W_j)$ offen in X (weil f stetig ist) und

$$K \subseteq f^{-1}(f(K)) \subseteq f^{-1}\left(\bigcup_{j\in J} W_j\right) = \bigcup_{j\in J} f^{-1}(W_j).$$

Da K kompakt ist, gibt es eine endliche Teilmenge $F \subseteq J$ mit

$$K \subseteq \bigcup_{j \in F} f^{-1}(W_j).$$

Es folgt

$$f(K) \subseteq f\left(\bigcup_{j \in F} f^{-1}(W_j)\right) = \bigcup_{j \in F} f(f^{-1}(W_j)) \subseteq \bigcup_{j \in F} W_j.$$

Also ist $f(K)$ kompakt.

Ist $A \subseteq K$ abgeschlossen, so ist A kompakt (nach Satz 14.12), somit $f(A)$ kompakt (nach dem bereits Gezeigten), somit $f(A)$ in Y abgeschlossen (nach Satz 14.11). □

Satz 14.14 (Satz über die Umkehrfunktion) *Ist K ein kompakter topologischer Raum, Y ein Hausdorffscher topologischer Raum und $f\colon K \to Y$ eine bijektive stetige Abbildung, so ist f ein Homöomorphismus, d.h. auch*

$$f^{-1}\colon Y \to K$$

ist stetig.

Beweis. Wir haben zu zeigen, dass die Abbildung $g := f^{-1}\colon Y \to K$ stetig ist. Nach Satz 11.7(c) wissen wir, dass dies genau dann der Fall ist, wenn das Urbild

$$g^{-1}(A)$$

in Y abgeschlossen ist für jede abgeschlossene Menge $A \subseteq K$. Nun gilt aber

$$g^{-1}(A) = \{y \in Y\colon f^{-1}(y) = g(y) \in A\} = f(A),$$

und all diese Bilder sind tatsächlich abgeschlossen, wie am Ende von Satz 14.13 festgestellt. □

Folgerung 14.15 *Ist K ein kompakter topologischer Raum und*

$$f\colon K \to Y$$

eine injektive stetige Abbildung in einen Hausdorffschen topologischen Raum Y, so ist f eine topologische Einbettung,[25] *d.h. die Koeinschränkung*

$$f|^{f(K)}\colon K \to f(K), \quad x \mapsto f(x)$$

ist ein Homöomorphismus, wenn man $f(K)$ mit der von Y induzierten Topologie versieht.

Beweis. Wir wenden den vorigen Satz auf die stetige bijektive Abbildung $f|^{f(K)}\colon K \to f(K)$ an. □

Lemma 14.16 *Ist $(E, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum und $K \subseteq E$ eine kompakte Teilmenge, so ist diese beschränkt, also*

$$\sup\{\|x\|\colon x \in K\} < \infty.$$

Beweis. Die Kugeln $B_r(0)$ bezüglich $\|\cdot\|$ sind offen und

$$K \subseteq \bigcup_{r>0} B_r(0).$$

Wegen der Kompaktheit existieren also $r_1, \ldots, r_m > 0$ mit

$$K \subseteq \bigcup_{k=1}^{m} B_{r_k}(0).$$

Setzen wir $r := \max\{r_1, \ldots, r_m\}$, so ist $K \subseteq \bigcup_{k=1}^m B_{r_k}(0) = B_r(0)$, also $\sup\{\|x\|\colon x \in K\} \leq r$. □

Satz 14.17 (Satz von Bolzano-Weierstraß) *Ein metrischer Raum (K, d) ist genau dann kompakt, wenn jede Folge in K eine konvergente Teilfolge hat.*

Beweis von Satz 14.17. Wir zeigen zunächst: Ist K kompakt, so hat jede Folge in K eine konvergente Teilfolge. Und zwar per Kontraposition. Angenommen also, es gibt eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in K, die keine konvergente Teilfolge hat. Dann hat $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ keinen Häufungspunkt, nach Lemma C.24 (b) existieren also zu jedem $x \in K$ ein $\varepsilon_x > 0$ und $N_x \in \mathbb{N}$ derart, dass

$$(\forall n \geq N_x) \qquad x_n \notin B_{\varepsilon_x}(x).$$

[25] Andere Bezeichnung: Ein Homöomorphismus aufs Bild.

Es ist $K = \bigcup_{x\in K} B_{\varepsilon_x}(x)$. Wäre K kompakt, so müsste $K = \bigcup_{x\in F} B_{\varepsilon_x}(x)$ gelten mit einer endlichen Teilmenge $F \subseteq K$. Sei

$$N := \max\{N_x \colon x \in F\} \in \mathbb{N}.$$

Für alle $n \geq N$ gilt für jedes $x \in F$ dann $n \geq N_x$, somit $x_n \notin B_{\varepsilon_x}(x)$. Also ist $x_n \notin \bigcup_{x\in F} B_{\varepsilon_x}(x) = K$, Widerspruch. Somit ist K doch nicht kompakt.

Sei umgekehrt angenommen, dass jede Folge in K eine konvergente Teilfolge besitzt. Sei $(V_j)_{j\in J}$ eine offene Überdeckung von K. Wenn $(V_j)_{j\in J}$ keine endliche Teilüberdeckung hätte, könnten wir wie folgt verfahren: Wir wählen $x_1 \in K$ und $m(1) \in \mathbb{N}$ minimal derart, dass $B_{1/m(1)}(x_1) \subseteq V_{j(1)}$ für ein $j(1) \in J$. Sind $x_1, \ldots, x_{n-1} \in K$, $m(1), \ldots, m(n-1) \in \mathbb{N}$ und $j(1), \ldots, j(n-1) \in J$ bereits gefunden, so sei

$$x_n \in K \setminus \bigcup_{i=1}^{n-1} V_{j(i)}$$

(wobei diese Menge nicht leer ist, weil sonst $(V_{j(i)})_{i=1}^{n-1}$ eine endliche Teilüberdeckung für K wäre) und wir wählen $m(n) \in \mathbb{N}$ minimal derart, dass $B_{1/m(n)}(x_n) \subseteq V_{j(n)}$ für ein $j(n) \in J$. Per Voraussetzung hat $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$. Sei

$$x = \lim_{k\to\infty} x_{n_k}.$$

Dann ist $x \in V_j$ für ein $j \in J$ und es existiert ein $m \in \mathbb{N}$ derart, dass $B_{1/m}(x) \subseteq V_j$. Da $x_{n_k} \to x$, existiert ein $N \in \mathbb{N}$ derart, dass

$$(\forall k \geq N) \quad d(x, x_{n_k}) < \frac{1}{4m}.$$

Für alle $k \geq N$ gilt nach der Dreiecksungleichung

$$B_{\frac{1}{2m}}(x_{n_k}) \subseteq B_{\frac{1}{2m}+\frac{1}{4m}}(x) \subseteq B_{\frac{1}{m}}(x) \subseteq V_j.$$

Wegen der Minimalität von $m(n_k)$ ist also

$$m(n_k) \leq 2m$$

und somit $\frac{1}{m(n_k)} \geq \frac{1}{2m}$. Nun ist $d(x_{n_k}, x_{n_{k+1}}) \leq d(x_{n_k}, x) + d(x, x_{n_{k+1}}) \leq \frac{1}{4m} + \frac{1}{4m} = \frac{1}{2m} \leq \frac{1}{m(n_k)}$, also $x_{n_{k+1}} \in B_{1/m(n_k)}(x_{n_k}) \subseteq V_{j(n_k)}$. Per Konstruktion ist aber

$$x_{n_{k+1}} \notin \bigcup_{i=1}^{n_{k+1}-1} V_{j(i)},$$

Widerspruch. Also muss $(V_j)_{j\in J}$ doch eine endliche Teilüberdeckung haben und somit K kompakt sein. $\square$

Satz 14.18 (Satz vom Maximum) *Es sei K ein nicht-leerer kompakter topologischer Raum (z.B. eine nicht-leere kompakte Teilmenge $K \subseteq \mathbb{R}^n$) und $f\colon K \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann nimmt f ein Maximum und ein Minimum an, d.h. es existieren Elemente $x_*, x^* \in K$ derart, dass*

$$f(x_*) = \min\{f(x)\colon x \in K\} \quad \textit{und} \quad f(x^*) = \max\{f(x)\colon x \in K\}.$$

Beweis. Nach Satz 14.13 ist die Teilmenge $f(K) \subseteq \mathbb{R}$ kompakt. Wir wählen eine Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $f(K)$ derart, dass

$$y_n \to \sup f(K)$$

für $n \to \infty$. Da $f(K)$ mit der von $\mathbb{R}$ induzierten Metrik ein kompakter metrischer Raum ist, gibt es eine gegen ein $y \in f(K)$ konvergente Teilfolge $(y_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$. Es gibt ein $x^* \in K$ mit $y = f(x^*)$. Da $y_{n_k} \to y$ und $y_{n_k} \to \sup f(K)$ für $k \to \infty$, folgt $\sup f(K) = y = f(x^*)$. Die Existenz von Minima zeigt man analog. $\square$

Satz 14.19 (Satz von Heine-Borel) *Eine Teilmenge $K \subseteq \mathbb{R}^n$ ist genau dann kompakt, wenn sie beschränkt und abgeschlossen ist.*

Beweis. Ist K kompakt, so ist K nach Satz 14.11 abgeschlossen und nach Lemma 14.16 beschränkt.

Ist umgekehrt K abgeschlossen und beschränkt, so gibt es wegen der Beschränktheit ein $r > 0$ mit

$$K \subseteq \overline{B}_r(0) = [-r, r] \times \cdots \times [-r, r],$$

wobei $\overline{B}_r(0)$ die Kugel bezüglich der Maximums-Norm ist. Können wir zeigen, dass

$$[-r, r]^n = [-r, r] \times \cdots \times [-r, r]$$

in der von $\mathbb{R}^n$ induzierten Topologie kompakt ist, so ist auch die abgeschlossene Teilmenge K von $[-r, r]^n$ kompakt, nach Satz 14.12. Nach dem obigen Satz von Bolzano-Weierstraß brauchen wir nur zu zeigen, dass jede Folge $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ in $[-r, r]^n$ (mit $x_m = (x_{m,1}, \ldots, x_{m,n})$ etwa) eine konvergente Teilfolge hat. Nach der Fassung des Satzes von Bolzano-Weierstraß aus der Analysis 1 hat jede Folge in $[-r, r]$ eine konvergente Teilfolge, d.h. $(x_{m,1})_{m\in\mathbb{N}}$ hat eine konvergente Teilfolge $(x_{m_k,1})_{k\in\mathbb{N}}$. Nach Ersetzen von $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ durch $(x_{m_k})_{k\in\mathbb{N}}$ dürfen wir annehmen, dass $x_{m,1}$ konvergiert für $m \to \infty$. Mit dem gleichen Argument können wir $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ nacheinander durch Teilfolgen ersetzen, für welche die zweite, dritte und schließlich n-te Komponente konvergiert. Also hat $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge $(x_{m_k})_{k\in\mathbb{N}}$ derart, dass jede Komponente $x_{m_k,j} \in \mathbb{R}$ konvergiert für $k \to \infty$, etwa gegen $y_j \in \mathbb{R}$. Setzen wir $y = (y_1, \ldots, y_n)$, so gilt dann $x_{m_k} \to y$ für $k \to \infty$ nach Satz 8.11, d.h. $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ hat eine konvergente Teilfolge. Also ist $[-r, r]^n$ kompakt und somit auch K. □

Wie im vorigen Beweis sieht man, dass das Produkt $K_1 \times \cdots \times K_n$ von endlich vielen metrischen Räumen kompakt ist, denn für jede Folge $(x_m)_{m\in\mathbb{N}} \in K_1 \times \cdots \times K_n$ können wir nacheinander in den Komponenten zu Teilfolgen übergehen und so nach n Schritten eine konvergente Teilfolge von $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ erhalten.

Satz 14.20 (Lemma von Wallace) *Es seien X_1 und X_2 topologische Räume, $K_1 \subseteq X_1$ und $K_2 \subseteq X_2$ kompakte Teilmengen und $V \subseteq X_1 \times X_2$ eine offene Menge derart, dass*

$$K_1 \times K_2 \subseteq V.$$

Dann existieren offene Teilmengen $V_1 \subseteq X_1$ und $V_2 \subseteq X_2$ mit $K_1 \subseteq V_1$, $K_2 \subseteq V_2$ und $V_1 \times V_2 \subseteq V$, also

$$K_1 \times K_2 \subseteq V_1 \times V_2 \subseteq V.$$

Wir können die kompakten Mengen K_1 und K_2 also zu offenen Mengen V_1 und V_2 vergrößern, so dass immer noch $V_1 \times V_2 \subseteq V$.

Beweis. Ist $K_1 = \emptyset$, so können wir $V_1 := \emptyset$, $V_2 := X_2$ wählen; auch der Fall $K_2 = \emptyset$ ist trivial. Wir dürfen daher nun annehmen, dass K_1 und K_2 beide nicht leer sind.

Für jedes $x \in K_1$ und $y \in K_2$ ist $(x, y) \in V$. Da V offen in der Produkttopologie ist, gibt es also offene Mengen $P_{x,y} \subseteq X_1$ und $Q_{x,y} \subseteq X_2$ derart, dass

$$(x, y) \in P_{x,y} \times Q_{x,y} \subseteq V.$$

Halte $y \in K_2$ fest. Da K_1 kompakt ist und

$$K_1 \subseteq \bigcup_{x\in K_1} P_{x,y},$$

gibt es eine endliche Teilmenge $F_y \subseteq K_1$ derart, dass

$$K_1 \subseteq \bigcup_{x \in F_y} P_{x,y} =: P_y.$$

Als endlicher Durchschnitt offener Umgebungen ist dann

$$Q_y := \bigcap_{x \in F_y} Q_{x,y}$$

eine offene Umgebung von y in X_2. Weiter gilt

$$K_1 \times \{y\} \subseteq P_y \times Q_y = \bigcup_{x \in F_y} (P_{x,y} \times Q_y) \subseteq \bigcup_{x \in F_y} (P_{x,y} \times Q_{x,y}) \subseteq V.$$

Da K_2 kompakt ist und

$$K_2 \subseteq \bigcup_{y \in K_2} Q_y,$$

gibt es eine endliche Teilmenge $F \subseteq K_2$ derart, dass

$$K_2 \subseteq \bigcup_{y \in F} Q_y =: V_2.$$

Die Menge $V_2 \subseteq X_2$ ist offen und enthält K_2. Weiter ist

$$V_1 := \bigcap_{y \in F} P_y$$

eine offene Teilmenge von X_1, die K_1 enthält, denn V_1 ist der Durchschnitt von endlich vielen Mengen mit diesen Eigenschaften. Wir schließen, dass

$$K_1 \times K_2 \subseteq V_1 \times V_2 = V_1 \times \bigcup_{y \in F} Q_y = \bigcup_{y \in F} (V_1 \times Q_y) \subseteq \bigcup_{y \in F} (P_y \times Q_y) \subseteq V.$$

Also haben V_1 und V_2 die gewünschten Eigenschaften. □

Satz 14.21 (Stetigkeit parameter-abhängiger Integrale) *Es seien $a < b$ reelle Zahlen, X ein Hausdorffscher topologischer Raum (z.B. eine Teilmenge $X \subseteq \mathbb{R}^n$) und*

$$f\colon X \times [a, b] \to \mathbb{R}$$

eine stetige Funktion. Dann ist auch die Funktion

$$g\colon X \to \mathbb{R}, \qquad g(x) := \int_a^b f(x,t)\,dt$$

stetig.

Beweis. Um zu sehen, dass g an einer gegebenen Stelle $x \in X$ stetig ist, sei $W \subseteq \mathbb{R}$ eine Umgebung von $g(x) = \int_a^b f(x,t)\,dt$. Dann existiert ein $\varepsilon > 0$ mit $[g(x)-\varepsilon, g(x)+\varepsilon] \subseteq W$. Wir setzen $\theta := \frac{\varepsilon}{b-a}$. Die Funktion

$$h\colon X \times [a,b] \to \mathbb{R}, \quad h(y,t) := f(y,t) - f(x,t)$$

ist stetig[26] und es ist $h(x,t) = 0$ für alle $t \in [a,b]$. Somit ist

$$\{x\} \times [a,b] \subseteq h^{-1}(0) \subseteq h^{-1}(]-\theta,\theta[),$$

wobei $h^{-1}(]-\theta,\theta[)$ wegen der Stetigkeit von h offen ist. Nun ist die einpunktige Menge $\{x\} \subseteq X$ kompakt (siehe Beispiel 14.7) und auch $[a,b]$ ist kompakt. Nach dem Wallaceschen Lemma gibt es also offene Mengen $V_1 \subseteq X$ und $V_2 \subseteq [a,b]$ mit

$$\{x\} \times [a,b] \subseteq V_1 \times V_2 \subseteq f^{-1}(]-\theta,\theta[).$$

Dann ist $[a,b] \subseteq V_2 \subseteq [a,b]$ und somit $V_2 = [a,b]$, also

$$V_1 \times [a,b] \subseteq h^{-1}(]-\theta,\theta[)$$

und daher $h(y,t) \in]-\theta,\theta[$ für alle $y \in V_1$ und $t \in [a,b]$. Also ist

$$(\forall y \in V_1, t \in [a,b]) \quad |f(y,t) - f(x,t)| = |h(y,t)| < \theta.$$

Es folgt

$$\begin{aligned}
|g(y) - g(x)| &= \left|\int_a^b f(y,t)\,dt - \int_a^b f(x,t)\,dt\right| \\
&= \left|\int_a^b (f(y,t) - f(x,t))\,dt\right| \\
&\leq \int_a^b |f(y,t) - f(x,t)|\,dt \\
&\leq \int_a^b \theta\,dt = (b-a)\theta = \varepsilon
\end{aligned}$$

[26]Die Funktion $X \times [a,b] \to \mathbb{R}$, $(y,t) \mapsto f(x,t)$ ist stetig, denn sie ist die Komposition der Projektion $\pi_2\colon X \times [a,b] \to [a,b]$, $(y,t) \mapsto t$ und der "partiellen Abbildung" $[a,b] \to \mathbb{R}$, $t \mapsto f(x,t)$, die nach Beispiel 13.10 stetig ist.

für alle $y \in V_1$, somit $g(y) \in [g(x) - \varepsilon, g(x) + \varepsilon] \subseteq W$ für alle $y \in V_1$. Also ist g an der Stelle x stetig. □

Satz 14.22 (Lebesguesches Lemma) *Es sei (K, d) ein kompakter metrischer Raum und $(V_j)_{j \in J}$ eine offene Überdeckung von K. Dann existiert eine reelle Zahl $\delta > 0$ derart, dass*

$$(\forall x \in K)(\exists j \in J) \quad B_\delta(x) \subseteq V_j,$$

wobei $B_\delta(x) := \{y \in K : d(x, y) < \delta\}$.

Ein $\delta > 0$ mit der vorigen Eigenschaft wird auch ein *Lebesguesches Delta* genannt.

Beweis. Für jedes $x \in K$ existiert ein $j(x) \in J$ derart, dass $x \in V_{j(x)}$. Da die Menge $V_{j(x)}$ offen ist, existiert ein $\varepsilon(x) > 0$ derart, dass

$$B_{\varepsilon(x)}(x) \subseteq V_{j(x)}. \tag{68}$$

Weil $(B_{\varepsilon(x)/2}(x))_{x \in K}$ eine offene Überdeckung von K ist und K kompakt, existiert eine endliche Teilmenge $F \subseteq K$ derart, dass

$$K = \bigcup_{x \in F} B_{\varepsilon(x)/2}(x). \tag{69}$$

Wir setzen

$$\delta := \min\{\varepsilon(x)/2 : x \in F\}.$$

Für jedes $y \in K$ existiert nach (69) ein $x \in F$ derart, dass $y \in B_{\varepsilon(x)/2}(x)$. Da $\delta \leq \varepsilon(x)/2$, ist für alle $z \in B_\delta(y)$

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) < \frac{\varepsilon(x)}{2} + \delta \leq \frac{\varepsilon(x)}{2} + \frac{\varepsilon(x)}{2} = \varepsilon,$$

also $z \in B_{\varepsilon(x)}(x) \subseteq V_{j(x)}$ und somit $B_\delta(y) \subseteq V_{j(x)}$. □

Satz 14.23 *Es seien (K, d_K) und (Y, d_Y) metrische Räume. Ist K kompakt, so ist jede stetige Abbildung $f : K \to Y$ gleichmäßig stetig, d.h.*

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall y, z \in K) \quad d_K(y, z) < \delta \;\Rightarrow\; d_Y(f(y), f(z)) < \varepsilon.$$

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$. Da f stetig ist, ist f an jeder Stelle $x \in K$ stetig und somit hat x eine offene Umgebung $V_x \subseteq K$ derart, dass

$$(\forall y \in V_x) \quad d_Y(f(y), f(x)) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Nach der Dreiecksungleichung gilt dann also

$$(\forall y, z \in V_x) \quad d_Y(f(y), f(z)) \leq d_Y(f(y), f(x)) + d_Y(f(x), f(z)) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \tag{70}$$

Nach dem Lebesgueschen Lemma existiert ein Lebesguesches Delta $\delta > 0$ für die offene Überdeckung $(V_x)_{x \in K}$ von K. Sind $y, z \in K$ mit $d_K(y, z) < \delta$, so ist

$$z \in B_\delta(y). \tag{71}$$

Per Definition des Lebesgueschen Deltas existiert ein $x \in K$ mit

$$B_\delta(y) \subseteq V_x.$$

Nach (71) sind dann $y, z \in V_x$ und somit gilt nach (70):

$$d_Y(f(y), f(z)) < \varepsilon,$$

was den Beweis der gleichmäßigen Stetigkeit beendet. □

Definition 14.24 Ein metrischer Raum (X, d) heißt *präkompakt* (oder auch "total beschränkt"), wenn für jedes $\varepsilon > 0$ eine endliche Teilmenge $F \subseteq X$ existiert mit

$$X = \bigcup_{x \in F} B_\varepsilon^X(x)$$

(d.h. für jedes $\varepsilon > 0$ hat $(B_\varepsilon^X(x))_{x \in X}$ eine endliche Teilüberdeckung).

Satz 14.25 (Charakterisierung kompakter metrischer Räume) *Für einen metrischen Raum (K, d) sind äquivalent:*

(a) *K ist kompakt;*

(b) *(K, d) ist präkompakt und vollständig;*

(c) *In K hat jede Folge eine konvergente Teilfolge.*

Beweis. Die Äquivalenz von (a) und (c) wurde in Satz 14.17 gezeigt.

Gilt (a), so hat wegen (c) jede Cauchyfolge in (K, d) eine konvergente Teilfolge; nach Lemma C.22 ist die Cauchfolge somit konvergent. Also ist (K, d) vollständig. Da für jedes $\varepsilon > 0$ die offene Überdeckung $(B_\varepsilon^K(x))_{x\in K}$ eine endliche Teilüberdeckung hat, ist (K, d) präkompakt. Somit gilt (b).

(b)⇒(c): Für jedes $k \in \mathbb{N}$ existiert eine endliche Teilmenge $F_k \subseteq K$ derart, dass
$$K = \bigcup_{x\in F_k} B_{1/k}^K(x).$$
Es existiert ein $y_1 \in F_1$ derart, dass
$$I_1 := \{n \in \mathbb{N}\colon x_n \in B_1^K(y_1)\}$$
eine unendliche Menge ist. Ist $2 \le k \in \mathbb{N}$ und sind $y_j \in F_j$ bereits gefunden für $j \in \{2, \ldots, k-1\}$ derart, dass
$$I_j := \{n \in I_{j-1}\colon x_n \in B_{1/j}^K(y_j)\}$$
eine unendliche Menge ist, so existiert ein $y_k \in F_k$ derart, dass $I_k := \{n \in I_{k-1}\colon x_n \in B_{1/k}^K(y_k)\}$ eine unendliche Menge ist. Wir setzen $n_1 := \min I_1$ und rekursiv $n_k := \min I_k \setminus \{n_1, \ldots, n_{k-1}\}$ für $2 \le k \in \mathbb{N}$. Wegen $n_1 < n_2 < \cdots$ ist dann $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Gegeben $\varepsilon > 0$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit $2/N \le \varepsilon$. Für alle $k, \ell \ge N$ gilt $n_k \in I_k \subseteq I_N$ und $n_\ell \in I_\ell \subseteq I_N$, also
$$d(x_{n_k}, y_N) < 1/N \le \varepsilon/2 \quad \text{und} \quad d(x_{n_\ell}, y_N) < 1/N \le \varepsilon/2$$
und folglich $d(x_{n_k}, x_{n_\ell}) \le d(x_{n_k}, y_N) + d(y_N, x_{n_\ell}) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$. Also ist $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in (K, d) und somit konvergent, da (K, d) vollständig angenommen ist. □

Definition 14.26 Eine Teilmenge M eines topologischen Raums X, deren Abschluss $\overline{M}$ kompakt ist, wird *relativ kompakt* genannt.

Zum Beispiel sind für jede gewählte Norm offene Kugeln $B_\varepsilon(x)$ in $\mathbb{R}^n$ relativ kompakt, da ihr Abschluss $\overline{B}_\varepsilon(x)$ kompakt ist.

Offene Umgebungen kompakter Mengen enthalten stets eine gleichmäßige Umgebung:

Satz 14.27 *Ist (X, d) ein metrischer Raum, $K \subseteq X$ eine kompakte Teilmenge und $U \subseteq X$ eine offene Teilmenge mit $K \subseteq U$, so existiert ein $\varepsilon > 0$ derart, dass*

$$K \subseteq \bigcup_{x \in K} B_\varepsilon^X(x) \subseteq U.$$

Man nennt $\bigcup_{x\in K} B_\varepsilon^X(x)$ eine *gleichmäßige Umgebung* von K in X.

Beweis. Wir dürfen $K \neq \emptyset$ annehmen. Für jedes $x \in K$ existiert ein $\varepsilon(x) > 0$ mit $B_{2\varepsilon(x)}^X(x) \subseteq U$. Dann ist $B_{\varepsilon(x)}^X(x)$ für $x \in K$ eine offene Überdeckung von K; also existieren $x_1, \ldots, x_n \in K$ mit

$$K \subseteq B_{\varepsilon(x_1)}^X(x_1) \cup \cdots \cup B_{\varepsilon(x_n)}^X(x_n).$$

Sei $\varepsilon := \min\{\varepsilon(x_1), \ldots, \varepsilon(x_n)\}$. Gegeben $x \in K$ existiert ein $j \in \{1, \ldots, n\}$ mit $x \in B_{\varepsilon(x_j)}^X(x_j)$. Wegen der Dreiecksungleichung ist dann $B_\varepsilon^X(x) \subseteq B_{\varepsilon(x_j)}^X(x) \subseteq B_{2\varepsilon(x_j)}^X(x_j) \subseteq U$. □

15 Wege und Weglänge

In diesem Kapitel betrachten wir Wege (Kurven) in $\mathbb{R}^n$ und ordnen ihnen eine Weglänge zu. Unser Hauptinteresse gilt stetigen Wegen und C^1-Wegen sowie Wegen, die stückweise C^1 sind.

Definitionen und erste Beispiele

Definition 15.1 Ein *Weg* (oder C^0-Weg) in $E := \mathbb{R}^n$ ist eine stetige Abbildung $\gamma\colon I \to E$ auf einem nicht entarteten Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$. Dann ist also

$$\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$$

mit den stetigen Komponenten $\gamma_1, \ldots, \gamma_n\colon I \to \mathbb{R}$. Ist γ an jeder Stelle $t \in I$ *differenzierbar* in dem Sinn, dass der Grenzwert[27]

$$\gamma'(t) = \lim_{s \to t} \frac{\gamma(s) - \gamma(t)}{s - t}$$

[27]Ist E ein reeller Vektorraum, $s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $v \in E$, so schreiben wir $\frac{v}{s} := \frac{1}{s}v$.

(mit $s \in I \setminus \{t\}$) existiert und ist

$$\gamma' \colon I \to E, \quad t \mapsto \gamma'(t)$$

stetig, so wird γ ein *stetig differenzierbarer Weg* oder *C^1-Weg* genannt. Das Bild $\gamma(I)$ eines Wegs wird auch seine *Spur* genannt.

Bemerkung 15.2 (a) In der Literatur betrachtet man meist nur Wege der Form $\gamma\colon [a,b] \to E$ mit $a < b$ (und auch wir werden bald auf diesen Fall fokussieren); man spricht dann von einem Weg *von* $\gamma(a)$ *nach* $\gamma(b)$.

(b) Man beachte, dass ein Weg $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)\colon I \to \mathbb{R}^n$ genau dann an einer Stelle $t \in I$ differenzierbar ist, wenn jede der Komponenten $\gamma_1, \ldots, \gamma_n \colon I \to \mathbb{R}$ in t differenzierbar ist, und es gilt dann

$$\gamma'(t) = (\gamma_1'(t), \ldots, \gamma_n'(t)).$$

Für jede Folge $(s_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $I \setminus \{t\}$ mit $s_k \to t$ existiert nämlich

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\gamma(s_k) - \gamma(t)}{s_k - t}$$

nach Satz 8.11 genau dann, wenn all die Komponenten

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\gamma_j(s_k) - \gamma_j(t)}{s_k - t}, \quad j \in \{1, \ldots, n\}$$

konvergieren, und hat als Komponenten dann die Grenzwerte $\gamma_1'(t)$, …, $\gamma_n'(t)$ der Komponenten. Weiter ist $\gamma' = (\gamma_1', \ldots, \gamma_n')$ genau dann stetig, wenn all die Komponenten es sind. Eine Funktion $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)\colon I \to \mathbb{R}^n$ ist somit genau dann ein C^1-Weg, wenn alle Komponenten $\gamma_1, \ldots, \gamma_n \colon I \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbare Funktionen sind.

Weitere Varianten sind mitunter nützlich:

Definition 15.3 Sei $E := \mathbb{R}^n$ und $I \subseteq \mathbb{R}$ ein nicht entartetes Intervall.
(a) Gegeben $k \in \mathbb{N}$ nennt man eine Abbildung $\gamma\colon I \to E$ einen C^k-Weg, wenn sie ein C^1-Weg ist und

$$\gamma' \colon I \to E$$

ein C^{k-1}-Weg. Ist γ ein C^k-Weg für alle $k \in \mathbb{N}$, so wird γ ein *glatter Weg* oder *C^∞-Weg* genannt.

(b) Gegeben $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ wird ein Weg $\gamma\colon [a,b] \to E$ *stückweise* C^k genannt, wenn es eine Zerlegung

$$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = b$$

von $[a,b]$ gibt derart, dass $\gamma|_{[t_{j-1},t_j]}$ ein C^k-Weg ist für alle $j \in \{1,\ldots,m\}$.

Bemerkung 15.4 Für $E := \mathbb{R}^n$ und ein nicht entartetes Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ betrachten wir eine Abbildung $\gamma\colon I \to E$.

(a) Ist γ ein C^{k+1}-Weg für ein $k \in \mathbb{N}_0$, so ist γ auch ein C^k-Weg.

[Für $k = 0$ gilt dies per Definition. Ist $k \geq 1$ und ist jeder C^k-Weg bereits auch C^{k-1}, so sei γ ein C^{k+1}-Weg. Dann ist γ ein C^1-Weg und $\gamma'\colon I \to E$ ist ein C^k-Weg. Per Induktionsannahme ist γ' auch ein C^{k-1}-Weg und somit γ ein C^k-Weg.]

(b) Für $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ gilt: $\gamma = (\gamma_1,\ldots,\gamma_n)\colon I \to \mathbb{R}^n$ ist genau dann ein C^k-Weg, wenn jede der Funktionen $\gamma_1,\ldots,\gamma_n\colon I \to \mathbb{R}$ eine C^k-Funktion ist.

[Es genügt, dies für $k \in \mathbb{N}$ zu zeigen. Für $k = 1$ haben wir die Äquivalenz oben schon gezeigt. Sei nun $k \geq 2$. Ist γ ein C^k-Weg, so ist γ ein C^1-Weg, weswegen nach Bemerkung 15.2(b) jede der Funktionen $\gamma_1,\ldots,\gamma_n$ eine C^1-Funktion ist und

$$\gamma' = (\gamma_1',\ldots,\gamma_n'). \tag{72}$$

Da γ' ein C^{k-1}-Weg ist, ist per Induktionsannahme jede seiner Komponenten $\gamma_1',\ldots,\gamma_n'$ eine C^{k-1}-Funktion und somit ist jede der Funktionen $\gamma_1,\ldots,\gamma_n$ eine C^k-Funktion. Ist umgekehrt jede der Funktionen $\gamma_1,\ldots,\gamma_n$ eine C^1-Funktion, so ist γ nach Bemerkung 15.2(b) ein C^1-Weg und es gilt (72). Da jede der Komponenten von γ' eine C^{k-1}-Funktion ist, ist γ' ein C^{k-1}-Weg und somit γ ein C^k-Weg.]

Beispiele 15.5 (a) Für $\alpha > 0$ hat die Abbildung

$$\gamma\colon [0,\alpha] \to \mathbb{R}^2, \quad \gamma(t) := (\cos t, \sin t)$$

beliebig oft differenzierbare Komponenten, ist also ein C^∞-Weg in $\mathbb{R}^2$ (der den Einheitskreis im Gegenuhrzeigersinn umläuft).

(b) Für $a < b$ ist

$$\gamma\colon [0,\alpha] \to \mathbb{R}^3, \quad \gamma(t) := (\cos t, \sin t, t)$$

ein C^∞-Weg in $\mathbb{R}^3$, der ein Stück einer Schraubenlinie (Korkenzieher) durchläuft.

(c) Sind $x_0, x_1, \ldots, x_m \in \mathbb{R}^n$ und $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = b$, so sei $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ der Weg, welcher auf dem Intervall $[t_{j-1}, t_j]$ affin-linear von x_{j-1} nach x_j läuft, also

$$\gamma(t) := x_{j-1} + \frac{t - t_{j-1}}{t_j - t_{j-1}}(x_j - x_{j-1})$$

für $j \in \{1, \ldots, m\}$, $t \in [t_{j-1}, t_j]$. Dann ist $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ ein Weg, welcher stückweise C^1 ist. Der Weg verbindet geradlinig die gegebenen Punkte, es handelt sich um einen sogenannten *Polygonzug*.

Vektorwertige Integrale und Hauptsatz

Definition 15.6 Es seien $I \subseteq \mathbb{R}$ ein nicht entartetes Intervall,

$$\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)\colon I \to \mathbb{R}^n$$

ein Weg (also eine stetige vektorwertige Funktion) und $a, b \in I$. Wir definieren das Integral der Funktion γ von a bis b als

$$\int_a^b \gamma(t)\,dt := \left(\int_a^b \gamma_1(t)\,dt, \ldots, \int_a^b \gamma_n(t)\,dt\right) \in \mathbb{R}^n.$$

Im folgenden Satz halten wir einige Eigenschaften vektorwertiger Integrale fest. Um vektorwertige Integrale möglichst präzise Abschätzen zu können, nutzen uns im Beweis Riemannsche Summen. Diese werden analog zum reellwertigen Fall (siehe 1.13) definiert.

15.7 Sei $Z = \{a = t_0 < \cdots < t_\ell = b\}$ eine Zerlegung eines Intervalls $[a,b]$ mit $a < b$ und $B = (b_1, \ldots, b_\ell)$ eine zugehörige Belegung. Ist $\gamma\colon [a,b] \to E$ ein Weg in $E := \mathbb{R}^n$, so definieren wir die *Riemannsche Summe* $\Sigma_\gamma(Z,B)$ zur Zerlegung Z und Belegung B als

$$\Sigma_\gamma(Z,B) := \sum_{k=1}^{\ell} (t_k - t_{k-1})\gamma(b_k).$$

Satz 15.8 (Eigenschaften vektorwertiger Integrale) *Es seien $a < b$ reelle Zahlen, $E := \mathbb{R}^n$ mit einer Norm $\|\cdot\|$ und $\gamma, \eta\colon [a,b] \to E$ Wege. Dann gilt:*

(a) *Für alle $r, s \in \mathbb{R}$ ist $r\gamma + s\eta\colon [a,b] \to E$ ein Weg und*

$$\int_a^b (r\gamma(t) + s\eta(t))\, dt = r \int_a^b \gamma(t)\, dt + s \int_a^b \eta(t)\, dt.$$

(b) (*Intervalladditivität*). *Für alle $c \in [a,b]$ ist*

$$\int_a^b \gamma(t)\, dt = \int_a^c \gamma(t)\, dt + \int_c^b \gamma(t)\, dt. \tag{73}$$

(c) *Ist $C \subseteq E$ eine abgeschlossene konvexe Menge (z.B. eine abgeschlossene Kugel) mit $\gamma([a,b]) \subseteq C$, so gilt*

$$\int_a^b \gamma(t)\, dt \in (b-a)C \quad \textit{und} \quad \int_b^a \gamma(t)\, dt \in (a-b)C.$$

(d) (*Integralabschätzungen*). *Es gilt*

$$\left\| \int_a^b \gamma(t)\, dt \right\| \leq \int_a^b \|\gamma(t)\|\, dt \leq \|\gamma\|_\infty (b-a) \tag{74}$$

mit $\|\gamma\|_\infty := \sup\{\|\gamma(t)\| \colon t \in [a,b]\}$.

(e) *Für jede Folge $(Z_m)_{m\in\mathbb{N}}$ von Zerlegungen Z_m von $[a,b]$ mit Maschenweite $\Delta(Z_m) \to 0$ und jede Folge $(B_m)_{m\in\mathbb{N}}$ von Belegungen gilt*

$$\Sigma_\gamma(Z_m, B_m) \to \int_a^b \gamma(t)\, dt \quad \textit{für } m \to \infty.$$

Beweis. (a) Schreibe $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ und $\eta = (\eta_1, \ldots, \eta_n)$. Für $j \in \{1, \ldots, n\}$ ist die $j$te Komponente von $\int_a^b r(\gamma(t) + s\eta(t))\, dt \in \mathbb{R}^n$ gleich

$$\int_a^b (r\gamma_j(t) + s\eta_j(t))\, dt = r \int_a^b \gamma_j(t)\, dt + s \int_a^b \eta_j(t)\, dt$$

und stimmt mit der $j$ten Komponente von $r\int_a^b \gamma(t)\, dt + s\int_a^b \eta(t)\, dt$ überein.

(b) Die $j$te Komponente der linke Seite von (73) ist

$$\int_a^b \gamma_j(t)\, dt = \int_a^c \gamma_j(t)\, dt + \int_c^b \gamma_j(t)\, dt,$$

stimmt also mit derjenigen der rechten Seite überein.

(e) Gegeben $m \in \mathbb{N}$ sei $Z_m = \{a = t_0 < t_1 < \cdots < t_\ell = b\}$ mit einem $\ell \in \mathbb{N}$ und $B_m = (b_1, \ldots, b_\ell)$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\Sigma_\gamma(Z_m, B_m) &= \sum_{k=1}^{\ell} (t_k - t_{k-1})\gamma(b_k) \\
&= \left(\sum_{k=1}^{\ell} (t_k - t_{k-1})\gamma_1(b_k), \ldots, \sum_{k=1}^{\ell} (t_k - t_{k-1})\gamma_n(b_k) \right) \\
&= (\Sigma_{\gamma_1}(Z_m, B_m), \ldots, \Sigma_{\gamma_n}(Z_m, B_m)) \\
&\to \left(\int_a^b \gamma_1(t)\, dt, \ldots, \int_A^b \gamma_n(t)\, dt \right) = \int_A^b \gamma(t)\, dt.
\end{aligned}$$

(c) Für Zerlegungen und Belegungen wie in (e) gilt mit Notation wie zuvor

$$\frac{1}{b-a} \Sigma_\gamma(Z_m, B_m) = \sum_{k=1}^{\ell} \frac{t_k - t_{k-1}}{b-a} \gamma(t_k) \in C,$$

weil C konvex ist, alle $(t_k - t_{k-1})/(b-a) \geq 0$ sind und $\sum_{k=1}^{\ell} \frac{t_k - t_{k-1}}{b-a} = \frac{t_\ell - t_0}{b-a} = 1$. Da C abgeschlossen ist, ergibt sich mit (e)

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b \gamma(t)\, dt = \lim_{m \to \infty} \frac{1}{b-a} \Sigma_\gamma(Z_m, B_m) \in C;$$

also gilt (c).

(d) Gegeben eine Folge von Zerlegungen und Belegungen wie in (e) habe wir für festes m

$$\begin{aligned}
\|\Sigma_\gamma(Z_m, B_m)\| &= \left\| \sum_{k=1}^{\ell} (t_k - t_{k-1})\gamma(b_k) \right\| \leq \sum_{k=1}^{\ell} \underbrace{|t_k - t_{k-1}|}_{= t_k - t_{k-1}} \cdot \|\gamma(b_k)\| \\
&= \Sigma_{\|\gamma\|}(Z_m, B_m)
\end{aligned}$$

mit der stetigen Funktion $\|\gamma\| := \|\cdot\| \circ \gamma \colon [a,b] \to \mathbb{R}$, $t \mapsto \|\gamma(t)\|$; hierbei wurden die Subadditivität und positive Homogenität der Norm benutzt. Für

$m \to \infty$ folgt mit (e) und Satz 1.4(d)

$$\begin{aligned}
\left\| \int_a^b \gamma(t)\, dt \right\| &= \left\| \lim_{m\to\infty} \Sigma_\gamma(Z_m, B_m) \right\| = \lim_{m\to\infty} \|\Sigma_\gamma(Z_m, B_m)\| \\
&\leq \lim_{m\to\infty} \Sigma_{\|\gamma\|}(Z_m, B_m) = \int_a^b \|\gamma(t)\|\, dt \\
&\leq (b-a)\|\gamma\|_\infty,
\end{aligned}$$

was den Beweis beendet. □

Es ist nützlich, dass auch hier eine Fassung des Hauptsatzes der Integralrechnung gilt:

Lemma 15.9 *Für jeden C^1-Weg $\gamma\colon I \to \mathbb{R}^n$ und $a, b \in I$ gilt*

$$\int_a^b \gamma'(t)\, dt = \gamma(b) - \gamma(a).$$

Beweis. In der Tat ist

$$\begin{aligned}
\int_a^b \gamma'(t)\, dt &= \int_a^b (\gamma_1'(t), \ldots, \gamma_n'(t))\, dt = \Big(\int_a^b \gamma_1'(t)\, dt, \ldots, \int_a^b \gamma_n'(t)\, dt \Big) \\
&= (\gamma_1(b) - \gamma_1(a), \ldots, \gamma_n(b) - \gamma_n(a)) = \gamma(b) - \gamma(a).
\end{aligned}$$

□

Weglänge und Rektifizierbarkeit

In diesem Abschnitt definieren wie die Länge eines Wegs $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}^n$. Die Weglänge hängt von der auf $\mathbb{R}^n$ gewählten Norm $\|\cdot\|$ ab. Für die Praxis relevant (und anschaulichen Weglänge entsprechend) ist die Weglänge bezüglich der eulidischen Norm $\|\cdot\|_2$ auf $\mathbb{R}^n$. Die Weglänge auch bezüglich anderer Normen zu berechnen, ist eher unüblich; wir geben jedoch zunächst die allgemeine Definition.[28]

[28] Noch allgemeiner – unter Ersetzung von $\|\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})\|$ durch $d(\gamma(t_j), \gamma(t_{j-1}))$ in der Formel für $L_Z(\gamma)$, definiert man die Länge eines Wegs $\gamma\colon [a,b] \to X$ in einem metrischen Raum (X, d). Diese Verallgemeinerung wird jedoch nur selten gebraucht.

Es liegt nahe, die Weglänge eines Polygonzugs (wie in Beispiel 15.5(c)) als

$$\sum_{j=1}^{m} \|x_j - x_{j-1}\| \tag{75}$$

zu definieren.

Definition 15.10 Ist $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ ein Weg und

$$Z = \{a = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = b\}$$

eine Zerlegung von $[a,b]$, so sei $L_Z(\gamma)$ die Länge des Polygonzugs durch die Punkte $\gamma(t_0), \ldots, \gamma(t_m)$, also

$$L_Z(\gamma) := \sum_{j=1}^{m} \|\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})\|.$$

Die *Weglänge* $L(\gamma)$ von γ ist definiert als das Supremum

$$L(\gamma) := \sup_Z L_Z(\gamma) \in [0, \infty],$$

wobei Z alle Zerlegungen des Intervalls $[a,b]$ durchläuft. Ist $L(\gamma) < \infty$, so wird γ *rektifizierbar* genannt.

Wir werden bald sehen, dass jeder C^1-Weg rektifizierbar ist und seine Weglänge in Form eines geeigneten Integrals berechnet werden kann.

Lemma 15.11 *Es sei $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ ein Weg. Ist $Z = \{t_0, \ldots, t_m\}$ eine Zerlegung von $[a,b]$ und Z' eine Verfeinerung von Z, so ist*

$$L_Z(\gamma) \leq L_{Z'}(\gamma).$$

Beweis. Die Verfeinerung Z' geht aus Z hervor, indem wir endlich oft je einen Zwischenpunkt hinzunehmen. Es genügt zu zeigen, dass sich die Weglänge in jedem dieser Schritte nicht verkleinert. Wir dürfen daher ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass

$$Z' = Z \cup \{s\}$$

mit einem $s \in [a,b] \setminus Z$. Es gibt genau ein $k \in \{1, \ldots, m\}$ derart, dass

$$t_{k-1} < s < t_k.$$

Nach der Dreieicksungleichung ist

$$\|\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})\| \leq \|\gamma(t_k) - \gamma(s)\| + \|\gamma(s) - \gamma(t_{k-1})\|,$$

somit

$$\begin{aligned}
L_Z(\gamma) &= \sum_{j=1}^{k-1} \|\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})\| + \|\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})\| \\
&\quad + \sum_{j=k+1}^{m} \|\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})\| \\
&\leq \sum_{j=1}^{k-1} \|\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})\| + \|\gamma(t_k) - \gamma(s)\| \\
&\quad + \|\gamma(s) - \gamma(t_{k-1})\| + \sum_{j=k+1}^{m} \|\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})\| \\
&= L_{Z'}(\gamma).
\end{aligned}$$

□

Lemma 15.12 *Sind $a < b < c$ reelle Zahlen und $\gamma\colon [a,c] \to \mathbb{R}^n$ ein Weg, so ist*

$$L(\gamma) = L(\gamma|_{[a,b]}) + L(\gamma|_{[b,c]}). \tag{76}$$

Insbesondere ist γ genau dann rektifizierbar, wenn beide Teilwege $\gamma|_{[a,b]}$ und $\gamma|_{[b,c]}$ rektifizierbar sind.

Beweis. Wir stellen zunächst eine Vorüberlegung an. Ist $Z = \{t_0, \ldots, t_m\}$ eine Zerlegung von $[a,c]$ derart, dass $b = t_k$ für ein $k \in \{1, \ldots, m-1\}$, so ist $Z' = \{t_0, \ldots, t_k\}$ eine Zerlegung von $[a,b]$ und $Z'' = \{t_k, \ldots, t_m\}$ eine Zerlegung von $[b,c]$. Weiter gilt

$$L_Z(\gamma) = L_{Z'}(\gamma_{[a,b]}) + L_{Z''}(\gamma|_{[b,c]}),$$

denn es ist

$$\begin{aligned}
L_Z(\gamma) &= \sum_{j=1}^{m} \|\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})\| \\
&= \sum_{j=1}^{k} \|\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})\| + \sum_{j=k+1}^{m} \|\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})\| \\
&= L_{Z'}(\gamma_{[a,b]}) + L_{Z''}(\gamma|_{[b,c]}).
\end{aligned}$$

Seien nun $(Z_i)_{i\in\mathbb{N}}$, $(Z_i')_{i\in\mathbb{N}}$ und $(Z_i'')_{i\in\mathbb{N}}$ Folgen von Zerlegungen von $[a,c]$, $[a,b]$ bzw. $[b,c]$ derart, dass

$$L_{Z_i}(\gamma) \to L(\gamma), \quad L_{Z_i'}(\gamma) \to L(\gamma|_{[a,b]}) \quad \text{und} \quad L_{Z_i''}(\gamma) \to L(\gamma|_{[b,c]})$$

für $i \to \infty$. Es ist $Y_j := Z_j \cup Z_j' \cup Z_j''$ eine Verfeinerung von Z_j. Weiter ist $Y_j' := Y_j \cap [a,b]$ eine Verfeinerung von Z_j' und $Y_j'' := Y_j \cap [b,c]$ eine Verfeinerung von Z_j''. Somit ist $L_{Y_j}(\gamma) \geq L_{Z_j}(\gamma)$, folglich $L_{Y_j}(\gamma)$ dem Supremum $L(\gamma)$ näher. Also gilt erst recht

$$L_{Y_i}(\gamma) \to L(\gamma)$$

und ebenso $L_{Y_i'}(\gamma) \to L(\gamma|_{[a,b]})$ und $L_{Y_i''}(\gamma) \to L(\gamma|_{[b,c]})$. Da $Y_i = Y_i' \cup Y_i''$, ist jedoch nach der Vorüberlegung

$$L_{Y_i}(\gamma) = L_{Y_i'}(\gamma|_{[a,b]}) + L_{Y_i''}(\gamma|_{[b,c]}) \tag{77}$$

Durch Grenzübergang $i \to \infty$ folgt nun (76) aus (77). □

Bemerkung 15.13 Ist $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ ein Polygonzug, so stimmt übrigens die in Definition 15.10 als ein Supremum definierte Weglänge mit der in (75) betrachteten überein.[29] Es genügt, dies für affin-lineare Wege γ zu beweisen, da wir durch wiederholte Anwendung von Lemma 15.12 die Weglänge eines Polygonzugs als Summe der Längen von affin-linearen Teilwegen schreiben können. Sei etwa

$$\gamma(t) = x + \frac{t-a}{b-a}(y-x) \quad \text{für } t \in [a,b]$$

mit $x, y \in \mathbb{R}^n$ und $Z = \{t_0, t_1, \ldots, t_m\}$ eine Zerlegung von $[a,b]$. Dann ist

$$\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1}) = x + \frac{t_j - a}{b-a}(y-x) - x - \frac{t_{j-1}-a}{b-a}(y-x) = \frac{t_j - t_{j-1}}{b-a}(y-x)$$

für $j \in \{1, \ldots, m\}$, somit

$$\begin{aligned} L_Z(\gamma) &= \sum_{j=1}^m \|\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})\| = \sum_{j=1}^m \left\| \frac{t_j - t_{j-1}}{b-a}(y-x) \right\| \\ &= \|y-x\| \frac{\sum_{j=1}^m (t_j - t_{j-1})}{b-a} = \|y-x\| \frac{b-a}{b-a} = \|y-x\|. \end{aligned}$$

Es ist also $L_Z(\gamma) = \|y-x\|$ für alle Zerlegungen Z und somit auch $L(\gamma) = \sup_Z L_Z(\gamma) = \|y-x\|$.

[29] In der Vorlesung überspringen wir den folgenden Beweis.

Weglänge von C^1-Wegen

Wir zeigen nun, dass jeder C^1-Weg $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ rektifizierbar ist und geben eine Formel für seine Weglänge an.

Satz 15.14 *Versehen wir $E := \mathbb{R}^n$ mit einer Norm $\|\cdot\|$, so gilt: Jeder C^1-Weg $\gamma\colon [a,b] \to E$ ist rektifizierbar, mit Weglänge*

$$L(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\|\, dt. \tag{78}$$

Gleiches gilt für stückweise C^1-Wege, wenn man

$$\int_a^b \|\gamma'(t)\|\, dt := \sum_{j=1}^m \int_{t_{j-1}}^{t_j} \|\gamma'(t)\|\, dt$$

definiert mit einer Zerlegung $Z = \{t_0, t_1, \ldots, t_m\}$ von $[a,b]$ derart, dass $\gamma|_{[t_{j-1},t_j]}$ ein C^1-Weg ist für alle $j \in \{1, \ldots, m\}$.

Das folgende Lemma hilft uns beim Beweis des Satzes.

Lemma 15.15 *Es sei $\|\cdot\|\colon E \to [0,\infty[$ eine Norm auf $E := \mathbb{R}^n$, weiter $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ ein Weg und $\theta \geq 0$ derart, dass*

$$\|\gamma'(t) - \gamma'(a)\| \leq \theta \quad \textit{für alle } t \in [a,b].$$

Dann ist

$$\left| \|\gamma(b) - \gamma(a)\| - \int_a^b \|\gamma'(t)\|\, dt \right| \leq 2(b-a)\theta. \tag{79}$$

Beweis. Da $\gamma(b) - \gamma(a) = \int_a^b \gamma'(t)\, dt$ und

$$\|\gamma'(a)(b-a)\| = \left\| \int_a^b \gamma'(a)\, dt \right\| = \int_a^b \|\gamma'(a)\|\, dt,$$

ist

$$\begin{aligned}
&\left| \|\gamma(b) - \gamma(a)\| - \int_a^b \|\gamma'(t)\|\, dt \right| \\
&\quad = \left| \left\| \int_a^b \gamma'(t)\, dt \right\| - \left\| \int_a^b \gamma'(a)\, dt \right\| + \int_a^b \|\gamma'(a)\|\, dt - \int_a^b \|\gamma'(t)\|\, dt \right| \\
&\quad \leq \left| \left\| \int_a^b \gamma'(t)\, dt \right\| - \left\| \int_a^b \gamma'(a)\, dt \right\| \right| \qquad (80) \\
&\qquad + \left| \int_a^b \|\gamma'(a)\|\, dt - \int_a^b \|\gamma'(t)\|\, dt \right|. \qquad (81)
\end{aligned}$$

Weil Normen nach Beispiel 8.10 stets Lipschitzstetig sind mit Konstante 1, also

$$\big|\|y\| - \|x\|\big| \le \|y - x\|,$$

können wir den Summanden in (80) nach oben abschätzen durch

$$\begin{aligned} \Big\|\int_a^b \gamma'(t)\,dt - \int_a^b \gamma'(a)\,dt\Big\| &= \Big\|\int_a^b (\gamma'(t) - \gamma'(a))\,dt\Big\| \\ &\le \int_a^b \underbrace{\|\gamma'(t) - \gamma'(a)\|}_{\le\theta}\,dt \le (b-a)\theta \quad (82)\end{aligned}$$

(wobei das erste Ungleichungszeichen auf der üblichen Integralabschätzung beruht). Im Summanden in (81) fassen wir die Integranden zusammen, wenden die übliche Integralabschätzung an und benutzen die Lipschitzstetigkeit der Norm:

$$\begin{aligned} \Big|\int_a^b \|\gamma'(a)\| - \|\gamma'(t)\|\,dt\Big| &\le \int_a^b \big|\|\gamma'(a)\| - \|\gamma'(t)\|\big|\,dt \\ &\le \int_a^b \|\gamma'(a) - \gamma'(t)\|\,dt \le (b-a)\theta. \quad (83)\end{aligned}$$

Setzen wir die Abschätzungen (82) und (83) in (80) bzw. (81) ein, so ergibt sich (79). □

Beweis von Satz 15.14. Wegen Lemma 15.12 genügt es, die Aussage für C^1-Wege zu beweisen. Da die stetige Funktion $\gamma'\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$, $t \mapsto \gamma'(t)$ wegen der Kompaktheit von $[a,b]$ gleichmäßig stetig ist, gibt es für jedes $k \in \mathbb{N}$ ein $\delta_k > 0$ derart, dass

$$(\forall s,t \in [a,b]) \quad |s-t| \le \delta_k \Rightarrow \|\gamma'(s) - \gamma'(t)\| \le \frac{1}{k}.$$

Wir wählen nun eine Folge $(Z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ von Zerlegungen Z_k von $[a,b]$ derart, dass

$$L_{Z_k}(\gamma) \to L(\gamma)$$

für $k \to \infty$. Indem wir Z_k notfalls verfeinern (z.B. mit einer genügend engen äquidistanten Zerlegung vereinigen), dürfen wir annehmen, dass

$$\Delta(Z_k) \le \delta_k \tag{84}$$

für alle k. Für festes k schreiben wir $Z_k = \{t_0, t_1, \ldots, t_m\}$. Für jedes $j \in \{1, \ldots, m\}$ und $t \in [t_{j-1}, t_j]$ gilt $|t - t_{j-1}| \leq t_j - t_{j-1} \leq \Delta(Z_k) \leq \delta_k$, somit

$$\|\gamma'(t) - \gamma'(t_{j-1})\| \leq \frac{1}{k}.$$

Dies ermöglicht uns, Lemma 15.15 auf $\gamma|_{[t_{j-1},t_j]}$ anzuwenden, mit $\theta = \frac{1}{k}$. Somit gilt

$$\begin{aligned}
\left|\int_a^b \|\gamma'(t)\|\,dt - L_{Z_k}(\gamma)\right| &= \left|\sum_{j=1}^m \int_{t_{j-1}}^{t_j} \|\gamma'(t)\|\,dt - \sum_{j=1}^m \|\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})\|\right| \\
&\leq \sum_{j=1}^m \left|\int_{t_{j-1}}^{t_j} \|\gamma'(t)\|\,dt - \|\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})\|\right| \\
&\leq \sum_{j=1}^m 2(t_j - t_{j-1})\frac{1}{k} = \frac{2}{k}\sum_{j=1}^m 2(t_j - t_{j-1}) \\
&= \frac{2}{k}(t_m - t_0) = \frac{2(b-a)}{k} \to 0
\end{aligned}$$

für $k \to \infty$. Also gilt sowohl $L_{Z_k}(\gamma) \to L(\gamma)$ also auch $L_{Z_k}(\gamma) \to \int_a^b \|\gamma'(t)\|\,dt$ für $k \to \infty$, und somit folgt (78). $\square$

Beispiel 15.16 Wir betrachten (wie in Beispiel 15.5 (a)) für $\alpha > 0$ den C^∞-Weg

$$\gamma\colon [0, \alpha] \to \mathbb{R}^2, \quad \gamma(t) := (\cos t, \sin t),$$

der den Kreisbogen von $\gamma(0) = (1, 0)$ bis $\gamma(\alpha) = (\cos\alpha, \sin\alpha)$ im Gegenuhrzeigersinn durchläuft. Nach Satz 15.14 hat γ bezüglich der euklidischen Norm die Weglänge

$$\begin{aligned}
L(\gamma) &= \int_0^\alpha \|\gamma'(t)\|_2\,dt = \int_0^\alpha \|(-\sin t, \cos t)\|_2\,dt = \int_0^\alpha \underbrace{\sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2}}_{=1}\,dt \\
&= \int_0^\alpha 1\,dt = \alpha.
\end{aligned}$$

Mit anderen Worten, wir können die Zahl α wirklich als eine Bogenlänge interpretieren, nämlich als die Länge des durch den Weg γ parametrisierten Kreisbogens von $(1, 0)$ bis $(\cos\alpha, \sin\alpha)$.

Umparametrisieren von Wegen

Beim Umparametrisieren ändert sich die Länge von Wegen nicht:

Satz 15.17 *Wir versehen $E := \mathbb{R}^n$ mit einer Norm $\|\cdot\|$. Ist $\gamma\colon [a,b] \to E$ ein Weg und $\phi\colon [c,d] \to [a,b]$ ein Homöomorphismus, so ist*

$$L(\gamma) = L(\gamma \circ \phi).$$

Beweis. Wir wissen aus der Analysis 1, dass die bijektive stetige Abbildung $\phi\colon [c,d] \to [a,b]$ entweder streng monoton wachsend oder streng monoton fallend ist. Ist $Z = \{t_0, t_1, \ldots, t_m\}$ eine Zerlegung von $[c,d]$ so ist

$$\phi(Z) = \{\phi(t_0), \phi(t_1), \ldots, \phi(t_m)\}$$

eine Zerlegung von $[a,b]$. Ist Φ streng monoton wachsend, so ist $a = \phi(t_0) < \phi(t_1) < \cdots < \phi(t_m) = b$ und

$$L_{\phi(Z)}(\gamma) = \sum_{j=1}^{m} \|\gamma(\phi(t_j)) - \gamma(\phi(t_{j-1}))\| = L_Z(\gamma \circ \phi).$$

Ist ϕ streng monoton fallend, so ist $b = \phi(t_0) > \phi(t_1) > \cdots > \phi(t_m) = a$, also $a = \phi(t_m) < \phi(t_{m-1}) < \cdots < \phi(t_0) = b$ die aufsteigende Anordnung der Punkte der Zerlegung $\phi(Z)$, somit ebenfalls

$$L_{\phi(Z)}(\gamma) = \sum_{j=1}^{m} \|\gamma(\phi(t_j)) - \gamma(\phi(t_{j-1}))\| = \sum_{j=1}^{m} \|\gamma(\phi(t_{j-1})) - \gamma(\phi(t_j))\| = L_Z(\gamma \circ \phi).$$

Sei nun $\mathcal{Z}$ die Menge aller Zerlegungen von $[a,b]$ und $\mathcal{Z}'$ die Menge aller Zerlegungen von $[c,d]$. Dann ist

$$\mathcal{Z}' \to \mathcal{Z}, \quad Z \mapsto \phi(Z)$$

eine bijektive Abbildung (mit Umkehrabbildung $Z \mapsto \phi^{-1}(Z)$), insbesondere also surjektiv. Es folgt

$$L(\gamma) = \sup_{Z \in \mathcal{Z}} L_Z(\gamma) = \sup_{Z \in \mathcal{Z}'} L_{\phi(Z)}(\gamma) = \sup_{Z \in \mathcal{Z}'} L_Z(\gamma \circ \phi) = L(\gamma \circ \phi). \qquad \square$$

Die Existenz einer schönen Umparametrisierung (wie im vorigen Satz) ist häufig automatisch:

Satz 15.18 *Sind* $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ *und* $\eta\colon [c,d] \to \mathbb{R}^n$ *injektive Wege*[30] *mit gleichem Bild, also*

$$\gamma([a,b]) = \eta([c,d]),$$

so gibt es einen Homöomorphismus $\phi\colon [c,d] \to [a,b]$ *derart, dass*

$$\eta = \gamma \circ \phi.$$

Insbesondere gilt $L(\gamma) = L(\eta)$, *d.h. die Bogenlänge*

$$L(\Gamma) := L(\gamma)$$

der Menge $\Gamma := \gamma([a,b])$ *ist wohldefiniert, unabhängig von der gewählten Parametrisierung* γ.

Beweis. Sei $\Gamma := \gamma([a,b]) = \eta([c,d])$. Da $[c,d]$ kompakt ist und

$$\eta|^\Gamma\colon [c,d] \to \Gamma, \quad t \mapsto \eta(t)$$

stetig und bijektiv, ist $\eta|^\Gamma$ nach Satz dem Satz über die Umkehrfunktion (Satz 14.14) ein Homöomorphismus. Ebenso ist $\gamma|^\Gamma\colon [a,b] \to \Gamma$ ein Homöomorphismus. Also ist auch $(\gamma|^\Gamma)^{-1}\colon \Gamma \to [a,b]$ ein Homöomorphismus und somit auch die Komposition

$$\phi := (\gamma|^\Gamma)^{-1} \circ \eta|^\Gamma\colon [c,d] \to [a,b].$$

Sei $\iota\colon \Gamma \to \mathbb{R}^n$ die Inklusion. Per Konstruktion ist $\gamma \circ \phi = \iota \circ \gamma|^\Gamma \circ \phi = \iota \circ \gamma|^\Gamma \circ (\gamma|^\Gamma)^{-1} \circ \eta|^\Gamma = \iota \circ \eta|^\Gamma = \eta$. Die übrigen Aussagen folgen nun aus Satz 15.17. □

Beispiel 15.19 Gegeben $\alpha \in]0, 2\pi[$ ist der Weg

$$\gamma\colon [0,\alpha] \to \mathbb{R}^2, \quad \gamma(t) := (\cos t, \sin t)$$

injektiv. Somit können wir dem Kreisbogen $\Gamma := \gamma([0,\alpha])$ die Bogenlänge $L(\Gamma) := L(\gamma) = \alpha$ zuordnen und wissen, dass wir für jede andere injektive Parametrisierung η des Kreisbogens[31] die gleiche Bogenlänge erhalten. Diese ist eine Eigenschaft von Γ allein, unabhängig von der Parametrisierung.

[30] Injektive Wege nennt man auch "einfache doppelpunktfreie Wege."

[31] Z.B. $\eta(t) = (1-t, \sqrt{1-(1-t)^2})$ falls $\alpha \leq \pi$.

Parametrisierung auf Weglänge

Es sei $E := \mathbb{R}^n$ mit einer Norm $\|\cdot\|$ versehen. Wir nennen einen Weg $\gamma\colon [a,b] \to E$ *auf Weglänge parametrisiert*, wenn

$$L(\gamma|_{[a,c]}) = c - a \tag{85}$$

für alle $c \in]a,b]$. Die Formel (85) gilt dann auch für $c = a$, wenn wir eine Funktion $\eta\colon \{a\} \to E$ mit $a \in \mathbb{R}$ einen *entarteten Weg* nennen und $L(\eta) := 0$ definieren. Zudem ist dann

$$L(\gamma|_{[\alpha,\beta]}) = \beta - \alpha \quad \text{für alle } \alpha \leq \beta \text{ in } [a,b],$$

denn es ist

$$\beta - a = L(\gamma|_{[a,\beta]}) = L(\gamma|_{[a,\alpha]}) + L(\gamma|_{[\alpha,\beta]}) = \alpha - a + L(\gamma|_{[\alpha,\beta]});$$

Auflösen nach $L(\gamma|_{[\alpha,\beta]})$ liefert die Behauptung.

Beispiel 15.20 Bezüglich der euklidischen Norm auf $\mathbb{R}^2$ ist der den Einheitskreis umlaufende Weg $\gamma\colon [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) := (\cos t, \sin t)$ auf Weglänge parametrisiert, denn für alle $c \in]0,2\pi]$ ist

$$L(\gamma|_{[0,c]}) = \int_0^c \|\gamma'(t)\|_2 \, dt = c = c - 0.$$

Satz 15.21 *Versehen wir $E := \mathbb{R}^n$ mit einer Norm $\|\cdot\|$, so ist ein C^1-Weg $\gamma\colon [a,b] \to E$ genau dann auf Weglänge parametrisiert, wenn $\|\gamma'(t)\| = 1$ für alle $t \in [a,b]$.*

Beweis. Ist $\|\gamma'(t)\| = 1$ für alle $t \in [a,b]$, so gilt für alle $c \in]a,b]$

$$L(\gamma|_{[a,c]}) = \int_a^c \|\gamma'(t)\| \, dt = \int_a^c 1 \, dt = c - a$$

und somit ist γ auf Weglänge parametrisiert.

Ist umgekehrt γ auf Weglänge parametrisiert, so ist

$$c - a = L(\gamma|_{[a,c]}) = \int_a^c \|\gamma'(t)\| \, dt$$

für alle $c \in]a, b]$ und auch für $c = 0$, weil dann alle drei Terme gleich Null sind. Ableiten nach c liefert

$$1 = \frac{d}{dc}(c - a) = \frac{d}{dc} \int_a^c \|\gamma'(t)\| \, dt = \|\gamma'(c)\| \quad \text{für alle } c \in [a, b],$$

unter Benutzung des Hauptsatzes der Integral- und Differentialrechnung. □

In der Vorlesung wurde noch weiteres, spezielleres Material behandelt (etwa zum Umparametrisieren auf Weglänge), das hier im Skript weggelassen wurde und nicht prüfungsrelevant ist.

16 Wegintegrale

Wir stellen nun zwei wichtige Arten von Wegintegralen vor, die auch in physikalischen Anwendungen häufig gebraucht werden.

Definition 16.1 [Wegintegrale erster Art] Ist ein Weg $\gamma\colon [a, b] \to \mathbb{R}^n$ stückweise C^1 und

$$f\colon \gamma([a, b]) \to \mathbb{R}$$

stetig, so definieren

$$\int_\gamma f := \int_\gamma f \, ds := \int_a^b f(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\|_2 \, dt.$$

Ist γ nicht C^1, so ist hierbei

$$\int_a^b f(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\|_2 \, dt := \sum_{j=1}^m \int_{t_{j-1}}^{t_j} f(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\|_2 \, dt,$$

wobei $Z = \{t_0, t_1, \ldots, t_m\}$ eine Zerlegung von $[a, b]$ ist derart, dass $\gamma|_{[t_{j-1}, t_j]}$ ein C^1-Weg ist für alle $j \in \{1, \ldots, m\}$.

Beispiel 16.2 Die Kurve

$$\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)\colon [a, b] \to \mathbb{R}^3$$

beschreibe einen Draht im Raum, welcher an der Stelle $\gamma(t) = x$ die Massendichte $\rho(x)$ besitzt (im Sinne von Masse pro Weglänge).[32] Dann ist

$$m = \int_\gamma \rho$$

die Masse des Drahts. Sein Schwerpunkt ist

$$\overline{x} = (\overline{x_1}, \overline{x_2}, \overline{x_3})$$

mit

$$\overline{x_k} = \frac{1}{m} \int_\gamma \mathrm{pr}_k \cdot \rho = \frac{1}{m} \int_{[a,b]} \gamma_k(t) \rho(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\|_2 \, dt$$

für $k \in \{1, 2, 3\}$. Ist ρ konstant, so ist $m = \rho \cdot L(\gamma)$ und

$$\overline{x_k} = \frac{1}{L(\gamma)} \int_{[a,b]} \gamma_k(t) \|\gamma'(t)\|_2 \, dt.$$

Definition 16.3 [Wegintegrale zweiter Art] Ist ein Weg $\gamma\colon [a, b] \to \mathbb{R}^n$ stückweise C^1 und

$$F\colon \gamma([a, b]) \to \mathbb{R}^n$$

stetig,[33] so definieren wir

$$\int_\gamma \langle F, d\vec{s} \rangle := \int_\gamma F \cdot d\vec{s} := \int_a^b \langle F(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle \, dt$$

mit dem Skalarprodukt

$$\langle x, y \rangle := x \cdot y := \sum_{k=1}^n x_k y_k$$

für $x = (x_1, \ldots, x_n)$ und $y = (y_1, \ldots, y_n)$ in $\mathbb{R}^n$. Ist γ nicht C^1, so ist hierbei

$$\int_a^b \langle F(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle \, dt := \sum_{j=1}^m \int_{t_{j-1}}^{t_j} \langle F(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle \, dt$$

wobei $Z = \{t_0, t_1, \ldots, t_m\}$ eine Zerlegung von $[a, b]$ ist derart, dass $\gamma|_{[t_{j-1}, t_j]}$ ein C^1-Weg ist für alle $j \in \{1, \ldots, m\}$.

[32] Ist der Draht an verschiedenen Stellen unterschiedlich gezogen worden oder verrostet, braucht ρ nicht konstant sein.

[33] Wir benutzen die selbe Notation auch, wenn F auf einer größeren Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ (z.B. auf ganz $\mathbb{R}^n$) definiert ist.

Beispiel 16.4 Es sei $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ein stetiges Kraftfeld, also $F(x) \in \mathbb{R}^3$ ein Kraftvektor, der an der Stelle $x \in \mathbb{R}^3$ auf ein Teilchen wirkt. Sei $\gamma(t) \in \mathbb{R}^3$ die Position des Teilchens zur Zeit t. Die bei der Bewegung des Teilchens längs einer C^1-Kurve $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^3$ aufgewandte Energie (geleistete Arbeit) ist dann

$$E = -\int_\gamma F \cdot d\vec{s}.$$

Satz 16.5 *Es sei $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ ein C^1-Weg und $\phi\colon [c,d] \to [a,b]$ eine bijektive C^1-Funktion. Für alle stetigen Funktionen $f\colon \gamma([a,b]) \to \mathbb{R}$ und $F\colon \gamma([a,b]) \to \mathbb{R}^n$ gilt dann*

$$\int_\gamma f = \int_{\gamma\circ\phi} f$$

und

$$\int_\gamma \langle F, d\vec{s}\rangle = \pm \int_{\gamma\circ\phi} \langle F, d\vec{s}\rangle,$$

wobei das positive Vorzeichen zu wählen ist, wenn ϕ streng monoton wachsend ist; ist ϕ streng monoton fallend, so tritt das Minuszeichen auf.

Beweis. Ist ϕ streng monoton wachsend, so ist überall $\phi'(t) \geq 0$. Weiter ist $\phi(c) = a$, $\phi(d) = b$ und die Substitution $u = \phi(t)$ liefert

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma\circ\phi} f &= \int_c^d f(\gamma(\phi(t)))\|(\gamma\circ\phi)'(t)\|_2\, dt = \int_c^d f(\gamma(\phi(t)))|\phi'(t)|\, \|\gamma'(\phi(t))\|_2\, dt \\
&= \int_c^d f(\gamma(\phi(t)))\phi'(t)\|\gamma'(\phi(t))\|_2\, dt = \int_{\phi(c)}^{\phi(d)} f(\gamma(u))\|\gamma'(u)\|_2\, du \\
&= \int_a^b f(\gamma(u))\|\gamma'(u)\|_2\, du = \int_\gamma f.
\end{aligned}$$

Ebenso ist dann

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma\circ\phi} \langle F, d\vec{s}\rangle &= \int_c^d \langle F(\gamma(\phi(t))), \gamma'(\phi(t))\phi'(t)\rangle\, dt \\
&= \int_c^d \langle F(\gamma(\phi(t))), \gamma'(\phi(t))\rangle \phi'(t)\, dt \\
&= \int_a^b \langle F(\gamma(u)), \gamma'(u)\rangle \phi'(t)\, du \\
&= \int_\gamma \langle F, d\vec{s}\rangle.
\end{aligned}$$

Ist γ streng monoton fallend, so ist überall $\gamma(t) \leq 0$, weiter $\gamma(c) = b$ und $\gamma(d) = a$. Wir erhalten

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma\circ\phi} f &= \int_c^d f(\gamma(\phi(t)))\|(\gamma\circ\phi)'(t)\|_2\,dt = \int_c^d f(\gamma(\phi(t)))|\phi'(t)|\,\|\gamma'(\phi(t))\|_2\,dt \\
&= -\int_c^d f(\gamma(\phi(t)))\phi'(t)\|\gamma'(\phi(t))\|_2\,dt = -\int_{\phi(c)}^{\phi(d)} f(\gamma(u))\|\gamma'(u)\|_2\,du \\
&= -\int_b^a f(\gamma(u))\|\gamma'(u)\|_2\,du = \int_a^b f(\gamma(u))\|\gamma'(u)\|_2\,du = \int_\gamma f
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma\circ\phi} \langle F, d\vec{s}\rangle &= \int_c^d \langle F(\gamma(\phi(t))), \gamma'(\phi(t))\phi'(t)\rangle\,dt \\
&= \int_c^d \langle F(\gamma(\phi(t))), \gamma'(\phi(t))\rangle\phi'(t)\,dt \\
&= \int_b^a \langle F(\gamma(u)), \gamma'(u)\rangle\phi'(t)\,du = -\int_a^b \langle F(\gamma(u)), \gamma'(u)\rangle\phi'(t)\,du \\
&= -\int_\gamma \langle F, d\vec{s}\rangle.
\end{aligned}$$

□

17 Partielle Differenzierbarkeit

In diesem Abschnitt lernen wir partielle Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ einer Funktion f in mehreren Variablen kennen, d.h. Ableitungen nach einer der Variablen (hier der i-ten) bei festgehaltenen übrigen Variablen. Dies führt uns weiter zu stetig partiell differenzierbaren Funktionen und k mal stetig partiell differenzierbaren Funktionen.

Im Folgenden bezeichnen $e_1 = (1, 0, \ldots, 0)$, …, $e_m = (0, 0, \ldots, 1)$ die Standard-Basisvektoren von $\mathbb{R}^m$.

Definition 17.1 Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^m$ offen. Ist $f\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ eine Funktion, $i \in \{1, \ldots, m\}$ und $x \in U$, so nennen wir

$$D_i f(x) := \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) := \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} := \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(f(x + te_i) - f(x))$$

die partielle Ableitung von f nach der i-ten Variablen an der Stelle x, wenn der Grenzwert existiert.

Bemerkung 17.2 (a) Eine weitere Schreibweise für die partielle Ableitung (die ich nicht benutze) ist f_{x_i}.

(b) Im Falle einer Funktion $(x, y) \mapsto f(x, y)$ schreibt man auch $\frac{\partial f}{\partial x}$ und $\frac{\partial f}{\partial y}$ statt $D_1 f$ und $D_2 f$. Entsprechend bei anderen Buchstaben für die Komponenten.

Bemerkung 17.3 Wollen wir (zum Beispiel) $\frac{\partial f}{\partial x_1}(x)$ in einem festen Punkt $x = (x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m$ berechnen, so können wir die folgende Funktion einer Variablen betrachten,

$$\gamma \colon V \to \mathbb{R}^n, \quad \gamma(t) := f(t, x_2, \ldots, x_m),$$

die auf der Menge

$$V := \{t \in \mathbb{R} \colon (t, x_2, \ldots, x_m) \in U\}$$

definiert ist. Die Menge V enthält $t = x_1$ und ist offen in $\mathbb{R}$ (denn U ist offen und $V = h^{-1}(U)$ mit der stetigen Abbildung $h \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$, $t \mapsto (t, x_2, \ldots, x_m)$). Dann ist

$$\frac{d\gamma}{dt}(x_1) = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}(\gamma(x_1 + t) - \gamma(x_1)) = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}(f(x + te_1) - f(x)) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x),$$

wann immer der Grenzwert existiert. Also:

Wir erhalten die partielle Ableitung $\frac{\partial f}{\partial x_1}(x)$, indem wir alle Variablen außer der ersten konstant halten und die so erhaltene Funktion der einen Variablen x_1 nach x_1 ableiten.

Letztere Ableitung kann komponentenweise berechnet werden (vgl. die Diskussion von Wegen und ihren Ableitungen im vorigen Kapitel), d.h. ist $f = (f_1, \ldots, f_n)$, so ist

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \Big(\frac{\partial f_1}{\partial x_i}(x), \ldots, \frac{\partial f_n}{\partial x_i}(x)\Big).$$

Beispiele 17.4 (a) Für $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) := x + y^2 + 1$ erhalten wir die partielle Ableitung nach x, indem wir bei festem y wie in Analysis 1 nach x ableiten

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}(x + y^2 + 1) = 1.$$

Die partielle Ableitung nach y erhalten wir, indem wir x festhalten und nach y ableiten:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\frac{\partial}{\partial y}(x + y^2 + 1) = 2y.$$

(b) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $f(x,y) = (x+y, xy, 1+xe^y)$ hat die partiellen Ableitungen

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= (1, y, e^y) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= (1, x, xe^y). \end{aligned}$$

(c) Jede konstante Funktion $U \to \mathbb{R}^n$, $x \mapsto c$ auf einer offenen Menge $U \subseteq \mathbb{R}^m$ ist überall partiell differenzierbar, mit $\frac{\partial c}{\partial x_i}(x) = 0$.

(d) Die partiellen Ableitungen der Funktion $\mathrm{pr}_i\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(x_1, \ldots, x_m) \mapsto x_i$ sind

$$\frac{\partial\,\mathrm{pr}_i}{\partial x_j}(x) = \frac{\partial x_i}{\partial x_j}(x) = \begin{cases} 1 & \text{wenn } i = j; \\ 0 & \text{wenn } i \neq j. \end{cases}$$

Es ist also $\frac{\partial\,\mathrm{pr}_i}{\partial x_j}(x) = \delta_{i,j}$ durch das sogenannte "Kroneckersche delta" gegeben.

Definition 17.5 Eine Abbildung $f\colon U \to \mathbb{R}^n$ auf einer offenen Menge $U \subseteq \mathbb{R}^m$ heißt *stetig partiell differenzierbar* (kurz *partiell* C^1), wenn f stetig ist, für alle $i \in \{1, \ldots, m\}$ die partielle Ableitung $\frac{\partial F}{\partial x_i}(x)$ an jeder Stelle $x \in U$ existiert und die Abbildung

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}\colon U \to \mathbb{R}^n, \qquad x \mapsto \frac{\partial F}{\partial x_i}(x)$$

stetig ist.

Beispiele 17.6 All die Beispiele aus 17.4 sind partiell C^1, denn sie sind stetig, all ihre partiellen Ableitungen existieren und die obigen Formeln zeigen, dass diese auch stetig sind.

Bemerkung 17.7 Ist $U \subseteq \mathbb{R}^m$ offen, $f\colon U \to \mathbb{R}^n$ überall nach der ersten Variablen partiell differenzierbar und $\frac{\partial f}{\partial x_1}\colon U \to \mathbb{R}^n$ stetig, so ist für festes $x = (x_1, \ldots, x_m) \in U$ die Funktion

$$\gamma\colon V \to \mathbb{R}^n, \quad \gamma(t) := f(t, x_2, \ldots, x_n)$$

von $t \in V \subseteq \mathbb{R}$ (wie in der vorigen Bemerkung) überall differenzierbar und

$$\gamma'(t) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(t, x_2, \ldots, x_m) \tag{86}$$

stetig in t. Für alle $s, t \in V$, deren Verbindungsstrecke ganz in V liegt, ist nach dem Hauptsatz der Integral- und Differentialrechnung also

$$\gamma(s) - \gamma(t) = \int_t^s \gamma'(r)\, dr = \int_0^1 \gamma'(t + u(s-t))(s-t)\, du,$$

wobei noch $r = t + u(s-t)$ mit $u \in [0,1]$ und $dr = (s-t)du$ substituiert wurde. Setzen wir (86) und die Definition von γ in die vorige Gleichung ein, so erhalten wir

$$\begin{aligned} & f(s, x_2, \ldots, x_m) - f(t, x_2, \ldots, x_m) \\ &= \int_t^s \frac{\partial f}{\partial x_1}(r, x_2, \ldots, x_m)\, dr \\ &= (s-t) \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(t + u(s-t), x_2, \ldots, x_m)\, du. \end{aligned} \tag{87}$$

Ableitungen nach Parametern und Integration können vertauscht werden, man kann "unter dem Integralzeichen ableiten":

Satz 17.8 (Differenzierbarkeit parameterabhängiger Integrale) *Es seien $I \subseteq \mathbb{R}$ offen, $a < b$ reelle Zahlen und*

$$f\colon I \times [a,b] \to \mathbb{R}^n, \quad (s,t) \mapsto f(s,t)$$

eine stetige Funktion derart, dass $\frac{\partial f}{\partial s}\colon I \times [a,b] \to \mathbb{R}$ existiert und stetig ist. Dann ist

$$g\colon I \to \mathbb{R}^n, \quad g(s) := \int_a^b f(s,t)\, dt$$

eine C^1-Funktion und

$$\frac{dg}{ds}(s) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial s}(s,t)\, dt. \tag{88}$$

Also $\frac{d}{ds}\int_a^b f(s,t)\,dt = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial s}(s,t)\,dt$.

Beweis. Wir dürfen annehmen, dass I ein Intervall ist. Durch Betrachtung der einzelnen Komponenten dürfen wir außerdem annehmen, dass $n = 1$ ist, somit f und g reellwertige Funktionen sind. Gegeben $r, s \in I$ mit $r \neq s$ ist

$$\begin{aligned} \frac{g(r)-g(s)}{r-s} &= \frac{1}{r-s}\left(\int_a^b f(r,t)\,dt - \int_a^b f(s,t)\,dt\right) \\ &= \int_a^b \frac{f(r,t)-f(s,t)}{r-s}\,dt \\ &= \int_a^b \left(\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial s}(s+\sigma(r-s),t)\,d\sigma\right)dt, \end{aligned} \tag{89}$$

wobei Bemerkung 17.7 auf die letzte Gleichheit führt. Da die Funktion

$$I \times [a,b] \times [0,1] \to \mathbb{R}, \quad (r,t,\sigma) \mapsto \frac{\partial f}{\partial s}(s+\sigma(r-s),t)$$

stetig ist, ist nach Satz 14.21 (über die Stetigkeit parameterabhängiger Integrale) die Funktion

$$h\colon I \times [a,b] \to \mathbb{R}, \quad h(r,t) := \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial s}(s+\sigma(r-s),t)\,d\sigma$$

stetig. Diese erfüllt

$$h(s,t) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial s}(s+\underbrace{\sigma(s-s)}_{=0},t)\,d\sigma = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial s}(s,t)\,d\sigma = \frac{\partial f}{\partial s}(s,t). \tag{90}$$

Nochmalige Anwendung des Satzes liefert die Stetigkeit der Abbildung

$$\Delta\colon I \to \mathbb{R}, \quad \Delta(r) := \int_a^b h(r,t)\,dt \;=\; \int_a^b \left(\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial s}(s+\sigma(r-s),t)\,d\sigma\right)dt.$$

Diese erfüllt wegen (90)

$$\Delta(s) = \int_a^b h(s,t)\,dt \;=\; \int_a^b \frac{\partial f}{\partial s}(s,t)\,dt. \tag{91}$$

Nun gilt nach (89) für $r \in I \setminus \{s\}$

$$\frac{g(r)-g(s)}{r-s} = \Delta(r) \to \Delta(s) \;=\; \int_a^b \frac{\partial f}{\partial s}(s,t)\,dt$$

für $r \to s$, wobei die Stetigkeit von Δ benutzt wurde und dann (91). Also gilt (88). $\square$

Analoges gilt, wenn I ein (nicht notwendig offenes) nicht-entartetes Intervall ist.

Beispiel 17.9 Wir wollen das Integral

$$\int_0^1 xe^x\,dx$$

berechnen, ohne partielle Integration zu benutzen. Hierzu beachten wir, dass $xe^x = \frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=1} e^{tx}$. Die Funktion

$$f\colon\ ]0,\infty[\,\times[0,1] \to \mathbb{R}, \quad f(tx) = e^{tx}$$

erfüllt

$$\int_0^1 f(t,x)\,dx = \int_0^1 e^{tx}\,dx = \left[\frac{1}{t}e^{tx}\right]_0^1 = \frac{e^t-1}{t},$$

ist stetig und hat die partielle Ableitung $\frac{\partial f}{\partial t}(t,x) = \frac{\partial}{\partial t}e^{tx} = xe^{tx}$, welche stetig in (t,x) ist. Nach Satz 17.8 gilt also

$$\begin{aligned}
\int_0^1 xe^x\,dx &= \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=1} e^{tx}\,dx \\
&= \frac{d}{dt}\Big|_{t=1} \int_0^1 e^{tx}\,dx \\
&= \frac{d}{dt}\Big|_{t=1} \frac{e^t-1}{t} \\
&= \left(\frac{e^t}{t} - \frac{e^t-1}{t^2}\right)\Big|_{t=1} = e-(e-1) = 1.
\end{aligned}$$

Definition 17.10 Sei $U \subseteq \mathbb{R}^m$ offen und $2 \leq k \in \mathbb{N}$. Rekursiv definieren wir: Eine Funktion $f\colon U \to \mathbb{R}$ heißt *$k$mal stetig partiell differenzierbar* (kurz: *partiell C^k*), wenn f partiell C^1 und für alle $i \in \{1,\ldots,m\}$ die partielle Ableitung

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}\colon U \to \mathbb{R}$$

partiell C^{k-1} ist.

Bemerkung 17.11 (a) Also ist f genau dann partiell C^k, wenn f stetig ist, für alle $j \in \mathbb{N}$ mit $j \leq k$ und $i_1, \ldots, i_j \in \{1, \ldots, m\}$ die partielle Ableitung

$$\frac{\partial^j f}{\partial x_{i_j} \cdots \partial x_{i_1}}(x) := \left(\frac{\partial}{\partial x_{i_j}} \cdots \frac{\partial}{\partial x_{i_1}} f \right)(x)$$

für alle $x \in U$ existiert und

$$\frac{\partial^j f}{\partial x_{i_j} \cdots \partial x_{i_1}} \colon U \to \mathbb{R}^m$$

stetig ist.

(b) Da wir partielle Ableitungen komponentenweise ausrechnen können, ist $f = (f_1, \ldots, f_n)$ genau dann partiell C^k, wenn jede der Komponenten $f_1, \ldots, f_n \colon U \to \mathbb{R}$ partiell C^k ist. Weiter ist

$$\frac{\partial^j f}{\partial x_{i_j} \cdots \partial x_{i_1}} = \left(\frac{\partial^j f_1}{\partial x_{i_j} \cdots \partial x_{i_1}}, \ldots, \frac{\partial^j f_n}{\partial x_{i_j} \cdots \partial x_{i_1}} \right)$$

(c) Statt $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_i}$ schreibt man $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$ (und entsprechend bei mehrfachen Wiederholungen).

(d) Für $\frac{\partial^j f}{\partial x_{i_j} \cdots \partial x_{i_1}}$ gibt es auch die Notation $f_{x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_j}}$ (die ich aber nicht benutzen werde).

Beispiel 17.12 Die Funktion $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) := x^2 y^3$ ist partiell C^2, denn f ist stetig und hat die partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2xy^3 \quad \text{und} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 3x^2 y^2$$

erster Ordnung und die partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 2y^3, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 6x^2 y,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = 6xy^2 \quad \text{und} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 6xy^2$$

zweiter Ordnung, die alle stetig sind.

Wir beobachten, dass

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = 6xy^2 = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)$$

im vorigen Beispiel. Das ist kein Zufall: Bei der Bildung höherer partieller Ableitungen kommt es auf die Reihenfolge nicht an (wie jetzt gezeigt wird).

Satz 17.13 *Ist $U \subseteq \mathbb{R}^m$ offen und $f\colon U \to \mathbb{R}$ partiell C^2, so gilt für alle $i, j \in \{1, \ldots, m\}$*

$$(\forall x \in U) \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x_i x_j}(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j x_i}(x).$$

Beweis. Der Fall $i = j$ ist trivial. Wir dürfen also annehmen, dass $i \neq j$ und (notfalls nach Umbenennen) das $i < j$. Da U offen ist, gibt es zu $y \in U$ ein $r > 0$ derart, dass $B_{2r}^{\|\cdot\|_\infty}(y) \subseteq U$. Wir dürfen annehmen, dass $U = B_{2r}^{\|\cdot\|_\infty}(y)$. Da wir zur Berechnung der partiellen Ableitung alle Variablen außer der $i$ten und $j$ten sowieso festhalten, dürfen wir annehmen, dass $m = 2$ ist, $i = 1$ und $j = 2$. Nach 17.7 haben wir

$$\frac{1}{t}(f(x_1 + t, x_2) - f(x_1, x_2)) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1 + ut, x_2)\, du$$

für $(x_1, x_2) \in B_r^{\|\cdot\|_\infty}(y)$ und $t \in]-r, r[\setminus \{0\}$. Für festes t und x_1 ist die Funktion

$$h\colon\ ]y_2 - r, y_2 + r[\times [0,1] \to \mathbb{R}^n, \qquad h(x_2, u) := \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1 + ut, x_2)$$

stetig und besitzt die partielle Ableitung

$$\frac{\partial h}{\partial x_2}(x_2, u) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(x_1 + ut, x_2).$$

Mit Satz 17.8 folgt

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{t}\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1 + t, x_2) - \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2)\right) \\
&\quad = \frac{\partial}{\partial x_2} \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1 + ut, x_2)\, du \\
&\quad = \int_0^1 \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(x_1 + ut, x_2)\, du
\end{aligned}$$

Wir betrachten nun die stetige Funktion

$$g\colon \left]-r,r\right[\times[0,1] \to \mathbb{R}^n, \quad g(t,u) := \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(x_1 + ut, x_2).$$

Dann ist

$$g(0,u) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(x_1, x_2)$$

unabhängig von u, also

$$\int_0^1 g(0,u)\, du = \int_0^1 \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(x_1,x_2)\, du = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(x_1,x_2).$$

Nach dem Vorigen gilt für $t \in \left]-r,r\right[\setminus \{0\}$:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{t}\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1+t,x_2) - \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1,x_2)\right) \\ &= \int_0^1 g(t,u)\, du \to \int_0^1 g(0,u)\, du \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(x_1,x_2) \end{aligned} \tag{92}$$

nach dem Satz über die Stetigkeit Parameter-abhängiger Integrale. Nun konvergieren die Differenzenquotienten in (92) für $t \to 0$ aber auch gegen $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x_1,x_2)$. Die zwei Grenzwerte sind gleich und somit ist

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(x_1,x_2) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x_1,x_2)$$

bewiesen. □

Definition 17.14 Gegeben $m \in \mathbb{N}$ nennen wir ein m-Tupel $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m) \in (\mathbb{N}_0)^m$ von Zahlen $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{N}_0$ einen *Multiindex*. Die Länge (oder Ordnung) eines Multiindex α ist

$$|\alpha| := \alpha_1 + \cdots + \alpha_m.$$

Ist $U \subseteq \mathbb{R}^m$ offen und $f\colon U \to \mathbb{R}^n$ partiell C^k, so definieren wir

$$\frac{\partial^\alpha f}{\partial x^\alpha} := \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \cdots \frac{\partial^{\alpha_m}}{\partial x_m^{\alpha_m}} f.$$

Für $x = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m$ definieren wir

$$x^\alpha := x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_m^{\alpha_m}$$

als das gezeigte Produkt von Potenzen der Komponenten (Monom). Eine beliebige Polynomfunktion $f\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ lässt sich dann also schreiben in der Form

$$f(x) = \sum_{|\alpha| \le \ell} a_\alpha x^\alpha$$

mit einem $\ell \in \mathbb{N}_0$ und Koeffizienten $a_\alpha \in \mathbb{R}$. Die Summation ist über alle Multiindizes $\alpha \in \mathbb{N}_0^m$ mit $|\alpha| \le \ell$. Sind $\alpha = (\alpha, \dots, \alpha_m)$ und $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_m)$ Multiindizes in $\mathbb{N}_0^m$, so schreiben wir

$$\beta \le \alpha,$$

wenn $\beta_j \le \alpha_j$ für alle $j \in \{1, \dots, m\}$. Wir definieren

$$\alpha! := \alpha_1! \cdots \alpha_m!.$$

Ist $\beta \le \alpha$, so schreiben wir zudem

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} \alpha_m \\ \beta_m \end{pmatrix}.$$

Bemerkung 17.15 Für U wie oben und $r \in \mathbb{N}_0$ schreiben wir $C^r(U, \mathbb{R}^n)$ für den Vektorraum alle Funktionen $f\colon U \to \mathbb{R}^m$, die partiell C^r sind.[34] Für $r \in \mathbb{N}$ und $i \in \{1, \dots, m\}$ können wir die Abbildung

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\colon C^r(U, \mathbb{R}^n) \to C^{r-1}(U, \mathbb{R}^n), \quad f \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

betrachten. Dies ist ein Beispiel eines sogenannten Differentialoperators, der einer Funktion (in diesem Fall) eine ihrer partiellen Ableitungen zuordnet. Die Notation ist nützlich im folgenden Beweis (der in der Vorlesung übersprungen und Ihnen als Übung anvertraut wurde).

Folgerung 17.16 *Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^m$ offen und $f\colon U \to \mathbb{R}^m$ partiell C^k. Ist $\ell \in \mathbb{N}$ mit $\ell \le k$ und sind $i_1, \dots, i_\ell \in \{1, \dots, m\}$, so gilt*

$$\frac{\partial^\ell f}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_\ell}} = \frac{\partial^\ell f}{\partial x_{i_{\sigma(1)}} \cdots \partial x_{i_{\sigma(\ell)}}}$$

für jede Permutation $\sigma\colon \{1, \dots, \ell\} \to \{1, \dots, \ell\}$.

[34] Mit C^0-Funktionen meinen wir stetige Funktionen, und setzen $\frac{\partial^0 f}{\partial x^0} := f$.

Beweis. Für $j \in \{1, \dots, m\}$ sei α_j die Anzahl der $a \in \{1, \dots, \ell\}$ mit $i_a = j$. Wir setzen $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$. Dann ist α_j auch gleich der Zahl der $a \in \{1, \dots, \ell\}$ mit $i_{\sigma(a)} = j$. Es genügt daher zu zeigen, dass

$$\frac{\partial}{\partial x_{i_1}} \cdots \frac{\partial}{\partial x_{i_\ell}} f = \frac{\partial^\alpha f}{\partial x^\alpha}. \tag{93}$$

Wir zeigen (93) per Induktion nach $|\alpha| = \ell$. Für $\ell = 1$ ist nichts zu zeigen (es gibt dann nur die identische Abbildung als Permutation). Wir setzen $\beta := (\beta_1, \dots, \beta_m)$, wobei β_j die Zahl der $a \geq 2$ mit $i_a = j$ ist. Da $|\beta| = \ell - 1$, gilt per Induktion dann

$$\frac{\partial}{\partial x_{i_2}} \cdots \frac{\partial}{\partial x_{i_\ell}} f = \frac{\partial^\beta f}{\partial x^\beta}.$$

Nach dem Satz von Schwarz können wir $\frac{\partial}{\partial x_{i_1}}$ von links nach rechts nacheinander mit $\frac{\partial}{\partial x_1}$ (β_1 mal), ..., $\frac{\partial}{\partial x_{i_1-1}}$ (β_{i_1-1} mal) vertauschen, ohne die partielle Ableitung zu ändern, und erhalten

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial x_{i_2}} \cdots \frac{\partial}{\partial x_{i_\ell}} f &= \frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial^\beta f}{\partial x^\beta} \\
&= \frac{\partial}{\partial x_{i_1}}\frac{\partial^{\beta_1}}{\partial x_1^{\beta_1}} \cdots \frac{\partial^{\beta_{i_1-1}}}{\partial x_{i_1-1}^{\beta_{i_1-1}}}\frac{\partial^{\beta_{i_1}}}{\partial x_{i_1}^{\beta_{i_1}}} \cdots \frac{\partial^{\beta_m}}{\partial x_m^{\beta_m}} f \\
&= \frac{\partial_1^\beta}{\partial x_1^{\beta_1}} \cdots \frac{\partial^{\beta_{i_1-1}}}{\partial x_{i_1-1}^{\beta_{i_1-1}}}\frac{\partial}{\partial x_{i_1}}\frac{\partial^{\beta_{i_1}}}{\partial x_{i_1}^{\beta_{i_1}}} \cdots \frac{\partial^{\beta_m}}{\partial x_m^{\beta_m}} f \\
&= \frac{\partial^\alpha f}{\partial x^\alpha},
\end{aligned}$$

da $\alpha = \beta + e_{i_1}$. □

Satz 17.17 *Es seien $U \subseteq \mathbb{R}^m$ offen und $f \colon U \to \mathbb{R}$, $g, h \colon U \to \mathbb{R}^n$ partiell C^k und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Dann gilt:*

(a) *Die Linearkombination $\lambda g + \mu h$ ist partiell C^k, mit*

$$\frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha}(\lambda g + \mu h) = \lambda \frac{\partial^\alpha g}{\partial x^\alpha} = \mu \frac{\partial^\alpha h}{\partial x^\alpha} \tag{94}$$

für alle $\alpha \in \mathbb{N}_0^m$ mit $|\alpha| \leq k$.

(b) *Das Produkt* $fg\colon U \to \mathbb{R}^n$, $x \mapsto f(x)g(x)$ *ist partiell* C^k *und*

$$\frac{\partial^\alpha(fg)}{\partial x^\alpha} = \sum_{\beta\leq\alpha} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \frac{\partial^\beta f}{\partial x^\beta}\frac{\partial^{\alpha-\beta} g}{\partial x^{\alpha-\beta}} \tag{95}$$

für alle $\alpha \in \mathbb{N}_0^m$ *mit* $|\alpha| \leq k$*, wobei die Summation über alle* $\beta \in \mathbb{N}_0^m$ *mit* $\beta \leq \alpha$ *erfolgt.*

So sieht also die Leibnizregel aus im Falle von Funktionen mehrerer Variablen.

Beweis. (a) Für Funktionen einer Variablen kennen wie dies aus Analysis 1. Sind g und h partiell C^1, so existiert nach Bemerkung 17.3 jede partielle Ableitung von $\lambda g + \mu h$ erster Ordnung und es ist

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(\lambda g + \mu h) = \lambda \frac{\partial g}{\partial x_i} = \mu \frac{\partial h}{\partial x_i}. \tag{96}$$

Als Linearkombination stetiger Funktionen ist $\frac{\partial}{\partial x_i}(\lambda g + \mu h)$ stetig. Also ist $\lambda g + \mu h$ partiell C^1. Für einen Induktionsbeweis nehmen wir an, dass $k \geq 2$ und die Aussage bereits für $k-1$ statt k gilt. Per Induktionsannahme ist $\frac{\partial}{\partial x_i}(\lambda g + \mu h)$ wegen der Summengestalt aus (96) partiell C^{k-1}, somit $\lambda g + \mu h$ partiell C^k. Per Induktionsannahme gilt weiter (94) für alle $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m) \in \mathbb{N}_0^m$ mit $|\alpha| \leq k-1$. Ist $|\alpha| = k$, so gibt es ein $i \in \{1, \ldots, m\}$ mit $\alpha_i > 0$ (und wir wählen i kleinstmöglich). Somit ist auch $\beta := \alpha - e_i \in \mathbb{N}_0^m$. Per Induktionannahme gilt bereits

$$\frac{\partial^\beta}{\partial x^\beta}(\lambda g + \mu h) = \lambda \frac{\partial^\beta g}{\partial x^\beta} = \mu \frac{\partial^\beta h}{\partial x^\beta}.$$

Leiten wir beide Seiten nochmals partiell nach x_i ab, so ergibt sich (94) für α.

(b) Da sich partielle Ableitungen komponentenweise berechnen lassen, dürfen wir $n = 1$ annehmen, d.h. f und g sind reellwertige Funktionen. Sei $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m) \in \mathbb{N}_0^m$. Da sich partielle Ableitungen nach x_m als gewöhnliche Ableitungen bei festgehaltenen übrigen Variablen interpretieren lassen (siehe Bemerkung 17.3), liefert die gewöhnliche Leibnizregel der Analysis 1:

$$\frac{\partial^{\alpha_m}}{\partial x_m^{\alpha_m}}(fg) = \sum_{\beta_m=0}^{\alpha_m} \begin{pmatrix} \alpha_m \\ \beta_m \end{pmatrix} \frac{\partial^{\beta_m} f}{\partial x_m^{\beta_m}} \frac{\partial^{\alpha_m-\beta_m} g}{\partial x_m^{\alpha_m-\beta_m}}. \tag{97}$$

Wir zeigen nun nacheinander für $j = m$, $j = m-1$, …, $j = 1$, dass

$$\begin{aligned}\frac{\partial^{\alpha_j}}{\partial x_j^{\alpha_j}} \cdots \frac{\partial^{\alpha_m}}{\partial x_m^{\alpha_m}}(fg) &= \sum_{\beta_j=0}^{\alpha_j} \cdots \sum_{\beta_m=0}^{\alpha_m} \binom{\alpha_j}{\beta_j} \cdots \binom{\alpha_m}{\beta_m} \\ &\quad \cdot \left(\frac{\partial^{\beta_j}}{\partial x_j^{\beta_j}} \cdots \frac{\partial^{\beta_m}}{\partial x_m^{\beta_m}} f \right) \left(\frac{\partial^{\alpha_j-\beta_j}}{\partial x_j^{\alpha_j-\beta_j}} \cdots \frac{\partial^{\alpha_m-\beta_m}}{\partial x_m^{\alpha_m-\beta_m}} g \right). \quad (98)\end{aligned}$$

Gelingt dies, so haben wir insbesondere für $j = 1$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \cdots \frac{\partial^{\alpha_m}}{\partial x_m^{\alpha_m}}(fg) &= \sum_{\beta_1=0}^{\alpha_1} \cdots \sum_{\beta_m=0}^{\alpha_m} \binom{\alpha_1}{\beta_1} \cdots \binom{\alpha_m}{\beta_m} \\ &\quad \cdot \left(\frac{\partial^{\beta_1}}{\partial x_1^{\beta_1}} \cdots \frac{\partial^{\beta_m}}{\partial x_m^{\beta_m}} f \right) \left(\frac{\partial^{\alpha_1-\beta_1}}{\partial x_1^{\alpha_1-\beta_1}} \cdots \frac{\partial^{\alpha_m-\beta_m}}{\partial x_m^{\alpha_m-\beta_m}} g \right).\end{aligned}$$

Dies ist genau (95). Da alle partiellen Ableitungen bis zur Ordnung k existieren und durch (95) gegeben (und somit stetig) sind, ist fg eine C^k-Funktion und der Beweis beendet. lediglich (98) ist noch zu begründen. Für $j = m$ wurde die Formel in (97) bereits gezeigt. Gilt die Formel für $j+1$ statt j, so können wir wie beim Beweis von (97) alle Variablen außer x_j festhalten in

$$\begin{aligned}\frac{\partial^{\alpha_{j+1}}}{\partial x_{j+1}^{\alpha_{j+1}}} \cdots \frac{\partial^{\alpha_m}}{\partial x_m^{\alpha_m}}(fg) &= \sum_{\beta_{j+1}=0}^{\alpha_{j+1}} \cdots \sum_{\beta_m=0}^{\alpha_m} \binom{\alpha_{j+1}}{\beta_{j+1}} \cdots \binom{\alpha_m}{\beta_m} \\ &\quad \cdot \left(\frac{\partial^{\beta_{j+1}}}{\partial x_{j+1}^{\beta_{j+1}}} \cdots \frac{\partial^{\beta_m}}{\partial x_m^{\beta_m}} f \right) \left(\frac{\partial^{\alpha_{j+1}-\beta_{j+1}}}{\partial x_{j+1}^{\alpha_{j+1}-\beta_{j+1}}} \cdots \frac{\partial^{\alpha_m-\beta_m}}{\partial x_m^{\alpha_m-\beta_m}} g \right)\end{aligned}$$

und α_j mal nach x_j ableiten. Mit der Leibnizregel für Funktionen einer Variablen erhalten wir daraus (98) für das gegebene j. □

Beispiel 17.18 Polynomfunktionen $p\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, $p(x) = \sum_{|\alpha|\leq \ell} a_\alpha x^\alpha$ sind partiell C^k für alle $k \in \mathbb{N}$ (also partiell C^∞). Zum Beweis beobachten wir zunächst, dass die partiellen Ableitungen $\frac{\partial c}{\partial x_i} = 0$ einer konstanten Funktion wieder konstant sind, also partiell C^{k-1} per Induktion, somit die konstante Funktion $x \mapsto c$ partiell C^k. Da $\frac{\partial \operatorname{pr}_j}{\partial x_i} = \delta_{i,j}$ konstant und somit C^{k-1} ist, ist weiter $\operatorname{pr}_j\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x_j$ partiell C^k und somit auch jedes Monom

$q\colon x \mapsto x^\alpha$ nach Satz 17.17 (b), weil ja $q = \mathrm{pr}_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot \mathrm{pr}_m^{\alpha_m}$. Nun ist aber eine allgemeine Polynomfunktion p eine Linearkombination von Monomen x^α, somit partiell C^k nach Satz 17.17 (a).

Der folgende Satz wir im nächsten Kapitel bewiesen. Mit unseren momentanen Begriffen wäre das sehr mühsam. Einfacher ist es, dort mit einem Begriff von *totalen* (statt nur partiellen) Ableitungen zu arbeiten.

Satz 17.19 *Es seien $U \subseteq \mathbb{R}^m$ und $V \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f\colon V \to \mathbb{R}^\ell$ sowie $g = (g_1, \ldots, g_n)\colon U \to \mathbb{R}^n$ stetig partiell differenzierbare Funktionen derart, dass $g(U) \subseteq V$. Dann ist auch die Komposition*

$$f \circ g\colon U \to \mathbb{R}^\ell, \quad x \mapsto f(g(x))$$

stetig partiell differenzierbar, und für alle $i \in \{1, \ldots, m$ und $x \in U$ gilt

$$\frac{\partial(f \circ g)}{\partial x_i}(x) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}(g(x)) \frac{\partial g}{\partial x_j}(x)$$

(wobei wir uns der schöneren Schreibweise wegen erlauben, Vektoren von rechts mit Skalaren zu multiplizieren).

Folgerung 17.20 *Sind f und g partiell C^k in der Situation von Satz* 17.19*, so ist auch $f \circ g$ partiell C^k.*

Beweis. Wir beweisen die Aussage per Induktion nach $k \in \mathbb{N}$. Für $k = 1$ gilt sie nach Satz 17.19. Ist $k \geq 2$ und gilt die Aussage für $k - 1$ statt k, so ist $f \circ g$ nach Satz 17.19 partiell C^1 und

$$\frac{\partial(f \circ g)}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^n \Big(\frac{\partial f}{\partial x_j} \circ g\Big) \frac{\partial g}{\partial x_j} \tag{99}$$

für alle $i \in \{1, \ldots, m\}$. Da g und $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ partiell C^{k-1} sind, ist

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} \circ g$$

nach Induktionsannahme partiell C^{k-1}. Nach Satz 17.17 (b) ist nun auch $\big(\frac{\partial f}{\partial x_j} \circ g\big) \frac{\partial g}{\partial x_j}$ partiell C^{k-1} und also auch die Summe (99), nach Satz 17.17 (a). □

Beispiel 17.21 Jede rationale Funktion in mehreren Variablen ist partiell C^∞. Seien nämlich $p, q\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ Polynomfunktionen mit $q \neq 0$. Dann ist

$$U := \{x \in \mathbb{R}^n \colon q(x) \neq 0\} = q^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$$

eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^n$. Da die Funktion

$$\iota\colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, \quad y \mapsto \frac{1}{y}$$

C^∞ ist (wie wir aus der Analysis 1 wissen) und somit (was bei Funktionen einer Variablen das gleiche ist) partiell C^∞, ist nach der Kettenregel die Funktion

$$\iota \circ q|_U\colon U \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{1}{q(x)}$$

partiell C^∞. Also ist auch das Produkt

$$U \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{p(x)}{q(x)} = p(x)\frac{1}{q(x)}$$

partiell C^∞, nach Satz 17.17.

Beispiel 17.22 Den Raum $\mathbb{R}^{n\times m}$ der reellen $(n \times n)$-Matrizen können wir mit $\mathbb{R}^{nm}$ identifizieren, indem wir die Matrixeinträge in einer festen Reihenfolge auflisten. Mit dieser Identifizierung gilt:

Die Menge $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ *aller invertierbaren* $(n \times n)$*-Matrizen ist offen in* $\mathbb{R}^{n\times n}$ *und die Abbildung*

$$\eta\colon\ \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^{n\times n}, \quad A \mapsto A^{-1},$$

die einer invertierbaren Matrix ihre Inverse zuordnet, ist partiell C^∞*.*

Die Determinante $\det\colon \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$ ist nämlich ein Polynom in den Matrixeinträgen, somit stetig und folglich ist

$$\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n}\colon\ \det(A) \neq 0\} = \det^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$$

offen in $\mathbb{R}^{n\times n}$. Die Abbildung η ist partiell C^∞, wenn jede ihrer Komponenten es ist. Nun kann jedoch ein gegebener Matrixeintrag der inversen Matrix A^{-1} nach der Cramerschen Regel ausgedrückt werden als Quotient zweier Determinanten von Matrizen gebildet aus Einträgen von A (und Einsen und Nullen und Vorzeichen); er ist somit eine rationale Funktion in A und somit partiell C^∞ nach dem vorigen Beispiel.

Es ist nicht sehr natürlich, lediglich (für partielle Ableitungen) in Richtung der Koordinatenachsen abzuleiten. Allgemeiner kann man auch Richtungsableitungen in anderen Richtungen betrachten.

Definition 17.23 Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^m$ offen und $f\colon U \to \mathbb{R}^m$ eine Funktion. Sei $x \in U$ und $y \in \mathbb{R}^m$. Wir definieren die Richtungsableitung $(D_y f)(x)$ von f an der Stelle x in Richtung y als

$$(D_y f)(x) := \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}(f(x+ty) - f(x)) \in \mathbb{R}^n$$

(mit $t \neq 0$), wann immer der Grenzwert existiert.

Analog kann man $(D_y f)(x) \in F$ definieren, wenn $\mathbb{R}^m$ und $\mathbb{R}^n$ durch normierte Räume $(E, \|\cdot\|_E)$ und $(F, \|\cdot\|_F)$ ersetzt werden.

Die folgende Beobachtung erleichtert uns später einmal einen Beweis.

Bemerkung 17.24 In der Definition 17.5 stetig partiell differenzierbarer Abbildungen hätten wir die Stetigkeit von f nicht verlangen müssen, diese folgt aus den anderen Annahmen. Genauer:

Ist $U \subseteq \mathbb{R}^m$ offen und $f\colon U \to \mathbb{R}^n$ eine Abbildung derart, dass die partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x_i}\colon U \to \mathbb{R}^n$ für alle $i \in \{1, \ldots, m\}$ existieren und stetig sind, so ist auch f stetig und somit f partiell C^1.

Wir könnten dies jetzt per Hand nachrechnen, jedoch folgt die Aussage auch aus späteren Resultaten (und dann können Sie hierher noch einmal zurückkehren). Aus den Voraussetzungen folgt nämlich, dass f an jeder Stelle total differenzierbar ist (für diesen Beweisteil von Satz 18.12 wird die Stetigkeit von f nicht benutzt) und somit stetig, nach Bemerkung 18.2 (c).

18 Differenzierbarkeit

In diesem Kapitel lernen wir einen sehr natürlichen, Koordinaten-unabhängigen Ableitungsbegriff (der totalen Ableitung) kennen. Die Kettenregel ist für diesen einfach zu beweisen. Jenseits von Funktionen mehrerer reeller Variablen können sogar Abbildungen zwischen offenen Teilmengen von normierten Räumen behandelt werden. Im endlich-dimensionalen Fall stellen wir die Verbindung zu partiellen Ableitungen her.

Eine zentrale Grundidee der Differentialrechung für Funktionen einer Variablen war, eine Funktion f um eine Stelle x durch eine affin-lineare Funktion (die Tangente an den Graphen von f) zu approximieren. Wir haben gesehen, dass die Differenzierbarkeit von f in x äquivalent ist zur Existenz einer affin-linearen Approximation von f um x. Im Falle von Funktionen mehrerer Variablen benutzen wir letztere als *Definition* von Differenzierbarkeit:

Definition 18.1 Es seien $(E, \|.\|_E)$ und $(F.\|.\|_F)$ normierte Räume,[35] $U \subseteq E$ eine offene Menge, $f\colon U \to F$ eine Abbildung und $x \in U$. Ist $A\colon E \to F$ eine stetige lineare Abbildung (also $A \in \mathcal{L}(E,F)$), so gilt

$$(\forall y \in U) \qquad f(y) = f(x) + A(y-x) + R(y) \tag{100}$$

mit $R(y) := f(y) - f(x) - A(y-x)$. Dann ist also $R(x) = 0$. Kann $A \in \mathcal{L}(E,F)$ so gewählt werden, dass[36]

$$\lim_{y\to x} \frac{R(y)}{\|y-x\|_E} = 0 \quad \text{in } F, \tag{101}$$

so nennen wir f (total) *differenzierbar* an der Stelle x.

Bemerkung 18.2 (a) Die Bedingung (101) bedeutet, dass

$$\lim_{y\to x} \frac{\|R(y)\|_F}{\|y-x\|_E} = 0. \tag{102}$$

In der Literatur gibt es hierfür auch die Kurzschreibweise $R(y) = o(\|y-x\|)$ (Landausches klein-o-Symbol).

(b) Ist f an der Stelle x differenzierbar, so ist $A \in \mathcal{L}(E,F)$ durch (100) und (101) eindeutig festgelegt, denn wir zeigen, dass für alle $u \in E$

$$A(u) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(f(x+tu) - f(x)) = (D_u f)(x) \tag{103}$$

gleich der Richtungsableitung von f in x in der Richtung u ist. Dies ist klar, wenn $u = 0$ (dann ist $A(u) = 0 = (D_0 f)(x)$). Ist $u \neq 0$, so gilt

$$\begin{aligned}\left\|\frac{1}{t}(f(x+tu) - f(x)) - A(u)\right\|_F &= \left\|\frac{R(tu)}{t}\right\|_F = \|u\|_E \frac{\|R(x+tu)\|_F}{\|tu\|_E} \\ &= \|u\|_E \frac{\|R(x+tu)\|_F}{\|(x+tu)-x\|_E} \to 0\end{aligned}$$

[35] Zum Beispiel $E = \mathbb{R}^m$ und $F = \mathbb{R}^n$.
[36] Für $y \neq x$.

für $t \to 0$ (nach (a)), somit (wie benötigt) $\frac{1}{t}(f(x+tu) - f(x)) \to A(u)$.

Fortan – nachdem die Eindeutigkeit geklärt ist – schreiben wir $f'(x) := A$. Dann ist also $f'(x)$ die eindeutige stetige lineare Abbildung $E \to F$ mit

$$f(y) = f(x) + f'(x)(y - x) + R(y) \tag{104}$$

und (101). Wir nennen die lineare Abbildung $f'(x)\colon E \to F$ die (totale) *Ableitung* von f an der Stelle x. Weiter nennen wir die Funktion

$$E \to F, \quad y \mapsto f(x) + f'(x)(y - x)$$

die *affin-lineare Approximation* von f um die Stelle x. Aus (103) wird die wichtige und nützliche Formel

$$(\forall u \in E) \qquad f'(x)(u) = (D_u f)(x). \tag{105}$$

(c) Ist f an der Stelle x total differenzierbar, so ist f an der Stelle x stetig. Denn für $y \to x$ mit $y \neq x$ gilt

$$\begin{aligned} \|f(y) - f(x)\|_F &= \|f'(x)(y-x) + R(y)\|_F \leq \|f'(x)(y-x)\|_F + \|R(y)\|_F \\ &\leq \|f'(x)\|_{op}\|y - x\|_E + \|y - x\|_E \frac{\|R(y)\|_F}{\|y - x\|_E} \to 0 \end{aligned}$$

(da alle drei Bestandteile gegen 0 gehen, siehe (a)).

(d) Ist $E = \mathbb{R}^m$ und $F = \mathbb{R}^n$, so ist $f = (f_1, \ldots, f_n)$ und wir erhalten wir nach (105) für den Standard-Einheitsvektor e_j von $\mathbb{R}^m$

$$f'(x)(e_j) = (D_{e_j} f)(x) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_j}(x) \\ \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_j}(x) \end{pmatrix}.$$

Die lineare Abbildung $f'(x)\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ entspricht bezüglich den Standard-Basen also der $(n \times m)$-Matrix

$$J_f(x) := \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m}(x) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_m}(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(x) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_m}(x) \end{pmatrix},$$

der sogenannten *Jacobi-Matrix*. Schreibt man Vektoren aus $\mathbb{R}^m$ und $\mathbb{R}^n$ als Spaltenvektoren, so wird aus (104)

$$f(y) = f(x) + J_f(x)(y - x) + R(y),$$

wobei die Matrix und der Spaltenvektor in der üblichen Art und Weise multipliziert werden.

(e) Ist $f\colon U \to F$ an jeder Stelle $x \in U$ differenzierbar und die Abbildung

$$f'\colon U \to (\mathcal{L}(E,F), \|.\|_{op}), \quad x \mapsto f'(x)$$

stetig, so nennen wir f *stetig differenzierbar* oder (kurz) eine C^1*-Funktion*.

Beispiele 18.3 (a) Jede konstante Funktion $f\colon E \to F$ zwischen normierten Räumen ist an jeder Stelle $x \in E$ differenzierbar mit $f'(x) = 0$, denn es ist

$$f(y) = c = f(x) = f(x) + 0(y - x) + R(y)$$

mit $R(y) = 0$. Da die konstante Funktion $f'\colon E \to \mathcal{L}(E,F), \quad x \mapsto 0$ stetig ist, ist f stetig differenzierbar.

(b) Jede stetige lineare Abbildung $\lambda\colon E \to F$ zwischen normierten Räumen ist an jeder Stelle $x \in E$ differenzierbar mit $\lambda'(x) = \lambda$, denn wegen der Linearität ist

$$\lambda(y) = \lambda(x) + \lambda(y - x) = \lambda(x) + \lambda(y - x) + R(y)$$

mit $R(y) = 0$. Da die konstante Funktion $\lambda'\colon E \to \mathcal{L}(E,F)$, $x \mapsto \lambda$ stetig ist, ist λ stetig differenzierbar.

(c) Seien $(E_1, \|\cdot\|_1)$, $(E_2, \|\cdot\|_2)$ und $(F, \|\cdot\|_F)$ normierte Räume und

$$\beta\colon E_1 \times E_2 \to F, \quad (x_1, x_2) \mapsto \beta(x_1, x_2)$$

eine stetige bilineare Abbildung. Dann ist β an jeder Stelle $x = (x_1, x_2)$ differenzierbar, denn für alle $y = (y_1, y_2) \in E_1 \times E_2$ gilt

$$\begin{aligned}
\beta(y) &= \beta(y_1, y_2) = \beta(x_1 + (y_1 - x_1), x_2 + (y_2 - x_2)) \\
&= \beta(x_1, x_2) + \beta(x_1, y_2 - y_1) + \beta(y_1 - x_1, x_2) + \beta(y_1 - x_1, y_2 - x_2) \\
&= \beta(x) + A(y - x) + R(y)
\end{aligned}$$

mit der linearen Abbildung

$$A\colon E_1 \times E_2 \to F, \quad z = (z_1, z_2) \to \beta(x_1, z_2) + \beta(z_1, x_2)$$

und $R(y) := \beta(y_1 - x_1, y_2 - x_1)$. Die lineare Abbildung A ist stetig, da

$$\begin{aligned} \|A(z)\|_F &\leq \|\beta(x_1, z_2)\|_F + \|\beta(z_1, x_2)\|_F \\ &\leq \|\beta\|_{op}\|x_1\|_1\|z_2\|_2 + \|\beta\|_{op}\|z_1\|_1\|x_2\|_2 \\ &\leq \|\beta\|_{op}(\|x_1\|_1 + \|x_2\|_2)\max\{\|z_1\|_1, \|z_2\|_2\} = C\|z\| \quad (106) \end{aligned}$$

mit $C := \|\beta\|_{op}(\|x_1\|_1 + \|x_2\|_2)$ und $\|z\| := \max\{\|z_1\|_1, \|z_2\|_2\}$. Weiter gilt

$$\begin{aligned} \frac{\|R(y)\|_F}{\|y-x\|} &\leq \frac{\|\beta\|_{op}\|y_1 - x_1\|_1\|y_2 - x_2\|_2}{\|y-x\|} \\ &\leq \frac{\|\beta\|_{op}\|y-x\|^2}{\|y-x\|} = \|\beta\|_{op}\|y-x\| \to 0 \end{aligned}$$

für $y \to x$. Also ist β an der Stelle x differenzierbar mit $\beta'(x) = A$, d.h. es ist

$$\beta'(x)(z) = \beta(x_1, z_1) + \beta(z_1, x_2).$$

Da β bilinear ist, ist $\beta'(x)(z)$ linear in x (wie die vorige Formel zeigt), also $\beta'\colon E_1 \times E_2 \to \mathcal{L}(E_1, \times E_2, F)$, $x \mapsto \beta'(x)$ eine lineare Abbildung. Diese ist stetig, denn nach (106) ist

$$\|\beta'(x)\|_{op} \leq \|\beta\|_{op}(\|x_1\|_1 + \|x_2\|_2) \leq 2\|\beta\|_{op}\|x\|$$

und somit $\|\beta'\|_{op} \leq 2\|\beta\|_{op}$. Also ist β stetig differenzierbar.

Bemerkung 18.4 Ist eine reellwertige Funtion $f\colon U \to \mathbb{R}$ an der Stelle $x \in U \subseteq \mathbb{R}^n$ differenzierbar, so ist $J_f(x) = (\frac{\partial f}{\partial x_1}(x) \ldots \frac{\partial f}{\partial x_n}(x))$ eine $(1 \times n)$-Matrix. Ihre transponierte Matrix ist ein Spaltenvektor, der *Gradient*

$$(\operatorname{grad} f)(x) := (\nabla f)(x) := \Big(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x)\Big)^t \in \mathbb{R}^n;$$

das hier auftretende Symbol ∇ wird "Nabla" ausgesprochen.

Der Gradient zeigt in die Richtung des steilsten Anstiegs.

Satz 18.5 *Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f\colon U \to \mathbb{R}$ eine Funktion, die an der Stelle $x \in U$ differenzierbar ist, mit $\nabla f(x) \neq 0$. Die Richtungsableitung*

$$D_u f(x)$$

in Richtung eines auf $\|u\|_2 = 1$ normierten Vektors ist genau dann maximal, wenn

$$u = \frac{1}{\|\nabla f(x)\|_2} \nabla f(x).$$

In Gegenrichtung wird die Richtungsableitung minimal.

Beweis. Die Richtungsableitung ist

$$D_u f(x) = f'(x)(u) = J_f(x)u = \langle \nabla f(x), u \rangle.$$

Nach der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung ist

$$|D_u f(x)| = |\langle \nabla f(x), u \rangle| \leq \|\nabla f(x)\|_2 \|u\|_2 = \|\nabla f(x)\|_2$$

wobei Gleichheit genau dann gilt, wenn u und $\nabla f(x)$ kollinear sind. Ist $u = \|\nabla f(x)\|_2^{-1} \nabla f(x)$, so ist

$$\nabla f(x), u \rangle = \|\nabla f(x)\|_2$$

der maximale Wert und für $u = -\|\nabla f(x)\|_2^{-1} \nabla f(x)$ erhalten wir das Minimum $\langle \nabla f(x), u \rangle = -\|\nabla f(x)\|_2$. $\square$

Satz 18.6 *Es seien $(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$ und $(Z, \|\cdot\|_Z)$ normierte Räume, $U \subseteq X$ und $V \subseteq Y$ offene Mengen und $x_0 \in U$. Ist $g\colon U \to Y$ eine an der Stelle x_0 differenzierbare Funktion mit $g(U) \subseteq V$ und $f\colon V \to Z$, $y \mapsto f(y)$ an der Stelle $g(x_0)$ differenzierbar, so ist*

$$f \circ g\colon U \to Z, \quad y \mapsto f(g(y))$$

an der Stelle x_0 differenzierbar und

$$(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0)) \circ g'(x_0). \tag{107}$$

Beweis. Sei $y_0 := g(x_0)$. Wir betrachten die affin-linearen Approximationen

$$g(x) = g(x_0) + g'(x_0)(x - x_0) + R_g(x) \tag{108}$$

und

$$f(y) = f(y_0) + f'(y_0)(y - y_0) + R_f(y) \tag{109}$$

mit

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\|R_g(x)\|_Y}{\|x - x_0\|_X} = 0 \quad \text{und} \lim_{y \to y_0} \frac{\|R_f(y)\|_Z}{\|y - y_0\|_Y} = 0.$$

Nach (109) gilt

$$f(g(x)) = f(y_0) + f'(y_0)(g(x) - y_0) + R_f(g(x)).$$

Setzen wir hier $g(x) - y_0 = g(x) - g(x_0) = g'(x_0)(x - x_0) + R_g(x)$ und $y_0 = g(x_0)$ ein, so erhalten wir

$$f(g(x)) = f(g(x_0)) + (f'(g(x_0)) \circ g'(x_0))(x - x_0) + \underbrace{f'(g(x_0))R_g(x) + R_f(g(x))}_{=:R(x)}$$

für $x \in U$. Um den Beweis zu beenden, müssen wir zeigen, dass das Restglied $R(x)$ in dieser affin-linearen Approximation von $f \circ g$ schnell genug gegen 0 geht, also

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\|R(x)\|_Z}{\|x - x_0\|_X} = 0;$$

oder äquivalent: Für jedes $\varepsilon > 0$ existiert ein $\rho > 0$ derart, dass

$$\|x - x_0\|_X < \rho \ \Rightarrow \ \|R(x)\|_Z \leq \varepsilon \|x - x_0\|_X \text{ für alle } x \in U \text{ mit } \|x - x_0\|_X \leq \rho.$$

Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Es existiert ein $\delta > 0$ derart, dass

$$\|R_f(y)\|_Z \leq \frac{\varepsilon}{2(\|g'(x_0)\|_{\mathrm{op}} + 1)} \|y - y_0\|_Y \tag{110}$$

für alle $y \in V$ mit $\|y - y_0\|_Y \leq \delta$. Weiter existiert ein $\rho > 0$ derart, dass

$$\|R_g(x)\|_Y \leq \min \left\{ 1, \frac{\varepsilon}{2(\|f'(y_0)\|_{\mathrm{op}} + 1)} \right\} \|x - x_0\|_X \tag{111}$$

für alle $x \in U$ mit $\|x - x_0\|_X \leq \rho$. Da g an der Stelle x_0 stetig ist, dürfen wir nach Verkleinern von ρ zudem annehmen, dass

$$\|g(x) - g(x_0)\|_Y \leq \delta \text{ für alle } x \in U \text{ mit } \|x - x_0\|_X \leq \rho. \tag{112}$$

Sei $x \in U$ mit $\|x - x_0\|_X \leq \rho$. Nach (111) gilt dann

$$\begin{aligned} \|f'(y_0)R_g(x)\|_Z &\leq \|f'(y_0)\|_{\mathrm{op}}\|R_g(x)\|_Y \\ &\leq \|f'(y_0)\|_{\mathrm{op}}\frac{\varepsilon}{2(\|f'(y_0)\|_{\mathrm{op}}+1)}\|x-x_0\|_X \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2}\|x-x_0\|_X. \end{aligned} \tag{113}$$

Nun gilt nach (108)

$$\begin{aligned} \|g(x)-y_0\|_Y &= \|g(x)-g(x_0)\|_Y = \|g'(x_0)(x-x_0)+R_g(x)\|_Y \\ &\leq \|g'(x_0)(x-x_0)\|_Y + \|R_g(x)\|_Y \\ &\leq \|g'(x_0)\|_{\mathrm{op}}\|x-x_0\|_X + \|x-x_0\|_X \\ &\leq (\|g'(x_0)\|_{\mathrm{op}}+1)\|x-x_0\|_X. \end{aligned} \tag{114}$$

Wegen (112) können wir (110) mit $y := g(x)$ anwenden und erhalten

$$\|R_f(g(x))\|_Z \leq \frac{\varepsilon}{2(\|g'(x_0)\|_{\mathrm{op}}+1)}\|g(x)-y_0\|_Y \leq \frac{\varepsilon}{2}\|x-x_0\|_X, \tag{115}$$

wobei für die letzte Ungleichung (114) eingesetzt wurde. Aus (113) und (115) folgt nun $\|R(x)\|_Z \leq \|f'(y_0)R_g(x)\|_Z + \|R_f(g(x))\|_Z \leq \varepsilon\|x-x_0\|_X$. □

Beispiel 18.7 Wenn $X = \mathbb{R}^n$, $Y = \mathbb{R}^m$, $Z = \mathbb{R}^\ell$, so entspricht $g'(x)$ der Matrix $J_g(x)$ und $f'(g(x))$ der Matrix $J_f(g(x))$. Aus der linearen Algebra wissen wir, dass die Komposition linearer Abbildungen dem Matrixprodukt entspricht. Aus (107) ergibt sich also die Formel

$$J_{f\circ g}(x) = J_{g(x)}(f)J_f(x)$$

für die Jacobimatrizen, wobei auf der rechten Seite das Matrixprodukt verwendet wird.

Bemerkung 18.8 Ist $X = \mathbb{R}^m$ in der Situation von Satz 18.6, so erhalten mit Bemerkung 18.2 (d) und Satz 18.6

$$\frac{\partial(f\circ g)}{\partial x_i}(x) = (f\circ g)'(x)(e_i) = f'(g(x))(g'(x)(e_i)) = f'(g(x))\Big(\frac{\partial g}{\partial x_i}(x)\Big)$$

mit den Standard-Basivektoren $e_1, \ldots, e_m$ für $\mathbb{R}^m$, also

$$\frac{\partial(f \circ g)}{\partial x_i}(x) = f'(g(x))\Big(\frac{\partial g}{\partial x_i}(x)\Big). \tag{116}$$

Ist zudem $Y = \mathbb{R}^n$, so schreiben wir $g = (g_1, \ldots, g_n)$, also $g(x) = \sum_{j=1}^n g_j(x)e_j$ (wobei jetzt $e_1, \ldots, e_n$ die Standard-Basisvektoren für $\mathbb{R}^n$ sind). Dann ist

$$\frac{\partial g}{\partial x_i}(x) = \Big(\frac{\partial g_1}{\partial x_i}(x), \ldots, \frac{\partial g_n}{\partial x_i}(x)\Big) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial g_j}{\partial x_i}(x)e_j$$

und wir erhalten durch Einsetzen in (116)

$$\begin{aligned} \frac{\partial(f \circ g)}{\partial x_i}(x) &= f'(g(x))\Big(\frac{\partial g}{\partial x_i}(x)\Big) = f'(g(x))\Big(\sum_{j=1}^n \frac{\partial g_j}{\partial x_i}(x)e_j\Big) \\ &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial g_j}{\partial x_i}(x)\,\underbrace{f'(g(x))(e_j)}_{=\frac{\partial f}{\partial y_j}(g(x))}. \end{aligned}$$

Also gilt

$$\frac{\partial(f \circ g)}{\partial x_i}(x) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial g_j}{\partial x_i}(x)\frac{\partial f}{\partial y_j}(g(x)) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial y_j}(g(x))\frac{\partial g_j}{\partial x_i}(x) \tag{117}$$

(wobei wir uns für die Endformel gestatten, Vektoren von Rechts mit Skalaren zu multiplizieren).

Definition 18.9 Es seien $(E, \|\cdot\|_E)$ und $(F, \|\cdot\|_F)$ normierte Räume und $U \subseteq E$ eine offene Menge. Eine Abbildung

$$f \colon U \to F$$

wird *stetig differenzierbar* (oder kurz: C^1) genannt, wenn f an jeder Stelle $x \in U$ differenzierbar (somit insbesondere f stetig) ist und die Abbildung

$$f' \colon U \to (\mathcal{L}(E, F), \|\cdot\|_{\mathrm{op}}), \quad x \mapsto f'(x)$$

stetig ist. Ist f stetig, so nennen wir f eine C^0-Abbildung. Rekursiv nennen wir f eine C^k-Abbildung (für eine natürliche Zahl $k \geq 2$) wenn f eine C^1-Funktion und $f' \colon U \to (\mathcal{L}(E, F).\|.\|_{\mathrm{op}})$ eine C^{k-1}-Funktion ist. Wir nennen f eine C^∞-Funktion oder *glatt*, wenn f eine C^k-Funktion ist für alle $k \in \mathbb{N}_0$.

Beispiele 18.10 (a) Jede konstante Abbildung $f\colon E \to F$ zwischen normierten Räumen ist glatt, denn f ist C^k für alle $k \in \mathbb{N}_0$ per Induktion:

$k = 0$: Als konstante Funktion ist f stetig, also C^0.

Sei nun $k \geq 1$. Nach Beispiel (18.3) (a) ist f an jeder Stelle x differenzierbar, mit $f'(x) = 0$. Als konstante Funktion ist f' stetig, somit f eine C^1-Funktion. Per Induktionsvoraussetzung ist die konstante Funktion f' eine C^{k-1}-Funktion, somit f eine C^k-Funktion.

(b) Jede stetige lineare Abbildung $\lambda\colon E \to F$ zwischen normierten Räumen ist glatt. Nach Beispiel 18.3) (b) ist λ an jeder Stelle $x \in E$ differenzierbar, mit $\lambda'(x) = \lambda$. Als konstante Funktion ist λ' stetig, somit λ eine C^1-Funktion. Da nach (a) die konstante Funktion λ' glatt ist und somit C^k für alle $k \in \mathbb{N}_0$, ist λ eine C^{k+1}-Funktion für alle $k \in \mathbb{N}_0$ und somit glatt.

(c) Jede stetige bilineare Abbildung $\beta\colon E_1 \times E_2 \to F$ zwischen normierten Räumen ist glatt. Wir haben in Beispiel 18.3 (c) nämlich schon gesehen, dass β an jeder Stelle differenzierbar und β' eine stetige lineare Abbildung ist und somit glatt nach (b). Wie in (b) schließen wir, dass β glatt ist.

Lemma 18.11 *Es seien E, F_1 und F_2 normierte Räume, $U \subseteq E$ offen, $k \in \mathbb{N}_0$ und $\lambda\colon F_1 \to F_2$ eine bijektive stetige lineare Abbildung mit stetiger Umkehrfunktion. Dann gilt: Eine Abbildung $f\colon U \to F_1$ ist genau dann C^k, wenn $\lambda \circ f$ eine C^k-Abbildung ist.*

Beweis. Da wir $\lambda \circ f$ und λ^{-1} die Rollen von f und λ spielen können, genügt es zu zeigen: Ist f eine C^k-Abbildung, so ist auch $\lambda \circ f$ eine C^k-Abbildung. Für $k = 0$ ist dies klar, denn ist f stetig, so auch $\lambda \circ f$. Ist nun $k \geq 1$ und gilt die Aussage für $k-1$ statt k, so sei f eine C^k-Funktion. Da λ eine C^1-Funktion mit $\lambda'(y) = \lambda$ (für alle $y \in E_1$) ist, ist nach der Kettenregel $\lambda \circ f$ an jeder Stelle $x \in U$ differenzierbar mit

$$(\lambda \circ f)'(x) = \lambda'(f(x)) \circ f'(x) = \lambda \circ f'(x) = \lambda_*(f'(x)) = (\lambda_* \circ f')(x)$$

mit der Abbildung

$$\lambda_*\colon \mathcal{L}(E, F_1) \to \mathcal{L}(E, F_2) \quad A \mapsto \lambda \circ A.$$

Man beachte, dass λ_* linear ist. Weiter ist

$$\|\lambda_*(A)\|_{op} = \|\lambda \circ A\|_{op} \leq \|\lambda\|_{op} \|A\|_{op} \leq \|\lambda\|_{op}$$

für alle $A \in \mathcal{L}(E, F_1)$ with $\|A\|_{op} \leq 1$, somit

$$\|\lambda_*\|_{op} \leq \|\lambda\|_{op} < \infty$$

und somit die lineare Abbildung λ_* stetig. Da f' eine C^{k-1}-Abbildung und λ_* stetig linear ist, ist per Induktionsvoraussetzung

$$(\lambda \circ f)' = \lambda_* \circ f'$$

eine C^{k-1}-Abbildung (also insbesondere stetig). Somit ist $\lambda \circ f$ eine C^1-Funktion und $(\lambda \circ f)'$ eine C^{k-1}-Funktion, folglich $\lambda \circ f$ eine C^k-Funktion. □

Satz 18.12 *Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^m$ offen, $k \in \mathbb{N}_0$ und $f = (f_1, \ldots, f_n)\colon U \to \mathbb{R}^n$ eine Abbildung. Dann sind äquivalent:*

(a) *f ist C^k;*

(b) *f ist partiell C^k.*

Beweis. Der Beweis ist per Induktion nach $k \in \mathbb{N}_0$. Für $k = 0$ bedeutet C^0 und partiell C^0 beides das gleiche, nämlich Stetigkeit von f. Sei nun $k \geq 1$ und gelte die Aussage für $k-1$ an Stelle von k. Ist f eine C^k-Abbildung, so ist insbesondere f eine C^1-Abbildung und somit existieren die partiellen Ableitungen $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)$ für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$, $j \in \{1, \ldots, m\}$ und $x \in U$ (siehe obige Diskussion der Jacobi-Matrix). Wir können mittels der Standardbasen $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ mit $\mathbb{R}^{n \times m}$ identifizieren und somit (indem wir die Matrixeinträge in einer festen Reihenfolge auflisten) mit $\mathbb{R}^{nm}$. Sei

$$\lambda\colon \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^{nm}$$

der so erhaltene Isomorphismus von Vektorräumen. Da alle Normen auf endlich-dimensionalen Vetorräumen äquivalent sind, sind λ und λ^{-1} stetig.[37] Da nun f' eine C^{k-1}-Abbildung ist, ist $\lambda \circ f'$ eine C^{k-1}-Abbildung (nach dem vorigen Lemma), also partiell C^{k-1} (per Induktionsannahme) und somit sind alle Komponenten von $\lambda \circ f'$ partiell C^{k-1}. Dies sind genau die Funktionen

[37] $x \mapsto \|\lambda^{-1}(x)\|_{\text{op}}$ ist äquivalent zu $\|\cdot\|_\infty$ auf $\mathbb{R}^{nm}$. Also gibt es $C_1, C_2 > 0$ mit $C_1\|\lambda^{-1}(x)\|_{\text{op}} \leq \|x\|_\infty \leq C_2\|\lambda^{-1}(x)\|_{\text{op}}$. Daraus folgt $\|\lambda^{-1}\|_{\text{op}} \leq C_1^{-1} < \infty$ und (indem wir $x = \lambda(y)$ einsetzen) $\|\lambda(y)\|_\infty \leq C_2\|y\|_{\text{op}}$ und somit $\|\lambda\|_{\text{op}} \leq C_2 < \infty$.

$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$. Insbesondere sind diese stetig, also ist f partiell C^1 und alle partiellen Ableitungen sind partiell C^{k-1}, womit f partiell C^k ist.

Ist umgekehrt f partiell C^k mit $k \geq 1$ und $x = (x_1, \ldots, x_m) \in U$, so gibt es (da U offen ist und alle partiellen Ableitungen stetig) zu $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ derart, dass die Kugel $B_\delta(x) := \{y \in \mathbb{R}^m \colon \|y - x\|_\infty < \delta\}$ in U enthalten ist und

$$\left\| \frac{\partial f}{\partial x_j}(y) - \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) \right\|_\infty < \varepsilon$$

für alle $y \in B_\delta(x)$ und $j \in \{1, \ldots, m\}$. Für alle $y = (y_1, \ldots, y_m) \in B_\delta(x)$ haben wir

$$\begin{aligned} f(y) &= f(x) + \sum_{j=1}^{m} (f(y_1, \ldots, y_k, x_{j+1}, \ldots, x_m) - f(y_1, \ldots, y_{j-1}, x_j, \ldots, x_m)) \\ &= f(x) + \sum_{j=1}^{m} (y_j - x_j) \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_j}(y_1, \ldots, y_{j-1}, x_j + t(y_j - x_j), x_{j+1}, \ldots, x_m)\, dt, \end{aligned}$$

wobei Bemerkung 17.7 benutzt wurde. Sei nun $A \colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ die lineare Abbildung

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix} \mapsto \sum_{j=1}^{m} u_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(x).$$

Für y wie zuvor ist dann

$$f(y) = f(x) + A(y - x) + R(y)$$

mit

$$\begin{aligned} R(y) &:= f(y) - f(x) - A(y - x) \\ &= \sum_{j=1}^{m} (y_j - x_j) \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_j}(y_1, \ldots, y_{j-1}, x_j + t(y_j - x_j), x_{j+1}, \ldots, x_m)\, dt \\ &\quad - \sum_{j=1}^{m} (y_j - x_j) \frac{\partial f}{\partial x_j}(x), \end{aligned}$$

was sich zusammenfassen lässt in der Form

$$\sum_{j=1}^{m} (y_j - x_j) \int_0^1 \left(\frac{\partial f}{\partial x_j}(y_1, \ldots, y_{j-1}, x_j + t(y_j - x_j), x_{j+1}, \ldots, x_m) - \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) \right) dt.$$

Somit ist

$$\begin{aligned}\frac{\|R(y)\|_\infty}{\|y-x\|_\infty} &\leq \sum_{j=1}^{m} \underbrace{\frac{|y_j - x_j|}{\|y-x\|_\infty}}_{\leq 1} \int_0^1 \underbrace{\left\| \frac{\partial f}{\partial x_j}(y_1,\ldots,y_{j-1},x_j + t(y_j - x_j), x_{j+1},\ldots,x_m) - \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) \right\|_\infty}_{\leq \varepsilon} dt \\ &\leq m\varepsilon.\end{aligned}$$

Wir haben gezeigt, dass

$$\lim_{y\to x} \frac{R(y)}{\|y-x\|_\infty} = 0.$$

Also ist f an der Stelle x total differenzierbar mit $f'(x) = A$. Da $(\lambda \circ f')(x)$ die Komponenten $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)$ hat und diese partiell C^{k-1} sind, ist $\lambda \circ f'$ partiell C^{k-1}, also C^{k-1} per Induktionsvoraussetzung. Nach Lemma 18.11 ist dann auch f' eine C^{k-1}-Abbildung, insbesondere also stetig. Somit ist f eine C^1-Abbildung derart, dass f' eine C^{k-1}-Abbildung ist und somit ist f eine C^k-Abbildung. □

Beweis der Kettenregel aus dem vorigen Kapitel (Satz 17.19). Sind f und g partiell C^1, so sind sie nach Satz 18.12 auch C^1. Nach der Kettenregel ist $f \circ g$ somit C^1 und nach Satz 18.12 folglich partiell C^1. Schließlich gilt nach (117) die gewünschte Formel für die partiellen Ableitungen von $f \circ g$. □

Bemerkung 18.13 Solange wir nur im Endlich-Dimensionalen arbeiten (also Abbildungen zwischen offenen Mengen in $\mathbb{R}^m$ und $\mathbb{R}^n$ betrachten) werden wir im folgenden meist nicht mehr zwischen C^k-Funktionen unterscheiden und Funktionen, die partiell C^k sind (da beide Eigenschaften äquivalent sind, nach Satz 18.12).

Bemerkung 18.14 Sind $U \subseteq \mathbb{R}$ und $V \subseteq \mathbb{R}^n$ offen,

$$\gamma = (\gamma_1,\ldots,\gamma_n) \colon U \to \mathbb{R}^n, \quad t \mapsto \gamma(t)$$

stetig differenzierbar mit $\gamma(U) \subseteq V$ und ist $f \colon V \to Z$, $y \mapsto f(y)$ eine stetig differenzierbare Funktion in einen normierten Raum Z, so ist γ eine Funktion einer reellen Variablen $t = x_1$ und aus (117) wird

$$\frac{d(f\circ\gamma)}{dt}(t) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial y_j}(\gamma(t)) \frac{\gamma_j}{dt}(t). \tag{118}$$

Diese Formel gilt auch dann, wenn $U \subseteq \mathbb{R}$ ein nicht offenes nicht entartetes Intervall und γ ein C^1-Weg ist. Wir machen uns dies klar, wenn $U = [a, b]$. Wir finden ein $\varepsilon > 0$ derart, dass

$$\gamma(b) + s\frac{d\gamma}{dt}(b) \in V$$

für alle $s \in [0, \varepsilon[$, denn diese Funktion ist stetig in s und V offen in $\mathbb{R}^n$. Nach Verkleinern von $\varepsilon > 0$ gilt zudem $\gamma(a) + s\frac{d\gamma}{dt}(a) \in V$ für alle $s \in]-\varepsilon, 0]$. Dann ist $\eta\colon\ ]a - \varepsilon, b + \varepsilon[\to \mathbb{R}^n$,

$$\eta(t) := \begin{cases} \gamma(a) + (t-a)\frac{d\gamma}{dt}(a) & \text{wenn } t \leq a \\ \gamma(t) & \text{wenn } t \in [a, b] \\ \gamma(b) + (t-b)\frac{d\gamma}{dt}(b) & \text{wenn } t \geq b \end{cases}$$

ein C^1-Weg (wobei benutzt wird, dass an den Schnittstellen a und b die rechts- und linksseitige Ableitung gleich, somit Differenzierbarkeit gegeben ist). Die Kettenregel lässt sich auf $f \circ \eta$ anwenden und wir erhalten für alle $t \in]a - \varepsilon, b + \varepsilon[$ nach (118)

$$\frac{d(f \circ \eta)}{dt}(t) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial y_j}(\eta(t))\frac{d\eta_j}{dt}(t).$$

Ist $t \in [a, b]$, so ist $\eta(t) = \gamma(t)$ und $\frac{d\eta_j}{dt}(t) = \frac{d\gamma_j}{dt}(t)$; aus der vorigen Formel wird also (118) für $f \circ \gamma$.

Bemerkung 18.15 Ist $U \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $\gamma\colon U \to \mathbb{R}^n$ ein C^1-Weg, so habe wir zwei Bedeutungen für $\gamma'(t)$: Zunächst haben wir wie im Kapitel über Wege den Tangentenvektor

$$\gamma'(t) = \frac{d\gamma}{dt}(t) = \lim_{s \to t} \frac{1}{s - t}(\gamma(s) - \gamma(t)) \in \mathbb{R}^n$$

(mit $s \neq t$), für den wir im weiteren Verlauf der Bemerkung zur besseren Unterscheidung $\frac{d\gamma}{dt}(t)$ schreiben. Zum anderen haben wir die totale Ableitung

$$\gamma'(t) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n),$$

die also eine lineare Abbildung $\gamma'\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ ist. Was haben die beiden miteinander zu tun? Nun, nach Bemerkung 18.2 (d) gilt für die Funktion γ der einen Variablen $x_1 = t$:

$$\frac{d\gamma}{dt}(t) = \frac{\partial \gamma}{\partial x_1}(t) = \gamma'(t)(e_1) = \gamma'(t)(1)$$

mit dem Standard-Basisvektor $e_1 = 1$ für $\mathbb{R} = \mathbb{R}^1$. Es ist also

$$\frac{d\gamma}{dt}(t) = \gamma'(t)(1) \text{ und } \gamma'(t)(s) = s\frac{d\gamma}{dt}(t),$$

weil aufgrund der Linearität $\gamma'(t)(s) = \gamma'(t)(s \cdot 1) = s\gamma'(t)(1) = s\frac{d\gamma}{dt}(t)$. Identifiziert man $\mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ mit $\mathbb{R}^n$ via

$$A \mapsto A(1),$$

so wird also $\gamma'(t)$ mit $\frac{d\gamma}{dt}(t)$ identifiziert. Es wird stets aus dem Zusammenhang klar sein, welche der zwei Bedeutungen von $\gamma'(t)$ gemeint ist.

19 Vektorfelder und Potentialfunktionen

Der Gradient $\nabla\phi$ einer C^1-Funktion $\phi\colon U \to \mathbb{R}$ auf einer offenen Menge $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ist ein Vektorfeld auf U, d.h. jedem $x \in U$ wird ein Vektor in $\mathbb{R}^n$ zugeordnet, nämlich $\nabla\phi(x) \in \mathbb{R}^n$. In diesem Kapitel beschäftigen wir uns mit der für Anwendungen wichtigen Frage, welche Vektorfelder $F\colon U \to \mathbb{R}^n$ Gradientenvektorfelder sind, d.h. wann wie oben eine C^1-Funktion $\phi\colon U \to \mathbb{R}$ existiert (eine sogenannte Potentialfunktion) mit $F = \nabla\phi$.

Definition 19.1 Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Ein *stetiges Vektorfeld auf* U ist eine stetige Funktion $F = (F_1, \ldots, F_n)\colon U \to \mathbb{R}^n$. Jedem Punkt $x \in U$ wird also ein Vektor $F(x) = (F_1(x), \ldots, F_n(x)) \in \mathbb{R}^n$ zugeordnet, der stetig von x abhängt. Ist F wie zuvor eine C^k-Funktion, so nennt man F ein *C^k-Vektorfeld* auf U. Die Komponenten $F_1, \ldots, F_n\colon U \to \mathbb{R}$ sind dann also C^k.

Beispiele 19.2 $F(x) := x$ definiert ein Vektorfeld auf $\mathbb{R}^n$, das C^∞ (also *glatt*) ist. Durch $F(x) := \frac{1}{\|x\|_2}x$ wird ein glattes Vektorfeld auf $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ definiert.

Wegintegrale über Gradientenvektorfelder sind sehr leicht berechenbar:

Lemma 19.3 *Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $\phi\colon U \to \mathbb{R}$ eine C^1-Funktion und $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)\colon [a,b] \to U$ ein Weg, der stückweise C^1 ist. Dann ist*

$$\int_\gamma \langle \nabla\phi, d\mathbf{s}\rangle \;=\; \phi(b) - \phi(a). \tag{119}$$

Beweis. Es sei $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = b$ eine Zerlegung von $[a, b]$ derart, dass $\gamma|_{[t_{j-1},t_j]}$ ein C^1-Weg ist für alle $j \in \{1, \ldots, m\}$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\int_{t_{j-1}}^{t_j} \langle \nabla\phi(\gamma(t)), \frac{d\gamma}{dt}(t)\rangle \, dt &= \int_{t_{j-1}}^{t_j} \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial\phi}{\partial x_k}(\gamma(t))\frac{d\gamma_k}{dt}(t) \\
&= \int_{t_{j-a}}^{t_j} \frac{d}{dt}(\phi \circ \gamma)(t)\, dt \\
&= [\phi \circ \gamma]_{t_{j-1}}^{t_j} \\
&= \phi(\gamma(t_j)) - \phi(\gamma(t_{j-1})),
\end{aligned}$$

wobei das zweite Gleichheitszeichen auf Bemerkung 18.14 beruht und dann das Integral mit dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung berechnet wurde (beachte $\phi \circ \gamma$ ist Stammfunktion für $\frac{d}{dt}(\phi \circ \gamma)$). Wir schließen, dass

$$\begin{aligned}
\int_\gamma \langle \nabla\phi, d\mathbf{s}\rangle &= \sum_{j=1}^{m} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \langle \nabla\phi(\gamma(t)), \frac{d\gamma}{dt}(t)\rangle \, dt \\
&= \sum_{j=1}^{m} \big(\phi(\gamma(t_j)) - \phi(\gamma(t_{j-1}))\big) \\
&= \phi(\gamma(b)) - \phi(\gamma(a)),
\end{aligned}$$

wie benötigt. □

Eine Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt *sternförmig*, wenn es einen Punkt $z \in U$ gibt, dessen Verbindungsstrecke mit jedem Punkt $x \in U$ in U liegt, d.h.

$$(\forall x \in U)\ (\forall t \in [0,1]) \quad z + t(x - z) \in U.$$

Zum Beispiel ist jede konvexe Menge (also insb. jede Kugel, jeder Quader und ganz $\mathbb{R}^n$) sternförmig. Die Menge

$$\mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) \colon x \leq 0\}$$

(skizzieren!) ist sternförmig (mit $z = (1, 0)$), aber nicht konvex.

Der folgende Satz ist das Hauptziel dieses Kapitels.

Satz 19.4 *Für ein stetiges Vektorfeld $F = (F_1, \ldots, F_n) \colon U \to \mathbb{R}^n$ auf einer offenen, nicht-leeren Menge $U \subseteq \mathbb{R}^n$ sind die folgenden drei Bedingungen äquivalent:*

(a) *F ist ein Gradientenvektorfeld, d.h. es gibt eine C^1-Funktion $\phi\colon U \to \mathbb{R}$ mit $F = \nabla\phi$.*

(b) *Alle Wegintegrale über F längs geschlossenen Wegen verschwinden. Genauer: Für jeden Weg $\gamma\colon [a,b] \to U$, der geschlossen[38] und stückweise C^1 ist, gilt*

$$\int_\gamma \langle F, d\mathbf{s}\rangle = 0.$$

(c) *Wegintegrale über F hängen nur vom Anfangs- und Endpunkt ab. Genauer: Sind $\gamma\colon [a,b] \to U$ and $\eta\colon [c,d] \to U$ stückweise C^1-Wege mit $\gamma(a) = \eta(c)$ und $\gamma(b) = \eta(d)$, so ist*

$$\int_\gamma \langle F, d\mathbf{s}\rangle = \int_\eta \langle F, d\mathbf{s}\rangle.$$

Ist F ein C^1-Vektorfeld, so folgt aus (a) *die folgende* **Integrabilitätsbedingung:**

(d) $\frac{\partial F_i}{\partial x_j} = \frac{\partial F_j}{\partial x_i}$ *für alle $i, j \in \{1, \ldots, n\}$.*

Ist U sternförmig, so sind (a) *und* (d) *äquivalent.*

Beweis. (a)$\Rightarrow$(b): Ist $F = \nabla\phi$ und $\gamma\colon [a,b] \to U$ ein geschlossener Weg, der stückweise C^1 ist, so gilt nach dem vorigen Lemma

$$\int_\gamma \langle F, d\mathbf{s}\rangle = \phi(\gamma(b)) - \phi(\gamma(a)) = 0$$

(weil $\gamma(a) = \gamma(b)$).

(b)$\Rightarrow$(c) Sind γ und η wie im Satz beschrieben, so erhalten wir einen geschlossenen stückweise stetig differenzierbaren Weg θ, indem wir zuerst γ durchlaufen und dann η rückwärts. In Formeln definieren wir den Weg $\theta\colon [a, b+d-c] \to U$ via

$$\theta(t) := \begin{cases} \gamma(t) & \text{wenn } t \in [a,b]; \\ \eta(d-(t-b)) & \text{wenn } t \in [b, b+(d-c)]. \end{cases}$$

Dann gilt

$$0 = \int_\theta \langle F, d\mathbf{s}\rangle = \int_{\theta|_{[a,b]}} \langle F, d\mathbf{s}\rangle + \int_{\theta|_{[b,b+(d-c)]}} \langle F, d\mathbf{s}\rangle = \int_\gamma \langle F, d\mathbf{s}\rangle - \int_\eta \langle F, d\mathbf{s}\rangle,$$

[38] also $\gamma(a) = \gamma(b)$

wobei für die letzte Gleichheit Satz 16.5 benutzt wurde. Die zwei fraglichen Wegintegrale sind also gleich.

(c)$\Rightarrow$(a) Wir werden im Anschluss an den Beweis zeigen, dass sich U stets als eine Vereinigung $U = \bigcup_{j\in J} U_j$ offener Mengen $U_j \subseteq \mathbb{R}^n$ schreiben lässt, die paarweise disjunkt sind (also $U_i \cap U_j = \emptyset$ für $i \neq j$ in J) und derart, dass zu allen $x, y \in U_j$ eine stückweise stetig differenzierbarer Weg $\gamma\colon [a,b] \to U_j$ von x nach y existiert (also mit $\gamma(a) = x$ und $\gamma(b) = y$). Es genügt, zu zeigen, dass auf jeder der Mengen U_j eine Potentialfunktion ϕ_j existiert; dann ist $\phi\colon U \to \mathbb{R}$, $\phi(x) := \phi_j(x)$ für $x \in U_j$ eine C^1-Funktion mit $\nabla\phi = F$. Nach Ersetzen von U durch U_j dürfen wir also annehmen, dass sich alle $x, y \in U$ durch einen stückweise C^1-Weg in U verbinden lassen. Wir halten einen Punkt $z \in U$ fest und definieren

$$\phi(x) := \int_{\gamma_x} \langle F, d\mathbf{s}\rangle,$$

wobei γ_x ein Weg von z nach x in U ist. Wir zeigen nun, dass $\frac{\partial\phi}{\partial x_i}$ für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$ existiert und mit F_i übereinstimmt (insb. also stetig ist). Nach Bemerkung 17.24 ist dann ϕ eine C^1-Funktion, und nach dem Vorigen ist $\nabla\phi = F$. Gegeben i wie zuvor und $x \in U$ existiert ein $\varepsilon > 0$ derart, dass $B^{\|\cdot\|_\infty}_{2\varepsilon(x)} \subseteq U$. Wir setzen $y := x - \varepsilon e_i$ (mit dem i-ten Standard-Einheitsvektor e_i) und wählen einen stückweise C^1-Weg

$$\gamma_y\colon [a,b] \to U$$

von z nach y. Für $s \in]0, 2\varepsilon[$ ist dann $\eta_s\colon [a, b+s] \to U$,

$$\eta_s(t) := \begin{cases} \gamma_y(t) & \text{wenn } t \in [a,b] \\ y + (t-b)e_i & \text{wenn } t \in [b, b+s] \end{cases}$$

ein stückweise C^1-Weg von z nach $y + se_i$, also nach $x + (s-\varepsilon)e_i$ (was gleich x ist an der Stelle $s = \varepsilon$). Also ist

$$\begin{aligned} \phi(x + (s-\varepsilon)e_i) &= \phi(y + se_i) = \int_{\eta_s} \langle F, d\mathbf{s}\rangle \\ &= \int_{\gamma_y} \langle F, d\mathbf{s}\rangle + \int_b^{b+s} \langle F(y + (t-b)e_i), e_i\rangle\, dt \\ &= \phi(y) + \int_b^{b+s} F_i(y + (t-b)e_i). \end{aligned}$$

Die rechte Seite kann nach s abgeleitet werden und liefert (nach dem Hauptsatz der Integral- und Differentialrechnung) den Integranden an der Stelle $b+s$, es ist also

$$\frac{\partial\phi}{\partial x_i}(x+(s-\varepsilon)e_i) = F_i(y+(b+s-b)e_i) = F_i(y+se_i) = F_i(x+(s-\varepsilon)e_i).$$

Für $s := b+\varepsilon$ erhalten wir $\frac{\partial\phi}{\partial x_i}(x) = F_i(x)$.

(a)⇒(d): Ist F ein C^1-Vektorfeld und $F = \nabla\phi$ mit einer C^1-Funktion ϕ, so ist $\frac{\partial\phi}{\partial x_i} = F_i$ eine C^1-Funktion für alle $i \in \{1,\ldots,n\}$ und somit ϕ eine C^2-Funktion. Nach dem Satz von Schwarz ist somit

$$\frac{\partial F_j}{\partial x_i} = \frac{\partial^2\phi}{\partial x_i\partial x_j} = \frac{\partial^2\phi}{\partial x_j\partial x_i} = \frac{\partial F_i}{\partial x_j}.$$

(d)⇒(a), wenn U sternförmig ist: Es sei $z \in U$ ein Punkt derart, dass $\gamma_x(t) := z+t(x-z) \in U$ für alle $x \in U$ und alle $t \in [0,1]$. dann ist γ_x ein C^1-Weg von z nach x in U, mit $\gamma_x'(t) = x-z$. Wir definieren mit selbigem

$$\phi(x) := \int_{\gamma_x} \langle F, d\mathbf{s}\rangle = \int_0^1 \langle F(z+t(x-z)), x-z\rangle\, dt = \int_0^1 \sum_{j=1}^n F_j(z+t(x-z))(x_j-z_j).$$

Da der Integrand eine C^1-Funktion von (z,t) ist, ist ϕ (als Konsequenz aus dem Satz über parameterabhängige Integrale, Satz 17.8) stetig differenzierbar und wir können die partiellen Ableitungen ins Integral ziehen. Dies ergibt

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\phi}{\partial x_i}(x) &= \int_0^1 \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i}\big(F_j(z+t(x-z))(x_j-z_j)\big) \\
&= \int_0^1 \sum_{j=1}^n \Big(t(D_iF_j)(z+t(x-z))(x_j-z_j) + F_j(z+t(x-z))\underbrace{\frac{\partial(x_j-z_j)}{\partial x_i}}_{=\delta_{ij}}\Big)\, dt \\
&= \int_0^1 \underbrace{F_i(z+t(x-z)) + t\sum_{j=1}^n (D_jF_i)(z+t(x-z))(x_j-z_j)}_{=\frac{\partial}{\partial t}\left(tF_i(z+t(x-z))\right)}\, dt \\
&= [tF_i(z+t(x-z))]_{t=0}^{t=1} = F_i(x),
\end{aligned}$$

wie benötigt. Beachten Sie, das für das dritte Gleichheitszeichen die Integrabilitätsbedingung $D_iF_j = D_jF_i$ benutzt wurde. □

Bemerkung 19.5 Die *Rotation* (engl.: curl) eines C^1-Vektorfelds

$$F = (F_1, F_2, F_3) \colon U \to \mathbb{R}^3$$

auf einer offenen Menge $U \subseteq \mathbb{R}^3$ ist das durch

$$\operatorname{rot} F(x) := (\nabla \times F)(x) := \begin{pmatrix} \frac{\partial F_3}{\partial x_2}(x) - \frac{\partial F_2}{\partial x_3}(x) \\ \frac{\partial F_1}{\partial x_3}(x) - \frac{\partial F_3}{\partial x_1}(x) \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1}(x) - \frac{\partial F_1}{\partial x_2}(x) \end{pmatrix}$$

für $x \in U$ definierte Vektorfeld $\operatorname{rot} F \colon U \to \mathbb{R}^3$. Die Integrabilitätsbedingung aus Satz 19.4(d) ist zu

$$\operatorname{rot} F = 0$$

äquivalent. Ist also U sternförmig, so ist ein C^1-Vektorfeld $F \colon U \to \mathbb{R}^3$ genau dann ein Gradientenvektorfeld, wenn $\operatorname{rot} F = 0$.

Für ebensolches F definiert man weiter seine *Divergenz* als die durch

$$(\operatorname{div} F)(x) := (\nabla \cdot F)(x) := \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(x) + \frac{\partial F_2}{\partial x_2}(x) + \frac{\partial F_3}{\partial x_3}(x)$$

gegebene Funktion $\operatorname{div} F \colon U \to \mathbb{R}$. Für jede C^2-Funktion $\phi \colon U \to \mathbb{R}$ auf der offenen Menge $U \subseteq \mathbb{R}^3$ ist nach der Integrabilitätsbedigung

$$\operatorname{rot}(\operatorname{grad} \phi) = \nabla \times (\nabla \phi) = 0.$$

Man kann auch

$$\Delta \phi := \operatorname{div}(\operatorname{grad} \phi) = \nabla \cdot (\nabla \phi) = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_3^2}$$

bilden. Die Abbildung $\Delta \colon \phi \mapsto \Delta \phi$ wird *Laplace-Operator* genannt.

Die im Beweis des Satzes gemachten Behauptungen über offene Teilmengen von $\mathbb{R}^n$ werden in dieser oder ähnlicher Form in der komplexen Funktionentheorie gezeigt. Im Rest des Kapitels finden Sie der Vollständigkeit halber die entsprechenden Begriffe und Resultate, die wir in der Vorlesung überspringen.[39]

[39] Wenn Sie nicht bis zur Funktionentheorie warten wollen, lesen Sie den Abschnitt jetzt!.

Definition 19.6 Ein topologischer Raum X heißt *wegzusammenhängend*, wenn sich alle $x, y \in X$ in X durch einen Weg $\gamma\colon [a,b] \to X$ verbinden lassen; γ hat also den Anfangspunkt $\gamma(a) = x$ und den Endpunkt $\gamma(b) = y$.

Jede konvexe Menge$X \subseteq \mathbb{R}^n$ ist wegzusammenhängend, denn man kann den geradlinigen Weg $[0,1] \to X$, $t \mapsto x + t(y-x)$ benutzen. Auch sternförmige Mengen $X \subseteq \mathbb{R}^n$ (in denen sich ein z mit allen Punkten geradlinig verbinden lässt) sind wegzusammenhängend, den wir können $x, y \in X$ durch den Polygonzug verbinden, der zuerst geradlinig von x nach z läuft, dann geradlinig von z nach y.

Im vorigen Beweis wurden die folgenden zwei Lemmata benutzt.

Lemma 19.7 *Ist $U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene, wegzusammenhängende Menge,*[40] *so gibt es für alle $x, y \in U$ einen Weg $\gamma\colon [a,b] \to U$ von x nach y, der stückweise C^1 ist.*

Beweis. Seien $x, y \in U$. Da U wegzusammenhängend ist, gibt es einen Weg $\eta\colon [a,b] \to U$ mit $\eta(a) = x$ und $\eta(b) = y$. Dann ist $\eta([a,b])$ kompakt als Bild einer kompakten Menge unter einer stetigen Abbildung. Da U offen ist und $\eta([a,b]) \subseteq U$, gibt es nach dem Satz 14.27 über gleichmäßige Umgebungen also ein $\varepsilon > 0$ derart, dass

$$(\forall t \in [a,b]) \quad B_\varepsilon(\eta(t)) \subseteq U$$

(wobei Kugeln bzgl. $\|\cdot\|_\infty$ gemeint sind). Da η nach Satz 14.23 gleichmäßig stetig ist, gibt es ein $\delta > 0$ derart, dass

$$(\forall s, t \in [a,b]) \quad |t-s| < \delta \Rightarrow \|\eta(t) - \eta(s)\|_\infty < \varepsilon. \tag{120}$$

Wir wählen eine Zerlegung $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = b$ von $[a,b]$ derart, dass $t_j - t_{j-1} < \delta$ für alle $j \in \{1, \ldots, m\}$. Nach (120) ist $\|\eta(t_j) - \eta(t_{j-1})\|_\infty < \varepsilon$, also

$$\|s(\eta(t_j) - \eta(t_{j-1}))\|_\infty = s\|\eta(t_j) - \eta(t_{j-1})\|_\infty < \varepsilon$$

für alle $s \in [0,1]$ und somit

$$\eta(t_{j-1}) + s(\eta(t_j) - \eta(t_{j-1})) \in B_\varepsilon(\eta(t_{j-1})) \subseteq U.$$

Setzen wir

$$\gamma(t) := \eta(t_{j-1}) + \frac{t - t_{j-1}}{t_j - t_{j-1}}(\eta(t_j) - \eta(t_{j-1}))$$

[40] Es soll U also mit der induzierten Topologie wegzusammenhängend sein.

für $j \in \{1, \ldots, m\}$ und $t \in [t_{j-1}, t_j]$, so ist also $\gamma(t) \in U$ für alle $t \in [a, b]$ und somit ist der Polygonzug $\gamma\colon [a, b] \to U$ ein stückweiser C^1-Weg mit $\gamma(a) = x$ und $\gamma(b) = y$. $\square$

Leider sind viele sehr natürliche offene Mengen $U \subseteq \mathbb{R}^n$ nicht wegzusammenhängend. Beispielsweise ist $\mathbb{R} \setminus \{0\} \subseteq \mathbb{R}$ nicht wegzusammenhängend,[41] denn es gibt keinen Weg γ in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ von -1 nach 1. Jedoch ist $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ immerhin die disjunkte Vereinigung zweier offener wegzusammenhängender Mengen, nämlich

$$\mathbb{R} \setminus \{0\} =]-\infty, 0[\cup]0, \infty[.$$

Wir zeigen nun, dass Entsprechendes bei allen offenen Mengen $U \subseteq \mathbb{R}^n$ möglich ist. Als Hilfmittel definieren wir:

Definition 19.8 Es sei X ein topologischer Raum. Wir nennen $x, y \in X$ *verbindbar* und schreiben $x \sim y$, wenn sich x und y in X durch einen stetigen Weg verbinden lassen, d.h. es existiert ein Weg $\gamma\colon [a, b] \to X$ mit $\gamma(a) = x$ und $\gamma(b) = y$.

Dann gilt:

Lemma 19.9 *Für jeden topologischen Raum X gilt:*

(a) *Die Verbindbarkeitsrelation $\sim$ ist eine Äquivalenzrelation auf X.*

(b) *Die Äquivalenzklassen $[x] := \{y \in X : y \sim x\}$ sind wegzusammenhngend. Man nennt diese die* **Wegkomponenten** *von X.*

(c) *Die Wegkomponenten bilden eine Partition von X, d.h. X ist die Vereinigung der Wegkomponenten, diese sind nicht leer und für alle $x, z \in X$ gilt:*

$$[x] = [z] \qquad \text{oder} \qquad [x] \cap [z] = \emptyset.$$

(d) *Ist X eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^n$, so sind auch alle Wegkomponenten von X offen in $\mathbb{R}^n$. Bezeichnet $X/\sim$ die Menge aller Wegkomponenten, so ist also X die disjunkte Vereinigung*

$$X = \bigcup_{C \in X/\sim} C$$

[41] Ist $\gamma\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig mit $\gamma(a) = -1$ und $\gamma(b) = 1$, so gibt es nach dem Zwischenwertsatz der Analysis 1 ein $t \in [a, b]$ mit $\gamma(t) = 0$. Also ist γ kein Weg in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

von offenen, wegzusammenhängenden Mengen C (wobei $C = [x]$ für ein $x \in X$).

Beweis. (a) Reflexivität: Für jedes $x \in X$ ist der konstante Weg $[0,1] \to X$, $t \mapsto x$ ein Weg von x nach x, somit $x \sim x$.

Transitivität: Gilt $x \sim y$ und $y \sim z$, so gibt es einen Weg $\gamma\colon [a,b] to X$ von x nach y und einen Weg $\eta\colon [c,d] \to X$ von y nach z. Dann ist $\zeta\colon [a, b + (d-c)] \to X$,

$$\zeta(t) := \begin{cases} \gamma(t) & \text{wenn } t \in [a,b], \\ \eta(c + (t-b)) & \text{wenn } t \in [b, b+(d-c)] \end{cases}$$

ein Weg von x nach z, somit $x \sim z$.

Symmetrie: Ist $x \sim y$, so gibt es einen Weg $\gamma\colon [a,b] \to X$ von x nach y. Dann ist $\eta\colon [a,b] \to X$, $\eta(t) := \gamma(b - (t-a))$ ein Weg von y nach x, also $y \sim x$.

(b) Sind $y, z \in [x]$, so gilt $y \sim x$ und $z \sim x$, somit $y \sim z$ (nach (a)) und folglich gibt es einen Weg $\gamma\colon [a,b] \to X$ von y nach z. Für jedes $s \in]a,b]$ ist $\gamma|_{[a,s]}$ ein Weg von y nach $\gamma(s)$ in X, somit $\gamma(s) \in [y] = [x]$. Also ist $\gamma([a,b]) \subseteq [x]$ und wir können γ als einen Weg von y nach z in $[x]$ betrachten. Somit ist $[x]$ wegzusammenhängend.

(c) Dies gilt für jede Äquivalenzrelation und sollte Ihnen bekannt sein.

(d) Sei $x \in X$. Ist $y \in [x]$, so gibt es (weil $X \subseteq \mathbb{R}^n$ offen ist) ein $\varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon(y) \subseteq X$ (wobei die Kugel bezüglich $\|.\|_\infty$ in $\mathbb{R}^n$ gemeint ist). Die Kugel $B_\varepsilon(y)$ ist konvex, also jedes $z \in B_\varepsilon(y)$ innerhalb $B_\varepsilon(y)$ (und somit innerhalb X) mit y durch einen Weg verbindbar. Es ist also $B_\varepsilon(y) \subseteq [y] = [x]$ und somit ist $[x]$ offen. Alles andere wurde bereits gezeigt. $\square$

20 Taylorentwicklung und lokale Extrema

In diesem Kapitel diskutieren wir lokale Extrema für Funktionen $f\colon U \to \mathbb{R}$ auf einer offenen Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}^n$. Ist f stetig differenzierbar, so können wir eine notwendige Bedingung für lokale Extrema angeben. Ist f zweimal stetig differenzierbar, so gibt es hinreichende Bedingungen. Als Hilfsmttel für die Diskussion lokaler Extrema beschäftigen wir uns zunächst mit Taylorentwicklung 2. Ordnung für Funktionen zweier Variablen. Die sogenannte Hesse-Matrix ermöglicht uns hierbei, Formeln kurz und prägnant hinzuschreiben. Ihr Eigenschaften werden auch wichtig sein für die Diskussion lokaler Extrema.

Definition 20.1 Es sei U eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ und $f\colon U \to \mathbb{R}$ eine zweimal stetig differenzierbare, reellwertige Funktion. Gegeben $x \in U$ nennen wir die $n \times n$-Matrix

$$H_f(x) := \Big(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x)\Big)_{i,j=1,\ldots,n}$$

die *Hessematrix* von f an der Stelle x.

Bemerkung 20.2 Nach dem Satz von Schwarz ist die Hessematrix eine symmetrische Matrix, stimmt also mit ihrer Transponierten Matrix $H_f(x)^t$ überein.

Beispiel 20.3 Die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) := x^2 + x\sin(y)$ ist zweimal stetig differenzierbar. Es ist

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x + \sin(y), \quad \text{und} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x\cos(y),$$

folglich

$$H_f(x,y) = \left(\begin{array}{cc} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc} 2 & \cos(y) \\ \cos(y) & -x\sin(y) \end{array} \right).$$

20.4 Als Vorüberlegung für den Satz von Taylor betrachten wir eine C^1-Funktion $f\colon U \to \mathbb{R}$ auf einer offenen Menge $U \subseteq \mathbb{R}^n$. Seien $x = (x_1, \ldots, x_n)$ und $y = (y_1, \ldots, y_n)$ aus U derart, dass die Verbindungsstrecke von x und y in U enthalten ist, also $x + t(y-x) \in U$ für alle $t \in [0,1]$. Da de Funktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, $t \mapsto x + t(y-x)$ stetig und U offen ist, exstiert ein $r > 0$ derart, dass

$$x + t(y-x) \in U \quad \text{für alle } t \in]{-r}, 1+r[=: I.$$

Dann ist $\gamma\colon \; \to \mathbb{R}$, $\gamma(t) := f(x+t(y-x))$ an jeder Stelle $t \in I$ differenzierbar und

$$\gamma'(t) = f'(x+t(y-x))(y-x) = J_f(x+t(y-x))(y-x) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x+t(y-x))(y_j - x_j), \tag{121}$$

denn es gilt

$$
\begin{aligned}
\frac{\gamma(t+s)-\gamma(t)}{s} &= \frac{f(x+t(y-x)+s(y-x))-f(x+t(y-x))}{s} \\
&\to D_{y-x}f(x+t(y-x)) = f'(x+t(y-x))(y-x)
\end{aligned}
$$

für $0 \neq s \to 0$. Hierbei fassen wir $y-x$ als Spaltenvektor auf. Ist f zweimal stetg differenzerbar, so ist γ' nach (121) stetg differenzierbar (und somit γ ein C^2-Weg), mit

$$
\begin{aligned}
\gamma''(t) &= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x+t(y-x))(y_i-x_i)(y_j-x_j) \\
&= \langle y-x, H_f(x+t(y-x))(y-x)\rangle \qquad (122)
\end{aligned}
$$

(wobei (121) mit der C^1-Funktion $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ an Stelle von f angewandt wurde).

Satz 20.5 *Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Menge, $f\colon U \to \mathbb{R}$ eine C^2-Funktion und $x \in U$. Sei $\|\cdot\|$ eine Norm auf $\mathbb{R}^n$. Dann gilt für alle $y \in U$*

$$f(y) = f(x) + f'(x)(y-x) + \frac{1}{2}\langle y-x, H_f(x)(y-x)\rangle + R_2(y)$$

mit einem Restglied $R(y) \in \mathbb{R}$, welches für $y \neq x$

$$\lim_{y\to x} \frac{R(y)}{\|y-x\|^2} = 0$$

erfüllt.

Beweis. Da $\|\cdot\| \geq C\|\cdot\|_2$ für ein $C > 0$, genügt es, den Satz mit der euklidschen Norm $\|\cdot\|_2$ zu beweisen. Da die Matrixeinträge von $H_f(z)$ stetige Funktionen von $z \in U$ sind, ist $U \to \mathbb{R}^{n\times n} \cong \mathbb{R}^{n^2}$, $z \mapsto H_f(z)$ stetig. Wir versehen nun $\mathbb{R}^{n\times n}$ mit der Operatornorm $\|\cdot\|_{\mathrm{op}}$ bzgl. $\|\cdot\|_2$. Gegeben $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$ mt $B_\delta(x) \subseteq U$ derart, dass

$$\|H_f(z) - H_f(x)\|_{\mathrm{op}} \leq \varepsilon \quad \text{für alle } z \in B_\delta(x),$$

weil $H_f(z)$ stetig in z ist. Gegeben $y \in V \setminus \{x\}$ definieren wir

$$\gamma\colon I \to \mathbb{R}, \quad \gamma(t) = f(x+t(y-x))$$

wie in 20.4. Nach dem Satz von Taylor für C^2-Funktionen einer reellen Variablen haben wir

$$\gamma(1) = \gamma(0) + \gamma'(0) + \frac{1}{2}\gamma''(0) + R_2(1), \tag{123}$$

wobei wir nach Bemerkung 6.7(b) (mit γ statt f, $n = 2$, $x_0 = 0$ und $x = 1$) das Restglied $R_2(1)$ wie folgt als Integral schreiben können:

$$R_2(1) = \int_0^1 (1-t)(\gamma^{(2)}(t) - \gamma^{(2)}(0))\, dt. \tag{124}$$

Setzen wir $\gamma(0) = f(x)$, $\gamma(1) = f(y)$ sowie (121) und (122) in (123) ein, so erhalten wir

$$f(y) = f(x) + f'(x)(x-y) + \frac{1}{2}\langle y-x, H_f(x)(y-x)\rangle + R(y)$$

mit $R(y) = R_2(1)$. Nun gilt

$$\begin{aligned} &|\langle y-x, (H_f(x+t(y-x)) - H_f(x))(y-x)\rangle| \\ &\quad\le \|x-y\|_2\| \,\|(H_f(x+t(y-x)) - H_f(x))(y-x)\|_2 \\ &\quad\le \|x-y\|_2\|H_f(x+t(y-x)) - H_f(x)\|_{\mathrm{op}}\|y-x\|_2 \le \varepsilon\|y-x\|^2 \end{aligned}$$

unter Benutzung der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung. Mit (124) folgt

$$\begin{aligned} |R(y)| &= \left|\int_0^1 (1-t)(\langle y-x, H_f(x+t(y-x))(y-x)\rangle - \langle y-x, H_f(x)(y-x)\rangle)\, dt\right| \\ &= \left|\int_0^1 (1-t)\langle y-x, (H_f(x+t(y-x)) - H_f(x))(y-x)\rangle\, dt\right| \\ &\le \int_0^1 \underbrace{|1-t|}_{\le 1}\underbrace{|\langle y-x, (H_f(x+t(y-x)) - H_f(x))(y-x)\rangle|}_{\le\varepsilon\|y-x\|_2^2}\, dt \\ &\le \varepsilon\,(\|y-x\|_2)^2. \end{aligned}$$

Also ist $|R(y)|/\|y-x\|_2^2 \le \varepsilon$ und somit $R(y)/\|y-x\|_2^2 \to 0$ gezeigt. $\square$

Beispiel 20.6 Für die Funktion aus Beispiel 20.3 gilt $f(0,0) = 0$, $\nabla f(0,0) = 0$ (also $f'(0,0) = 0$) und

$$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix};$$

die Taylorentwicklung zweiter Ordnung um $(0,0)$ lautet daher

$$f(x,y) = \frac{1}{2}\left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, H_f(0,0)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right\rangle = \frac{1}{2}\left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2x+y \\ x \end{pmatrix}\right\rangle = x^2+xy.$$

Wir interesseren uns für lokale Extremalstellen insbesondere von Funktionen $f\colon X \to \mathbb{R}$ auf Teilmengen $X \subseteq \mathbb{R}^n$.

Definition 20.7 Sei X ein topologischer Raum, $f\colon X \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $x \in X$.

(a) x heißt *lokale Minimalstelle* von f (und $f(x)$ ein lokales Minimum), wenn es eine x-Umgebung $V \subseteq X$ derart gibt, dass

$$(\forall y \in V)\ f(x) \leq f(y).$$

Kann V so gewählt werden, dass $f(x) < f(y)$ für alle $y \in V \setminus \{x\}$, so heißt x eine *isolierte lokale Minimalstelle*.

(b) x heißt *lokale Maximalstelle* von f (und $f(x)$ ein lokales Maximum), wenn es eine x-Umgebung $V \subseteq X$ gibt derart, dass

$$(\forall y \in V)\ f(x) \geq f(y).$$

Kann V so gewählt werden, dass $f(x) > f(y)$ für alle $y \in V \setminus \{x\}$, so heißt x eine *isolierte lokale Maximalstelle*.

(c) x heißt *lokale Extremalstelle* (und $f(x)$ ein lokales Extremum), wenn x eine lokale Minimalstelle oder eine lokale Maximalstelle ist.

Oft ist man schlampig und nennt lokale Extremalstellen ebenfalls lokale Extrema.

Lemma 20.8 *Es seien X und Y topologische Räume, $f\colon Y \to \mathbb{R}$ eine Abbildung, $\eta\colon X \to Y$ eine stetige Abbildung und $x \in X$. Ist $\eta(x)$ eine lokale Minimalstelle (bzw. Maximalstelle) von f, so ist x eine lokale Minimalstelle (bzw. Maximalstelle) von $f \circ \eta\colon X \to \mathbb{R}$.*

Beweis. Ist $\eta(x)$ eine lokale Minimalstelle von f, so existiert eine Umgebung V von $\eta(x)$ in Y derart, dass

$$(\forall y \in V)\ \ f(\eta(x)) \leq f(y). \tag{125}$$

Da η stetig ist, ist $\eta^{-1}(V)$ ene Umgebung von x in X. Für jedes $y \in \eta^{-1}(V)$ ist $\eta(y) \in V$ und somit $f(\eta(x)) \leq f(\eta(y))$ nach (125). Also ist x eine lokale Minimalstelle von $f \circ \eta$. Lokale Maximalstellen diskutiert man analog. $\square$

Satz 20.9 *Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f\colon U \to \mathbb{R}$ eine C^1-Funktion. Ist $x \in U$ eine lokale Extremalstelle von f, so ist $f'(x) = 0$, also $\nabla f(x) = 0$.*

Beweis. Gegeben $y \in \mathbb{R}^n$ existiert ein $\varepsilon > 0$ derart, dass $\eta(t) := x + ty \in U$ für alle $t \in]-\varepsilon, \varepsilon[$. Dann ist $f \circ \eta\colon\ ]-\varepsilon, \varepsilon[\to \mathbb{R}$ eine C^1-Funktion und

$$(f \circ \eta)'(t) = f'(\eta(t))\eta'(t) = f'(\eta(t))(y) \quad \text{für alle } t \in]-\varepsilon, \varepsilon[$$

(vgl. 20.4). Da $\eta(0) = x$, ist 0 nach Lemma 20.8 eine lokale Extremalstelle von $f \circ \eta$. Wie in Analysis 1 gezeigt (und aus der Schule bekannt), ist also

$$0 = (f \circ \eta)'(0) = f'(x)(y).$$

Da y beliebig war, folgt $f'(x) = 0$. Also ist $J_f(x) = 0$ und somit auch $\nabla f(x) = (J_f(x))^t = 0$. $\square$

Definition 20.10 Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge und $f\colon U \to \mathbb{R}$ eine C^1-Funktion. Ein Element $x \in U$ heißt *kritischer Punkt* von f, wenn $\nabla f(x) = 0$.

Satz 20.9 sagt also, dass jede lokale Extremalstelle einer auf einer offenen Menge definerten C^1-Funktion notwendig ein kritischer Punkt ist.

Beispiel 20.11 Die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto \cos(x) - y^2$ ist C^1 (sogar C^∞) und hat als Gradienten

$$\nabla f(x, y) = (-\sin(x), -2y)^t.$$

Dieser ist genau dann 0, wenn $0 = \sin x$ und $y = 0$, also wenn $x \in \pi\mathbb{Z}$ und $y = 0$. Welche der Punkte $(x, y) \in \pi\mathbb{Z} \times \{0\}$ sind lokale Extremalstellen? Wir könnten von Hand die Frage beantworten und unsere Funktion sehr genau anschauen. Jedoch gibt hier auch die folgende allgemeine Theorie eine vollständige Antwort (siehe Beispiel 20.16).

Definition 20.12 Eine $n \times n$-Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ heißt *positiv semidefinit*, wenn sie symmetrisch ist (also $A = A^t$) und

$$(\forall y \in \mathbb{R}^n) \ \ \langle y, Ay \rangle \geq 0.$$

Ist A positiv semidefinit und $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, so wird A *positiv definit* genannt. Ist $-A$ positiv semidefinit, so heißt A *negativ semidefinit*; ist $-A$ positiv definit, so heißt A *negativ definit*.

Satz 20.13 *Sei $n \in \mathbb{N}$.*

(a) *Eine symmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ist genau dann positiv semidefinit, wenn alle Eigenwerte von A nicht-negativ sind.*

(b) *Eine symmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ist genau dann positiv definit, wenn alle Eigenwerte von A positiv sind.*

(c) *Ist A positiv definit und $\rho > 0$ der kleinste Eigenwert von A, so gilt*

$$\langle y, Ay \rangle \geq \rho(\|y\|_2)^2 \quad \textit{für alle } y \in \mathbb{R}^n.$$

Beweis. (a) Ist $0 \neq y$ ein Eigenvektor von A zu einem Eigenwert $\lambda < 0$, so ist

$$\langle y, Ay \rangle = \langle y, \lambda y \rangle = \lambda \langle y, y \rangle = \lambda(\|y\|_2)^2 < 0,$$

also A nicht positiv semidefinit. Ist A positiv semidefinit, so sind also alle Eigenwerte ≥ 0. Sei nun A eine symmetrische Matrix derart, dass alle Eigenwerte nicht negativ sind. Aus der Linearen Algebra ist bekannt, dass es eine Orthonormalbasis $v_1, \ldots, v_n$ von Eigenvektoren gibt. Dann ist also

$$\langle v_i, v_j \rangle = \delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{wenn } i = j; \\ 0 & \text{wenn } i \neq j \end{cases}$$

für alle $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ und $Av_i = \lambda_i v_i$ mit Eigenwerten $\lambda_i \geq 0$. Gegeben $y \in \mathbb{R}^n$ schreiben wir y als Linearkombination der Eigenvektoren:

$$y = \sum_{i=1}^n y_i v_i$$

mit eindeutigen $y_1, \ldots, y_n \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\langle y, Ay \rangle = \sum_{i,j=1}^n \langle y_i v_i, y_j \underbrace{Av_j}_{=\lambda_j v_j} \rangle = \sum_{i,j=1}^n \lambda_j y_i y_j \underbrace{\langle v_i, v_j \rangle}_{=\delta_{i,j}} = \sum_{i=1}^n \lambda_i (y_i)^2 \geq 0.$$

(b) und (c): Ist A positiv definit, so sind nach (a) alle Eigenwerte ≥ 0 und somit > 0, weil A invertierbar (und somit der zugehörige Endomorphismus bijektiv, also injektiv) ist. Nun sei A eine symmetrische Matrix derart, dass alle Eigenwerte > 0 sind. Sei ρ der kleinste Eigenwert. Mit Notationen wie im Beweis von (a) ist dann für alle $y \in \mathbb{R}^n$

$$\langle y, Ay \rangle = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\lambda_i}_{\geq \rho} (y_i)^2 \geq \rho \sum_{i=1}^{n} (y_i)^2 = \rho(\|y\|_2)^2.$$

Die in (c) verlangte Abschätzung ist also erfüllt. Weiter ist A positiv semidefinit und $Ay \neq 0$ für alle $y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Der zugehörige Endomorphismus $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $y \mapsto Ay$ ist also injektiv, ergo bijektiv und somit A invertierbar. $\square$

Wir benutzen ein Resultat über Funktionen einer reellen Variable, das meist in der Analysis 1 behandelt wird:

Lemma 20.14 *Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, $f\colon I \to \mathbb{R}$ eine C^2-Funktion und $x \in I$ ein kritischer Punkt. Ist $f''(x) < 0$, so ist x eine isolierte lokale Maximalstelle und somit keine lokale Minimalstelle von f.*

Beweis. Sei R_2 das Restglied der Taylorentwicklung 2. Ordnung von f um die Stelle x. Es existiert ein $\delta > 0$ derart, dass $]x - \delta, x + \delta[\subseteq I$ und

$$|R_2(t)| \leq \frac{1}{4}|f''(x)|\,(t-x)^2 = -\frac{1}{4}f''(x)\,(t-x)^2$$

für alle $t \in]x - \delta, x + \delta[$. Für alle $t \in]x - \delta, x + \delta[\setminus \{x\}$ ist dann

$$\begin{aligned} f(t) &= f(x) + \underbrace{f'(x)}_{=0}(t-x) + \frac{1}{2}f''(t)(t-x)^2 + R_2(y) \\ &\leq f(x) + \frac{1}{2}f''(t)(t-x)^2 - \frac{1}{4}f''(x)(t-x)^2 \\ &= f(x) + \frac{1}{4}f''(x)(t-x)^2 < f(x); \end{aligned}$$

also ist x ein isolierte lokale Maximalstelle und keine lokale Minimalstelle von f. $\square$

Satz 20.15 *Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Menge, $f\colon U \to \mathbb{R}$ eine C^2-Funktion und $x \in U$ ein kritischer Punkt von f. Dann gilt:*

(a) *Ist x eine lokale Minimalstelle von f, so ist die Hessematrix $H_f(x)$ an der Stelle x positiv semidefinit.*

(b) *Ist $H_f(x)$ positiv definit, so ist x eine isolierte lokale Minimalstelle von f.*

(c) *Ist x eine lokale Maximalstelle von f, so ist $H_f(x)$ negativ semidefinit.*

(d) *Ist $H_f(x)$ negativ definit, so ist x eine isolierte lokale Maximalstelle von f.*

(e) *Besitzt $H_f(x)$ mindestens einen positiven Eigenwert und mindestens einen negativen Eigenwert, so ist x keine lokale Extremalstelle von f.*

Beweis. (a) Ist x eine lokale Minimalstelle von f, so ist für jedes $y \in \mathbb{R}^n$ die Zahl 0 eine lokale Minimalstelle der C^2-Funktion $f \circ \eta\colon\ ]-\varepsilon, \varepsilon[\to \mathbb{R}$, wobei $\varepsilon > 0$ so klein gewählt ist, dass $\eta(t) := x + ty \in U$ für alle $t \in]-\varepsilon, \varepsilon[$. Nach Lemma 20.14 ist dann $(f \circ \eta)''(0) \geq 0$. Somit ist

$$0 \leq (f \circ \eta)''(0) = \langle y, H_f(x)y \rangle,$$

mit einer Rechnung wie in 20.4. Also ist $H_f(x)$ positiv semidefinit.

(b) Ist $H_f(x)$ positiv definit, so sei $\rho > 0$ der kleinste Eigenwert. Nach Satz 20.5 gibt es ein $\delta > 0$ mit $B_\delta(x) \subseteq U$ und

$$|R(y)| \leq \frac{1}{4}\rho(\|y - x\|_2)^2 \quad \text{für alle } y \in B_\delta(x),$$

wobei die Kugel sich auf die euklidsche Norm auf $\mathbb{R}^n$ bezieht. Für alle $y \in B_\delta(x) \setminus \{x\}$ ist dann

$$\begin{aligned} f(y) &= f(x) + \underbrace{f'(x)(y - x)}_{=0} + \frac{1}{2} \underbrace{\langle y - x, H_f(x)(y - x) \rangle}_{\geq \rho(\|y-x\|_2)^2} + R(y) \\ &\geq f(x) + \frac{1}{2}\rho(\|y - x\|_2)^2 + R(y) \geq f(x) + \frac{1}{2}\rho(\|y - x\|_2)^2 - |R(y)| \\ &\geq f(x) + \frac{1}{2}\rho(|y - x\|_2)^2 - \frac{1}{4}\rho(\|y - x\|_2)^2 = f(x) + \frac{1}{4}\rho(\|y - x\|_2)^2 > f(x), \end{aligned}$$

wobei Satz 20.13(c) für die erste Abschätzung benutzt wurde. Also ist x eine isolierte lokale Minimalstelle von f.

(c) und (d) folgen aus (a) und (b), angewandt auf $-f$.

(e) folgt aus (a), (c) und Satz 20.13. □

Beispiel 20.16 Die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ aus Beispiel 20.11 hat Hessematrix

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} -\cos(x) & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Da diese diagonal ist, stehen die Eigenwerte auf der Diagonalen und wir können somit sofort ablesen, an welchen kritischen Punkten die Hessematrix positiv definit bzw. negativ definit ist. Für $x \in 2\pi\mathbb{Z}$ und $y = 0$ ist

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

negativ definit, denn die Egenwerte -1 und -2 sind beide negativ. Nach Satz 20.15(d) ist also $(x, 0)$ eine isolierte lokale Maximalstelle von f.

Ist $x = (2k+1)\pi$ mit $k \in \mathbb{N}$ und $y = 0$, so hat

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

eine positiven Eigenwert, 1, und einen negativen Eigenwert, -2. Nach Satz 20.15(e) ist also $(x, 0)$ keine lokale Extremalstelle von f.

Beispiel 20.17 Gegeben $\alpha, \beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ betrachten wir die C^∞-Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad (x,y) \mapsto \alpha x^2 + \beta y^2$$

mit $\nabla f(x,y) = (2\alpha x, 2\beta y)^t$, welche $(0,0)$ als (einzigen) kritischen Punkt besitzt. Da

$$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 2\alpha & 0 \\ 0 & 2\beta \end{pmatrix}$$

mit den Eigenwerten α und β, ist $(0,0)$ genau dann eine lokale Minimalstelle, wenn $\alpha, \beta > 0$; weiter ist $(0,0)$ genau dann eine lokale Maximalstelle, wenn $\alpha, \beta < 0$. Im verbleibenden Fall, $\alpha\beta < 0$, ist $(0,0)$ keine lokale Extremalstelle (Details siehe Übung).

In den vorigen Beispielen war $H_f(x)$ schon diagonal, so dass die Eigenwerte direkt abgelesen werden konnten. Bei größeren symmetrischen Matrizen wäre es sehr aufwendig oder auch nicht praktikabel, über eine Berechnung der Eigenwerte die Matrizen auf positive (bzw. negative) Definitheit zu testen (und ebenso wenig direkt anhand der Definition). Glücklicherweise gibt es eine Charakterisierung positiv definiter Matrizen, mit deren Hilfe sich positive Definitheit leicht nachprüfen lässt.

Satz 20.18 (Hurwitz-Kriterium) *Gegeben eine symmetrische Matrix* $A = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *betrachten wir für* $k \in \{1,\dots,n\}$ *die Untermatrix*

$$A_k := (a_{ij})_{i,j=1,\dots,k} \in \mathbb{R}^{k\times k},$$

welche ebenfalls symmetrisch ist. Folgende Aussagen sind äquivalent:

(a) A *ist positiv definit;*

(b) $\det(A_k) > 0$ *für alle* $k \in \{1,\dots,n\}$.

In der Vorlesung wurde das Hurwitz-Kriterium nur ohne Beweis für die Allgemeinbildung erwähnt.

Beispiel 20.19 Die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

ist nach dem Hurwitz-Kriterium positiv definit, denn die 1×1-Matrix $A_1 = (4)$ hat Determinante $\det A_1 = 4 > 0$, die 2×2-Matrix

$$A_2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

hat Determinante $\det A_2 = 20 > 0$ und schließlich ist

$$\det(A_3) = \det(A) = 40 - 4 - 5 = 31 > 0.$$

Anhang: Beweis des Hurwitz-Kriteriums

Wir beweisen nun Satz 20.18. Der Beweis wurde in der Vorlesung übersprungen (da das Hurwitz-Kriterium eher zur Linearen Algebra gehört und zudem recht gut als *black box* anwendbar ist); er ist nicht prüfungsrelevant.

(a)$\Rightarrow$(b): Ist A positiv definit, so auch jede der symmetrischen Matrizen A_k. Ist ρ der kleinste Eigenwert von A, so gilt nämlich für alle $y = (y_1,\dots,y_k) \in \mathbb{R}^k$ mit $y' := (y_1,\dots,y_k,0,\dots,0) \in \mathbb{R}^n$

$$\langle y, A_k y\rangle = \sum_{i,j=1}^{k} y_i y_j a_{ij} = \langle y', Ay'\rangle \geq \rho(\|y'\|_2)^2 = \rho(\|y\|_2)^2 \geq 0,$$

weswegen A_k positiv semidefinit ist und der Endomorphismus $y \mapsto A_k y$ von $\mathbb{R}^k$ injektiv, somit bijektiv und folglich A_k invertierbar; also ist A_k positiv definit. Sind $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in]0, \infty[$ die Eigenwerte von A_k (mit Wiederholungen gemäß den algebraischen Vielfachheiten), so gibt es eine orthogonale $k \times k$-Matrix T derart, dass

$$A_k = T \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_k) T^{-1}$$

und somit $\det(A_k) = \det(T)\det(T)^{-1}\det(\operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_k)) = \lambda_1 \cdots \lambda_k > 0$.

(b)$\Rightarrow$(a): Der Beweis ist per Induktion nach n. Ist $n = 1$, so ist $A = (a_{11})$. Ist $a_{11} = \det A > 0$, so ist A diagonal mit Eigenwert $a_{11} > 0$, also A positiv definit.

Induktionsschritt: Ist $n \geq 2$ und gilt die Aussage für $(n-1)\times(n-1)$-Matrizen, so ist A_{n-1} positiv definit. Folglich gibt es eine orthogonale $(n-1) \times (n-1)$-Matrix P und $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1} > 0$ derart, dass

$$P^t A_{n-1} P = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}).$$

Setzen wir $Q := \operatorname{diag}(\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}, \ldots, \frac{1}{\sqrt{\lambda_{n-1}}})$, so ist $Q = Q^t$ und

$$Q^t P^t A_{n-1} P Q = \mathbf{1}_{n-1}$$

die Einheitsmatrix in $\mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$. Wir betrachten nun die Blockmatrix $S := \operatorname{diag}(PQ, 1) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und den Spaltenvektor $a := (a_{1,n}, \ldots, a_{n-1,n})^t \in \mathbb{R}^{n-1}$. Dann ist

$$\begin{aligned} S^t A S &= \begin{pmatrix} Q^t P^t & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{n-1} & a \\ a^t & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} PQ & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} Q^t P^t A_{n-1} P Q & Q^t P^t a \\ a^t P Q & a_{nn} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \mathbf{1}_{n-1} & b \\ b^t & a_{nn} \end{pmatrix} =: B \end{aligned}$$

mit dem Spaltenvektor $b := Q^t P^t a \in \mathbb{R}^{n-1}$. Wir betrachten nun die invertierbare obere Dreiecksmatrix

$$T := \begin{pmatrix} \mathbf{1}_{n-1} & -b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

mit dem Zeilenvektor $0 \in \mathbb{R}^{n-1}$. Dann ist

$$\begin{aligned}
T^t B T &= \begin{pmatrix} I & 0 \\ -b^t & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & b \\ b^t & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & -b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} I & 0 \\ -b^t & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ b^t & a_{nn} - b^t b \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & a_{nn} - b^t b \end{pmatrix} =: C
\end{aligned}$$

mit $I := \mathbf{1}_{n-1}$. Folglich ist

$$\begin{aligned}
a_{nn} - b^t b &= \det(C) = \det(T^t B T) = \det(T^t S^t A S T) \\
&= \det(T)^2 \det(S)^2 \det(A) > 0
\end{aligned}$$

und somit die Diagonalmatrix C positiv definit. Nun ist $T^t S^t A S T = C$, also

$$A = (S^t)^{-1} (T^t)^{-1} C T^{-1} S^{-1} = R^t C R$$

mit $R := T^{-1} S^{-1}$. Dann ist auch A positiv definit, denn wegen $\det(A) > 0$ ist A invertierbar und A ist positiv semidefinit, weil für alle Spaltenvektoren $y \in \mathbb{R}^n$

$$\langle y, Ay \rangle = y^t A y = y^t R^t C R y = (Ry)^t C (Ry) = \langle Ry, C(Ry) \rangle \geq 0$$

gilt. Dies beendet den Beweis. □.

21 Der Banachsche Fixpunktsatz

In desem Kapitel lernen wir den Banachschen Fixpunktsatz kennen, der in geeigenten Situationen die Existenz und Eindeutigkeit eines Fixpunkts garantiert. Viele wichtige mathematische Probleme lassen sich als Fixpunktprobleme umformulieren und häufig ermöglicht der Banachsche Fixpunktsatz dann eine Lösung. Ein erstes Beispiel dafür lernen wir im übernächsten Kapitel kennen; in Bemerkung 23.14 wird ein genauerer Ausblick auf Anwendungen gegeben.

Definition 21.1 Es sei (X, d) ein metrischer Raum. Eine Selbstabbildung $f\colon X \to X$ wird *Kontraktion* genannt, wenn ein $L \in [0, 1[$ existiert mit

$$d(f(x), f(y)) \leq L\, d(x, y) \quad \text{für alle } x, y \in X,$$

d.h. f ist Lipschitz-stetig mit einer Lipschitz-Konstante $L < 1$.

Eine Kontraktion hat höchstens einen Fixpunkt. Allgemeiner gilt:

Lemma 21.2 *Es sei (X,d) ein metrischer Raum, $U \subseteq X$ eine Teilmenge und $f\colon U \to X$ eine Lipschitz-stetige Abbldung mit einer Lipschitz-Konstante $L < 1$. Sind $x_1, x_2 \in U$ mit $f(x_1) = x_1$ und $f(x_2) = x_2$, so ist $x_1 = x_2$.*

Beweis. Wäre $x_1 \neq x_2$, so wäre $d(x_1, x_2) > 0$; man erhielte den Widerspruch

$$d(x_1, x_2) = d(f(x_1), f(x_2)) \leq L\, d(x_1, x_2) < d(x_1, x_2).$$

Also muss doch $x_1 = x_2$ sein. □

Der Banachsche Fixpunktsatz (im Englischen *Banach's Fixed Point Theorem* oder *Contraction Mapping Principle*) lautet nun wie folgt:

Satz 21.3 (Banachscher Fixpunktsatz) *Es sei (X,d) ein vollständiger metrischer Raum mit $X \neq \emptyset$ und $f\colon X \to X$ eine Kontraktion mit Lipschitz-Konstante $L \in [0,1[$. Dann gilt folgendes:*

(a) *f hat genau einen Fixpunkt x_∞.*

(b) *Für jedes $x_0 \in X$ gilt*
$$\lim_{n\to\infty} f^n(x_0) = x_\infty. \tag{126}$$

(c) *Die folgende* a priori Abschätzung *ist verfügbar: Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ ist*
$$d(f^n(x_0), x_\infty) \leq \frac{L^n}{1-L}\, d(f(x_0), x_0). \tag{127}$$

Beweis. Gegeben $x_0 \in X$, setzen wir $x_n := f^n(x_0)$ für $n \in \mathbb{N}_0$. Dann ist

$$d(x_{n+1}, x_n) \leq L^n d(x_1, x_0) \tag{128}$$

für alle $n \in \mathbb{N}_0$, denn die Abschätzung ist trivial für $n = 0$ und für $n \in \mathbb{N}$ haben wir

$$d(x_{n+1}, x_n) = d(f(x_n), f(x_{n-1})) \leq L\, d(x_n, x_{n-1}) \leq L^n d(x_1, x_0),$$

weil $d(x_n, x_{n-1}) \leq L^{n-1} d(x_1, x_0)$ per Induktionsannahme.

Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und $m \in \mathbb{N}$ gilt dann

$$d(x_{n+m}, x_n) \leq \frac{L^n}{1-L}\, d(x_1, x_0); \tag{129}$$

unter wiederholter Benutzung der Dreiecksungleichung ist nämlich

$$\begin{aligned} d(x_{n+m}, x_n) &\leq \sum_{k=n}^{n+m-1} d(x_{k+1}, x_k) \leq \sum_{k=n}^{n+m-1} L^k d(x_1, x_0) \\ &= L^n d(x_1, x_0) \sum_{j=0}^{m-1} L^j = L^n d(x_1, x_0) \frac{1 - L^m}{1 - L} \\ &\leq \frac{L^n}{1 - L} d(x_1, x_0); \end{aligned}$$

hierbei beruht die erste Ungleichung auf (128), anschließend wurde die geometrische Summenformel benutzt. Aus (129) folgt, dass $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine Cauchyfolge und somit konvergent ist [ist nämlich $\varepsilon > 0$ gegeben, so existiert ein $N \in \mathbb{N}$ derart, dass

$$\frac{L^N}{1 - L} d(x_1, x_0) < \varepsilon;$$

für alle $k > n \geq N$ ist $k = n + m$ mit $m := k - n > 0$, also nach dem Vorigen

$$d(x_k, x_n) = d(x_{n+m}, x_n) \leq \frac{L^n}{1 - L} d(x_1, x_0) \leq \frac{L^N}{1 - L} d(x_1, x_0) \leq \varepsilon. \,]$$

Wir definieren nun

$$x_\infty := \lim_{n \to \infty} x_n.$$

Dann ist x_∞ ein Fixpunkt von f, denn

$$f(x_\infty) = f\left(\lim_{n \to \infty} x_n\right) = \lim_{n \to \infty} f(x_n) = \lim_{n \to \infty} x_{n+1} = x_\infty.$$

Lassen wir in (129) $m \to \infty$ streben, so erhalten wir (127). Die Eindeutigkeit des Fixpunkts wurde bereits in Lemma 21.2 gezeigt. □

22 Bezüge zwischen Lipschitzkonstanten und Ableitungen

In diesem Kapitel erläutern wir Beziehungen zwischen Lipschitzkonstanten und der Größe der Ableitung einer C^1-Funktion. Wir diskutieren weiter Lipschitzkonstanten für das Restglied in der affin-linearen Approximation einer C^1-Funktion um eine Stelle x im Definitionsbereich. Diese Resultate wurden in der Vorlesung ebenfalls behandelt, dort aber erst als Hilfsmittel im Beweis des Satzes über die Größe des Bildes eingeführt.

Definition 22.1 Sind (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume, so definieren wir für eine Funktion $f\colon X \to Y$

$$\operatorname{Lip}(f) := \sup\left\{\frac{d_Y(f(x), f(y))}{d_X(x,y)} : x, y \in X \text{ mit } x \neq y\right\} \in [0, \infty].$$

Lemma 22.2 *In der Situation von Definition* 22.1 *ist die Funktion f genau dann Lipschitz-stetig, wenn* $\operatorname{Lip}(f) < \infty$. *In diesem Fall ist* $\operatorname{Lip}(f)$ *die kleinste Lipschitzkonstante für f, d.h.* $\operatorname{Lip}(f)$ *ist eine Lipschitzkonstante und für jede Lipschitzkonstante L für f ist* $\operatorname{Lip}(f) \leq L$.

Beweis. Ist f Lipschitz-stetig und $L \in [0, \infty[$ eine Lipschitzkonstante, so ist $d_Y(f(x), f(y)) \leq L\, d_X(x,y)$ für alle $x, y \in X$ mit $x \neq y$ und somit

$$\frac{d_Y(f(x), f(y))}{d_X(x,y)} \leq L.$$

Übergang zum Supremum liefert $\operatorname{Lip}(f) \leq L$; insbesondere ist $\operatorname{Lip}(f) < \infty$. Ist umgekehrt $\operatorname{Lip}(f) < \infty$, so folgt

$$d_Y(f(x), f(y)) \leq \operatorname{Lip}(f)\, d_X(x,y) \tag{130}$$

für alle $x, y \in X$: Die Ungleichung ist nämlich trivial, wenn $x = y$ ist (dann sind beide Seiten gleich 0). Ist $x \neq y$, so ist

$$\frac{d_Y(f(x), f(y))}{d_X(x,y)} \leq \operatorname{Lip}(f)$$

und Multiplikation beider Seiten der Ungleichung mit $d_X(x,y)$ führt auf (130). Nach (130) ist f Lipschitz-stetig mit Lipschitzkonstante $\operatorname{Lip}(f)$. □

Beispiel 22.3 Ist $\alpha\colon E \to F$ eine stetige lineare Abbildung zwischen normierten Räumen $(E, \|\cdot\|_E)$ und $(F, \|\cdot\|_F)$, so ist α Lipschitz-stetig mit

$$\operatorname{Lip}(\alpha) = \|\alpha\|_{\text{op}}.$$

In der Tat haben wir früher schon nachgerechet, dass α Lipschitz-stetig mit Lipschitzkonstante $\|\cdot\|_{\mathrm{op}}$ ist; somit ist $\mathrm{Lip}(\alpha) \leq \|\cdot\|_{\mathrm{op}}$. Für alle $x \in E$ mit $\|x\|_E \leq 1$ ist jedoch

$$\|\alpha(x)\|_F = \|\alpha(x) - \alpha(0)\|_F \leq \mathrm{Lip}(\alpha)\|x - 0\|_E = \mathrm{Lip}(\alpha)\|x\|_E \leq \mathrm{Lip}(\alpha);$$

Bildung des Supremums über x liefert $\|\alpha\|_{\mathrm{op}} \leq \mathrm{Lip}(\alpha)$ und somit Gleichheit.

Wir halten zwei Rechenregeln für minimale Lipschitzkonstanten fest.

Lemma 22.4 *Sind (X, d_X), (Y, d_Y) und (Z, d_Z) metrische Räume und sind $f\colon Y \to Z$ sowie $g\colon X \to Y$ Lipschitz-stetige Abbildungen, so ist auch die Komposition $f \circ g\colon X \to Z$ Lipschitz-stetig, mit $\mathrm{Lip}(f \circ g) \leq \mathrm{Lip}(f)\,\mathrm{Lip}(g)$.*

Beweis. Für alle $x, y \in X$ gilt $d_Z(f(g(x)), f(g(y)) \leq \mathrm{Lip}(f) d_Y(g(x), g(y)) \leq \mathrm{Lip}(f)\,\mathrm{Lip}(g) d_X(x, y)$. Also ist $f \circ g$ Lipschitz-stetig mit Lipschitzkonstante $\mathrm{Lip}(f)\,\mathrm{Lip}(g)$, wegen der Minimalität folglich $\mathrm{Lip}(f \circ g) \leq \mathrm{Lip}(f)\,\mathrm{Lip}(g)$. □

Die nächste Regel ist manchmal nützlich, wird in der Vorlesung aber nicht gebraucht und kann daher übersprungen werden.

Lemma 22.5 *Es seien (X, d_X), (Y_1, d_1) und (Y_2, d_2) metrische Räume. Versehen wir $Y_1 \times Y_2$ mit der durch*

$$d((y_1, y_2), (z_1, z_2)) := \max\{d_1(y_1, z_1), d_2(y_2, z_2)\}$$

gegebenen Maximum-Metrik d, so ist eine Abbildung

$$f = (f_1, f_2)\colon X \to Y_1 \times Y_2$$

genau dann Lipschitz-stetig, wenn ihre Komponenten f_1 und f_2 beide Lipschitz-stetig sind. In diesem Fall gilt

$$\mathrm{Lip}(f) = \max\{\mathrm{Lip}(f_1), \mathrm{Lip}(f_2)\}.$$

Beweis. Die Projektionen $\mathrm{pr}_j\colon Y_1 \times Y_2 \to Y_j$, $(y_1, y_2) \mapsto y_j$ sind offenbar Lipschitz-stetig mit $\mathrm{Lip}(\mathrm{pr}_j) \leq 1$ für $j \in \{1, 2\}$. Ist also f Lipschitz-stetig, so auch $f_j = \mathrm{pr}_j \circ f$ und nach Lemma 22.4 ist

$$\mathrm{Lip}(f_j) = \mathrm{Lip}(\mathrm{pr}_j \circ f) \leq \mathrm{Lip}(\mathrm{pr}_j)\,\mathrm{Lip}(f) \leq \mathrm{Lip}(f),$$

somit $\max\{\mathrm{Lip}(f_1), \mathrm{Lip}(f_2)\} \leq \mathrm{Lip}(f)$.

Seien umgekehrt f_1 und f_2 Lipschitz-stetig und $L := \max\{\mathrm{Lip}(f_1), \mathrm{Lip}(f_2)\}$. Dann gilt für alle $x, y \in X$

$$d_j(f_j(x), f_j(y)) \leq \mathrm{Lip}(f_j)\, d_X(x,y) \leq L\, d_X(x,y)$$

für $j \in \{1,2\}$ und somit

$$d(f(x), f(y)) = \max\{d_1(f_1(x), f_1(y)), d_2(f_2(x), f_2(y))\} \leq L\, d_X(x,y).$$

Also ist f Lipschitz-stetig mit $\mathrm{Lip}(f) \leq L = \max\{\mathrm{Lip}(f_1), \mathrm{Lip}(f_2)\}$. $\square$

Satz 22.6 (Mittelwertsatz) *Es seien $U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Menge, $f\colon U \to \mathbb{R}^m$ eine C^1-Funktion und $x, y \in U$ Punkte, deren Verbindungsstrecke in U liegt, also $x + t(y-x) \in U$ für alle $t \in [0,1]$. Dann gilt*

$$f(y) - f(x) = \int_0^1 f'(x + t(y-x))(y-x)\, dt.$$

Sind $\|\cdot\|_E$ und $\|\cdot\|_F$ Normen auf $\mathbb{R}^n$ bzw. $\mathbb{R}^m$, so gilt weiter

$$\|f(y) - f(x)\|_F \leq \sup\{\|f'(x + t(y-x))\|_{\mathrm{op}} \colon t \in [0,1]\}\, \|y-x\|_E. \tag{131}$$

Beweis. Für ein $\varepsilon > 0$ ist $\eta(t) := x + t(y-x) \in U$ für alle $t \in \,]-\varepsilon, 1+\varepsilon[\, =: I$. Dann ist $f \circ \eta\colon I \to \mathbb{R}^m$ ein C^1-Weg und $(f \circ \eta)'(t) = f'(\eta(t))(y-x)$ nach der Kettenregel, somit nach dem Hauptsatz der Integral- und Differentialrechnung für Wege

$$f(y) - f(x) = f(\eta(1)) - f(\eta(0)) = \int_0^1 (f \circ \eta)'(t)\, dt = \int_0^1 f'(x + t(y-x))(y-x)\, dt.$$

Sei $M := \sup\{\|f'(x + t(y-x))\|_{\mathrm{op}} \colon t \in [0,1]\}$. Die Abschätzung

$$\begin{aligned} \left\| \int_0^1 f'(x + t(y-x))(y-x)\, dt \right\|_F &\leq \int_0^1 \underbrace{\|f'(x + t(y-x))(y-x)\|_F}_{\leq \|f'(x+t(y-x))\|_{\mathrm{op}} \|y-x\|_E}\, dt \\ &\leq \int_0^1 M\, \|y-x\|_E\, dt = M\, \|y-x\|_E \end{aligned}$$

liefert (131). $\square$

Bemerkung 22.7 Die Abschätzung (131) ist als "Satz vom endlichen Zuwachs" (oder auch als "Schrankensatz") bekannt.

22.8 Es seien $\|\cdot\|_E$ und $\|\cdot\|_F$ Normen auf $E := \mathbb{R}^n$ bzw. $F := \mathbb{R}^m$ und $\|\cdot\|_{\mathrm{op}}$ die entsprechende Operatornorm auf $\mathcal{L}(E,F)$. Ist $U \subseteq E$ offen und $f\colon U \to F$ eine C^1-Funktion, so definieren wir

$$\|f'\|_\infty := \sup\{\|f'(x)\|_{\mathrm{op}}\colon x \in U\} \in [0,\infty].$$

Satz 22.9 *Es seien $\|\cdot\|_E$ und $\|\cdot\|_F$ Normen auf $E := \mathbb{R}^n$ bzw. $F := \mathbb{R}^m$ und $\|\cdot\|_{\mathrm{op}}$ die entsprechende Operatornorm auf $\mathcal{L}(E,F)$. Ist $U \subseteq E$ offen und $f\colon U \to F$ eine C^1-Funktion, so gilt*

$$\|f'\|_\infty \leq \mathrm{Lip}(f).$$

Ist U zudem konvex, so gilt

$$\mathrm{Lip}(f) = \|f'\|_\infty;$$

Lipschitz-Stetigkeit von f ist dann also äquivalent zur Beschränktheit der Abbildung $f'\colon U \to (\mathcal{L}(E,F), \|\cdot\|_{\mathrm{op}})$.

Beweis. Sei $x \in U$. Gegeben $y \in E$ mit $\|y\|_E \leq 1$ ist $x + ty \in U$ für $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ nahe 0 und

$$\|f(x+ty)-f(x)\|_F \leq \mathrm{Lip}(f)\|(x+ty)-x\|_E = \mathrm{Lip}(f)\|ty\|_E = \mathrm{Lip}(f)|t|\,\|y\|_E.$$

Es ist also

$$\begin{aligned}\left\|\frac{f(x+ty)-f(x)}{t}\right\|_F &= \frac{1}{|t|}\|f(x+ty)-f(x)\|_F \leq \frac{1}{|t|}\,\mathrm{Lip}(f)|t|\,\|y\|_E \\ &= \mathrm{Lip}(f)\|y\|_E \leq \mathrm{Lip}(f)\end{aligned}$$

und somit

$$\begin{aligned}\|f'(x)(y)\|_F &= \|(D_y f)(x)\|_F = \left\|\lim_{t\to 0}\frac{f(x+ty)-f(x)}{t}\right\|_F \\ &= \lim_{t\to 0}\left\|\frac{f(x+ty)-f(x)}{t}\right\|_F \leq \mathrm{Lip}(f).\end{aligned}$$

Bildung des Supremums über alle y liefert $\|f'(x)\|_{\mathrm{op}} \leq \mathrm{Lip}(f)$.

Ist U konvex, so folgt für alle $x, y \in U$ aus (131) die Abschätzung

$$\|f(y) - f(x)\|_F \leq \|f'\|_\infty \|y - x\|_E;$$

es ist also f Lipschitz-stetig mit $\operatorname{Lip}(f) \leq \|f'\|_\infty$. $\square$

Das folgende Resultat wurde für die Allgemeinbildung ins Skript aufgenommen, in der Vorlesung jedoch übersprungen.

Folgerung 22.10 *Es seien $E = \mathbb{R}^n$ und $F = \mathbb{R}^m$, versehen mit Normen $\|\cdot\|_E$ und $\|\cdot\|_F$. Weiter sei $U \subseteq E$ offen und $f\colon U \to F$ eine C^1-Funktion. Dann ist f* lokal Lipschitz-stetig *im folgenden Sinn: Jedes $x \in U$ hat eine Umgebung $V \subseteq U$ derart, dass $f|_V$ Lipschitz-stetig ist.*

Beweis. Da $\|\cdot\|_{\mathrm{op}} \circ f'\colon U \to [0, \infty[$ stetig ist, existiert ein $\delta > 0$ derart, dass $B_\delta^E(x) \subseteq U$ ist und

$$\|f'(y)\|_{\mathrm{op}} < \|f'(x)\|_{\mathrm{op}} + 1$$

für alle $y \in B_\delta^E(x)$. Nach Satz 22.9 ist $\operatorname{Lip}(f|_{B_\delta^E(x)}) \leq \|f'(x)\|_{\mathrm{op}} + 1 < \infty$, also $f|_{B_\delta^E(x)}$ Lipschitz-stetig. $\square$

Lipschitzkonstanten bleiben unverändert, wenn wir Funktionen nur durch additive Konstanten abändern.

Lemma 22.11 *Es sei (X, d) ein metrischer Raum, $(E, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum und $f\colon X \to E$ eine Funktion. Gegeben $C \in E$ schreibe $f + C$ für die Funktion $X \to E$, $x \mapsto f(x) + C$. Dann gilt* $\operatorname{Lip}(f) = \operatorname{Lip}(f + C)$.

Beweis. Für alle $x, y \in X$ mit $x \neq y$ gilt $(f + C)(y) - (f + C)(x) = f(y) + C - f(x) - C = f(y) - f(x)$, woraus die Behauptung folgt. $\square$

Lemma 22.12 *Es seien $E := \mathbb{R}^n$ und $F = \mathbb{R}^m$ mit Normen $\|\cdot\|_E$ und $\|\cdot\|_F$. Weiter sei $U \subseteq E$ eine offene Menge, $f\colon U \to F$ stetig differenzierbar und $x \in U$. Wir betrachten das Restglied R in*

$$f(y) = f(x) + f'(x)(y - x) + R(y)$$

und die Funktion $g\colon U \to F$, $y \mapsto f(x) - f'(x)(x) + R(y)$ mit

$$f(y) = f'(x)(y) + g(y).$$

Dann gilt für jede offene konvexe x-Umgebung $V \subseteq U$

$$\mathrm{Lip}(g|_V) = \mathrm{Lip}(R|_V) = \sup\{\|f'(y) - f'(x)\|_{\mathrm{op}} \colon y \in V\}. \tag{132}$$

Insbesondere gilt

$$\lim_{\delta \to 0} \mathrm{Lip}\left(g|_{B_\delta^E(x)}\right) = \lim_{\delta \to 0} \mathrm{Lip}\left(R|_{B_\delta^E(x)}\right) = 0. \tag{133}$$

Beweis. Es gilt $R(y) = f(y) - f(x) - f'(x)(y) + f'(x)(x)$. Also ist R eine C^1-Funktion und Ableiten bzgl. y liefert

$$R'(y) = f'(y) - f'(x).$$

Nach Lemma 22.9 ist nun

$$\mathrm{Lip}(R|_V) = \sup\{\|R'(y)\|_{\mathrm{op}} \colon y \in V\} = \sup\{\|f'(y) - f'(x)\|_{\mathrm{op}} \colon x \in V\}.$$

Da f' stetig ist, gibt es zu $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ mit $B_\delta^E(x) \subseteq U$ derart, dass $\|f'(y) - f'(x)\|_{\mathrm{op}} \leq \varepsilon$ für alle $y \in B_\delta^E(x)$. Nach dem Vorigen ist dann

$$\mathrm{Lip}(R|_{B_\delta^E(x)}) \leq \varepsilon;$$

also gilt $\mathrm{Lip}(R|_{B_\delta^E(x)}) \to 0$ für $\delta \to 0$. Da $g(y) = R(y) + C$ mit $C := f(x) - f'(x)(x)$ unabhängig von y, ist $\mathrm{Lip}(g|_V) = \mathrm{Lip}(R|_V)$ für jede offene konvexe x-Umgebung $V \subseteq U$; die Aussagen über g folgen also direkt aus denjenigen über R. $\square$

Umgekehrt kann man von Lipschitzeigenschaften des Restglieds auf Differenzierbarkeit an einer Stelle x schließen.

Lemma 22.13 *Seien $E = \mathbb{R}^n$ und $F = \mathbb{R}^m$ mit Normen $\|\cdot\|_E$ bzw. $\|\cdot\|_F$. Sei $U \subseteq E$ eine offene Menge, $x \in U$ und $f \colon U \to F$ eine Funktion. Es sei $\alpha \colon E \to F$ eine stetige lineare Abbildung derart, dass das Restglied $R(y)$ in*

$$f(y) = f(x) + \alpha(y - x) + R(y)$$

die Bedingung

$$\lim_{\delta \to 0} \mathrm{Lip}\left(R|_{B_\delta^E(x)}\right) = 0$$

erfüllt (oder äquivalent dazu, dass die Funktion $g \colon U \to F$, $g(y) := f(x) - \alpha(x) + R(y)$ mit $f(y) = \alpha(y) + g(y)$ die Bedingung

$$\lim_{\delta \to 0} \mathrm{Lip}\left(g|_{B_\delta^E(x)}\right) = 0$$

erfüllt).[42] *Dann ist f an der Stelle x total differenzierbar und $f'(x) = \alpha$.*

Beweis. Da sich R und g nur durch eine additive Konstante unterscheiden, sind beide Bedingungen äquivalent. Sind sie erfüllt, so gibt es zu $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ derart, dass $B_\delta^E(x) \subseteq U$ und $\mathrm{Lip}(R|_{B_\delta^E(x)}) \leq \varepsilon$, woraus wegen $R(x) = 0$

$$\|R(y)\|_F = \|R(y) - R(x)\|_F \leq \varepsilon \|y - x\|_E$$

für alle $y \in B_\delta^E(x)$ folgt. Also gilt $\frac{R(y)}{\|y-x\|_E} \to 0$ für $U \setminus \{x\} \ni y \to x$ und somit ist f an der Stelle x differenzierbar mit Ableitung $f'(x) = \alpha$. □

23 Nullstellen, Newton-Verfahren und Satz über die Umkehrfunktion

In der Analysis möchte man oft Nullstellen einer Funktion f finden.[43] Ist $f\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ eine affin-lineare Funktion der Form

$$f(x) = \alpha(x) + b$$

mit $\alpha \in \mathrm{GL}(\mathbb{R}^N)$ und $b \in \mathbb{R}^N$, so ist f bijektiv und es gibt genau eine Nullstelle, nämlich $x_1 := -\alpha^{-1}(b)$; gegeben ein $x_0 \in \mathbb{R}^N$ und den Funktionswert $f(x_0) = \alpha(x_0) + b$ können wir diese berechnen als

$$x_1 = x_0 - \alpha^{-1}(f(x_0)),$$

wie man sofort verifiziert. Hat eine C^1-Funktion $f\colon U \to \mathbb{R}^N$ auf einer offenen Menge $U \subseteq \mathbb{R}^N$ eine Nullstelle, so kann man versuchen, diese mit dem Newton-Verfahren zu berechnen (das Sie im Falle von Funktionen einer Variablen vielleicht aus der Schule kennen). Ausgehend von einem $x_0 \in U$ mit $f'(x_0) \in \mathrm{GL}(\mathbb{R}^N)$ wendet man das obige Vorgehen auf die affin-lineare Approximation

$$x \mapsto f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \tag{134}$$

von f um x_0 an und erhält den Punkt

$$x_1 := x_0 - f'(x_0)^{-1}(f(x_0)),$$

[42] Funktionen mit dieser Eigenschaft werden in der Literatur auch “strikt differenzierbar” an der Stelle x genannt.

[43] Oder Lösungen zu $f(x) = b$, die sich als Nullstellen von $f(x) - b$ interpretieren lassen.

der eine Nullstelle der affin-linearen Abbildung (134), aber nicht unbedingt von f ist. Im *Newton-Verfahren* fährt man fort und benutzt nun (wenn $x_1 \in U$ und $f'(x_1)$ invertierbar ist) die übliche affin-lineare Approximation

$$x \mapsto f(x_1) + f'(x_1)(x - x_1)$$

von f um x_1 zur Berechnung von deren Nullstelle,

$$x_2 := x_1 - f'(x_1)^{-1}(f(x_1)),$$

und so fort. Im Falle eines *vereinfachten Newton-Verfahrens* halten wir die lineare Abbildung $f'(x_0)$ fest und benutzen die (schlechtere, unübliche) affin-lineare Approximation

$$x \mapsto f(x_1) + f'(x_0)(x - x_1)$$

von f um x_1 zur Bestimmung von deren Nullstelle

$$x_2 := x_1 - f'(x_0)^{-1}(f(x_1))$$

und so fort, immer mit $f'(x_0)$. Man kann zeigen (siehe Kapitel 26):

Satz 23.1 (Approximative Berechnung von Nullstellen) *Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^N$ eine offene Menge, $f\colon U \to \mathbb{R}^N$ eine C^1-Funktion und $x \in U$ eine Nullstelle von f derart, dass $f'(x) \in \mathrm{GL}(\mathbb{R}^N)$. Dann gilt:*

(a) *Es existiert eine x-Umgebung $V \subseteq U$ derart, dass für alle $x_0 \in V$ das vereinfachte Newton-Verfahren durchführbar ist, d.h. es ist*

$$x_{n+1} := x_n - f'(x_0)^{-1}(f(x_n)) \in U$$

für alle $n \in \mathbb{N}_0$; zudem gilt

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x.$$

(b) *Es existiert eine x-Umgebung $V \subseteq U$ derart, dass für alle $x_0 \in V$ das Newton-Verfahren durchführbar ist, d.h. es ist*

$$x_{n+1} := x_n - f'(x_n)^{-1}(f(x_n)) \in U$$

und $f'(x_{n+1}) \in \mathrm{GL}(\mathbb{R}^N)$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$; zudem gilt

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x.$$

Bemerkung 23.2 (a) Für das Newton-Verfahren lässt sich schnellere Konvergenz beweisen als für das vereinfachte; ist die Funktion f in Satz 23.1 eine C^2-Funktion, so hat man "quadratische Konvergenz" des Newton-Verfahrens im folgenden Sinn: Die Abstände

$$\Delta_n := \|x_n - x\|$$

von der korrekten Nullstelle x erfüllen

$$(\forall n \in \mathbb{N}_0)\ \ \Delta_{n+1} \leq C(\Delta_n)^2$$

mit einem $C > 0$.

(b) Jedoch ist das Newton-Verfahren (das hier in erster Linie für die Allgemeinbildung erwähnt wurde) anstrengend zu analysieren und seine Konvergenz zu beweisen. Wir haben daher in der Vorlesung darauf verzichtet und geben einen Beweis nur im nicht prüfungsrelevanten Kapitel 26. In der Numerischen Mathematik wird das Thema aus Sicht der Numerik aufgegriffen.

Das "schlechtere" vereinfachte Newton-Verfahren, das deutlich langsamer gegen die Nullstelle konvergieren kann (siehe Anhang), ist mathematisch viel einfacher zu behandeln. In diesem Kapitel gelingt uns der Beweis des folgenden Satzes, der zudem die Existenz einer Nullstelle garantiert – die also vorher noch nicht bekannt sein muss:

Satz 23.3 (Existenz und Berechnung einer Nullstelle) *Es sei $E = \mathbb{R}^N$ mit $N \in \mathbb{N}$ und einer Norm $\|\cdot\|$. Sei weiter $x_0 \in E$ und $f\colon B_r^E(x_0) \to E$ eine C^1-Funktion mit $r > 0$ derart, dass $f'(x_0) \in \mathrm{GL}(E)$,*

$$L := \sup\{\|f'(y) - f'(x)\|_{\mathrm{op}}\colon y \in B_r^E(x_0)\} < \frac{1}{\|f'(x_0)^{-1}\|_{\mathrm{op}}}$$

und $\|f(x_0)\| < ar$ mit $a := \frac{1}{\|f'(x_0)^{-1}\|_{\mathrm{op}}} - L$. Dann hat f genau eine Nullstelle x. Weiter kann beginnend mit x_0 ein vereinfachtes Newtonverfahren durchgeführt werden, $x_{n+1} := x_n - f'(x_0)^{-1}(f(x_n))$, und es gilt

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x.$$

Für $E = \mathbb{R}^N$ mit einer Norm $\|\cdot\|$ und $\alpha \in \mathrm{GL}(E)$ lässt sich die Zahl $\frac{1}{\|\alpha^{-1}\|_{\mathrm{op}}}$ übrigens als ein "Mindeststreckfaktor" interpretieren, im folgenden Sinn:

Lemma 23.4 *Es ist*

$$\frac{1}{\|\alpha^{-1}\|_{\mathrm{op}}} = \inf_{x\in E\setminus\{0\}} \frac{\|\alpha(x)\|}{\|x\|}.$$

Insbesondere gilt

$$\|\alpha(x)\| \geq \frac{1}{\|\alpha^{-1}\|_{\mathrm{op}}}\|x\| \tag{135}$$

für alle $x \in E$ *und* $\|\alpha(z) - \alpha(y)\| \geq \frac{1}{\|\alpha^{-1}\|_{\mathrm{op}}}\|z - y\|$ *für alle* $y, z \in E$.

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned}\inf_{x\in E\setminus\{0\}} \frac{\|\alpha(x)\|}{\|x\|} &= \inf_{v\in E\setminus\{0\}} \frac{\|\alpha(\alpha^{-1}(v))\|}{\|\alpha^{-1}(v)\|} = \inf_{v\in E\setminus\{0\}} \frac{\|v\|}{\|\alpha^{-1}(v)\|}\\ &= \frac{1}{\sup_{v\in E\setminus\{0\}} \frac{\|\alpha^{-1}(v)\|}{\|v\|}} = \frac{1}{\|\alpha^{-1}\|_{\mathrm{op}}},\end{aligned}$$

da $]0,\infty[\,\to\,]0,\infty[$, $y \mapsto 1/y$ bijektiv und monoton fallend ist, somit Suprema auf Infima abbildet. Die Ungleichung (135) ist trivial, wenn $x = 0$. Ist $x \neq 0$, so ist

$$\|\alpha(x)\| = \frac{\|\alpha(x)\|}{\|x\|}\,\|x\| \geq \frac{1}{\|\alpha^{-1}\|_{\mathrm{op}}}\|x\|$$

nach dem schon Gezeigten; also gilt auch hier (135). Die letzte Ungleichung folgt aus (135), angewandt mit $x := z - y$. □

Bevor wir in die Theorie einsteigen, betrachten wir ein Beispiel für Satz 23.3.

Beispiel 23.5 Wir betrachten die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad f(x,y) = \Big(x + \frac{1}{5}\cos(y), y + \frac{1}{6}\cos(x)\Big).$$

Wir versehen $\mathbb{R}^2$ mit der Maximum-Norm und wollen klären, ob f in der Kugel $B_1(0,0)) =]-1,1[\times]-1,1[\subseteq \mathbb{R}^2$ eine Nullstelle besitzt. Es ist

$$J_f(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{5}\sin(y) \\ -\frac{1}{6}\sin(x) & 1 \end{pmatrix},$$

also $J_f(0,0) = \mathbf{1}$ die Einheitsmatrix. Weiter gilt für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

$$\|J_f(x,y) - J_f(0,0)\|_{\mathrm{op}} = \left\|\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{5}\sin(y) \\ \frac{1}{6}\sin(x) & 0 \end{pmatrix}\right\|_{\mathrm{op}} \leq \max\{|\sin(y)|/5, |\sin(x)|/6\} \leq \frac{1}{5},$$

im Vorgriff auf Lemma 23.6. Insbesondere gilt

$$L := \sup\{\|J_f(x,y)-J_f(0,0)\|_{\mathrm{op}} \colon (x,y) \in B_1(0,0)\} \leq \frac{1}{5} < \frac{1}{\|J_f(0,0)^{-1}\|_{\mathrm{op}}} = 1$$

und $a := \frac{1}{\|J_f(0,0)^{-1}\|_{\mathrm{op}}} - L \geq 4/5$. Nun ist $f(0,0) = (1/5, 1/6)$, somit

$$\|f(0,0)\|_\infty = 1/5 < \frac{4}{5} \leq ar$$

mit $r := 1$. Nach Satz 23.3 hat $f|_{B_1(0,0)}$ eine Nullstelle x und diese ist

$$x = \lim_{n\to\infty} x_n$$

mit $x_0 := (0,0)$ und $x_{n+1} := x_n - f(x_n)$ für $n \in \mathbb{N}$.

Wir haben benutzt, dass sich die Operator-Norm bzgl. der Maximum-Norm berechnen lässt:

Lemma 23.6 *Gegeben $N \in \mathbb{N}$ versehen wir $\mathbb{R}^N$ mit der Maximum-Norm $\|\cdot\|_\infty$. Gegeben eine Matrix $A = (a_{jk})_{j,k=1\dots,N} \in \mathbb{R}^{N\times N}$ ist ihre Operator-Norm (also diejenige der zugehörigen linearen Abbildung $\mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$, $y \mapsto Ay$)*

$$\|A\|_{\mathrm{op}} = \max_{j=1,\dots,N} \|(a_{j1},\dots,a_{jN})\|_1 \leq N\|A\|_\infty,$$

wobei $\|\cdot\|_1 \colon \mathbb{R}^N \to [0,\infty[$ die 1-Norm auf $\mathbb{R}^N$ ist und weiter $\|A\|_\infty := \max\big\{|a_{jk}| \colon j,k \in \{1,\dots,N\}\big\}$.

Beweis. Gegeben $y = (y_1,\dots,y_N)^T \in \mathbb{R}^N$ mit $\|y\|_\infty \leq 1$ ist

$$\begin{aligned} \|Ay\|_\infty &= \max_{j=1,\dots,N} \left|\sum_{k=1}^N a_{jk}y_k\right| \leq \max_{j=1,\dots,N} \sum_{k=1}^N |a_{jk}| \underbrace{|y_k|}_{\leq\|y\|_\infty\leq 1} \\ &\leq \max_{j=1,\dots,N} \sum_{k=1}^N |a_{jk}|; \end{aligned}$$

Bildung des Supremums über alle y liefert

$$\|A\|_{\mathrm{op}} \leq \max_{j=1,\dots,N} \sum_{k=1}^N |a_{j,k}|,$$

wobei

$$\max_{j=1,\ldots,N} \|(a_{j1},\ldots,a_{jN})\|_1 = \max_{j=1,\ldots,N} \sum_{k=1}^{N} \underbrace{|a_{jk}|}_{\leq \|A\|_\infty} \leq N\|A\|_\infty.$$

Gegeben $j \in \{1,\ldots,N\}$ wähle $y_k \in \{1,-1\}$ derart, dass $a_{jk}y_k = |a_{jk}|$ für alle $k \in \{1,\ldots,N\}$. Setzen wir $y := (y_1,\ldots,y_N) \in \mathbb{R}^N$, so ist $\|y\|_\infty \leq 1$ und somit

$$\|A\|_{\mathrm{op}} \geq \|Ay\|_\infty \geq \left|\sum_{k=1}^{N} a_{jk}y_k\right| = \sum_{k=1}^{N} |a_{jk}| = \|(a_{j1},\ldots,a_{jN})\|_1.$$

Somit gilt

$$\|A\|_{\mathrm{op}} \geq \max_{j=1,\ldots,N} \|(a_{j1},\ldots,a_{jN})\|_1$$

und ergo Gleichheit, da die umgekehrte Ungleichung schon gezeigt wurde. □

Um zu sehen, dass eine Funktion $f\colon B_r^E(x) \to E$ eine Nullstelle hat, beweisen wir, dass das Bild von f eine Kugel $B_{ar}^E(f(x))$ um $f(x)$ von einem bekannten Radius ar enthält. Ist $\|f(x)\| < ar$, so hat f also eine Nullstelle. Von dieser Warte aus ist der folgende Satz ein "Satz über die Größe des Bildes". Er enthält jedoch noch weitere Informationen, so dass wir ihn später in Anlehnung an den klassischen Satz über die Umkehrfunktion (Satz 23.9) lieber einen "Quantitativen Satz über die Umkehrfunktion" nennen wollen.

Satz 23.7 (Quantitativer Satz über die Umkehrfunktion) *Es sei $E = \mathbb{R}^N$ mit $N \in \mathbb{N}$ und einer Norm $\|\cdot\|$. Sei weiter $\alpha \in \mathrm{GL}(E)$, $x \in E$, $r > 0$ und $g\colon B_r^E(x) \to E$ eine Lipschitz-stetige Abbildung derart, dass*

$$\mathrm{Lip}(g) < \frac{1}{\|\alpha^{-1}\|_{\mathrm{op}}};$$

es ist also

$$a := \frac{1}{\|\alpha^{-1}\|_{\mathrm{op}}} - \mathrm{Lip}(g) > 0.$$

Dann hat die Abbildung $f\colon B_r^E(x) \to E$, $y \mapsto \alpha(y) + g(y)$ folgende Eigenschaften:

(a) *Das Bild $f(B_r^E(x))$ ist offen in E und $f\colon B_r^E(x) \to f(B_r^E(x))$ ist ein Homöomorphismus.*

(b) *Die Umkehrabbldung* $f^{-1}\colon f(B_r^E(x)) \to B_r^E(x)$ *ist Lipschitz-stetig mit*

$$\operatorname{Lip}(f^{-1}) \leq \frac{1}{a}.$$

(c) *Setzen wir* $h := f^{-1} - \alpha^{-1}$, *so ist* $f^{-1} = \alpha^{-1} + h$ *und* $h\colon f(B_r^E(x)) \to E$ *ist Lipschitz-stetig mit*

$$\operatorname{Lip}(h) \leq \frac{\|\alpha^{-1}\|_{\mathrm{op}} \operatorname{Lip}(g)}{a}. \tag{136}$$

(d) *Setzen wir* $b := \|\alpha\|_{\mathrm{op}} + \operatorname{Lip}(g)$, *so ist*

$$a\|z-y\| \leq \|f(z) - f(y)\| \leq b\|z-y\| \quad \textit{für alle } y, z \in B_r^E(x).$$

(e) *Es gelten folgende Abschätzungen für die Bilder von Kugeln:*

$$B_{ar}^E(f(x)) \subseteq f(B_r^E(x)) \subseteq B_{br}^E(f(x))$$

und allgemeiner

$$B_{as}^E(f(y)) \subseteq f(B_s^E(y)) \subseteq B_{bs}^E(f(y)) \tag{137}$$

für alle $y \in B_r^E(x)$ *und* $0 < s \leq r - \|y-x\|$.

(f) *Ist* $\|f(x)\| < ar$, *so hat* f *genau eine Nullstelle.*

(g) *Ist* f *zudem eine* C^k*-Abbildung mit* $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, *so ist auch* $f^{-1}\colon f(B_r^E(x)) \to E$ *eine* C^k*-Abbildung* (*also* $f\colon B_r^E(x) \to f(B_r^E(x))$ *ein* C^k*-Diffeomorphismus*).

In (g) haben wir die folgende Terminologie benutzt.

Definition 23.8 Seien $N \in \mathbb{N}$ und $k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ und zudem $f\colon U \to V$ eine Abbildung zwischen offenen Teilmengen U und V von $\mathbb{R}^N$.

(a) Ist f bijektiv und sind sowohl f als auch f^{-1} beides C^k-Abbildungen, so wird f ein *C^k-Diffeomorphismus* genannt.

(b) Ist x_0 ein Punkt derart, dass es eine offene x_0-Umgebung $U_0 \subseteq U$ gibt derart, dass $f(U_0)$ offen in $\mathbb{R}^N$ ist und $f|_{U_0}\colon U_0 \to f(U_0)$ ein C^k-Diffeomorphismus, so wird f ein *lokaler C^k-Diffeomorphismus um die Stelle x_0* genannt.

(c) Ist f ein lokaler C^k-Diffeomorphismus um jede Stelle $x_0 \in U$, so wird f ein *lokaler C^k-Diffeomorphismus* genannt.

(d) Ist $k \geq 1$ und $f'(x_0) \in \mathrm{GL}(\mathbb{R}^N)$ für alle $x_0 \in U$, so wird die Abbildung f *étale* genannt. Dies gilt genau dann, wenn f ein lokaler C^k-Diffeomorphismus ist, wie wir im Laufe des Kapitels sehen werden (vgl. Lemma 23.10 und Satz 23.9).

Beweis von Satz 23.7. Sei $L := \mathrm{Lip}(g)$; dann ist also

$$a + L = \frac{1}{\|\alpha^{-1}\|_{\mathrm{op}}}. \tag{138}$$

(d) Für alle $y, z \in B_r^E(x)$ gilt

$$\|f(z) - f(y)\| = \|\alpha(z-y) + g(z) - g(y)\|, \tag{139}$$

somit $\|f(z) - f(y)\| \leq (\|\alpha\|_{\mathrm{op}} + L)\|z - y\|$ unter Benutzung der Dreiecksungleichung. Anwenden der umgekehrten Dreiecksungleichung auf die rechte Seite von (139) liefert

$$\begin{aligned} \|f(z) - f(y)\| &\geq \|\alpha(z-y)\| - \|g(z) - g(y)\| \\ &\geq \frac{1}{\|\alpha^{-1}\|_{\mathrm{op}}}\|z-y\| - \mathrm{Lip}(g)\|z-y\| = a\|z-y\|, \end{aligned}$$

wobei für die letzte Ungleichung (135) benutzt wurde und die Lipschitz-Stetigkeit von g.

(b) Aus der Abschätzung nach unten in (d) folgt, dass f injektiv ist. Sind $v, w \in f(B_r^E(x))$, so ist $v = f(y)$ und $w = f(z)$ mit $y := f^{-1}(v)$ und $z := f^{-1}(w)$. Nach (d) gilt dann $\|f^{-1}(w) - f^{-1}(v)\| = \|z - y\| \leq \frac{1}{a}\|f(z) - f(y)\| = \frac{1}{a}\|w - v\|$. Also ist $\mathrm{Lip}(f^{-1})\| \leq \frac{1}{a}$.

(e) Seien y und s wie in (137). Die zweite Inklusion in (137) gilt nach (d). Um die erste zu beweisen, brauchen wir nur

$$\overline{B}_{at}^E(f(y)) \subseteq f(\overline{B}_t^E(y))$$

zu zeigen für alle $0 < t < r - \|y - x\|$. Hierzu sei $c \in \overline{B}_{at}^E(f(y))$; wir betrachten die Hilfsfunktion

$$h_c\colon \overline{B}_t^E(y) \to E, \quad z \mapsto z - \alpha^{-1}(f(z) - c).$$

Es ist $h_c(z) \in \overline{B}_t^E(y)$ für alle $z \in \overline{B}_t^E(y)$, da

$$\begin{aligned}\|h_c(z) - y\| &= \|\alpha^{-1}(\alpha(z) - \alpha(y) - f(z) + c)\| \\ &= \|\alpha^{-1}(-g(z) + g(y) - f(y) + c)\| \\ &\leq \|\alpha^{-1}\|_{\mathrm{op}}(L\|z - y\| + \|c - f(y)\|) \leq \|\alpha^{-1}\|_{\mathrm{op}}(Lt + at) \leq t\end{aligned}$$

wegen (138). Zudem ist $h_c \colon \overline{B}_t^E(y) \to \overline{B}_t^E(y)$ eine Kontraktion, denn es ist

$$\begin{aligned}\|h_c(z) - h_c(v)\| &= \|\alpha^{-1}(\alpha(z) - \alpha(v) - f(z) + f(v))\| \\ &= \|\alpha^{-1}(g(v) - g(z))\| \leq \|\alpha^{-1}\|_{\mathrm{op}} L\|z - v\|\end{aligned}$$

und somit

$$\operatorname{Lip}(h_c) \leq \|\alpha^{-1}\|_{\mathrm{op}} L < 1. \tag{140}$$

Nach dem Banachschen Fixpunktsatz existiert ein $z \in \overline{B}_t^E(y)$ derart, dass

$$z = h_c(z) = z - \alpha^{-1}(f(z) - c)$$

und somit $c = f(z)$.

(a) Nach (b) ist $f \colon B_r^E(x) \to f(B_r^E(x))$ ein Homöomorphismus. Die erste Inklusion in (137) zeigt, dass $f(B_r^E(x))$ um jeden Punkt eine Kugel enthält und somit offen ist.

(c) Es ist $\mathrm{id} = f^{-1} \circ f = (\alpha^{-1} + h) \circ (\alpha + g) = \mathrm{id} + \alpha^{-1} \circ g + h \circ f$ und somit $h \circ f = -\,\alpha^{-1} \circ g$, also

$$h = -\,\alpha^{-1} \circ g \circ f^{-1}.$$

Folglich ist $\operatorname{Lip}(h) \leq \|\alpha^{-1}\|_{\mathrm{op}} \operatorname{Lip}(g) \operatorname{Lip}(f^{-1})$. Schätzen wir $\operatorname{Lip}(f^{-1})$ wie in (b) nach oben ab, so folgt (136).

(f) Ist $\|f(x)\| < ar$, so ist $0 \in B_{ar}^E(f(x))$ und somit $0 \in f(B_r^E(x))$, nach (e). Also hat f eine Nullstelle. Diese ist eindeutig, weil f injektiv ist.

(g) wird am Ende des Kapitels bewiesen und vorher nicht benutzt. $\square$

Satz 23.7(g) wird aus dem folgenden klassischen Satz folgen (dem Hauptresultat des Kapitels, das Sie unbedingt kennen sollten).

Satz 23.9 (Satz über die Umkehrfunktion) *Es sei U eine offene Teilmenge von $E := \mathbb{R}^N$ mit $N \in \mathbb{N}$. Sei $f \colon U \to E$ eine C^k-Funktion mit $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ und $x_0 \in U$ mit $f'(x_0) \in \mathrm{GL}(E)$ (also $J_f(x_0) \in \mathrm{GL}_N(\mathbb{R})$). Dann existiert eine offene x_0-Umgebung $U_0 \subseteq U$ derart, dass $f(U_0)$ offen in E und $f|_{U_0} \colon U_0 \to f(U_0)$ ein C^k-Diffeomorphismus ist.*

Zum Beweis brauchen wir noch zwei Hilfssätze.

Lemma 23.10 *Es sei* $E := \mathbb{R}^N$ *mit einer Norm* $\|\cdot\|$. *Weiter sei* $U \subseteq E$ *eine offene Teilmenge,* $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ *und* $f\colon U \to E$ *eine* C^k*-Funktion derart, dass* $f(U)$ *in* R^N *offen und* $f\colon U \to f(U)$ *ein Homöomorphismus ist. Ist* $f^{-1}\colon f(U) \to U$ *an jeder Stelle differenzierbar, so ist* f^{-1} *eine* C^k*-Funktion, also* $f\colon U \to f(U)$ *ein* C^k*-Diffeomorphismus. Weiter ist* $f'(x) \in \mathrm{GL}(E)$ *für alle* $x \in U$ *und*

$$(f^{-1})'(f(x)) = f'(x)^{-1}, \tag{141}$$

also auch

$$(f^{-1})'(y) = f'(f^{-1}(y))^{-1} \quad \textit{für alle } y \in f(U). \tag{142}$$

Beweis. Es ist $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_U$ und somit nach der Kettenregel

$$(f^{-1})'(f(x)) \circ f'(x) = \mathrm{id}_E$$

für alls $x \in U$. Weiter ist $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_{f(U)}$ und Ableiten liefert mit der Kettenregel $f'(f^{-1}(y)) \circ (f^{-1})'(y) = \mathrm{id}_E$ für $y \in f(U)$. Setzen wir $y := f(x)$ mit $x \in U$, so ist also

$$f'(x) \circ (f^{-1})'(f(x)) = \mathrm{id}_E\,.$$

Nach dem vorigen ist $(f^{-1})'(f(x))$ eine Rechts- und Linksinverse zu $f'(x)$. Also ist $f'(x)$ invertierbar mit $f'(x)^{-1} = (f^{-1})'(f(x)$; somit gilt (141). Setzen wir $x := f^{-1}(y)$ in (141) ein zu gegebenem $y \in f(U)$, so erhalten wir (142).

Für den Beweis, dass f^{-1} eine C^k-Abbildung ist, dürfen wir $k \in \mathbb{N}$ annehmen. Der Beweis ist per Induktion nach k. Wir benutzen, dass die Abbildung

$$j\colon\ \mathrm{GL}(E) \to \mathrm{GL}(E), \quad \alpha \mapsto \alpha^{-1}$$

C^∞ ist.

$k = 1$: Sei f eine C^1-Abbildung. Nach (142) ist

$$(f^{-1})' = j \circ f' \circ f^{-1}. \tag{143}$$

Da j, f' und (per Annahme) f^{-1} stetig sind, ist die Komposition $(f^{-1})'$ stetig und somit f^{-1} eine C^1-Abbildung.

Sei nun f eine C^{k+1}-Abbildung. Per Induktionsannahme ist f^{-1} eine C^k-Abbildung, Nach (143) ist dann $(f^{-1})'$ eine C^k-Abbildung als Komposition von C^k-Abbldungen. Also ist f^{-1} stetig differenzierbar und $(f^{-1})'$ eine C^k-Abbildung und somit ist f^{-1} eine C^{k+1}-Abbildung. □

Lemma 23.11 *Es sei $E := \mathbb{R}^N$ mit $N \in \mathbb{N}$ und einer Norm $\|\cdot\|$.*

(a) *Ist $\gamma \in \mathcal{L}(E)$ mit $\|\gamma\|_{\mathrm{op}} < 1$, so ist $\mathrm{id} - \gamma \in \mathrm{GL}(E)$ und*

$$(\mathrm{id} - \gamma)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \gamma^n.$$

(b) *Ist $\alpha \in \mathrm{GL}(E)$ und $\beta \in \mathcal{L}(E)$ mit $\|\beta\|_{\mathrm{op}} < \frac{1}{\|\alpha^{-1}\|_{\mathrm{op}}}$, so ist $\alpha + \beta \in \mathrm{GL}(E)$.*

Beweis. (a) Wegen $\|\gamma^n\|_{\mathrm{op}} \leq (\|\gamma\|_{\mathrm{op}})^n$ ist $\sum_{n=0}^{\infty} \|\gamma^n\|_{\mathrm{op}} \leq \sum_{n=0}^{\infty} (\|\gamma\|_{\mathrm{op}})^n = \frac{1}{1-\|\gamma\|_{\mathrm{op}}} < \infty$. Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \gamma^n$ ist also absolut konvergent im Banachraum $(\mathcal{L}(E), \|\cdot\|_{\mathrm{op}})$ und somit konvergent. Beachten Sie auch, dass $\gamma^n \to 0$ da $\|\gamma^n\|_{\mathrm{op}} \leq (\|\gamma\|_{\mathrm{op}})^n \to 0$. Nun ist

$$\begin{aligned}
(\mathrm{id} - \gamma) \sum_{n=0}^{\infty} \gamma^n &= (\mathrm{id}_E - \gamma) \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \gamma^k \\
&= \lim_{n\to\infty} \left((\mathrm{id}_E - \gamma) \sum_{k=0}^{n} \gamma^k \right) \\
&= \lim_{n\to\infty} (\mathrm{id}_E - \gamma^{n+1}) = \mathrm{id}_E
\end{aligned}$$

und analog $\left(\sum_{n=0}^{\infty} \gamma^n\right)(\mathrm{id}_E - \gamma) = \mathrm{id}_E$. Also ist $\mathrm{id}_E - \gamma$ invertierbar mit Inverser $\sum_{n=0}^{\infty} \gamma^n$.

(b) Es ist $\alpha + \beta = \alpha \circ (\mathrm{id}_E + \alpha^{-1} \circ \beta) = \alpha \circ (\mathrm{id}_E - \gamma)$ mit $\gamma := -\alpha^{-1} \circ \beta$. Da

$$\|\gamma\|_{\mathrm{op}} = \|\alpha^{-1} \circ \beta\|_{\mathrm{op}} \leq \|\alpha^{-1}\|_{\mathrm{op}} \|\beta\|_{\mathrm{op}} < \|\alpha^{-1}\|_{\mathrm{op}} \frac{1}{\|\alpha^{-1}\|_{\mathrm{op}}} = 1,$$

ist $\mathrm{id}_E - \gamma$ nach (a) invertierbar und somit auch $\alpha + \beta = \alpha \circ (\mathrm{id}_E - \gamma)$. □

Beweis von Satz 23.9. Da $f' \colon U \to (\mathcal{L}(E), \|\cdot\|_{\mathrm{op}})$ stetig ist, gibt es ein $R > 0$ mit $B_R^E(x_0) \subseteq U$ derart, dass

$$\|f'(x) - f'(x_0)\|_{\mathrm{op}} \leq \frac{1}{2} \frac{1}{\|f'(x_0)^{-1}\|_{\mathrm{op}}} \quad \text{für alle } x \in B_R^E(x_0).$$

Schreiben wir $f(x) = f'(x_0)(x) + G(x)$ für $x \in B_R^E(x_0) =: U_0$, so ist also

$$\mathrm{Lip}(G) = \sup_{x \in U_0} \|f'(x) - f'(x_0)\|_{\infty} \leq \frac{1}{2} \frac{1}{\|f'(x_0)^{-1}\|_{\mathrm{op}}} < \frac{1}{\|f'(x_0)^{-1}\|_{\mathrm{op}}}$$

nach Satz 22.9. Nach Satz 23.7 ist folglich $f(U_0)$ offen in E und die Einschränkung $f|_{U_0}\colon U_0 \to f(U_0)$ ein Homöomorphismus. Wir zeigen wir nun, dass $(f|_{U_0})^{-1}\colon f(U_0) \to U_0 \subseteq E$ an jeder Stelle $y \in f(U_0)$ differenzierbar ist; nach Lemma 23.10 ist dann $(f|_{U_0})^{-1}$ eine C^k-Abbildung und $f|_{U_0}\colon U_0 \to f(U_0)$ ein C^k-Diffeomorphismus. Sei $x := (f|_{U_0})^{-1}(y) \in U_0$. Es ist

$$f'(x) = f'(x_0) + G'(x_0)$$

mit $\|G'(x_0)\| \leq \mathrm{Lip}(G) < \frac{1}{\|f'(x_0)^{-1}\|_{\mathrm{op}}}$, also $f'(x) \in \mathrm{GL}(E)$ nach Lemma 23.11(b). Gegeben $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta \in \,]0, \mathrm{Lip}(G)]$ derart, dass

$$\frac{\|f'(x)^{-1}\|_{\mathrm{op}} L}{\frac{1}{\|f'(x)^{-1}\|_{\mathrm{op}}} - L} \leq \varepsilon \;\text{ für alle } L \in [0, \delta], \tag{144}$$

denn die linke Seite von (144) konvergiert gegen 0 für $L \to 0$. Da f' stetig ist, existiert ein $r \in \,]0, R - \|x - x_0\|]$ derart, dass

$$(\forall z \in B_r^E(x)) \;\; \|f'(z) - f'(x)\|_{\mathrm{op}} \leq \delta.$$

Nach (132) in Lemma 22.12 erfüllt also die Funktion $g\colon B_r^E(x) \to E$, $g(z) := f(z) - f'(x)(z)$ mit $f|_{B_r^E(x)} = f'(x) + g$ die Bedingung $\mathrm{Lip}(g) \leq \delta$. Nach Satz 23.7(c) ist dann

$$(f|_{B_r^E(x)})^{-1} = f(x)^{-1} + h$$

mit einer Funktion $h\colon f(B_r^E(x)) \to E$ mit

$$\mathrm{Lip}(h) \leq \frac{\|f(x)^{-1}\|_{\mathrm{op}}\,\mathrm{Lip}(g)}{\frac{1}{\|f'(x)^{-1}\|_{\mathrm{op}}} - \mathrm{Lip}(g)} \leq \varepsilon.$$

Nach Lemma 22.13 ist $(f|_{B_R^E(x_0)})^{-1}$ somit an der Stelle y differenzierbar. $\square$

Beweis von Satz 23.7(g). Die Funktion $g = f - \alpha$ ist C^k und für alle $y \in B_r^E(x)$ haben wir

$$\|g'(y)\|_{\mathrm{op}} \leq \mathrm{Lip}(g) < \frac{1}{\|\alpha^{-1}\|_{\mathrm{op}}}$$

nach Satz 22.9. Sei $z \in f(B_r^E(x))$ und $y \in B_r^E(x)$ mit $f(y) = z$. Nach dem Vorigen ist $f'(y) = \alpha + g'(y) \in \mathrm{GL}(E)$, nach Lemma 23.11(b). Nach Satz 23.9 gibt es also eine offene y-Umgebung $U_0 \subseteq B_r^E(x)$ derart, dass $f(U_0)$ eine offene Umgebung von $z = f(y)$ in E ist und $f|_{U_0}\colon U_0 \to f(U_0)$

ein C^k-Diffeomorphismus. Also ist $f^{-1}|_{f(U_0)} = (f|_{U_0})^{-1}$ eine C^k-Abbildung. Somit ist f^{-1} eine C^k-Abbildung, folglich $f\colon B_r^E(x) \to f(B_r^E(x))$ ein C^k-Diffeomorphismus. $\square$

Beweis von Satz 23.3. Definieren wir

$$g\colon B_r^E(x_0) \to E, \ \ y \mapsto f(y) - f'(x_0)(y),$$

so ist $f = f'(x_0)+g$ und $\mathrm{Lip}(g) = L < \frac{1}{\|f'(x_0)^{-1}\|_{\mathrm{op}}}$ nach (132) in Lemma 22.12. Da $\|f(x_0)\| < ar$, hat f nach Satz 23.7(f) genau eine Nullstelle x. Nehmen wir $c := 0$ im Beweis von Satz 23.7(e) (mit x_0 an Stelle von x und $y := x_0$) und wählen $t \in]0, r[$ mit $\|f(x_0)\| \leq at$, so ist die dortige Funktion

$$h_c\colon \overline{B}_t^E(x_0) \to \overline{B}_t^E(x_0), \ \ z \mapsto z - f'(x_0)^{-1}(f(z))$$

eine Kontraktion mit Fixpunkt x. Nach dem Banachschen Fixpunktsatz gilt also $x_n = (h_c)^n(x_0) \to x$ für $n \to \infty$. $\square$

Beispiel 23.12 Für die C^∞-Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ aus Beispiel 23.5 ist $J_f(0,0) = \mathbf{1} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$; nach Satz 23.9 gibt es also eine offene $(0,0)$-Umgebung U in $\mathbb{R}^2$ derart, dass $f(U)$ offen in $\mathbb{R}^2$ ist und $f|_U\colon U \to f(U)$ ein C^∞-Diffeomorphismus. Weiter ist $f = \mathrm{id} + g$ mit der C^∞-Funktion

$$g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad (x,y) \mapsto \left(\frac{1}{5}\cos(y), \frac{1}{6}\cos(x)\right)$$

mit $\|J_g(x,y)\|_{\mathrm{op}} \leq \frac{1}{5}$ für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ (cf. Beispiel 23.12) Für jedes $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ ist also $J_f(x,y) = \mathbf{1} + J_g(x,y) \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$, nach Lemma 23.11(a). Satz 23.9 liefert also eine offene (x,y)-Umgebung $U \subseteq \mathbb{R}^2$ derart, dass $f(U)$ offen in $\mathbb{R}^2$ und $f|_U\colon U \to f(U)$ ein C^∞-Diffeomorphismus ist.

Der klassische Satz über die Umkehrfunktion hat uns im vorigen Beispiel Informationen zum lokalen Verhalten von f um jeden Punkt $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ geben können. Aber wie verhält sich f global: Ist f injektiv, surjektiv, oder sogar ein Diffeomorphismus? Mit der zusätzlichen quantitativen Information aus dem Quantitativen Satz über die Umkehrfunktion (Satz 23.7) können wir diese Fragen beantworten.

Beispiel 23.13 Die Funktion g aus Beispiel 23.12 erfüllt nach Satz 22.9

$$\mathrm{Lip}(g) = \sup\{\|g'(x,y)\|_{\mathrm{op}}\colon (x,y) \in \mathbb{R}^2\} \leq \frac{1}{5}.$$

Also ist

$$a := \frac{1}{\|f'(0,0)^{-1}\|_{\mathrm{op}}} - \operatorname{Lip}(g) = \frac{1}{\|\,\mathrm{id}\,\|_{\mathrm{op}}} - \operatorname{Lip}(g) = 1 - \operatorname{Lip}(g) \geq \frac{4}{5}.$$

Für jedes $r > 0$ ist nach Satz 23.7 die Abbildung $f|_{B_r(0,0)}$ injektiv; also ist f injektiv. Nach dem Satz ist weiter

$$B_{ar}(f(x)) \subseteq f(B_r(x)) \subseteq f(\mathbb{R}^2)$$

für alle $r > 0$ und somit $f(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R}^2$. Also ist $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ eine Bijektion. Da $f^{-1}|_{B_{ar}(f(0,0))} = (f|_{B_r(0,0)})^{-1}|_{B_{ar}(f(0,0))}$ eine C^∞-Abbildung ist für alle $r > 0$, ist f^{-1} eine C^∞-Abbildung und somit $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ein C^∞-Diffeomorphismus.

Bemerkung 23.14 In diesem Kapitel haben wir den Satz über die Umkehrfunktion mit Hilfe des Banachschen Fixpunktsatzes bewiesen, angewandt auf Kontraktionen von Kugeln $\overline{B}_t^E(y)$ im endlich-dimensionalen Vektorraum $E = \mathbb{R}^N$. Eine weitere Anwendung des Banachschen Fixpunktsatz ist der Beweis des Existenzsatzes von Picard-Lindelöf in der "Reellen Analysis" (der die Existenz von Lösungen $y\colon [a,b] \to \mathbb{R}^m$ gewisser Anfangswertprobleme $y'(t) = f(t, y(t))$, $y(t_0) = y_0$ mit $t_0 \in [a,b]$ garantiert); hierbei wird ein Fixpunkt gesucht für eine Kontraktion einer abgeschlossenen Teilmenge des unendlich-dimensionalen Banachraums $C([a,b], \mathbb{R}^m)$.

24 Satz über implizite Funktionen

Manchmal kennen wir bereits eine Lösung (x_0, y_0) einer nicht-linearen Gleichung $f(x,y) = 0$ und fragen uns, ob für x nahe x_0 ein $y = y(x)$ nahe y_0 mit $f(x,y) = 0$ existiert und eindeutig festgelegt ist, so dass also die Funktion $x \mapsto y(x)$ implizit durch die Gleichung

$$f(x,y) = 0$$

gegeben ist. Beispielsweise ist $x_0 = 0$, $y_0 = 0$ eine Lösung von

$$x + y + \sin(xy) = 0,$$

wir sehen aber vielleicht nicht unmittelbar, wie wir hier nach y auflösen können. Mit den Methoden der Differentialrechnung erhalten wir eine hinreichende Bedingung.

Satz 24.1 *Es seien $n, m \in \mathbb{N}$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ und $V \subseteq \mathbb{R}^m$ offene Teilmengen, $f\colon U \times V \to \mathbb{R}^m$ eine C^k-Abbildung mit $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ und $(x_0, y_0) \in U \times V$ eine Nullstelle von f derart, dass $(f_{x_0})'(y_0) \in \mathrm{GL}(\mathbb{R}^m)$ gilt für die Funktion $f_{x_0} := f(x_0, \cdot)\colon V \to \mathbb{R}^m$, also*

$$J_{f_{x_0}}(y_0) \in \mathrm{GL}_m(\mathbb{R}). \tag{145}$$

Dann gibt es eine offene Umgebung U_0 von x_0 in U und eine offene Umgebung V_0 von y_0 in V derart, dass die Nullstellenmenge von $f|_{U_0 \times V_0}$ ein Graph ist:

$$\{(x, y) \in U_0 \times V_0\colon f(x, y) = 0\} = \mathrm{graph}(\phi)$$

mit einer C^k-Funktion $\phi\colon U_0 \to V_0$.

Bemerkung 24.2 Wenn $m = 1$ ist in der Situation von Satz 24.1, so ist $\mathbb{R}^{m \times m} \cong \mathbb{R}$ die Algebra der 1×1-Matrizen und eine solche Matrix ist genau dann invertierbar, wenn sie nicht die Nullmatrix ist. Also ist $J_{f_{x_0}}(y_0) = (\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)) \in \mathbb{R}^{1 \times 1}$ genau dann invertierbar, wenn

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0. \tag{146}$$

Im Falle $m = 1$ dürfen Sie die Bedingung (145) also einfach durch (146) ersetzen.

Beispiel 24.3 Der Einheitskreis $\mathbb{S} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\colon x^2 + y^2 = 1\}$ ist die Lösungsmenge der Gleichung

$$x^2 + y^2 - 1 = 0.$$

Es ist also $\mathbb{S} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\colon f(x, y) = 0\}$ mit der C^∞-Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto x^2 + y^2 - 1.$$

Sei $(x_0, y_0) \in \mathbb{S}$. Ist $y_0 > 0$, so ist die Menge von Nullstellen von f in $]-1, 1[\, \times \,]0, \infty[$ der Graph

$$\{(x, \sqrt{1 - x^2})\colon x \in \,]-1, 1[\}$$

der C^∞-Funktion $]-1, 1[\, \to \,]0, \infty[$, $x \mapsto \sqrt{1 - x^2}$. Auch sind die Voraussetzungen des Satzes über implizite Funktionen (in der Form (146)) erfüllt: es ist

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 2y_0 \neq 0.$$

Ist $y_0 < 0$, so ist die Menge von Nullstellen von f in $]-1,1[\times]-\infty,0[$ der Graph

$$\{(x, -\sqrt{1-x^2})\colon x \in]-1,1[\}$$

der C^∞-Funktion $]-1,1[\to]0,\infty[$, $x \mapsto -\sqrt{1-x^2}$ und wieder ist $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = 2y_0 \neq 0$ erfüllt.

Ist $y_0 = 0$, so ist $(x_0,y_0) = (1,0)$ oder $(x,y_0) = (-1,0)$. Wir diskutieren den Fall $(x_0,y_0) = (1,0)$ (der andere lässt sich analog diskutieren). Die Voraussetzungen des Satzes über implizite Funktionen sind nun nicht erfüllt, denn es ist

$$\frac{\partial f}{\partial y}(1,0) = 0.$$

Und nahe $(1,0)$ ist die Nullstellenmenge von f kein Graph. Ist nämlich $U_0 \subseteq \mathbb{R}$ eine offene 1-Umgebung und $V_0 \subseteq \mathbb{R}$ eine offene 0-Umgebung, so gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit $]-\varepsilon,\varepsilon[\subseteq V_0$ und ein $\delta > 0$ mit $]1-\delta, 1+\delta[\subseteq U_0$. Nach Verkleinern von δ dürfen wir $\sqrt{1-(1-\delta)^2} < \varepsilon$ annehmen. Sei $x \in]1-\delta,1[$. Dann ist $\sqrt{1-x^2} \neq -\sqrt{1-x^2}$ und es sind

$$(x, \sqrt{1-x^2}) \in \mathbb{S} \cap (U_0 \times V_0) \quad \text{sowie} \quad (x, -\sqrt{1-x^2}) \in \mathbb{S} \cap (U_0 \times V_0).$$

Also kann $\mathbb{S} \cap (U_0 \times V_0)$ kein Graph eine Funktion $\phi\colon U_0 \to V_0$ sein. Weiter gibt es zu $x \in]1, 1+\delta[$ kein $y \in V_0$ mit $(x,y) \in \mathbb{S}$, denn es ist $f(x,y) = x^2+y^2-1 \geq x^2-1 > 0$. Auch daraus können wir schließen, dass $\mathbb{S}\cap(U_0 \cap V_0)$ kein Graph einer auf U_0 definierten Funktion ist.

Beachten Sie, dass wir für y nahe 0 jedoch $(\sqrt{1-y^2}, y) \in \mathbb{S}$ haben, d.h. die Sphäre ist nahe $(1,0)$ Graph einer Funktion von y. Um diese Beobachtung auch mit Hilfe des Satzes über implizite Funktionen reproduzieren zu können, setzen wir $g(y,x) := f(x,y)$ für $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ und wenden den Satz auf g an Stelle von f an.

Beispiel 24.4 Zeigen Sie, dass die Gleichung

$$x + y + \sin(xy) = 0$$

für jedes x nahe 0 eine Lösung (x,y) besitzt.

Zum Nachweis betrachten wir die C^∞-Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) := x + y + \sin(xy).$$

Dann ist $f(0,0) = 0$ und $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 1 + x\cos(xy)$, somit $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 1 \neq 0$. Also ist (146) erfüllt. Nach dem Satz über implizite Funktionen gibt es 0-Umgebungen $U_0 \subseteq \mathbb{R}$ und $V_0 \subseteq \mathbb{R}$ derart, dass

$$\{(x,y) \in U_0 \times V_0 \colon f(x,y) = 0\} = \operatorname{graph}(\phi)$$

für eine C^∞-Funktion $f\colon U_0 \to V_0$. Insbesondere hat die Gleichung

$$x + y + \sin(xy) = f(x,y) = 0$$

für jedes $x \in U_0$ eine Lösung, nämlich $(x, \phi(x))$.

Folgende Beobachtung über Blockmatrizen nutzt im Beweis von Satz 24.1.

Lemma 24.5 *Seien $n, m \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, $\gamma \in \mathrm{GL}_m(\mathbb{R})$ und $\beta \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Dann ist die Blockmatrix*

$$A := \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ \beta & \gamma \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(n+m)\times(n+m)}$$

eine invertierbare Matrix.

Beweis. Wir setzen

$$B := \begin{pmatrix} \alpha^{-1} & 0 \\ -\gamma^{-1}\beta\alpha^{-1} & \gamma^{-1} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(n+m)\times(n+m)}.$$

Man rechnet direkt nach, dass $AB = BA = \mathbf{1}$ die Einheitsmatrix ist. Also ist A invertierbar mit $A^{-1} = B$. □

Beweis von Satz 24.1. Wir betrachten die Funktion

$$g\colon U \times V \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m, \quad (x,y) \mapsto (x, f(x,y));$$

diese ist C^k, weil beide Komponenten (die Projektion $U \times V \to \mathbb{R}^n$, $(x,y) \mapsto x$ und f) es sind. Die Jacobi-Matrix von g an der Stelle (x_0, y_0) ist

$$J_g(x_0,y_0) = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ \beta & J_{f_{x_0}}(y_0) \end{pmatrix},$$

wobei $\beta := (\frac{\partial f_i}{\partial x_j}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$ mit $i \in \{1,\ldots,m\}$, $j \in \{1,\ldots,n\}$ und $\mathbf{1} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ die Einheitsmatrix ist. Nach Lemma 24.5 ist $J_g(x_0,y_0)$ eine invertierbare

Matrix. Nach dem Satz über die Umkehrfunktion existiert also eine offene Umgebung W von (x_0, y_0) in $U \times V$ derart, dass $g(W)$ offen in $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ und $g|_W \colon W \to g(W)$ ein C^k-Diffeomorphismus ist. Da $U \times V$ die Produkttopologie trägt, finden wir eine offene x_0-Umgebung $P \subseteq U$ und eine offene y_0-Umgebung $V_0 \subseteq V$ derart, dass

$$P \times V_0 \subseteq W;$$

dann ist $g(P \times V_0)$ offen in $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ und $g|_{P \times V_0} \colon P \times V_0 \to g(P \times V_0)$ ein C^k-Diffeomorphismus. Da nun $g(P \times V_0)$ eine offene Umgebung von $f(x_0, y_0) = (x_0, 0)$ in $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ ist, gibt es eine offene x_0-Umgebung $U_0 \subseteq \mathbb{R}^n$ und eine offene 0-Umgebung $O \subseteq \mathbb{R}^m$ derart, dass

$$U_0 \times O \subseteq g(P \times V_0).$$

Jedes $x \in U_0$ ist eine erste Komponente von $(x, 0) = g(z, y)$ mit einem $(z, y) \in P \times V_0$; also ist $x = z \in P$ und folglich $U_0 \subseteq P$. Weiter gilt

$$g(U_0 \times V_0) \supseteq U_0 \times O; \tag{147}$$

ist nämlich $(x', y') \in U_0 \times O$ und $(x, y) \in P \times V_0$ mit $g(x, y) = (x', y')$, so ist $x = x' \in U_0$, also $(x', y') = g(x', y) \in g(U_0 \times V_0)$.

Gegeben $x \in U_0$ gibt es nach (147) ein $(z, y) \in U_0 \times V_0$ mit $(x, 0) = g(z, y)$; da $g(z, y) = (z, f(z, y))$, ist $z = x$ und $f(x, y) = 0$. Ist auch $y' \in V_0$ mit $f(x, y') = 0$, so ist $g(x, y') = (x, f(x, y')) = (x, 0) = g(x, y)$, also $y = y'$ da $g|_{U_0 \times V_0}$ injektiv ist. Da y nach dem Vorigen eindeutig ist, können wir $\phi(x) := y$ setzen und erhalten

$$\{(x, y) \in U_0 \times V_0 \colon f(x, y) = 0\} = \operatorname{graph}(\phi).$$

Aus $(x, 0) = g(x, y)$ folgt aber

$$(x, y) = (g|_W)^{-1}(x, 0)$$

und somit $\phi(x) = y = (\mathrm{pr}_2 \circ (g|_W)^{-1})(x, 0)$ mit $\mathrm{pr}_2 \colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$, $(a, b) \mapsto b$. Da $(g|_W)^{-1}$ eine C^k-Funktion ist, ist auch ϕ eine C^k-Funktion. $\square$

Parameterabhängigkeit von Fixpunkten

Die folgenden drei Resultate wurden in der Vorlesung übersprungen und sind nicht prüfungsrelevant.

Wir diskutieren zunächst stetige Parameterabhängigkeit von Fixpunkten in zwei Situationen, anschließend als Anwendung des Satzes über implizite Funktionen die C^k-Abhängigkeit von Fixpunkten von Parametern.

Satz 24.6 *Sei P ein topologischer Raum, (X,d) ein vollständiger metrischer Raum mit $X \neq \emptyset$ und $f\colon P \times X \to X$ eine Abbildung derart, dass für jedes $p \in P$ die Abbildung $f_p := f(p,\cdot)\colon X \to X$ eine Kontraktion ist und*

$$L := \sup_{p\in P} \operatorname{Lip}(f_p) < 1$$

(d.h. wir haben eine sogenannte "gleichmäßige Familie von Kontraktionen" vorliegen). Nach dem Banachschen Fixpunktsatz hat für jedes $p \in P$ die Kontraktion f_p genau einen Fixpunkt x_p. Ist f stetig, so ist auch die Abbildung

$$\psi\colon P \to X, \quad p \mapsto x_p$$

stetig.

Beweis. Wir zeigen, dass ψ an einer gegebenen Stelle $p \in P$ stetig ist. Gegeben $\varepsilon > 0$ gibt es eine p-Umgebung $Q \subseteq P$ derart, dass

$$d(f_q(x_p), x_p) = d(f(q,x_p), f(p,x_p)) < \varepsilon(1-L)$$

für alle $q \in Q$, da f stetig ist. Benutzung der a priori-Abschätzung für f_q aus Satz 21.3(c) liefert

$$d(\psi(q),\psi(p)) = d(x_q,x_p) \leq \frac{1}{1-L} d(f_q(x_p),x_p) < \varepsilon$$

für alle $q \in Q$. Also ist ψ stetig an der Stelle p. $\square$

Folgerung 24.7 *Es sei P ein topologischer Raum, (X,d) ein vollständiger metrischer Raum, $U \subseteq X$ eine offene Menge und $f\colon P \times U \to X$ eine Abbildung derart, dass die Abbildungen $f_p := f(p,\cdot)\colon U \to X$ eine gemeinsame Lipschitzkonstante*

$$L := \sup_{p\in P} \operatorname{Lip}(f_p) < 1$$

erlauben. Ist f stetig, so ist die Menge

$$Q := \{p \in P\colon f_p \text{ hat einen Fixpunkt } x_p\}$$

offen in P und die Abbildung $\psi\colon Q \to X$, $p \mapsto x_p$ ist stetig.

Beweis. Gegeben $p \in Q$ existiert ein $r > 0$ mit $\overline{B}_r^X(x_p) \subseteq U$. Da f stetig ist, gibt es eine p-Umgebung $W \subseteq P$ derart, dass

$$d(f_q(x_p), x_p) = d(f(q, x_p), f(p, x_p)) \leq (1 - L)r.$$

Für alle $x \in \overline{B}_r^X(x_p)$ gilt dann

$$\begin{aligned} d(f_q(x), x_p) &\leq \underbrace{d(f_q(x), f_q(x_p))}_{\leq L\, d(x,x_p)} + d(f_q(x_p), x_p) \\ &\leq L\, d(x, x_p) + d(f_q(x_p), x_p) \leq Lr + (1 - L)r = r. \end{aligned}$$

Also ist $f_q(x) \in B_r^X(x_p)$ und somit $f_q|_{\overline{B}_r^X(x_p)}$ eine Selbstabbildung (und Kontraktion) des vollständigen metrischen Raumes $\overline{B}_r^X(x_p)$. Nach Satz 24.6 existiert ein Fixpunkt $x_q \in \overline{B}_r^X(x_p)$ für alle $q \in W$ und $\psi|_W$ ist stetig. Also ist $W \subseteq Q$ (somit Q offen) und ψ ist an der Stelle p stetig, also stetig. □

Satz 24.8 *Es seien $E = \mathbb{R}^n$ mit einer Metrik $\|\cdot\|_E$, $F = \mathbb{R}^m$ mit einer Metrik $\|\cdot\|_F$ und $P \subseteq E$ sowie $U \subseteq F$ offene Teilmengen. Weiter sei $f\colon P \times U \to F$ eine Abbildung derart, dass die Abbildungen $f_p := f(p, \cdot)\colon U \to F$ eine gemeinsame Lipschitzkonstante*

$$L := \sup_{p \in P} \operatorname{Lip}(f_p) < 1$$

erlauben. Ist f eine C^k-Funktion für ein $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, so ist die Menge

$$Q := \{p \in P\colon f_p \text{ hat einen Fixpunkt } x_p\}$$

offen in P und die Abbildung $\psi\colon Q \to F$, $p \mapsto x_p$ ist C^k.

Beweis. Gegeben $p \in P$ ist offenbar $x \in U$ genau dann ein Fixpunkt von f_p, wenn

$$x - f(p, x) = 0$$

ist, also (p, x) eine Nullstelle der C^k-Funktion

$$g\colon P \times U \to F, \quad g(p, x) := x - f(p, x)$$

ist. Für $q \in P$ ist dann

$$g_q := g(q, \cdot) = \mathrm{id}_U - f_q.$$

Nach Satz 22.9 ist
$$\|f_q'(x)\|_{\mathrm{op}} \leq L$$
für alle $q \in P$ und $x \in U$, also

$$g_q'(x) = \mathrm{id}_F - f_q'(x) \in \mathrm{GL}(F)$$

nach Lemma 23.11(a). Gegeben $p \in Q$ können wir Satz 24.1 somit an der Stelle (p, x_p) anwenden und erhalten eine offene p-Umgebung $P_0 \subseteq P$ und eine offene x_p-Umgebung $U_0 \subseteq U$ sowie eine C^k-Funktion $\phi\colon P_0 \to U_0$ derart, dass
$$\{(q,x) \in P_0 \times U_0\colon g(q,x) = 0\} = \mathrm{graph}(\phi).$$
Für alle $q \in P_0$ ist $g(q, \phi(q)) = 0$, also $\phi(q)$ ein Fixpunkt von f_q, folglich $q \in Q$ und $\psi(q) = \phi(q)$. Also ist $P_0 \subseteq Q$, also Q eine p-Umgebung (somit Q offen) und $\psi|_{P_0} = \phi$ eine C^k-Funktion und also auch ψ eine C^k-Funktion (da $p \in Q$ beliebig war). □

25 Extrema unter Nebenbedingungen

Wir studieren nun lokale (und globale) Extremalstellen einer Funktion f unter einer Nebenbedingung $g(x) = 0$, also lokale (bzw. globale) Extremalstellen von $f|_M$, wobei
$$M := g^{-1}(\{0\})$$
die Nullstellenmenge von g ist.

Satz 25.1 *Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge mit $n \in \mathbb{N}$ und $g\colon U \to \mathbb{R}$ eine C^1-Funktion derart, dass*
$$\nabla g(p) \neq 0$$
für alle $p \in M := g^{-1}(\{0\})$. Ist $f\colon U \to \mathbb{R}$ eine C^1-Funktion und $p \in M$ eine lokale Minimalstelle von $f|_M$, so existiert ein $\lambda \in \mathbb{R}$ derart, dass

$$\nabla f(p) = \lambda\, \nabla g(p).$$

Man nennt λ einen *Lagrangeschen Multiplikator.*

Beispiel 25.2 Finde die globalen Extremalstellen der Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) := x + 2y$$

unter der Nebenbedingung $x^2 + y^2 = 1$.

Lösung: Setzen wir $g(x,y) := 1 - x^2 - y^2$ für $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ und

$$M := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon g(x,y) = 0\},$$

so suchen wir globale Extremalstellen p von $f|_M$. Diese sind insbesondere lokale Extremalstellen; nach Satz 25.1 muss es also ein $\lambda \in \mathbb{R}$ geben derart, dass

$$\nabla f(p) = \lambda \nabla g(p). \tag{148}$$

[Beachten Sie, dass $\nabla g(p) = (-2x, -2y) = -2p \neq (0,0)$ für jedes $p = (x,y) \in M$, da $p \neq (0,0)$.]

Wir schauen daher erst einmal, für welche $p = (x,y) \in M$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ (148) gilt; dies ist genau dann der Fall, wenn

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} -2x \\ -2y \end{pmatrix}.$$

Dies erfordert $x, y, \lambda \neq 0$ und ist dann äquivalent zu

$$-2\lambda y = 2 = 2(-2\lambda x) = -4\lambda x,$$

also $x = y/2$. Weiter ist $(y/2, y) \in M$ genau dann, wenn $y^2/4 + y^2 = 1$, also $y^2 = 4/5$, also $y = \pm\frac{2\sqrt{5}}{5}$. Nun ist

$$f\Big(\frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{2\sqrt{5}}{5}\Big) = \sqrt{5}$$

und $f(-\frac{\sqrt{5}}{5}, -\frac{2\sqrt{5}}{5}) = -\sqrt{5}$. Da M kompakt ist und somit die stetige Funktion $f|_M$ ein Maximum und ein Minimum annehmen muss, ist $(\frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{2\sqrt{5}}{5})$ die globale Maximalstelle von $f|_M$ und $(-\frac{\sqrt{5}}{5}, -\frac{2\sqrt{5}}{5})$ die globale Minimalstelle.

25.3 Gegeben $v \in \mathbb{R}^n$ setzen wir $v^\perp := \{w \in \mathbb{R}^n \colon \langle v, w\rangle = 0\}$. Ist $V \subseteq \mathbb{R}^n$ eine nicht-leere Teilmenge, so setzen wir

$$V^\perp := \bigcap_{v \in V} v^\perp.$$

Dann ist $V^\perp$ ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^n$. Ist $U \subseteq V$, so ist $U^\perp \supseteq V^\perp$. Ist $V \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Untervektorraum, so ist $(V^\perp)^\perp = V$. Weiter ist $(v^\perp)^\perp = \mathbb{R}v$ (siehe lineare Algebra).

25.4 Als Vorbereitung für den Beweis von Satz 25.1 definieren wir den *Tangentialraum* T_pM der Hyperfläche $M := g^{-1}(\{0\})$ in $\mathbb{R}^n$ an der Stelle $p \in M$ als die Menge aller Ableitungsvektoren

$$\gamma'(0)$$

für $\varepsilon > 0$ und C^1-Wege $\gamma\colon\ ]-\varepsilon, \varepsilon[\to \mathbb{R}^n$ mit $\gamma(0) = p$ und $\gamma(]-\varepsilon, \varepsilon[) \subseteq M$.

Lemma 25.5 *Es ist* $T_pM = \ker g'(p) = (\nabla g(p))^\perp$. *Insbesondere ist* T_pM *ein* $(n-1)$*-dimensionaler Untervektorraum von* $\mathbb{R}^n$. *Weiter ist* $\ker g'(p)$ *durch* M *eindeutig festgelegt.*

Beweis. Sei $p = (\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n) \in M$. Gegeben $v \in T_pM$ existiert ein $\varepsilon > 0$ und eine C^1-Funktion $\gamma\colon\ ]-\varepsilon, \varepsilon[\to \mathbb{R}^n$ mit $\gamma(]-\varepsilon, \varepsilon[) \subseteq M$, $\gamma(0) = p$ und $\gamma'(0) = v$. Da $g \circ \gamma = 0$, liefert die Kettenregel

$$g'(p)(v) = g'(\gamma(0))(\gamma'(0)) = (g \circ \gamma)'(0) = 0.$$

Also ist $T_pM \subseteq \ker g'(p)$.

Gegeben $v = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ ist

$$g'(p)(v) = J_g(p)v = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial x_j}(p) v_j = \langle \nabla g(p), v \rangle,$$

somit $v \in \ker g'(p)$ genau dann, wenn $v \in (\nabla g(p))^\perp$.

Wir nutzen nun aus, dass $\nabla g(p) \neq 0$; es gibt also ein $j \in \{1, \ldots, n\}$ derart, dass $\frac{\partial g}{\partial x_j}(p) \neq 0$.

1. Fall: Ist $\frac{\partial g}{\partial x_n}(p) \neq 0$, so gibt es nach dem Satz über implizite Funktionen eine offene $(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_{n-1})$-Umgebung $U_0 \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ und eine offene $\bar{x}_n$-Umgebung $V_0 \subseteq \mathbb{R}$ derart, dass $U_0 \times V_0 \subseteq U$ und

$$M \cap (U_0 \times V_0) = \{(x, y) \in U_0 \times V_0 \colon g(x, y) = 0\} = \operatorname{graph}(\phi)$$

für eine C^1-Funktion $\phi\colon U_0 \to V_0$. Also ist $h(x) := (x, \phi(x)) \in M$ für alle $x \in U_0$. Weiter ist

$$h\colon U_0 \to \mathbb{R}^n, \quad h(x) = (x, \phi(x))$$

stetig differenzierbar. Gegeben $y \in \mathbb{R}^{n-1}$ ist $\gamma(t) := h((\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_{n-1}) + ty) \in M$ für $|t|$ klein, also

$$h'(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_{n-1})(y) = \gamma'(0) \in T_pM.$$

Also ist $V := h'(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_{n_1})(\mathbb{R}^{n-1}) \subseteq T_pM$. Ist $\pi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-1}$, $(y_1, \ldots, y_n) \mapsto (y_1, \ldots, y_{n-1})$ die Projektion, so ist

$$\pi(V) = (\pi \circ h)'(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_{n-1})(\mathbb{R}^{n-1}) = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^{n-1}}(\mathbb{R}^{n-1}) = \mathbb{R}^{n-1};$$

der Vektorraum V hat also Dimension $\dim(V) \geq n-1$. Da

$$V \subseteq T_pM \subseteq \ker g'(p)$$

und $\ker g'(p)$ wegen $g'(p) \neq 0$ Dimension $n-1$ hat, folgt $V = T_pM = \ker g'(p)$.

Fall 2: Ist $\frac{\partial g}{\partial x_n}(p) = 0$, so ist $\frac{\partial g}{\partial x_j}(p) \neq 0$ für ein $j \in \{1, \ldots, n-1\}$. Diesen Fall führt man durch eine Permutation der Koordinaten auf Fall 1 zurück.

[Details: Es sei $\alpha\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ der Isomorphismus von Vektorräumen, der e_n und e_j vertauscht und alle Standard-Einheitsvektoren e_i mit $\in \{1, \ldots, n\} \setminus \{j, n\}$ festhält. Sei $W := \alpha^{-1}(U)$. Dann ist

$$h := g \circ \alpha\colon W \to \mathbb{R}$$

eine C^1-Funktion mit Nullstellenmenge $N := h^{-1}(\{0\}) = \alpha^{-1}(g^{-1}(\{0\})) = \alpha^{-1}(M)$ und $h'(q) = g'(\alpha(q)) \circ \alpha \neq 0$ für alle $q \in N$. Weiter gilt für $q := \alpha^{-1}(p)$

$$\frac{\partial h}{\partial x_n}(q) = h'(q)(e_n) = g'(p)(\alpha(e_n)) = g'(p)(e_j) = \frac{\partial g}{\partial x_j}(p) \neq 0;$$

nach Fall 1 ist also $T_qN = \ker h'(q)$. Nun ist $\alpha(T_qN) = T_pM$. Ist nämlich $v \in T_qN$, so existiert eine auf einem Intervall um 0 definierte C^1-Abbildung γ nach $\mathbb{R}^n$ mit Bild in N und $\gamma(0) = q$ sowie $\gamma'(0) = v$. Dann hat $\alpha \circ \gamma$ Bild in M und es ist $\alpha(\gamma(0)) = p$ und

$$T_pM \ni (\alpha \circ \gamma)'(0) = \alpha(\gamma'(0)) = \alpha(v);$$

also ist $\alpha(T_qN) \subseteq T_pM$. Analog sieht man, dass $\alpha^{-1}(T_pM) \subseteq T_qN$, so dass also $\alpha(T_qN) = T_pM$. Da $h'(q) = g'(p) \circ \alpha$, folgern wir

$$\ker g'(p) = \ker(h'(q) \circ \alpha^{-1}) = \alpha(\ker h'(q)) = \alpha(T_qN) = T_pM,$$

was den Beweis beendet.] $\square$

Beweis von Satz 25.1. Sei $p \in M$ eine lokale Extremalstelle von $f|_M$. Gegeben $v \in T_pM$ sei γ eine auf einer offenen 0-Umgebung in $\mathbb{R}$ definierte C^1-Funktion nach $\mathbb{R}^n$ mit Bild in M derart, dass $\gamma(0) = p$ und $\gamma'(0) = v$. Dann ist 0 eine lokale Extremalstelle von $f \circ \gamma$, somit nach Analysis 1

$$0 = (f \circ \gamma)'(0) = f'(p)(\gamma'(0)) = f'(p)(v) = \langle \nabla f(p), v \rangle.$$

Also ist $\nabla f(p) \in v^\perp$ für alle $v \in T_pM$ und somit

$$\nabla f(p) \in (T_pM)^\perp = ((\nabla g(p))^\perp)^\perp = \mathbb{R}\nabla g(p),$$

also $\nabla f(p) = \lambda\, \nabla g(p)$ für ein $\lambda \in \mathbb{R}$. $\square$

Wir erwähnen ohne Beweis, dass sich auch Extrema unter *mehreren* Nebenbedingungen diskutieren lassen (was in der Vorlesung aus Zeitgründen übersprungen werden musste und daher nicht prüfungsrelevant ist):

Satz 25.6 *Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge mit $n \in \mathbb{N}$. Weitere seien $k \in \{1, \ldots, n-1\}$ und $g = (g_1, \ldots, g_k)\colon U \to \mathbb{R}^k$ eine C^1-Funktion derart, dass die k Vektoren*

$$\nabla g_1(p), \ldots, \nabla g_k(p)$$

linear unabhängig sind für alle $p \in M := g^{-1}(\{0\})$, also die Matrix $J_g(p) \in \mathbb{R}^{k\times n}$ den Rang k hat. Ist $f\colon U \to \mathbb{R}$ eine C^1-Funktion und $p \in M$ eine lokale Minimalstelle von $f|_M$, so existieren $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ derart, dass

$$\nabla f(p) = \lambda_1 \nabla g_1(p) + \cdots + \lambda_k \nabla g_k(p). \tag{149}$$

Der Beweis ist analog zu demjenigen von Satz 25.1: man definiert zunächst T_pM wie oben und zeigt mit Hilfe des Satzes über implizite Funktionen, dass

$$T_pM = \ker g'(p) = \{\nabla g_1(p), \ldots, \nabla g_k(p)\}^\perp.$$

Anschließend zeigt man analog zum Obigen, dass

$$\nabla f(p) \in (T_pM)^\perp = (\{\nabla g_1(p), \ldots, \nabla g_k(p)\}^\perp)^\perp = \operatorname{span}\{\nabla g_1(p), \ldots, \nabla g_k(p)\},$$

so dass also (149) gilt.

26 Mehr zum Newton-Verfahren und zum vereinfachten Newton-Verfahren*

In diesem nicht prüfungsrelevanten Kapitel werden Grundtatsachen zum Newton-Verfahren und zum vereinfachten Newton-Verfahren diskutiert. Insbesondere finden Sie hier einen Beweis für Satz 23.1 (siehe 26.2 und 26.3(a)). Die Beweise sind vollständig bis auf kleine Nebenrechnungen, die dem Leser überlassen werden (weswegen die Texte als Aufgaben formuliert sind). Das Material ist Kapitel 2 des Buchmanuskripts "Infinite-Dimensional Lie Groups" vom Dozenten und K.-H. Neeb entnommen. Wenn Sie Kapitel **??** noch nicht gelesen haben, nehmen Sie bitte stets $E := \mathbb{R}^N$ an.

26.1 [Vereinfachtes Newton-Verfahren] Es sei $(E, \|\cdot\|)$ ein Banachraum mit $E \neq \{0\}$. Sei $x_0 \in E$, $r > 0$ und $f\colon B_r^E(x_0) \to E$ eine C^1-Abbildung mit $f'(x_0) \in \mathrm{GL}(E)$,

$$a := \frac{1}{\|f'(x_0)^{-1}\|_{\mathrm{op}}} - \mathrm{Lip}(f - f'(x_0)) > 0 \;\text{ und }\; \|f(x_0)\| < ar. \tag{150}$$

(a) Zeigen Sie, dass f genau eine Nullstelle x_∞ in $B_r^E(x_0)$ besitzt.

(b) Zeigen Sie, dass $x_n := x_{n-1} - f'(x_0)^{-1}(f(x_{n-1})) \in B_r^E(x_0)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $x_n \to x_\infty$ für $n \to \infty$.

(c) Sei $L := \|f'(x_0)^{-1}\|_{\mathrm{op}}\,\mathrm{Lip}(f - f'(x_0))$ (diese Zahl liegt in $[0, 1[$) und $C := \|x_1 - x_0\|/(1 - L)$. Zeigen Sie, dass $\|x_n - x_\infty\| \leq CL^n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

[Siehe Satz 23.7 und dessen Beweis.]

Jede Nullstelle x_∞ mit $f'(x_\infty) \in \mathrm{GL}(E)$ kann mit Hilfe des vereinfachten Newtonverfahren berechnet werden, wenn der Startpunkt x_0 ausreichend nah bei x_∞ liegt:

26.2 Es sei $(E, \|\cdot\|)$ ein Banachraum mit $E \neq \{0\}$. Weiter sei $U \subseteq E$ eine offene Teilmenge, $f\colon U \to E$ eine C^1-Funktion und $x_\infty \in U$ eine Nullstelle von f mit $f'(x_\infty) \in \mathrm{GL}(E)$. Zeigen Sie, dass $r \geq s > 0$ mit $B_{2r}^E(x_\infty) \subseteq U$ existieren derart, dass $f|_{B_r^E(x_0)}$ die Voraussetzung (150) von 26.1 für jedes $x_0 \in B_s^E(x_\infty)$ erfüllt.

[Sei $\varepsilon > 0$ mit $4\varepsilon \leq 1/\|f'(x_\infty)^{-1}\|_{\mathrm{op}}$. Indem wir $r > 0$ mt $B^E_{2r}(x_\infty) \subseteq U$ klein genug wählen, können wir erreichen, dass $f'(x_0) \in \mathrm{GL}(E)$ und

$$\left| \frac{1}{\|f'(x_0)^{-1}\|_{\mathrm{op}}} - \frac{1}{\|f'(x_\infty)^{-1}\|_{\mathrm{op}}} \right| \leq \varepsilon \text{ für alle } x_0 \in B^E_r(x_\infty).$$

Wir können zudem erreichen, dass $\|f'(x) - f'(x_\infty)\|_{\mathrm{op}} \leq \varepsilon$ für alle $x \in B^E_{2r}(x_\infty)$, so dass also $\|f'(x) - f'(x_0)\|_{\mathrm{op}} \leq 2\varepsilon$ für alle $x_0 \in B^E_r(x_\infty)$ und $x \in B^E_{2r}(x_\infty)$. Dann ist $\mathrm{Lip}\left(f|_{B^E_r(x_0)} - f'(x_0)\right) \leq 2\varepsilon$ für alle $x_0 \in B^E_r(x_\infty)$ und somit

$$\frac{1}{\|f'(x_0)^{-1}\|_{\mathrm{op}}} - \mathrm{Lip}\left(f|_{B^E_r(x_0)} - f'(x_0)\right) \geq \frac{1}{\|f'(x_\infty)^{-1}\|_{\mathrm{op}}} - 3\varepsilon \geq \varepsilon > 0.$$

Wir müssen jetzt nur noch $s \in \,]0, r]$ so klein wählen, dass $\|f(x_0)\| < \varepsilon r$ für alle $x_0 \in B^E_s(x_\infty)$.]

Auch die Newton-Iterierten konvergieren gegen eine Nullstelle x_∞ mit $f'(x_\infty) \in \mathrm{GL}(E)$, wenn man mit einem Startpunkt x_0 nahe x_∞ beginnt.

26.3 [Newton-Verfahren] Es sei $(E, \|\cdot\|)$ ein Banachraum, $f\colon U \to E$ eine C^1-Function auf einer offenen Teilmenge $U \subseteq E$ und $x_\infty \in U$ ein Punkt mit $f(x_\infty) = 0$ und $f'(x_\infty) \in \mathrm{GL}(E)$. Wir nehmen $E \neq \{0\}$ an.

(a) Sei $r > 0$ mit $B^E_r(x_\infty) \subseteq U$. Nach Verkleinern von r können wir annehmen, dass $f'(x) \in \mathrm{GL}(E)$ für alle $x \in B^E_r(x_\infty)$ und $M := \sup\{\|f'(x)^{-1}\|_{\mathrm{op}} \colon x \in B^E_r(x_\infty)\} < \infty$. Nach weiterem Verkleinern von r dürfen wir zudem annehmen, dass

$$L := M \sup\{\|f'(x) - f'(y)\|_{\mathrm{op}} \colon x, y \in B^E_r(x_\infty)\} < 1.$$

Für jedes $x \in B^E_r(x_\infty)$ erfüllt die Abbildung

$$g_x \colon B^E_r(x_\infty) \to E, \quad y \mapsto y - f'(x)^{-1}(f(y))$$

$g_x(x_\infty) = x_\infty$ und

$$\mathrm{Lip}(g_x) \leq \|f'(x)^{-1}\|_{\mathrm{op}} \,\mathrm{Lip}\left(f|_{B^E_r(x_\infty)} - f'(x)\right) \leq L; \tag{151}$$

sie ist also eine Selbstabbildung von $B^E_r(x_\infty)$ und eine Kontraktion. Gegeben $x_0 \in B^E_r(x_\infty)$, können wir somit rekursiv

$$x_n := g_{x_{n-1}}(x_{n-1}) = x_{n-1} - f'(x_{n-1})^{-1}(f(x_{n-1})) \in B^E_r(x_\infty)$$

definieren für alle $n \in \mathbb{N}$. Schließen Sie aus (151), dass $\|x_n - x_\infty\| \leq L^n\|x_0 - x_\infty\|$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Also gilt $x_n \to x_\infty$ für $n \to \infty$.

(b) Um bessere Abschätzungen für Konvergenzverhalten und Asymptotik zu erhalten, definieren wir

$$\theta_s := M \sup\{\|f'(x) - f'(y)\|_{\mathrm{op}} \colon x, y \in \overline{B}^E_s(x_\infty)\} \text{ für } s \in [0, r[.$$

Dann gilt $\theta_s \leq L < 1$ für alle $s \in [0, r[$ und $\theta_s \to 0$ für $s \to 0$. Prüfen Sie nach, dass

$$\mathrm{Lip}\left(g_x|_{\overline{B}^E_{\|x-x_\infty\|}(x_\infty)}\right) \leq \theta_{\|x-x_\infty\|}$$

für alle $x \in B^E_r(x_\infty)$. Schließen Sie, dass wir in der Situation von (a) die Abschätzungen $\|x_n - x_\infty\| \leq \theta_{\|x_{n-1}-x_\infty\|} \cdots \theta_{\|x_0-x_\infty\|} \|x_0 - x_\infty\|$ haben, für alle $n \in \mathbb{N}$.

(c) Folgern Sie aus (b): Für jedes $\theta > 0$ und $x_0 \in B^E_r(x_\infty)$ gibt es ein $C > 0$ mit $\|x_n - x_\infty\| \leq C\theta^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(d) Nehmen Sie nun an, dass f eine C^2-Abbildung ist. Nach Satz 22.9 können wir nach Verkleinern von r annehmen, dass ein $K > 0$ existiert mit $\|f'(y) - f'(x)\|_{\mathrm{op}} \leq \frac{1}{2}K\|y - x\|$ für alle $x, y \in B^E_r(x_\infty)$ und somit

$$\theta_s \leq MKs \text{ für alle } s \in [0, r[.$$

Somit ist $\|x_n - x_\infty\| \leq \theta_{\|x_{n-1}-x_\infty\|}\|x_{n-1} - x_\infty\| \leq MK\|x_{n-1} - x_\infty\|^2$ und daher

$$MK\|x_n - x_\infty\| \leq (MK\|x_{n-1} - x_\infty\|)^2$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Kürzen wir $\delta_n := MK\|x_n - x_\infty\|$ ab für $n \in \mathbb{N}_0$, so wird hieraus

$$\delta_n \leq (\delta_{n-1})^2 \text{ für alle } n \in \mathbb{N}$$

(eine Abschätzung, die in der Literatur als "lokale quadratische Konvergenz" bekannt ist). Gegeben $\theta \in]0, 1[$ existiert ein $n_\theta \in \mathbb{N}$ mit $\delta_{n_\theta} \leq \theta$. Folgern Sie, dass

$$\delta_{n_\theta+k} \leq \theta^{(2^k)} \text{ für alle } k \in \mathbb{N}_0.$$

Wir erwähnen ein Kriterium für die Konvergenz des Newton-Verfahrens.

26.4 Es sei $(E, \|\cdot\|)$ ein Banachraum mit $E \neq \{0\}$ und $f \colon U \to E$ eine C^1-Abbldung auf einer offenen Teilmenge $U \subseteq E$. Verifizieren Sie die Details der folgenden Skizze:

(a) Es seien $x_0 \in U$ und $r > 0$ derart, dass $B^E_{2r}(x_0) \subseteq U$, $f'(x) \in \mathrm{GL}(E)$ für alle $x \in B^E_{2r}(x_0)$, $m := \sup\{\|f'(x)^{-1}\|_{\mathrm{op}} \colon x \in B^E_{2r}(x_0)\} < \infty$ und

$$\ell := m \sup\{\|f'(y) - f'(x)\|_{\mathrm{op}} \colon x, y \in B^E_{2r}(x_0)\} < 1.$$

Dann ist $a := \frac{1}{\|f'(x_0)^{-1}\|_{\mathrm{op}}} - \mathrm{Lip}\left(f|_{B^E_{2r}(x_0)} - f'(x_0)\right) \geq \frac{1}{m}(1-\ell) \in]0,1]$. Gilt $\|f(x_0)\| < ar$, so hat $f|_{B^E_r(x_0)}$ nach Satz 23.7 eine Nullstelle x_∞. Weiter erfüllt $f|_{B^E_r(x_\infty)}$ die Voraussetzungen von 26.3(a), und es ist $x_0 \in B^E_r(x_\infty)$. Daher ist $x_n := x_{n-1} - f'(x_{n-1})^{-1}(f(x_{n-1}))$ für alle n definiert und es gilt $x_n \to x_\infty$ für $n \to \infty$.

(b) Ist x_∞ eine Nullstelle von f mit $f'(x_\infty) \in \mathrm{GL}(E)$, so existiert ein $r > 0$ mit $B^E_{3r}(x_\infty) \subseteq U$, $f'(x) \in \mathrm{GL}(E)$ für alle $x \in B^E_{3r}(x_\infty)$,

$$M := \sup\{\|f'(x)^{-1}\|_{\mathrm{op}} \colon x \in B^E_{3r}(x_\infty)\} < \infty$$

und $L := M \sup\{\|f'(y) - f'(x)\|_{\mathrm{op}} \colon x, y \in B^E_{3r}(x_\infty)\} < 1$. Wir wählen $s \in]0, r]$ so klein, dass $\|f(x_0)\| \leq \frac{1}{M}(1-L)r$ für alle $x_0 \in B^E_s(x_\infty)$. Dann erfüllt $f|_{B^E_{2r}(x_0)}$ die Voraussetzungen von (a), für alle $x_0 \in B^E_s(x_\infty)$.

26.5 Wir definieren $g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stückweise via $g(x) = 0$ für $x \leq 1/2$, $g(x) = x/2 - 1/4$ für $x \in [1/2, 3/2]$, $g(x) = 1/2$ für $x \geq 3/2$. Wir setzen $x_0 := 2$ und betrachten $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x + \int_0^x g(t)\, dt$.

(a) Sei $x_n := x_{n-1} - f'(x_0)^{-1} f(x_{n-1})$ für $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass $x_n = (1/3)^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Schließen Sie, dass die Schlussfolgerung von 26.3(c) für das *vereinfachte* Newton-Verfahren nicht allgemein gilt.

(b) Das Newton-Verfahren liefert die Punkte $y_n := y_{n-1} - f'(y_{n-1})^{-1} f(y_{n-1})$ für $n \in \mathbb{N}$, mit $y_0 := x_0$. Zeigen Sie, dass $y_n = 0$ ist (die eindeutige Nullstelle von f), für alle $n \geq 2$.

A Grundlagen zu Integralen aus Analysis 1

In diesem Anhang ist der in der Analysis 1-Vorlesung von Prof. Glöckner im WS 2018/19 behandelte Stoff zur Riemannschen Integrationstheorie zusammengestellt. Aus dem damaligen Kurzskript wurde nur das hier aufgenommen, was in der Vorlesung behandelt wurde und nun vorausgesetzt wird.

Wir betrachten nun zunächst *Treppenfunktionen* ϕ auf einem Intervall $[a, b]$. Das sind Funktionen, deren Graph im Wesentlichen wie ein Balkendiagramm aussieht. Hier ist anschaulich klar, was der zwischem dem Graphen von ϕ und der x-Achse eingeschlossene Flächeninhalt sein sollte (wobei Anteile oberhalb der Achse positiv und Anteile unterhalb negativ gezählt werden), und wir nennen diesen $\int_a^b \phi(x)\,dx$. Dann wenden wir uns Riemann-integrierbaren Funktionen $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ zu. Grob gesagt sind das Funktionen, die sich gut genug zwischen Treppenfunktionen einschließen lassen, um mit deren Hilfe einen Flächeninhalt $\int_a^b f(x)\,dx$ (das Riemann-Integral von f über das Intervall $[a, b]$) festzulegen. Jede stetige Funktion $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ ist Riemann-integrierbar. Als Höhepunkt beweisen wir den Hauptsatz der Integral- und Differentialrechnung, der einen Zusammenhang zwischen Riemann-Integralen stetiger Funktionen und Stammfunktionen herstellt.

Definition A.1 Seien $a \leq b$ reelle Zahlen. Eine Menge Z von Zahlen $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ heißt *Zerlegung*[44] des Intervalls $[a, b]$. Eine Zerlegung Z' von $[a, b]$ heißt *Verfeinerung* von Z, wenn $Z \subseteq Z'$, d.h. jeder Zerlegungspunkt von Z ist auch einer von Z'. Sind Z und Z' Zerlegungen von $[a, b]$, so auch $Z \cup Z'$, und dies ist eine Verfeinerung sowohl von Z als auch von Z' (eine *gemeinsame Verfeinerung*). Eine Funktion $\phi\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ heißt *Treppenfunktion*, wenn es eine Zerlegung $Z = \{t_0 < t_1 < \cdots < t_n\}$ von $[a, b]$ und Zahlen $c_1, \ldots, c_n$ derart gibt, dass

$$\phi(x) = c_k \quad \text{für alle } k \in \{1, \ldots, n\} \text{ und } x \in\,]t_{k-1}, t_k[.$$

Die c_k sind dann eindeutig festgelegt, denn es ist $c_k = \phi(t)$ für jedes $t \in\,]t_{k-1}, t_k[$. Über die Funktionswerte $f(t_k)$ wird nichts gesagt, diese dürfen z.B. von $f(t_k)$ und $f(t_{k-1})$ verschieden sein. Wir sprechen auch von einer

[44]Genauer: $Z = \{t_0, \ldots, t_n\}$ mit $n \in \mathbb{N}_0$ mit $t_0 = a$, $t_n = b$ und $t_{k-1} < t_k$ für alle $k \in \mathbb{N}$ mit $k \leq n$.

Treppenfunkton *bezüglich* Z und definieren

$$S_Z(\phi) := \sum_{k=1}^{n} (t_k - t_{k-1})c_k.$$

Ist $a = b$, so ist $n = 0$ und $S_Z(\phi)$ die leere Summe, also 0.

Lemma A.2 *Sei $\phi\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Treppenfunktion bezüglich Z und Z' eine weitere Zerlegung von $[a,b]$.*

(a) *Ist Z' eine Verfeinerung von Z, so ist ϕ auch eine Treppenfunktion bzgl. Z' und $S_Z(\phi) = S_{Z'}(\phi)$.*

(b) *Ist ϕ auch bzgl. Z' eine Treppenfunktion, so ist $S_Z(\phi) = S_{Z'}(\phi)$.*

Beweis. (a) Es genügt, den Fall zu betrachten, dass $Z' = Z \cup \{\tau\}$ mit einem $\tau \in [a,b] \setminus Z$. Dann ist $Z = \{a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b\}$ mit $n \in \mathbb{N}$ und $\tau \in]t_{\ell-1}, t_\ell[$ für ein $\ell \in \{1, \ldots, n\}$. Setzen wir $s_k := t_k$ für $k \in \{0, \ldots, \ell - 1\}$, $s_\ell := \tau$ und $s_k := t_{k-1}$ für $k \in \{\ell + 1, \ldots, n + 1\}$, so ist

$$Z' = \{s_0 < s_1 < \ldots < s_{n+1}\}.$$

Auf $]s_{k-1}, s_k[$ für $k \in \{1, \ldots, n+1\}$ nimmt ϕ die Werte $c_1, \ldots, c_\ell, c_\ell, \ldots, c_n$ an, also den Wert $C_k := c_k$ für $k \in \{1, \ldots, \ell\}$ und $C_k := c_{k-1}$ für $k \in \{\ell + 1, \ldots, n + 1\}$. Somit ist ϕ eine Treppenfunktion bzgl. Z'. Da

$$(t_\ell - t_{\ell-1})c_\ell = (t_\ell - \tau)c_\ell + (\tau - t_{\ell-1})c_\ell = (s_{\ell+1} - s_\ell)C_{\ell+1} + (s_\ell - s_{\ell-1})C_\ell,$$

folgt

$$\begin{aligned} S_Z(\phi) &= \sum_{k=1}^{n} (t_k - t_{k-1})c_k \\ &= \sum_{k=1}^{\ell-1} \underbrace{(t_k - t_{k-1})c_k}_{=(s_k - s_{k-1})C_k} + (t_\ell - t_{\ell-1})c_\ell + \sum_{k=\ell+1}^{n} \underbrace{(t_k - t_{k-1})c_k}_{=(s_{k+1} - s_k)C_{k+1}} \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} (s_k - s_{k-1})C_k = S_{Z'}(\phi). \end{aligned}$$

(b) Anwendung von (a) auf Z und $Z \cup Z'$ bzw. Z und $Z \cup Z'$ liefert $S_Z(\phi) = S_{Z \cup Z'}(\phi) = S_{Z'}(\phi)$. □

Definition A.3 Ist ϕ eine Treppenfunktion $[a,b]$, so definieren wir ihr *Integral* als

$$\int_a^b \phi(x)\,dx := \sum_{k=1}^{n}(t_k - t_{k-1})c_k,$$

wobei $Z = \{a = t_0 < \cdots < t_n = b\}$ eine Zerlegung von $[a,b]$ ist derart, dass ϕ auf $]t_{k-1}, t_k[$ konstant ist für alle $k \in \{1,\ldots,n\}$ und c_k der Funktionswert auf diesem Intervall. Nach Lemma A.2(b) ist $\int_a^b \phi(x)\,dx$ wohldefiniert, unabhängig von der gewählten Zerlegung Z.

Beispiel A.4 (Funktionen mit endlichem Träger). Für jede Zerlegung $Z := \{a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b\}$ von $[a,b]$ und beliebige $y_0,\ldots,y_n \in \mathbb{R}$ ist die Funktion $\phi\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ mit $\phi(x) := y_k$ falls $x = t_k$ für ein $k \in \{0,\ldots,n\}$, $\phi(x) := 0$ für $x \in [a,b] \setminus \{t_0,\ldots,t_n\}$ eine Treppenfunktion bzgl. Z mit $c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$ und somit

$$\int_a^b \phi(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n}(t_k - t_{k-1})c_k = 0.$$

Definition A.5 Seien $f\colon X \to \mathbb{R}$ und $g\colon X \to \mathbb{R}$ reellwertige Funktionen auf einer Menge X. Wir schreiben $f \leq g$, wenn $f(x) \leq g(x)$ für alle $x \in X$.

Das Integral von Treppenfunktionen hat u.a. folgende Eigenschaften:

Lemma A.6 *Seien $a \leq b$ reelle Zahlen.*

(a) (Linearität). *Sind $\phi\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ und $\psi\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ Treppenfunktionen und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, so ist auch $\lambda f + \mu g$ eine Treppenfunktion und*

$$\int_a^b (\lambda\phi + \mu\psi)(x)\,dx = \lambda \int_a^b \phi(x)\,dx + \mu \int_a^b \psi(x)\,dx.$$

(b) (Monotonie). *Sind $\phi, \psi \in T_a^b$ und $\phi \leq \psi$, so ist $\int_a^b \phi(x)\,dx \leq \int_a^b \psi(x)\,dx$.*

(c) (Intervalladditivität). *Ist $\phi \in T_a^b$ und $c \in [a,b]$, so sind $\phi|_{[a,c]}$ und $\phi|_{[c,b]}$ Treppenfunktionen und es gilt*[45]

$$\int_a^b \phi(x)\,dx = \int_a^c \phi(x)\,dx + \int_c^b \phi(x)\,dx.$$

[45]Hier ist $\int_a^c f(x)\,dx$ eine Kurzschreibweise für $\int_a^c (f|_{[a,c]})(x)\,dx$.

Beweis. (a) und (b) Sei ϕ eine Treppenfunktion bzgl. der Zerlegung Z und ψ eine Treppenfunktion bzgl. Z'. Nach Ersetzen von Z und Z' durch $Z \cup Z'$ dürfen wir annehmen, dass $Z = Z' = \{a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b\}$ (vg. Lemma A.2(a)). Sei a_k der Funktionswert von ϕ auf $]t_{k-1}, t_k[$ und d_k der Funktionswert von ψ, für $k \in \{1, \ldots, n\}$. Dann hat $\lambda\phi + \mu\psi$ den Funktionswert $\lambda c_k + \mu d_k$ auf $]t_{k-1}, t_k[$ und somit ist $\lambda\phi + \mu\psi$ eine Treppenfunktion mit

$$\begin{aligned}
\int_a^b (\lambda\phi + \mu\psi)(x)\, dx &= \sum_{k=1}^n (\lambda c_k + \mu d_k)(t_k - t_{k-1}) \\
&= \lambda \sum_{k=1}^n c_k(t_k - t_{k-1}) + \mu \sum_{k=1}^n d_k(t_k - t_{k-1}) \\
&= \lambda \int_a^b \phi(x)\, dx + \mu \int_a^b \psi(x)\, dx.
\end{aligned}$$

Also gilt (a). Ist $\phi \leq \psi$, so ist $c_k \leq d_k$ für alle $k \in \{1, \ldots, n\}$ und somit

$$\int_a^b \phi(x)\, dx = \sum_{k=1}^n (t_k - t_{k-1})c_k \leq \sum_{k=1}^n (t_k - t_{k-1})d_k = \int_a^b \psi(x)\, dx.$$

(c) Sei ϕ eine Treppen funktion bzgl. einer Zerlegung Z von $[a, b]$. Nach Ersetzen von Z durch $Z \cup \{c\}$ dürfen wir annehmen, dass $c \in Z$ (siehe Lemma A.2(c)). Sei etwa $Z = \{a = t_0 < \cdots < t_n = b\}$ und $c = t_\ell$. Dann ist $Z' := \{a = t_0 < \ldots, < t_\ell = c\}$ ene Zerlegung von $[a, c]$ und $Z'' := \{c = t_\ell < \cdots < t_n = b\}$ eine Zerlegung von $[a, b]$. Sei c_k der Funktionswert von ϕ auf $]t_{k-1}, t_k[$. Da $\phi|_{[a,c]}$ auf $]t_{k-1}, t_k[$ konstant ist mit Wert c_k für $k \in \{1, \ldots, \ell\}$ und $\phi|_{[c,b]}$ konstant ist mit Wert c_k für $k \in \{\ell + 1, \ldots, n\}$, sind $\phi|_{[a,c]}$ und $\phi|_{[c,b]}$ Treppenfunktionen mit

$$\begin{aligned}
\int_a^c \phi(x)\, dx + \int_c^b \phi(x)\, dx &= \sum_{k=1}^{\ell} (t_k - t_{k-1})c_k + \sum_{\ell+1}^{n} (t_k - t_{k-1})c_k \\
&= \sum_{k=1}^n (t_k - t_{k-1})c_k = \int_a^b \phi(x)\, dx,
\end{aligned}$$

was den Beweis beendet. $\square$

Bemerkung A.7 Sind $\phi, \psi \in T_a^b$, so ist auch $\max(\phi, \psi) \in T_a^b$ (das sieht man wie im Beweis von Lemma A.6(a) mit $\max(c_k, d_k)$ statt $\lambda c_k + \mu d_k$).

Definition A.8 Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion (d.h. $f([a,b])$ ist beschränkt in $\mathbb{R}$). Wir defineren das *Oberintegral* von f über $[a,b]$ als

$$\int_a^{b^*} f(x)\,dx := \inf\left\{\int_a^b \psi(x)\,dx\colon \psi \in T_a^b \text{ mit } f \leq \psi\right\}.$$

Das *Unterintegral* von f über $[a,b]$ ist

$$\int_{a\,*}^{b} f(x)\,dx := \sup\left\{\int_a^b \phi(x)\,dx\colon \phi \in T_a^b \text{ mit } \phi \leq\right\}.$$

Ist $\int_a^{b^*} f(x)\,dx = \int_{a*}^b f(x)\,dx$, so nennen wir die Funktion f *Riemann-integrierbar* und definieren das (Riemann-) Integral von f über $[a,b]$ als

$$\int_a^b f(x)\,dx := \int_a^{b^*} f(x)\,dx = \int_{a\,*}^{b} f(x)\,dx.$$

Bemerkung A.9 Man beachte, dass für alle $\phi, \psi \in T_a^b$ mit $\phi \leq f \leq \psi$ nach Lemma A.6(b) die Ungleichung

$$\int_a^b \phi(x)\,dx \leq \int_a^b \psi(x)\,dx$$

gilt. Wir halten ϕ fest; da die linke Seite eine untere Schranke für alle rechten Seiten ist, folgt für deren Infimum

$$\int_a^b \phi(x)\,dx \leq \int_a^{b^*} f(x)\,dx.$$

Da die rechte Seite eine obere Schranke für alle der linken Seiten ist, folgt für deren Supremum

$$\int_{a\,*}^{b} f(x)\,dx \leq \int_a^{b^*} f(x)\,dx. \tag{152}$$

Bemerkung A.10 Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion und $\phi_0\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Treppenfunktion mit $\phi_0 \leq f$. Dann gilt

$$\int_{a\,*}^{b} f(x)\,dx = \sup\left\{ \int_a^b \phi(x)\,dx\colon \phi \in T_a^b \text{ mit } \phi_0 \leq \phi \leq f \right\}.$$

Gegeben $\phi \in T_a^b$ mit $\phi \leq f$ ist nämlich $\phi_0 \leq \max(\phi_0, \phi) \leq f$ und $\int_a^b \phi(x)\,dx \leq \int_a^b \max(\phi_0(x), \phi(x))\,dx$.

Ist $f \leq \psi_0$ mit $\psi_0 \in T_a^b$, so braucht man analog zur Berechnung des Oberintegral nur Treppenfunktionen ψ mit $f \leq \psi \leq \psi_0$ zu betrachten.

Ist insbesondere bereits $f \in T_a^b$ eine Treppenfunktion, so können wir $\phi_0 := \psi_0 := f$ setzen und sehen, dass das Unterintegral von f gleich dem Supremum der einpunktigen Menge $\{\int_a^b f(x)\,dx\}$ ist und somit gleich dem Integral $\int_a^b f(x)\,dx$ gemäß Definition A.3. Analog ist das Oberintegral gleich $\int_a^b f(x)\,dx$. Die Treppenfunktion f ist also Riemann-integrierbar und ihr Riemann-Integral stimmt mit ihrem Treppenfunktions-Integral nach Definition A.3 überein.

Lemma A.11 *Eine beschränkte Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ ist genau dann Riemann-integrierbar, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ Treppenfunktionen $\phi, \psi \in T_a^b$ mit $\phi \leq f \leq \psi$ existieren derart, dass*

$$\int_a^b \psi(x)\,dx - \int_a^b \phi(x)\,dx \leq \varepsilon.$$

In diesem Fall gilt

$$\int_a^b \phi(x)\,dx \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b \phi(x)\,dx + \varepsilon. \tag{153}$$

Beweis. Ist f Riemann-integrierbar und $\varepsilon > 0$, so gibt es per Definition von Ober- und Unterintegral als Supremum bzw. Infimum Treppenfunktionen $\phi, \psi \in T_a^b$ mit $\phi \leq f \leq \psi$ derart, dass

$$\int_a^b \psi(x)\,dx \leq \int_a^{b^*} f(x)\,dx + \frac{\varepsilon}{2} \tag{154}$$

und
$$\int_a^b \phi(x)\,dx \geq \int_{a\,*}^b f(x)\,dx - \frac{\varepsilon}{2}. \tag{155}$$
Da f Riemann-integierbar ist, können wir die Sternchen in (154) und (155) weglassen und erhalten
$$\int_a^b \psi(x)\,dx - \int_a^b \phi(x)\,dx \leq \int_a^b f(x)\,dx + \frac{\varepsilon}{2} - \int_a^b f(x)\,dx + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$
Da $\int_a^b \phi(x)\,dx \leq \int_{a*}^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{b^*} f(x)\,dx \leq \int_a^b \psi(x)\,dx$, folgt
$$\begin{aligned}\int_a^b \phi(x)\,dx &\leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b \psi(x)\,dx \\ &= \int_a^b \psi(x)\,dx - \int_a^b \phi(x)\,dx + \int_a^b \phi(x)\,dx \leq \int_a^b \phi(x)\,dx + \varepsilon\end{aligned}$$
und somit (153).

Ist umgekehrt die genannte Bedingung erfüllt, so wählen wir zu $\varepsilon > 0$ Treppenfunktionen ϕ und ψ wie im Lemma beschrieben. Dann gilt
$$\begin{aligned}\left|\int_a^{b^*} f(x)\,dx - \int_{a\,*}^b f(x)\,dx\right| &= \int_a^{b^*} f(x)\,dx - \int_{a\,*}^b f(x)\,dx \\ &\leq \int_a^b \psi(x)\,dx - \int_a^b \phi(x)\,dx \leq \varepsilon.\end{aligned}$$
da $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt $\left|\int_a^{b^*} f(x)\,dx - \int_{a*}^b f(x)\,dx\right| = 0$ und somit
$$\int_a^{b^*} f(x)\,dx = \int_{a\,*}^b f(x)\,dx.$$
Also ist f Riemann-integrierbar. □

Definition A.12 Eine Funktion $f\colon X \to Y$ zwischen metrischen Räumen (X, d_X) und (Y, d_Y) heißt *gleichmäßig stetig*, wenn
$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x, y \in X)\ d_X(x, y) \leq \delta \Rightarrow d_Y(f(x), f(y)) \leq \varepsilon.$$

Bemerkung A.13 Jede gleichmäßig stetige Funktion ist stetig. Gegeben $\varepsilon > 0$ kann sogar das δ aus der Definition von Stetigkeit an der Stelle x unabhängig von $x \in X$ gewählt werden.

Der Beweis des folgenden Satzes wird in der Analysis 2 gegeben.

Satz A.14 *Jede stetige Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ ist gleichmäßig stetig.* $\square$

Eine wichtige Folgerung des Satzes beweisen wir ebenfalls in der Analysis 2.

Folgerung A.15 *Jede stetige Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ ist Riemann-integrierbar.* $\square$

Definition A.16 Sind $a \leq b$ reelle Zahlen und ist $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar, so definieren wir

$$\int_b^a f(x)\,dx := -\int_a^b f(x)\,dx.$$

Das Riemann-Integral hat u.a. folgende Eigenschaften.

Satz A.17 *Seien $a \leq b$ reelle Zahlen.*

(a) (Linearität). *Sind $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ und $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbare Funktionen und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, so ist auch die Funktion $\lambda f + \mu g$ Riemann-integrierbar und*

$$\int_a^b \lambda f(x) + \mu g(x)\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx + \mu \int_a^b g(x)\,dx.$$

(b) (Monotonie). *Sind $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ und $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbare Funktionen mit $f \leq g$, so folgt*

$$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx.$$

Insbesondere gilt

$$(b-a)m \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq (b-a)M \tag{156}$$

mit $m := \inf\{f(x)\colon x \in [a,b]\}$ und $M := \sup\{f(x)\colon x \in [a,b]\}$.

(c) (Intervalladditivität). *Sei $c \in [a,b]$. Eine Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ ist genau dann Riemann-integrierbar, wenn $f|_{[a,c]}$ und $f|_{[c,b]}$ Riemann-integrierbar sind. In diesem Fall gilt*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx \tag{157}$$

und weiter für alle $\alpha, \beta, \gamma \in [a,b]$

$$\int_\alpha^\gamma f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(x)\,dx + \int_\beta^\gamma f(x)\,dx. \tag{158}$$

(d) (Integralabschätzungen). *Ist $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar, so gilt*

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq (b-a)\|f\|_\infty \tag{159}$$

mit $\|f\|_\infty := \sup\{|f(x)|\colon x \in [a,b]\}$. Zudem ist die Funktion $|.| \circ f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto |f(x)|$ Riemann-integrierbar und

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx. \tag{160}$$

Beweis. (a) Nach Lemma A.11 existieren Treppenfunktionen $\phi_1, \phi_2, \psi_1, \psi_2 \in T_a^b$ derart, dass $\phi_1 \leq f \leq \psi_1$, $\phi_2 \leq g \leq \psi_2$ und

$$\int_a^b \psi_j(x)\,dx - \int_a^b \phi_j(x)\,dx < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{für } j \in \{1,2\}. \tag{161}$$

Dann $\phi_1 + \phi_2 \in T_a^b$, $\psi_1 + \psi_2 \in T_a^b$ und $\phi_1 + \phi_2 \leq f + g \leq \psi_1 + \psi_2$ sowie

$$\begin{aligned}
&\int_a^b (\psi_1 + \psi_2)(x)\,dx - \int_a^b (\phi_1 + \phi_2)(x)\,dx \\
&\qquad = \int_a^b \psi_2(x)\,dx - \int_a^b \phi_2(x)\,dx + \int_a^b \psi_1(x)\,dx - \int_a^b \phi_1(x)\,dx \\
&\qquad < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Nach Lemma A.11 ist $f + g$ also Riemann-integrierbar und

$$\int_a^b (\phi_1 + \phi_2)(x)\,dx \leq \int_a^b (f+g)(x)\,dx \leq \int_a^b (\phi_1 + \phi_2)(x)\,dx + \varepsilon. \tag{162}$$

Die linke Seite von (162) können wir wegen (161) mittels (153) weiter nach unten abschätzen:

$$\int_a^b \phi_1(x)\,dx + \int_a^b \phi_2(x)\,dx > \int_a^b f(x)\,dx - \frac{\varepsilon}{2} + \int_a^b g(x)\,dx - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Die rechte Seite von (162) können wir wegen (161) mittels (153) weiter nach oben abschätzen:

$$\int_a^b \phi_1(x)\,dx + \int_a^b \phi_2(x)\,dx + \varepsilon \leq \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx + \varepsilon.$$

Es gilt also

$$-\varepsilon < \int_a^b (f+g)(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx < \varepsilon$$

für alle $\varepsilon > 0$, somit $\int_a^b (f+g)(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx = 0$ und folglich $\int_a^b (f+g)(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$. Wir zeigen noch

$$\int_a^b \lambda f(x)\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx \tag{163}$$

für alle $\lambda \in \mathbb{R}$. Ist $\lambda = 0$, so ist $\lambda f = 0 \in T_a^b$ Riemann-integrierbar und beide Seiten von (163) sind 0. Ist $\lambda > 0$ und M die Menge alle $\phi \in T_a^b$ mit $\phi \leq f$, so ist $\{r\phi \colon \phi \in M\}$ die Menge aller Treppenfunktionen $\geq \lambda f$ und folglich

$$\begin{aligned}
\int_{a\,*}^b \lambda f(x)\,dx &= \sup\left\{\int_a^b \lambda\phi(x)\,dx \colon \phi \in M\right\} \\
&= \sup \lambda \left\{\int_a^b \phi(x)\,dx \colon \phi \in M\right\} \\
&= \lambda \sup \left\{\int_a^b \phi(x)\,dx \colon \phi \in M\right\} \\
&= \lambda \int_{a\,*}^b f(x)\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx.
\end{aligned}$$

Analog sieht man $\int_{a\,*}^b \lambda f(x)\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx$. Somit ist λf Riemann-integrierbar und (163) gilt. Ist $\lambda < 0$ und M wie zuvor, so ist $\{\lambda\phi \colon \phi \in M\}$ die Menge aller Treppenfunktionen ψ mit $\psi \geq \lambda f$ und somit ähnlich dem Vorigen

$$\int_a^{b\,*} \lambda f(x)\,dx = \lambda \int_{a\,*}^b f(x)\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx.$$

Analog ist $\int_{a*}^{b}\lambda f(x)\,dx = \lambda\int_{a}^{b*} f(x)\,dx = \lambda\int_a^b f(x)\,dx$. Also ist λf Riemann-integrierbar und (163) gilt.

(b) Sei $f \leq g$. ist $\phi \in T_a^b$ mit $\phi \leq f$, so gilt auch $\phi \leq g$. Folglich ist

$$\left\{\int_a^b \phi(x)\,dx\colon \phi \in T_a^b \text{ und } \phi \leq f\right\} \subseteq \left\{\int_a^b \phi(x)\,dx\colon \phi \in T_a^b \text{ und } \phi \leq g\right\}$$

und für die Suprema der zwei Zahlenmengen folgt $\int_{a*}^{b} f(x)\,dx \leq \int_{a*}^{b} g(x)$. Also ist $\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$.

Da für die konstanten Funktionen mit den im Lemma beschriebenen Werten m und M

$$m \leq f \leq M$$

gilt, liefert die gerade nachgewiesene Monotonie

$$(b-a)m = \int_a^b m\,dx \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b M\,dx = (b-a)M.$$

(d) Es gilt $-\|f\|_\infty \leq f \leq \|f\|_\infty$ und somit

$$-(b-a)\|f\|_\infty = \int_a^b \|f\|_\infty\,dx \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b \|f\|_\infty\,dx = (b-a)\|f\|_\infty,$$

woraus (159) folgt. Der Beweis von (160) gelingt wie folgt, wenn wir annehmen, dass die Funktion $|f|\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto |f(x)|$ Riemann-integrierbar ist (dass letzteres immer der Fall ist, werden wir erst in Folgerung 2.6(b) der Analysis 2 nachweisen; wir werden (160) aber vorher auch nicht benutzen!). Da $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$ für alle $x \in [a,b]$, folgt wegen der Monotonie (und Linearität) des Riemann-Integrals

$$-\int_a^b |f(x)|\,dx = \int_a^b -|f(x)|\,dx \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

Also gilt (160).

(c) Sind $f|_{[a,c]}$ und $f|_{[c,b]}$ Riemann-integrierbar, so gibt es nach Lemma A.11 Treppenfunktionen $\phi_1, \psi_1 \in T_a^c$ und $\phi_2, \psi_2 \in T_c^b$ mit $\phi_1 \leq f|_{[a,c]} \leq \psi_1$ und $\phi_2 \leq f|_{[c,b]} \leq \psi_2$ derart, dass

$$\int_a^c (\psi_1(x) - \phi_1(x))\,dx \leq \varepsilon/2 \text{ und } \int_c^b (\psi_2(x) - \phi_2(x))\,dx \leq \varepsilon/2.$$

Wir definieren $\phi, \psi \in T_a^b$ mit $\phi \leq f \leq \psi$ stückweise via $\phi(x) := \phi_1(x)$ und $\psi(x) := \psi_1(x)$ wenn $x \in [a, c]$ bzw. $\phi(x) := \phi_2(x)$ und $\psi(x) := \psi_2(x)$ wenn $x \in [c, b]$. Nach Lemma A.6(c) ist dann

$$\int_a^b (\psi(x)-\phi(x))\,dx = \int_a^c (\psi_1(x)-\phi_1(x))\,dx + \int_c^b (\psi_2(x)-\phi_2(x))\,dx \leq \varepsilon/2+\varepsilon/2 = \varepsilon.$$

Nach Lemma A.11 ist f also Riemann-integrierbar und es ist

$$\begin{aligned} \int_a^c \phi_1(x)\,dx + \int_c^b \phi_2(x)\,dx &= \int_a^b \phi(x)\,dx \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b \phi(x)\,dx + \varepsilon \\ &= \int_a^c \phi_1(x)\,dx + \int_c^b \phi_2(x)\,dx + \varepsilon. \end{aligned} \tag{164}$$

Da nach Lemma A.11 zudem $\int_a^c \phi_1(x)\,dx \leq \int_a^c f(x)\,dx \leq \int_a^c \phi_1(x)\,dx + \varepsilon/2$ und $\int_c^b \phi_2(x)\,dx \leq \int_c^b f(x)\,dx \leq \int_c^b \phi_2(x)\,dx + \varepsilon/2$, folgt aus (164) die Ungleichung

$$\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx - \varepsilon \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx + \varepsilon.$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt (157).

Ist umgekehrt f als Riemann-integrierbar angenommen, so gibt es $\phi, \psi \in T_a^b$ mit $\phi \leq f \leq \psi$ und $\int_a^b (\psi(x) - \phi(x))\,dx \leq \varepsilon$. Definieren wir $\phi_1 := \phi|_{[a,c]}$, $\psi_1 := \psi|_{[a,c]}$, $\phi_2 := \phi|_{[c,b]}$ und $\psi_2 := \psi|_{[c,b]}$, so sind $\phi_1, \psi_1 \in T_a^c$, $\phi_2, \psi_2 \in T_c^b$ und $\phi_1 \leq f|_{[a,c]} \leq \psi_1$, $\phi_2 \leq f|_{[c,b]} \leq \psi_2$ sowie

$$\int_a^c (\psi_1(x) - \phi_1(x))\,dx \leq \varepsilon \text{ und } \int_c^b (\psi_2(x) - \phi_2(x))\,dx \leq \varepsilon,$$

da beide Integrale nicht-negativ sind und

$$\int_a^c (\psi_1(x) - \phi_1(x))\,dx + \int_c^b (\psi_2(x) - \phi_2(x))\,dx = \int_a^b (\psi(x) - \phi(x))\,dx \leq \varepsilon$$

nach Lemma A.6(c). Folglich sind $f|_{[a,c]}$ und $f|_{[c,b]}$ Riemann-integrierbar.

Sei nun f Riemann-integrierbar und seien $\alpha, \beta, \gamma \in [a, b]$. Gilt (158) für α, β, γ, so auch für γ, β, α an Stelle der vorigen, denn es ist

$$\begin{aligned} \int_\gamma^\alpha f(x)\,dx &= -\int_\alpha^\gamma f(x)\,dx = -\int_\alpha^\beta f(x)\,dx - \int_\beta^\gamma f(x)\,dx \\ &= \int_\gamma^\beta f(x)\,dx + \int_\beta^\alpha f(x)\,dx. \end{aligned}$$

Nachdem wir notfalls α und γ vertauschen, brauchen wir (158) daher nur zu beweisen, wenn $\alpha \leq \gamma$ ist (was wir nun annehmen).

Fall 1: Ist $\alpha \leq \beta \leq \gamma$, so gilt (158) nach (157) (mit α, β, γ an Stelle von a, c, b).

Fall 2: Ist $\beta \leq \alpha$, so ist nach (157) $\int_\beta^\gamma f(x)\,dx = \int_\beta^\alpha f(x)\,dx + \int_\alpha^\gamma f(x)\,dx$. Addition von $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx = -\int_\beta^\alpha f(x)\,dx$ auf beiden Seiten liefert (158).

Fall 3: Ist $\beta \geq \gamma$, so ist nach (157) $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx = \int_\alpha^\gamma f(x)\,dx + \int_\gamma^\beta f(x)\,dx$. Addition von $\int_\beta^\gamma f(x)\,dx = -\int_\gamma^\beta f(x)\,dx$ auf beiden Seiten liefert (158). □

Auch in der Integralrechnung ist ein Mittelwertsatz ein wichtiges Hilfsmittel. Den Beweis vertagen wir auf die Analysis 2.

Satz A.18 (Mittelwertsatz der Integralrechnung) *Sind $a < b$ reelle Zahlen und $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, so existiert ein $\xi \in [a,b]$ derart, dass*

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi). \tag{165}$$

Die linke Seite von (165) stimmt auch mit $\frac{1}{a-b}\int_b^a f(x)\,dx$ überein. □

Wir halten noch eine simple Tatsache fest:

Folgerung A.19 *Unterscheiden sich zwei Funktionen $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ und $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ an nur endlich vielen Stellen, so ist f genau dann Riemann-integrierbar, wenn g es ist. In diesem Fall ist $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b g(x)\,dx$.*

Beweis. Sei etwa f Riemann-integrierbar. Per Voraussetzung ist die Funktion $g - f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ an nur endlich vielen Stellen von 0 verschieden. Nach Beispiel A.4 ist $g - f$ Riemann-integrierbar mit $\int_a^b (g(x) - f(x))\,dx = 0$. Nach Satz A.17(a) ist also $g = f + (g - f)$ Riemann-integrierbar mit $\int_a^b g(x)\,dx + \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b (g(x) - f(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$. □

Aus dem Mittelwertsatz folgern wir in Analysis 2 den Hauptsatz der Integral- un Differentialrechnung, der uns ermöglicht, Integrale mit Hilfe von Stammfunktionen zu berechnen.

Definition A.20 Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall mit mehr als einem Punkt und $f\colon I \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Eine differenzierbare Funktion $F\colon I \to \mathbb{R}$ wird eine *Stammfunktion* für f genannt, wenn $F' = f$.

Bemerkung A.21 Stammfunktionen sind bis auf eine additive Konstante eindeutig: Sind F und G Stammfunktionen für $f\colon I \to \mathbb{R}$, so gilt

$$(G - F)' = G' - F' = f - f = 0$$

und somit ist $G - F$ ene konstante Funktion (mit dem Wert $C \in \mathbb{R}$ etwa); siehe Analysis 1. Also ist $G - F = C$ und somit

$$G = F + C.$$

Definition A.22 Ist $F\colon I \to \mathbb{R}$ eine Funktion auf einem Intervall I und sind $a, b \in I$, so schreiben wir

$$[F(x)]_a^b := F(b) - F(a).$$

Satz A.23 (Hauptsatz der Integral- und Differentialrechnung) *Seien $a < b$ reelle Zahlen.*

(a) *Für jede stetige Funktion $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ ist*

$$F\colon [a, b] \to \mathbb{R}, \quad F(x) := \int_a^x f(t)\,dt$$

eine Stammfunktion für f.

(b) *Ist $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und $F\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Stammfunktion für f, so gilt*

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b \tag{166}$$

und $\int_b^a f(x)\,dx = [F(x)]_b^a$.

(c) *Ist $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, so gilt $f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)\,dt$ für alle $x \in [a, b]$.* □

Bemerkung A.24 Ist $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und $c \in [a, b]$, so ist auch $G\colon [a, b] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \int_c^x f(t)\,dt$ eine Stammfunktion für f, denn nach Satz A.23(c) ist $G(x) = F(x) - F(c)$ für alle $c \in [a, b]$ und somit $G'(x) = F'(x) = f(x)$.

Wir können nun die zwei wichtigsten Integrationsregeln formulieren und beweisen.

Satz A.25 (Partielle Integration) *Seien f und g stetig differenzierbare Funktionen auf einem nicht entarteten Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$, und $a, b \in I$. Dann gilt*

$$\int_a^b f'(x)g(x)\,dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)\,dx$$

Beweis. Nach der Produktregel gilt $(fg)' = f'g + fg'$. Da fg eine Stammfunktion für $(fg)'$ ist, folgt

$$\begin{aligned}
[f(x)g(x)]_a^b &= \int_a^b (fg)'(x)\,dx = \int_a^b (f'(x)g(x) + f(x)g'(x))\,dx \\
&= \int_a^b f'(x)g(x)\,dx + \int_a^b f(x)g'(x)\,dx.
\end{aligned}$$

Substrahieren wir $\int_a^b f(x)g'(x)\,dx$ auf beiden Seiten der Gleichung, so folgt die Behauptung. □

Beispiel A.26 Es ist

$$\int_0^1 xe^x\,dx = [xe^x]_0^1 - \int_0^1 1e^x\,dx = 1e^1 - 0 - e^1 + e^0 = 1$$

unter Benutzung von partieller Integration mit $f(x) := x$, $f'(x) = 1$, $g(x) := e^x$, $g'(x) = e^x$.

Satz A.27 (Substitutionsregel) *Seien $I \subseteq \mathbb{R}$ und $J \subseteq \mathbb{R}$ nicht entartete Intervalle, $f\colon I \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und $g\colon J \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion mit $g(J) \subseteq I$. Dann gilt für alle $a, b \in J$*

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx \;=\; \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du.$$

Beweis. Sei F eine Stammfunktion für f. Nach der Kettenregel gilt dann

$$(F \circ g)' = (F' \circ g)g' = (f \circ g)g',$$

es ist also $F \circ g$ eine Stammfunktion für $(f \circ g)g'$. Somit gilt

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx = [(F \circ g)(x)]_a^b = F(g(b)) - F(g(a)) = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du,$$

wie behauptet. □

Bemerkung A.28 Wendet man die Substitutionsregel an, so setzt man also formal $u = g(x)$ im Integral und schreibt $g'(x)dx = du$. Aus den Integrationsgrenzen $x = a$ bzw. $x = b$ wird weiter $u = g(a)$ bzw. $u = g(b)$. So kann man sich die Regel gut merken bzw. beim Rechnen einsetzen.

Bemerkung A.29 Es ist meist nicht so schwierig, die Substitutionsregel "von links nach rechts" zu benutzen, also das linke Integral durch Berechnung des rechten zu bestimmen. Man kann die Regel aber auch "von rechts nach links" anwenden, sucht also das rechte Integral und muss eine geeignete Funktion g erst erraten, umd die linke Seite hinschreiben und ausrechnen zu können. Dies erfordert Übung und Erfahrung und kann geradezu eine Kunst sein. Sie werden typische Beispiele kennenlernen.

Beispiel A.30 Die Substitutionsregel liefert

$$\begin{aligned}\int_0^{\sqrt{\pi}} x\cos(x^2)\,dx &= \frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{\pi}} 2x\,\cos(x^2)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{\pi}} g'(x)\cos(g(x))\,dx \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{\pi}\cos u\,du = 0\end{aligned}$$

mit $g(x) = x^2$, $g'(x) = 2x$.

Bemerkung A.31 Traditionell schreibt man $\int f(x)\,dx$ für die Menge aller Stammfunktionen für f und nennt diese Menge das *unbestimmte Integral* von f. Ist F eine Stammfunktion, so ist nach Bemerkung A.21 also

$$\int f(x)\,dx = \{F + C \colon C \in \mathbb{R}\}.$$

Traditionell lässt man die Mengenklammern weg und schreibt kurz $\int f(x)\,dx = F(x) + C$. In der Vorlesung wird diese Notation nur gelegentlich benutzt.

B Grundwissen über Polynome

Bei der Diskussion von Partialbruchzerlegungen haben wir einige elementare Tatsachen über Polynome benutzt, die wahrscheinlich vielen aus der Linearen Algebra bekannt sind. Wir listen diese Fakten nun auf und wiederholen kurz ihre Beweise. Wir benötigen das folgende Lemma mit $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ (die Aussagen (a)–(i) und ihre Beweise gelten jedoch ebenso über einem beliebigen unendlichen Körper $\mathbb{K}$). Anders als in fortgeschrittenen Vorlesungen zur Algebra betrachten wir Polynom*funktionen* $f: \mathbb{K} \to \mathbb{K}$, nicht lediglich abstrakte Polynome (also Linearkombinationen von Monomen in einer formalen Unbestimmten). Da $\mathbb{K}$ unendlich viele Elemente hat, legt eine Polynomfunktion ihre Koeffizienten eindeutig fest (siehe Aussage (e)), so dass der abstrakte allgemeinere Zugang für unsere Zwecke unnötig ist und Polynomfunktionen und Polynome als synonym betrachtet werden können. Wir verwenden folgende Tatsachen:

Lemma B.1 *Es seien $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, $n, m \in \mathbb{N}_0$, $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$, $b_0, \ldots, b_m \in \mathbb{K}$ und $f, g: \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ die Polynomfunktionen, die durch $f(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j$ und $g(x) = \sum_{j=0}^{m} b_j x^j$ gegeben sind. Dann gilt:*

(a) *Ist $\alpha \in \mathbb{K}$ mit $f(\alpha) = 0$ und ist f nicht die Nullfunktion, so ist $n \geq 1$ und es gibt eine Polynomfunktion $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ der Form $h(x) = \sum_{j=0}^{n-1} c_j x^j$ mit $c_0, \ldots, c_{n-1} \in \mathbb{K}$ derart, dass*

$$f(x) = (x - \alpha)h(x) \text{ für alle } x \in \mathbb{K}.$$

(b) *Ist f nicht die Nullfunktion, so gibt es ein $k \in \{0, \ldots, n\}$, Zahlen $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{K}$ und eine Polynomfunktion $h: \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ der Form $h(x) = \sum_{j=0}^{n-k} c_j x^j$ mit $c_0, \ldots, c_{n-k} \in \mathbb{K}$ derart, dass*

$$f(x) = (x - \alpha_1) \cdots (x - \alpha_k)h(x) \text{ und } h(x) \neq 0$$

für alle $x \in \mathbb{K}$. Weiter ist dann $\{x \in \mathbb{K}: f(x) = 0\} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_k\}$.

(c) *Gibt es eine Teilmenge $M \subseteq \mathbb{K}$ mit mindestens $1 + \max\{m, n\}$ Elementen (z.B. eine unendliche Teilmenge) derart, dass*

$$f(x) = g(x) \text{ für alle } x \in M,$$

so ist $f = g$.

(d) *Ist f die Nullfunktion, so ist $a_j = 0$ für alle $j \in \{0, \ldots, n\}$.*

(e) *Nach Vertauschen von f und g (wenn nötig) sei $n \leq m$. Ist $f = g$, so folgt $a_j = b_j$ für alle $j \in \{0, \ldots, n\}$ und $b_j = 0$ für alle $j \in \{n+1, \ldots, m\}$. In diesem Sinne sind die Koeffizienten einer Polynomfunktion also eindeutig festgelegt.*

(f) *Ist f nicht die Nullfunktion, so ist $a_j \neq 0$ für ein $j \in \{0, \ldots, n\}$ und der Grad* $\deg(f) := \max\{j \colon a_j \neq 0\}$ *ist wohldefiniert. (Man setzt weiter* $\deg(0) := -\infty$*). Es ist* $\deg(fg) = \deg(f) + \deg(g)$.

(g) *Ist $g \neq 0$ und $gq_1 = gq_2$ mit Polynomfunktionen $q_1, q_2 \colon \mathbb{K} \to \mathbb{K}$, so ist $q_1 = q_2$.*

(h) *Seien $\lambda_1, \ldots, \lambda_\ell \in \mathbb{K}$ paarweise verschieden, $n_1, \ldots, n_\ell \in \mathbb{N}$ und $f(x) = (x - \lambda_1)^{n_1} \cdots (x - \lambda_\ell)^{n_\ell} h(x)$ mit einer Polynomfunktion $h \colon \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ ohne Nullstellen in $\mathbb{K}$. Dann ist $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_\ell\} = \{x \in \mathbb{K} \colon f(x) = 0\}$ die Menge aller Nullstellen von f und λ_j legt die Zahl n_j (die "Vielfachheit der Nullstelle λ_j") eindeutig fest, für alle $j \in \{1, \ldots, \ell\}$.*

(i) *Seien auch $f_1, g_1 \colon \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ Polynomfunktionen und $M \subseteq \mathbb{K}$ eine unendliche Teilmenge mit $g(x) \neq 0$ und $g_1(x) \neq 0$ für alle $x \in M$. Gilt*

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f_1(x)}{g_1(x)} \quad \text{für alle } x \in M, \tag{167}$$

so ist $f(x)/g(x) = f_1(x)/g_1(x)$ für alle $x \in \mathbb{K}$ mit $g(x) \neq 0$ und $g_1(x) \neq 0$.

(j) *Ist $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ und $a_n = 1$ (also f ein "normiertes" Polynom), so gibt es $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{C}$ derart, dass $f(x) = (x - \alpha_1) \cdots (x - \alpha_n)$ für alle $x \in \mathbb{C}$.*

(k) *Sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ und $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ eine nicht reelle, komplexe Nullstelle von f in dem Sinne, dass die komplexe Polynomfunktion*

$$f_{\mathbb{C}} \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \;\; z \mapsto \sum_{j=0}^{n} a_j z^j$$

λ als Nullstelle besitzt, also $\sum_{j=0}^n a_j \lambda^j = 0$. Dann ist auch das komplex Konjugierte $\overline{\lambda}$ eine Nullstelle. Ist f nicht die Nullfunktion, so haben die Nullstellen λ und $\overline{\lambda}$ von $f_{\mathbb{C}}$ die gleiche Vielfachheit.

Beweis. (a) Wäre $n = 0$, so wäre $f(x) = a_0$ und aus $0 = f(\alpha) = a_0$ würde $f(x) = 0$ folgen für alle $x \in \mathbb{K}$ (im Widerspruch zur Annahme). Also ist $n \geq 1$. Eine Polynomdivision zeigt, dass es ein Polynom h wie angegeben und eine Konstante $C \in \mathbb{K}$ derart gibt, dass für alle $x \in \mathbb{K}$

$$f(x) = (x - \alpha)h(x) + C.$$

Einsetzen von $x = \alpha$ liefert $0 = f(\alpha) = C$.

(b) Der Beweis ist per Induktion nach n. Hat f keine Nullstelle in $\mathbb{K}$, so gilt die Aussage mit $k := 0$ und $h := f$. Habe nun f eine Nullstelle $\alpha \in \mathbb{K}$. Ist $n = 1$, so ist $h(x) = c_0$ in (a) und $f(x) = a_1 x + a_0 = (x - \alpha)h(x) = (x - \alpha)c_0$ nicht die Nullfunktion in x, somit $c_0 \neq 0$. Also hat h keine Nullstelle. Gilt die Aussage für $n-1$ statt n, so schreiben wir $f(x) = (x-\alpha)h(x)$ mit h wie in (a). Da f nicht die Nullfunktion ist, kann auch h nicht die Nullfunktion sein. Per Induktion gibt es ein $\ell \in \mathbb{N}_0$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_\ell \in \mathbb{K}$ und eine Polynomfunktion $H\colon \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ der Form $H(x) = \sum_{j=0}^{n-1-\ell} C_j x^j$ ohne Nullstellen in $\mathbb{K}$ derart, dass

$$h(x) = (x - \alpha_1) \cdots (x - \alpha_\ell) H(x).$$

Mit $k := \ell + 1$ und $\alpha_k := \alpha$ ist dann $f(x) = (x - \alpha_1) \ldots (x - \alpha_k) H(x)$ von der gewünschten Form.

(c) Nachdem wir f und g notfalls vertauschen, dürfen wir $n \leq m$ annehmen. Wir setzen $a_j := 0$ für $j \in \{n + 1, \ldots, m\}$. Dann hat die Polynomfunktion

$$g - f\colon \mathbb{K} \to \mathbb{K}, \quad x \mapsto \sum_{j=0}^{n} (b_j - a_j) x^j$$

jedes der Elemente $x \in M$ als Nullstelle. Wäre $g - f$ nicht die Nullfunktion, so hätte $g - f$ nach (b) höchstens n verschiedene Nullstellen, im Widerspruch zu $(g - f)|_M = 0$. Also ist $g - f = 0$ und somit $f = g$.

(d) Widerspruchsbeweis. Angenommen, für ein $N \in \mathbb{N}_0$ gäbe es $c_0, \ldots, c_N \in \mathbb{K}$ mit $(c_0, \ldots, c_N) \neq (0, \ldots, 0)$ derart, dass

$$h(x) := \sum_{j=0}^{N} c_j x^j = 0 \ \text{ für alle } x \in \mathbb{K}.$$

Dann könnten wir N minimal wählen mit dieser Eigenschaft. Aufgrund der Minimalität von N wäre $c_N \neq 0$. Wegen $0 = h(0) = c_0$ wäre weiter $N \neq 0$, somit $N \geq 1$. Ausklammern von x liefert nun

$$h(x) = \sum_{j=1}^{N} c_j x^j = x H(x) \ \text{ mit } \ H(x) := \sum_{j=0}^{N-1} c_{j+1} x^j$$

für alle $x \in \mathbb{K}$. Also ist $H(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ und somit für alle $x \in \mathbb{K}$, nach (c). Dies widerspricht der Minimalität von N. Somit kann kein solches N existieren.

(e) Wir setzen $a_j := 0$ für $j \in \{n+1, \dots, n\}$. Dann ist $0 = g(x) - f(x) = \sum_{j=0}^{m}(b_j - a_j)x^j$ für alle $x \in \mathbb{K}$ und somit $b_j - a_j = 0$ (und folglich $a_j = b_j$) für alle $j \in \{0, \dots, m\}$, nach (d).

(f) Die Wohldefinertheit des Grads $\deg(f)$ folgt aus (e). Die Gradformel für fg ist klar, wenn $f = 0$ oder $g = 0$. Andernfalls dürfen wir (eventuell nach Verkleinern von n und m) annehmen, dass $a_n \neq 0$ und $b_m \neq 0$. Nun ist $(fg)(x) = \sum_{j=0}^{n+m} c_j x^j$ mit $c_j := \sum_{k+\ell=j} a_k b_\ell$ mit Summationsindizes $k \in \{0, \dots, n\}$ und $\ell \in \{0, \dots, m\}$. Da $c_{n+m} = a_n b_m \neq 0$, folgt $\deg(fg) = \deg(f)\deg(g)$.

(g) Da $0 = g(q_1 - q_2)$ mit $g \neq 0$, muss wegen der Gradformel $q_1 - q_2 = 0$ sein.

(h) Es ist klar, dass $\{\lambda_1, \dots, \lambda_\ell\}$ die Menge der Nullstellen von f ist. Gelte nun auch $f(x) = (x - \lambda_1)^{m_1} \cdots (x - \lambda_\ell)^{m_\ell} H(x)$ mit $m_1, \dots, m_\ell \in \mathbb{N}$ und einem Polynom H ohne Nullstellen. Wir zeigen $n_1 = m_1$ (dass $n_j = m_j$ für alle $j \in \{2, \dots, \ell\}$, kann entsprechend bewiesen werden). Nachdem wir die Rollen der n_j und m_j notfalls vertauschen, dürfen wir annehmen, dass $n_1 \leq m_1$. Dann ist also

$$f(x) = (x - \lambda_1)^{n_1} h_1(x) = (x - \lambda_1)^{n_1} h_2(x)$$

mit $h_1(x) := (x - \lambda_2)^{n_2} \cdots (x - \lambda_\ell)^{n_\ell} h(x)$ und

$$h_2(x) := (x - \lambda_1)^{m_1 - n_1}(x - \lambda_2)^{m_2} \dots (x - \lambda_\ell)^{m_\ell} H(x).$$

Mit (g) folgt $h_1 = h_2$. Somit muss $n_1 = m_1$ sein, denn wäre $m_1 > n_1$, so erhielten wir den Widerspruch $h_2(\lambda_1) = 0 \neq h_1(\lambda_1)$.

(i) Multiplikation von (167) mit $g(x)g_1(x)$ zeigt, dass

$$f(x)g_1(x) = f_1(x)g(x)$$

für alle $x \in M$ und somit für alle $x \in \mathbb{K}$, nach (c). Die Behauptung folgt.

(j) Nach dem Fundamentalsatz der Algebra besitzt jedes nicht-konstante komplexe Polynom eine Nullstelle in $\mathbb{C}$. In (b) muss daher h konstant sein, also $n - k = 0$ und $h(x) = c_0$. Vergleich des Leitkoeffizienten 1 von f mit demjenigen von $(x - \alpha_1) \cdots (x - \alpha_n)h(x) = c_0 x^n + \cdots$ liefert $c_0 = 1$.

(k) Aus $0 = \sum_{j=0}^{n} a_j \lambda^j$ folgt

$$0 = \overline{0} = \overline{\sum_{j=0}^{n} a_j \lambda^j} = \sum_{j=0}^{n} a_j \overline{\lambda}^j$$

(wobei $\overline{a_j} = a_j$, weil $a_j \in \mathbb{R}$). Also ist auch $\overline{\lambda_j}$ eine Nullstelle von $f_{\mathbb{C}}$. Sei nun f nicht das Nullpolynom und ohne Einschränkung $a_n \neq 0$. Seien $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ die paarweise verschiedenen reellen Nullstellen von f (also auch von $f_{\mathbb{C}}$) und $\lambda_1, \overline{\lambda_1}, \ldots, \lambda_\ell, \overline{\lambda_\ell}$ die komplexen nicht-reellen Nullstellen von $f_{\mathbb{C}}$ mit den Vielfachheiten $m_1, k_1, \ldots, m_\ell, k_\ell$. Aus (j) folgt, dass

$$f_{\mathbb{C}}(z) = a_n \prod_{j=1}^{k} (z - \alpha_j)^{n_j} \prod_{j=1}^{\ell} (z - \lambda_j)^{m_j} (z - \overline{\lambda_j})^{k_j}$$

für alle $z \in \mathbb{C}$. Also ist

$$\begin{aligned} & a_n \prod_{j=1}^{k} (x - \alpha_j)^{n_j} \prod_{j=1}^{\ell} (x - \lambda_j)^{m_j} (x - \overline{\lambda_j})^{k_j} \\ & \qquad = \quad f(x) = \overline{f(x)} = a_n \prod_{j=1}^{k} (x - \alpha_j)^{n_j} \prod_{j=1}^{\ell} (x - \overline{\lambda_j})^{m_j} (x - \lambda_j)^{k_j} \end{aligned}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Nach (c) folgt für alle $z \in \mathbb{C}$, dass

$$f_{\mathbb{C}}(z) = a_n \prod_{j=1}^{k} (z - \alpha_j)^{n_j} \prod_{j=1}^{\ell} (z - \overline{\lambda_j})^{m_j} (z - \lambda_j)^{k_j}.$$

Also gilt $m_j = k_j$ für alle $j \in \{1, \ldots, \ell\}$, nach (h). $\square$

C Wiederholung: Metrische Räume, Stetigkeit

Wir wiederholen Begriffe, die in der Analysis 1 von Prof. Glöckner bereits eingeführt wurden (metrische Räume, Umgebungen, offene und abgeschlossene Mengen, Stetigkeit, Konvergenz von Folgen, Cauchy-Folgen, Vollständigkeit).

Eine Metrik ordnet zwei Elementen x, y einer Menge X eine reelle Zahl $d(x, y) \geq 0$ zu, die wir dann auch den *Abstand von x und y* nennen.

Definition C.1 Gegeben eine Menge X nennen wir eine Funktion

$$d\colon X \times X \to [0, \infty[, \quad (x, y) \mapsto d(x, y)$$

eine *Metrik auf X*, wenn sie folgende Bedingungen erfüllt:

(a) (Definitheit) Für $x, y \in X$ gilt genau dann $d(x, y) = 0$, wenn $x = y$.

(b) (Symmetrie) Für alle $x, y \in X$ gilt $d(y, x) = d(x, y)$.

(c) (Dreiecksungleichung) Für alle $x, y, z \in X$ gilt

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y).$$

Ist d eine Metrik auf X, so nennen wir das Paar (X, d) einen *metrischen Raum.*

Beispiel C.2 Jede Teilmenge $X \subseteq \mathbb{R}$ ist ein metrischer Raum mit der Metrik

$$d\colon X \times X \to [0, \infty[, \quad d(x, y) := |x - y|;$$

ebenso für Teilmengen $X \subseteq \mathbb{C}$.

[Es gilt nämlich $0 = d(x, y) = |x - y|$ genau dann, wenn $x - y = 0$, also $x = y$. Weiter ist

$$d(y, x) = |y - x| = |(-1) \cdot (x - y)| = |-1| \cdot |x - y| = |x - y| = d(x, y)$$

und

$$d(x, y) = |x - y| = |(x - z) + (z - y)| \leq |x - z| + |z - y| = d(x, z) + d(z, y)$$

für alle $x, y, z \in X$.]

In jedem metrischen Raum können wir von Umgebungen eines Punkts, offenen Mengen sowie abgeschlossenen Mengen reden.

Definition C.3 Sei (X, d) ein metrischer Raum.

(a) Gegeben $x \in X$ und $\varepsilon > 0$ nennen wir[46]

$$B_\varepsilon(x) := \{y \in X \colon d(x, y) < \varepsilon\}$$

die *offene Kugel* vom Radius ε um x und

$$\overline{B}_\varepsilon(x) := \{y \in X \colon d(x, y) \leq \varepsilon\}$$

[46]Der Buchstabe “B” erinnert an das englische Wort *ball.*

die *abgeschlossene Kugel* vom Radius ε um x. Wir schreiben auch $B_\varepsilon^X(x)$ oder $B_\varepsilon^d(x)$ statt $B_\varepsilon(x)$, falls es nötig ist, auf den zugrunde liegenden metrischen Raum oder die benutzte Metrik hinzuweisen. Entsprechend schreiben wir auch $\overline{B}_\varepsilon^X(x)$ oder $\overline{B}_\varepsilon^d(x)$ statt $\overline{B}_\varepsilon(x)$.

(b) Sei $x \in X$. Eine Teilmenge $V \subseteq X$ heißt *Umgebung* eines Punkts $x \in X$, wenn sie eine Kugel um x enthält, also

$$(\exists \varepsilon > 0) \;\; B_\varepsilon(x) \subseteq V.$$

(c) Eine Teilmenge $V \subseteq X$ heißt *offen*, wenn sie eine Umgebung von jedem $x \in V$ ist, also

$$(\forall x \in V)(\exists \varepsilon > 0) \;\; B_\varepsilon(x) \subseteq V.$$

(d) Eine Teilmenge $A \subseteq X$ heißt *abgeschlossen*, wenn ihr Komplement $X \setminus A$ offen ist.

Beispiel C.4 (a) In $\mathbb{R}$ ist $B_\varepsilon(x) =]x-\varepsilon, x+\varepsilon[$ für $x \in \mathbb{R}$ und $\varepsilon > 0$.

(b) In $\mathbb{C}$ ist für $z = x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ und $\varepsilon > 0$ wegen $d(z, a+ib) = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$

$$B_\varepsilon(z) = \{a + ib \colon a, b \in \mathbb{R} \text{ mit } d(z, a+ib) < \varepsilon\}$$

die Kreisscheibe aller $a + ib \in \mathbb{C}$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ und $(a-x)^2 + (b-y)^2 < \varepsilon^2$.

Bemerkung C.5 Sei (X, d) ein metrischer Raum.

(a) Jede Kugel $B_\varepsilon(x)$ ist offen, denn für alle $y \in B_\varepsilon(x)$ ist $d(x, y) < \varepsilon$ und somit $r := \varepsilon - d(x, y) > 0$. Dann ist $B_r(y) \subseteq B_\varepsilon(x)$, da wegen der Dreiecksungleichung

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) < d(x, y) + r = d(x, y) + \varepsilon - d(x, y) = \varepsilon$$

für alle $z \in B_r(y)$.

(b) Jede Kugel $\overline{B}_\varepsilon(x)$ ist abgeschlossen, denn ist $y \in X \setminus \overline{B}_\varepsilon(x)$, so ist $d(x, y) > \varepsilon$ und somt $r := d(x, y) - \varepsilon > 0$. Dann ist $B_r(y) \subseteq X \setminus \overline{B}_\varepsilon(x)$, denn für alle $z \in B_r(y)$ folgt aus

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) < d(x, z) + r = d(x, z) + d(x, y) - \varepsilon,$$

dass $d(x, z) > \varepsilon$.

Bemerkung C.6 Sei (X, d) wie zuvor und $x \in X$.

(a) $B_\varepsilon(x)$ heißt auch (offene) *ε-Umgebung* von x in X und manche benutzen die Notation $U_\varepsilon(x)$ statt $B_\varepsilon(x)$.

(b) Ist V eine Umgebung von x in X, so auch jede Teilmenge $W \subseteq X$ mit $V \subseteq W$.

Kennen wir die offenen Mengen, so können wir übrigens auch die x-Umgebungen wieder rekonstruieren:

(c) Eine offene Teilmenge $V \subseteq X$ ist genau dann eine Umgebung von x, wenn $x \in V$.

(d) Eine Teilmenge $W \subseteq X$ ist genau dann eine Umgebung von x, wenn sie eine offene Umgebung von x enthält.

Satz C.7 *Für jeden metrischen Raum (X, d) gilt:*

(O1) *Die leere Menge $\emptyset$ ist offen in X und X ist offen.*

(O2) *Für jede Familie $(V_j)_{j \in J}$ von offenen Teilmengen $V_j \subseteq X$ ist auch die Vereinigung $\bigcup_{j \in J} V_j$ offen.*

(O3) *Für alle offenen Teilmengen V_1 und V_2 von X ist auch der Durchschnitt $V_1 \cap V_2$ offen in X.*

Beweis. (O1) Gegeben $x \in X$ ist $B_1(x) \subseteq X$, also X offen. Wäre $\emptyset$ nicht offen, so gäbe es ein $x \in \emptyset$ (Widerspruch!) derart, dass $B_\varepsilon(x) \not\subseteq \emptyset$ für alle $\varepsilon > 0$.

(O2) Ist $x \in \bigcup_{j \in J} V_j =: V$, so gibt es ein $j \in J$ mit $x \in V_j$. Da V_j offen ist, existiert ein $\varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon(x) \subseteq V_j$. Dann ist $B_\varepsilon(x) \subseteq V$. Also ist V offen.

(O3) Sei $x \in V_1 \cap V_2$. Für $j \in \{1, 2\}$ gibt es $\varepsilon_j > 0$ mit $B_{\varepsilon_j}(x) \subseteq V_j$, da V_j offen ist. Für $\varepsilon := \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$ ist nun $B_\varepsilon(x) \subseteq B_{\varepsilon_1}(x) \cap B_{\varepsilon_2}(x) \subseteq V_1 \cap V_2$. $\square$

Definition C.8 Sei (X, d) ein metrischer Raum und $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Elementen $x_n \in X$. Wir sagen, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *konvergiert* gegen ein $x \in X$, wenn

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \geq N)\ d(x, x_n) < \varepsilon.$$

In diesem Fall schreiben wir auch $x_n \to x$ für $n \to \infty$. Wir werden gleich sehen, dass x eindeutig festgelegt ist; wir nennen x den *Grenzwert* (oder *Limes*) der Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und schreiben

$$\lim_{n\to\infty} x_n := x.$$

Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X heißt *konvergent*, wenn sie gegen ein $x \in X$ konvergiert; anderenfalls heißt sie *divergent*.

Lemma C.9 *Sei (X,d) ein metrischer Raum und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in X. Konvergiert $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $x \in X$ und gegen $y \in X$, so ist $x = y$.*

Beweis. Gegeben $\varepsilon > 0$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$ derart, dass $d(x_n, x) < \varepsilon$ für all $n \geq N$. Weiter existiert ein $M \in \mathbb{N}$ derart, dass $d(x_n, y) < \varepsilon$ für alle $n \geq M$. Sei $n := \max\{N, M\}$. Dann ist

$$d(x,y) \leq d(x,x_n) + d(x_n,y) < 2\varepsilon.$$

Also gilt $d(x,y) < 2\varepsilon$ für alle $\varepsilon > 0$ und somit $d(x,y) = 0$, folglich $x = y$. □

Lemma C.10 *Sei (X,d) ein metrischer Raum und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in X. Gegeben $x \in X$ sind äquivalent:*

(a) *Die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen x, also* $(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \geq N)$ $d(x, x_n) < \varepsilon$.

(b) *Für jede Umgebung W von x existiert ein $N \in \mathbb{N}$ derart, dass $x_n \in W$ für all $n \geq N$.*

Beweis. (a)⇒(b): Ist $W \subseteq X$ eine Umgebung von x, so existiert ein $\varepsilon > 0$ derart, dass $B_\varepsilon(x) \subseteq W$. Nach (a) existiert ein $N \in \mathbb{N}$ derart, dass $d(x, x_n) < \varepsilon$ für alle $n \geq N$, also $x_n \in B_\varepsilon(x) \subseteq W$.

(b)⇒(a): Gegeben $\varepsilon > 0$ ist $B_\varepsilon(x)$ eine Umgebung von x. Also existiert nach (b) ein $N \in \mathbb{N}$ derart, dass $x_n \in B_\varepsilon(x)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq N$ und somit $d(x, x_n) < \varepsilon$. □

Satz C.11 *Sei (X,d) ein metrischer Raum. Eine Teilmenge $A \subseteq X$ ist genau dann abgeschlossen, wenn*

$$\lim_{n\to\infty} a_n \in A$$

für jede in X konvergente Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in A.

Beweis. Sei A abgeschlossen und $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Elementen $a_n \in A$, welche in X gegen ein $x \in X$ konvergiert. Wäre $x \notin A$, so wäre $W := X \setminus A$ eine offene Menge mit $x \in W$, also eine Umgebung von x. Nach Lemma C.10(b) gäbe es also ein $N \in \mathbb{N}$ derart, dass $a_n \in W$ für alle $n \geq N$. Insbesondere wäre $a_N \in W = X \setminus A$, im Widerspruch zu $a_N \in A$. Also muss doch $x \in A$ sein.

Sei nun A nicht abgeschlossen, also $X \setminus A$ nicht offen. Es gibt also ein $x \in X \setminus A$ derart, dass

$$(\forall \varepsilon > 0)\ B_\varepsilon(x) \not\subseteq X \setminus A,$$

also $B_\varepsilon(x) \cap A \neq \emptyset$. Da wir $\varepsilon = 1/n$ wählen können, sehen wir: Für jedes $n \in \mathbb{N}$ existiert ein $a_n \in B_{1/n}(x) \cap A$. Wegen $d(x, a_n) < 1/n \to 0$ gilt dann $a_n \to x$, wobei $x \notin A$. $\square$

Definition C.12 Seien metrische Räume (X, d_X) und (Y, d_Y) gegeben sowie eine Funktion $f\colon X \to Y$. Wir nennen f *stetig an einer Stelle* $x \in X$, wenn

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall y \in X)\ \ d_X(x, y) < \delta \ \Rightarrow\ d_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon, \tag{168}$$

also

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)\ \ f(B_\delta^X(x)) \subseteq B_\varepsilon^Y(f(x)). \tag{169}$$

Ist $f\colon X \to Y$ an jeder Stelle $x \in X$ stetig, so nennen wir die Funktion f *stetig*.

Lemma C.13 *Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume und $x \in X$. Für eine Funktion $f\colon X \to Y$ sind äquivalent:*

(a) *f ist stetig an der Stelle x;*

(b) *Für jede Umgebung V von $f(x)$ in Y ist das Urbild $f^{-1}(V)$ eine Umgebung von x in X;*

(c) *Für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X mit $x_n \to x$ gilt $f(x_n) \to f(x)$ für $n \to \infty$, also*

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x).$$

Beweis. (a)⇒(b): Ist V eine Umgebung von $f(x)$ in Y, so existiert ein $\varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon^Y(f(x)) \subseteq V$. Nach (a) existiert ein $\delta > 0$ mit $f(B_\delta^X(x)) \subseteq B_\varepsilon^Y(f(x))$. Dann ist $f(B_\delta^X(x)) \subseteq V$, also $B_\delta^X(x) \subseteq f^{-1}(V)$ und somit $f^{-1}(V)$ eine Umgebung von x in X.

(b)⇒(a): Gegeben $\varepsilon > 0$ ist $V := B_\varepsilon^Y(f(x))$ eine Umgebung von $f(x)$ in Y, nach (b) ist also $f^{-1}(V)$ eine Umgebung von x. Es existiert also ein $\delta > 0$ mit $B_\delta^X(x) \subseteq f^{-1}(V)$ und somit $f(B_\delta^X(x)) \subseteq V = B_\varepsilon^Y(f(x))$.

(a)⇒(c): Sei f stetig an der Stelle x und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in X mit $x_n \to x$. Gegeben $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$ derart, dass

$$(\forall y \in X)\; d_X(x,y) < \delta \;\Rightarrow\; d_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

Da $x_n \to x$, existiert ein $N \in \mathbb{N}$ derart, dass

$$d_X(x, x_n) < \delta$$

für alle $n \geq N$. Für alle $n \geq N$ können wir oben $y := x_n$ nehmen und erhalten $d_Y(f(x), f(x_n)) < \varepsilon$. Also gilt $f(x_n) \to f(x)$.

¬(a)⇒ ¬(c): Ist f unstetig an der Stelle x, so gibt es ein $\varepsilon > 0$ derart, dass für jedes $\delta > 0$ ein $y \in X$ existiert mit $d_X(x,y) < \delta$ und $d_Y(f(x), f(y)) \geq \varepsilon$. Für $n \in \mathbb{N}$ wenden wir dies mit $\delta := 1/n$ an und erhalten ein $x_n \in X$ mit $d_X(x, x_n) < 1/n$ und $d_Y(f(x), f(x_n)) \geq \varepsilon$. Da $d_X(x, x_n) = 1/n \to 0$ für $n \to \infty$, gilt $x_n \to x$. Wegen $d_Y(f(x), f(x_n)) \geq \varepsilon$ für alle $n \in \mathbb{N}$ konvergiert die Folge $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ nicht gegen $f(x)$. □

Satz C.14 *Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume. Für eine Funktion $f\colon X \to Y$ sind äquivalent:*

(a) *f ist stetig, also stetig an jeder Stelle $x \in X$;*

(b) *Für jede offene Teilmenge V von Y ist das Urbild $f^{-1}(V)$ eine offene Teilmenge von X;*

(c) *Für jede abgeschlossene Teilmenge A von Y ist das Urbild $f^{-1}(A)$ eine abgeschlossene Teilmenge von X;*

(d) *Für jede konvergente Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X konvergiert $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ in Y gegen $f(\lim_{n\to\infty} x_n)$, es gilt also*

$$f\Big(\lim_{n\to\infty} x_n\Big) \;=\; \lim_{n\to\infty} f(x_n).$$

Beweis. Nach Lemma C.13 sind die Bedingungen (a) und (d) äquivalent.

(a)⇒(b): Sei $V \subseteq Y$ offen und $x \in f^{-1}(V)$. Da V eine Umgebung von $f(x)$ ist, ist nach Lemma C.13(b) $f^{-1}(V)$ eine Umgebung von x, es gibt also ein $\delta > 0$ mit $B_\delta^X(x) \subseteq f^{-1}(V)$. Also ist $f^{-1}(V)$ offen.

(b)⇒(c): Ist A eine abgeschlossene Teilmenge von Y, so ist $Y \setminus A$ eine offene Teilmenge von Y, somit nach (b)

$$f^{-1}(Y \setminus A) = X \setminus f^{-1}(A)$$

eine offene Teilmenge von X. Also ist $f^{-1}(A)$ abgeschlossen.

(c)⇒(b): Ist V eine offene Teilmenge von Y, so ist $Y \setminus V$ eine abgeschlossene Teilmenge von Y, somit nach (c)

$$f^{-1}(Y \setminus V) = X \setminus f^{-1}(V)$$

eine abgeschlossene Teilmenge von X. Also ist $f^{-1}(V)$ offen.

(b)⇒(a): Ist $x \in X$ und $W \subseteq Y$ eine Umgebung von $f(x)$, so gibt es eine offene Umgebung V von $f(x)$ in Y mit $V \subseteq W$. Nach (b) ist $f^{-1}(V)$ offen. Da $x \in f^{-1}(V)$, ist $f^{-1}(V)$ eine offene x-Umgebung und somit auch $f^{-1}(W) \supseteq f^{-1}(V)$ eine Umgebung von x in X. Nach Lemma C.13(b) ist f also an der Stelle x stetig. □

Insbesondere ist also ε-δ-Stetigkeit von f (wie in Bedingung (a) des vorigen Lemmas) äquivalent zu Folgenstetigkeit von f (wie in Bedingung (d)).

Satz C.15 *Seien (X, d_X), (Y, d_Y) und (Z, d_Z) metrische Räume, $x \in X$ und $f\colon X \to Y$ sowie $g\colon Y \to Z$ Funktionen. Ist f stetig an der Stelle x und g stetig an der Stelle $f(x)$, so ist die Komposition*

$$g \circ f\colon X \to Z, \quad y \mapsto g(f(y))$$

stetig an der Stelle x.

Beweis. Ist V eine Umgebung von $g(f(x))$ in Z, so $g^{-1}(V)$ eine Umgebung von $f(x)$ in Y, da g an der Stelle $f(x)$ stetig ist. Somit ist $f^{-1}(g^{-1}(V))$ eine Umgebung von x in X, da f an der Stelle x stetig ist. Somit ist $(g \circ f)^{-1}(V) = f^{-1}(g^{-1}(V))$ eine Umgebung von x in X, also $g \circ f$ stetig an der Stelle x. □

Satz C.16 *Seien (X, d) ein metrischer Raum, $x \in X$ und $f, g\colon X \to \mathbb{R}$ Funktionen, die an der Stelle x stetig sind.*

(a) *Dann sind auch* $fg\colon X \to \mathbb{R}$, $y \mapsto f(y)g(y)$ *sowie* $f+g\colon X \to \mathbb{R}$, $y \mapsto f(y)+g(y)$ *stetig an der Stelle* x. *Ist* $g(X) \subseteq \mathbb{R}\setminus\{0\}$, *so ist weiter die Funktion* $1/g\colon X \to \mathbb{R}$, $y \mapsto 1/g(y)$ *stetig an der Stelle* x.

(b) *Für* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *ist* $\alpha f + \beta g\colon X \to \mathbb{R}$, $y \mapsto \alpha f(y) + \beta g(y)$ *stetig an der Stelle* x.

Beweis. Ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in X mit $x_n \to x$, so gilt unter den genannten Voraussetzungen

$$f(x_n)g(x_n) \to f(x)g(y), \quad f(x_n)+g(x_n) \to f(x)+g(x), \quad 1/g(x_n) \to 1/g(x)$$

und $\alpha f(x_n) + \beta g(x_n) \to \alpha f(x) + \beta g(x)$ für $n \to \infty$, nach dem Grenzwertsatz für Folgen der Analysis 1. $\square$

Definition C.17 Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in einer Menge X. Eine *Teilfolge* von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Folge der Form $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ mit natürlichen Zahlen

$$n_1 < n_2 < \cdots .$$

Lemma C.18 *Sei* (X,d) *ein metrischer Raum und* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine konvergente Folge in* X, *mit Grenzwert* x. *Dann konvergiert auch jede Teilfolge* $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ *gegen* x. *Allgemeiner gilt*

$$x_{\theta(k)} \to x \text{ für } k \to \infty$$

für jede Funktion $\theta\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *derart, dass* $\theta^{-1}(\{1,\ldots,m\})$ *endlich ist für jedes* $m \in \mathbb{N}$.

Beweis. Teilfolgen von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sind ein Spezialfall von Folgen der Form $(x_{\theta(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ (im Fall einer Teilfolge ist $\theta\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ streng monoton wachsend). Es genügt daher, die letzte Aussage zu beweisen. Gegeben $\varepsilon > 0$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$ derart, dass

$$d(x, x_n) < \varepsilon \text{ für alle } n \geq N. \tag{170}$$

Da das Urbild

$$F := \theta^{-1}(\{1,\ldots,N-1\})$$

per Voraussetzung eine endliche Teilmenge von $\mathbb{N}$ ist, existiert ein $k_0 \in \mathbb{N}$ derart, dass $k_0 > k$ für alle $k \in F$. Für alle $k \in \mathbb{N}$ mit $k \geq k_0$ ist dann $\theta(k) \in \mathbb{N} \setminus \{1,\ldots,N-1\}$, also $\theta(k) \geq N$, somit $d(x, x_{\theta(k)}) < \varepsilon$ nach (170). $\square$

Definition C.19 Sei (X, d) ein metrischer Raum. Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X wird *Cauchyfolge* genannt, wenn

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n, m \geq N) \;\; d(x_n, x_m) < \varepsilon.$$

Ist in X jede Cauchyfolge eine konvergente Folge, so nennt man den metrischen Raum (X, d) *vollständig*.

Beispiel C.20 Wir haben in Analysis 1 gesehen, dass in $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ jede Cauchyfolge konvergiert; mit $d(x, y) := |x-y|$ ist also $(\mathbb{R}, d)$ ein vollständiger metrischer Raum (ebenso $(\mathbb{C}, d)$).

Lemma C.21 *Für jeden metrischen Raum (X, d) gilt: Jede konvergente Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X ist eine Cauchyfolge.*

Beweis. Sei x der Grenzwert der konvergenten Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Gegeben $\varepsilon > 0$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$ derart, dass $d(x, x_n) < \varepsilon/2$ für alle $n \geq N$. Somit gilt für alle $n, m \geq N$

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x) + d(x, x_m) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

Also ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge. □

Ein metrischer Raum (X, d) ist somit genau dann vollständig, wenn für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X gilt: $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist genau dann konvergent, wenn $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge ist.

Lemma C.22 *Sei (X, d) ein metrischer Raum und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in X. Hat $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge, so ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent. Die gleiche Schlussfolgerung gilt, wenn $(x_{\theta(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert für eine Funktion $\theta\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ wie in Lemma* C.18.

Beweis. Sei

$$x := \lim_{k\to\infty} x_{\theta(k)}.$$

Gegeben $\varepsilon > 0$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$ derart, dass $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ für alle $n, m \in \mathbb{N}$ mit $n, m \geq N$. Da $\theta^{-1}(\{1, \ldots, N-1\})$ endlich ist, finden wir ein $k_0 \in \mathbb{N}$ derart, dass $k_0 > k$ für jedes $k \in \mathbb{N}$ mit $\theta(k) \leq N - 1$. Somit ist $\theta(k) \geq N$ für alle $k \geq k_0$ und folglich

$$d(x_n, x_{\theta(k)}) < \varepsilon$$

für alle $n \geq N$ und $k \geq k_0$. Für festes $n \geq N$ folgt

$$d(x_n, x) = \lim_{k\to\infty} d(x_n, x_{\theta(k)}) \leq \varepsilon,$$

da $d(x_n, \cdot)\colon X \to \mathbb{R}$, $y \mapsto d(x_n, y)$ stetig ist (wie wir gleich in Beispiel C.28 nachrechnen). Also gilt $x_n \to x$ für $n \to \infty$. $\square$

Definition C.23 Es sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in einem metrischen Raum (X, d). Ein Element $x \in X$ wird ein *Häufungspunkt* der Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ genannt, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ die Menge

$$\{n \in \mathbb{N}\colon d(x, x_n) < \varepsilon\}$$

eine unendliche Menge ist, also

$$(\forall \varepsilon > 0)(\forall N \in \mathbb{N})(\exists n \geq N)\colon d(x, x_n) < \varepsilon.$$

Lemma C.24 *Es sei (X, d) ein metrischer Raum, $x \in X$ und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in X. Dann sind äquivalent:*

(a) *Es existiert eine Teilfolge $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ mit*

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x.$$

(b) *x ist ein Häufungspunkt der Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*

Beweis. (a)$\Rightarrow$(b): Sei $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ eine gegen x konvergente Teilfolge. Gegeben $\varepsilon > 0$ und $N \in \mathbb{N}$ existiert ein $k_0 \in \mathbb{N}$ derart, dass $d(x, x_{n_k}) < \varepsilon$ für alle $k \geq k_0$. Da $n_k \to \infty$ für $k \to \infty$, existiert ein $k \in \mathbb{N}$ mit $n_k \geq N$ und $k \geq k_0$, also $d(x, x_{n_k}) < \varepsilon$.

(b)$\Rightarrow$(a): Sei $n_0 := 0$. Sei $k \in \mathbb{N}$ und seien $n_1 < \cdots < n_{k-1}$ bereits gefunden derart, dass

$$d(x, x_{n_j}) < \frac{1}{j}$$

für alle $j \in \{1, \ldots, k-1\}$. Da die Menge

$$\{n \in \mathbb{N}\colon d(x, x_n) < 1/k\}$$

unendlich ist, existiert ein $n_k > n_{k-1}$ mit $d(x, x_{n_k}) < \frac{1}{k}$. Die Konstruktion liefert eine Teilfolge $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ derart, dass $d(x, x_{n_k}) < \frac{1}{k}$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und somit $x_{n_k} \to x$. □

Spezielle stetige Abbildungen

Sind (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume, so ist eine Abbildung $f\colon X \to Y$ per Definition stetig, wenn sie an jeder Stelle $x \in X$ stetig ist, also

$$(\forall x \in X)(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall y \in X)\, d_X(x, y) < \delta \Rightarrow d_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon. \tag{171}$$

Wir erinnern an zwei stärkere Stetigkeitseigenschaften, die manchmal von Nutzen sind.

Definition C.25 Es seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume.

(a) Eine Abbildung $f\colon X \to Y$ heißt *gleichmäßig stetig*, wenn

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in X)(\forall y \in X)\, d_X(x, y) < \delta \Rightarrow d_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon. \tag{172}$$

(b) Eine Abbildung $f\colon X \to Y$ heißt *Lipschitz-stetig*, wenn es ein $L \in [0, \infty[$ derart gibt, dass

$$(\forall x, y \in X) \;\; d_Y(f(x), f(y)) \;\leq\; L\, d_X(x, y).$$

Man nennt solch ein L eine *Lipschitz-Konstante* für f.

Satz C.26 *Es seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume und $f\colon X \to Y$ eine Abbildung. Dann gilt:*

(a) *Ist f Lipschitz-stetig, so ist f gleichmäßig stetig.*

(b) *Ist f gleichmäßig stetig, so ist f stetig.*

Insbesondere ist jede Lipschitz-stetge Abbildung stetig.

Beweis. Ist f Lipschitz-stetig mit Lipschitzkonstante L und $\varepsilon > 0$, so setze

$$\delta := \frac{\varepsilon}{L+1}.$$

Dann gilt für alle $x, y \in X$ mit $d_X(x, y) < \delta$, dass

$$d_Y(f(x), f(y)) \leq L\, d_X(x, y) \leq (L + 1)d_X(x, y) < (L + 1)\delta = \varepsilon;$$

also ist f gleichmäßig stetig.

Ist f gleichmäßig stetig und $x_0 \in X$, so existiert zu $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ derart, dass für alle $x, y \in X$ mit $d_X(x, y) < \delta$ folgt, dass $d_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon$. Insbesondere gilt für alle $y \in X$ mit $d_X(x_0, y) < \delta$, dass $d_Y(f(x_0), f(y)) < \varepsilon$. Also ist f an der Stelle x_0 stetig und somit stetig, da x_0 beliebig war. □

Bemerkung C.27 Man beachte, dass in (171) und (172) lediglich die Reihenfolge der Quantoren verschieden ist. Die Bedingung (172) ist stärker, da hier δ sogar unabhängig von x gewählt werden kann.

Beispiel C.28 Für jeden metrischen Raum (X, d) und jedes $x \in X$ gilt

$$(\forall y, z \in X) \;\; |d(x, y) - d(x, z)| \leq d(y, z), \tag{173}$$

woran wir gleich noch einmal erinnern. Also ist die Abbildung

$$d(x, \cdot)\colon Y \to [0, \infty[, \;\; y \mapsto d(x, y)$$

Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante $L = 1$ (insbesondere stetig).

[In der Tat ist $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$, somit

$$d(x, y) - d(x, z) \leq d(z, y) = d(y, z).$$

Vertauschen der Rollen von y und z zeigt, dass auch

$$-(d(x, y) - d(x, z)) = d(x, z) - d(x, y) \leq d(y, z).$$

Also ist $|d(x, y) - d(x, z)| \leq d(y, z)$.]

Beispiel C.29 Die Exponentialfunktion

$$\exp\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto e^x$$

ist stetig, aber nicht gleichmäßig stetig. Sei nämlich $\varepsilon := 1$. Für $\delta > 0$ setzen wir $x_n := n$ und $y_n := n + \frac{\delta}{2}$ für $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $|y_n - x_n| = \delta/2 < \delta$ aber

$$|e^{y_n} - e^{x_n}| = e^n(e^{\delta/2} - 1) \to \infty$$

für $n \to \infty$, somit $|e^{y_n} - e^{x_n}| > 1 = \varepsilon$ für ein geeignetes $n \in \mathbb{N}$.

Beispiel C.30 De Funktion $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt{x}$ ist gleichmäßig stetig, aber nicht Lipschitz-stetig.

[Da $|f(y) - f(0)|/|y-0| = 1/\sqrt{y} \to \infty$ für $y \searrow 0$, kann f nicht Lipschitz-stetig sein.[47]

Die gleichmäßige Stetigkeit von f ist klar aus Satz 1.8 der Analysis 2. Alternativ kann man diese per Hand nachrechnen: Gegeben $\varepsilon > 0$ setzen wir $\delta := \varepsilon^2/8$. Wir zeigen, dass $|f(y) - f(x)| < \varepsilon$ für alle $x, y \in [0,1]$ mit $|x-y| < \delta$. Für $x = y$ ist dies trivial; wir dürfen daher $x \neq y$ annehmen und dann auch $x < y$ (nachdem wir beide Zahlen notfalls vertauschen). Ist $x \leq \delta$, so ist $y \leq 2\delta$ und somit

$$|f(y)-f(x)| \leq |f(y)|+|f(x)| = \sqrt{y} + \sqrt{x} \leq \sqrt{\delta} + \sqrt{2\delta} = \frac{\varepsilon}{2\sqrt{2}} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Ist $x \geq \delta$, so ist auch $y \geq \delta$ und somit

$$|\sqrt{y} - \sqrt{x}| = \sqrt{y} - \sqrt{x} = \frac{\overbrace{y-x}^{<\delta}}{\underbrace{\sqrt{x}}_{\geq\sqrt{\delta}} + \underbrace{\sqrt{y}}_{\geq\sqrt{\delta}}} < \frac{\delta}{2\sqrt{\delta}} = \frac{1}{2}\sqrt{\delta} = \frac{\varepsilon}{4\sqrt{2}} < \varepsilon.\,]$$

Weitere Grundbegriffe zu metrischen Räumen

Im vorliegenden Analysis 2-Skript werden Sie weitere Grundbegriffe im Bereich der metrischen Räume kennenlernen. So begegnen uns der Begriff der induzierten Metrik auf einer Teilmenge M eines metrischen Raums X; die Produktmetrik auf einem Produkt $X_1 \times X_2$ metrischer Räume und der Begriff eines präkompakten (total beschränkten) metrischen Raums. Zum anderen werden uns Begriffe begegnen, die nicht nur für metrische Räume, sondern allgemeiner für sogenannte topologische Räume X und ihre Teilmengen definiert werden können (wie Abschluss, Inneres und Rand einer Teilmenge $M \subseteq X$; Begriff der Kompaktheit). Jenseits der Analysis 2 kommen noch weitere wichtige Sätze über metrische Räume hinzu, etwa der Bairesche Kategoriensatz und der Satz von Arzelà-Ascoli.

[47] Für eine Lipschitz-Konstante L wäre nämlich stets $|f(y) - f(0)| \leq L|y-0|$, also $|f(y) - f(0)|/|y-0| \leq L$.