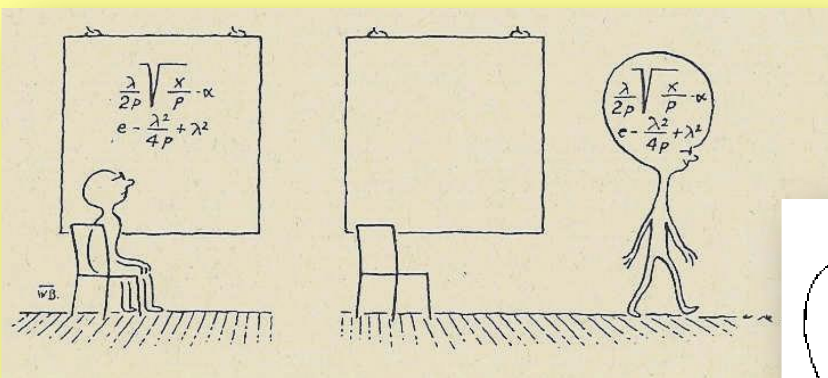
Stephan Hußmann
IEEM – Universität Dortmund

Analysisunterricht - erst Verstehen, dann Kalkül

Stephan Hußmann



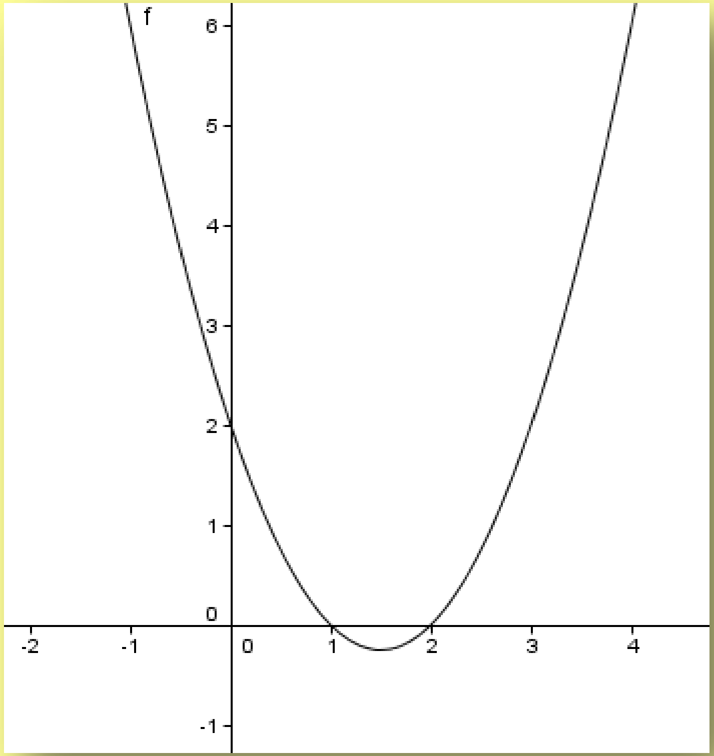
Stephan Hußmann

IEEM – Universität Dortmund

Aufgabe:
Bestimme die Extremwerte von x^2-3x+3.

Tim rechnet:
$f'(x_0)=0$,
also $2x_0+3=0$
$\Leftrightarrow x_0=1{,}5$

$f''(x_0)=2>0$,
also ist $x_0=1{,}5$ ein Tiefpunkt.



I: Skizziere den Graphen von f'

T: (4 sec) Ich glaub, das kann ich nicht.

I: Was bedeutet denn f'.

T: Das ist die Steigung oder so.

I: (zeigt den Graphen) In welchem Bereich ist denn $f'<0$

T: hier, unter der x-Achse.

107 Studierende:
74% können es technisch
21% können es inhaltlich erklären

Stephan Hußmann

IEEM – Universität Dortmund

Aufgabe:
Bestimme die Extremwerte von x^2-$3x^2$+2.

Tim rechnet:
$f'(x_0)=0$,
also $2\,x_0 - 6=0$
$\Leftrightarrow x_0 = 3$

$f''(x_0)=2>0$,
also ist $x_0 = 3$ ein Tiefpunkt.

I: Skizziere den Graphen von f‘

T: (4 sec) Ich glaub, das kann ich n

I: Was bedeutet denn f‘.

T: Das ist die Steigung oder so.

I: (zeigt den Graphen) In welchem Bereich ist denn f‘<0

T: hier, unter der x-Achse.

Tim hat zu den formalen Verfahren keine oder nicht verbundene inhaltliche Vorstellungen aufgebaut bzw. sie sie sind nicht automatisch verbunden.

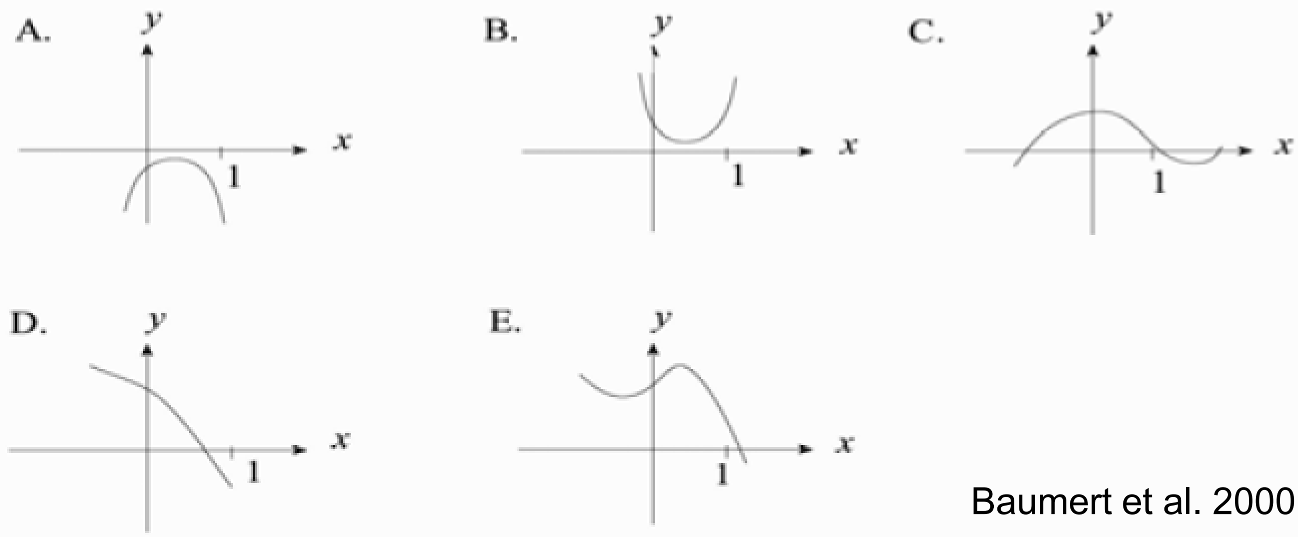
Den Ableitungsbegriff beherrscht Tim als Rechnen ohne Bedeutung.

Der Nutzen verschiedener Darstellungen wird nicht gesehen.

Stephan Hußmann

IEEM – Universität Dortmund

Welcher der folgenden Graphen hat die nachstehenden Eigenschaften:
$f'(0) < 0$, $f'(1) < 0$ und $f''(x)$ ist immer negativ?



Baumert et al. 2000

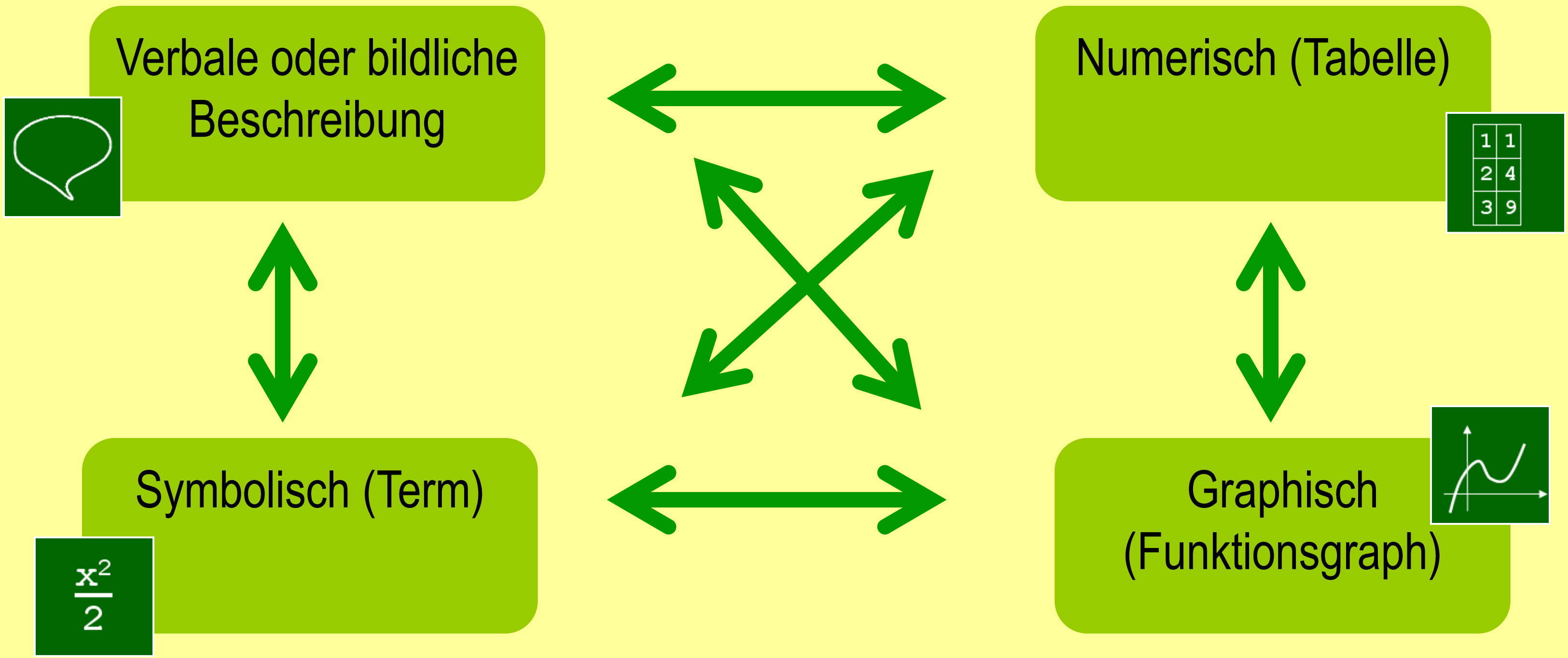
Nur ein Drittel der Oberstufenschüler/innen können $f'(1)=0$ geometrisch interpretieren.

Stephan Hußmann
IEEM – Universität Dortmund

Zwei mögliche Problemlagen :

(1) Verschiedene **Darstellungen** wurden nicht genutzt/erlernt

(2) Grundvorstellungen sind nicht adäquat aufgebaut.



Stephan Hußmann

IEEM – Universität Dortmund

Zwei mögliche Problemlagen :

(1) Verschiedene Darstellungen wurden nicht genutzt/erlernt

(2) Grundvorstellungen sind nicht adäquat aufgebaut.

	Situationen (Bilder und Texte)	Tabellen	Graphen	Terme
Situationen (Bilder und Texte)		Ablesen und Messen	Skizzieren	Analytisch beschreiben
Tabellen	Lesen		Punkte einzeichnen	Anpassen (z.B. lineare Regression)
Graphen	Interpretieren	Ablesen		Anpassen (Kurven hin-durchlegen)
Terme	Variablen aus-machen	Berechnen	Skizzieren	

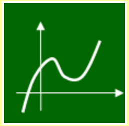
Stephan Hußmann

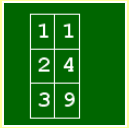
IEEM – Universität Dortmund

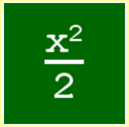
Zwei mögliche Problemlagen :

(1) Verschiedene **Darstellungen** wurden nicht genutzt/erlernt

(2) Grundvorstellungen sind nicht adäquat aufgebaut.







analogisch schematisch symbolisch

niedrig ←Generalisierungsgrad→ hoch

Stephan Hußmann
IEEM – Universität Dortmund

Gegeben: f ist eine differenzierbare Funktion, so dass $f(-x) = -f(x)$ gilt.

Welche der folgenden Aussagen treffen zu:

A) $f'(-a) = -f'(-a)$

B) $f'(-a) = f'(a)$

C) $f'(-a) = -f'(a)$

D) Keine von A-C

Eine typische Antwort war: $f'(-a) = (f(-a))' = (-f(a))' = -f'(a)$.

Eisenberg & Dreyfus (1990)

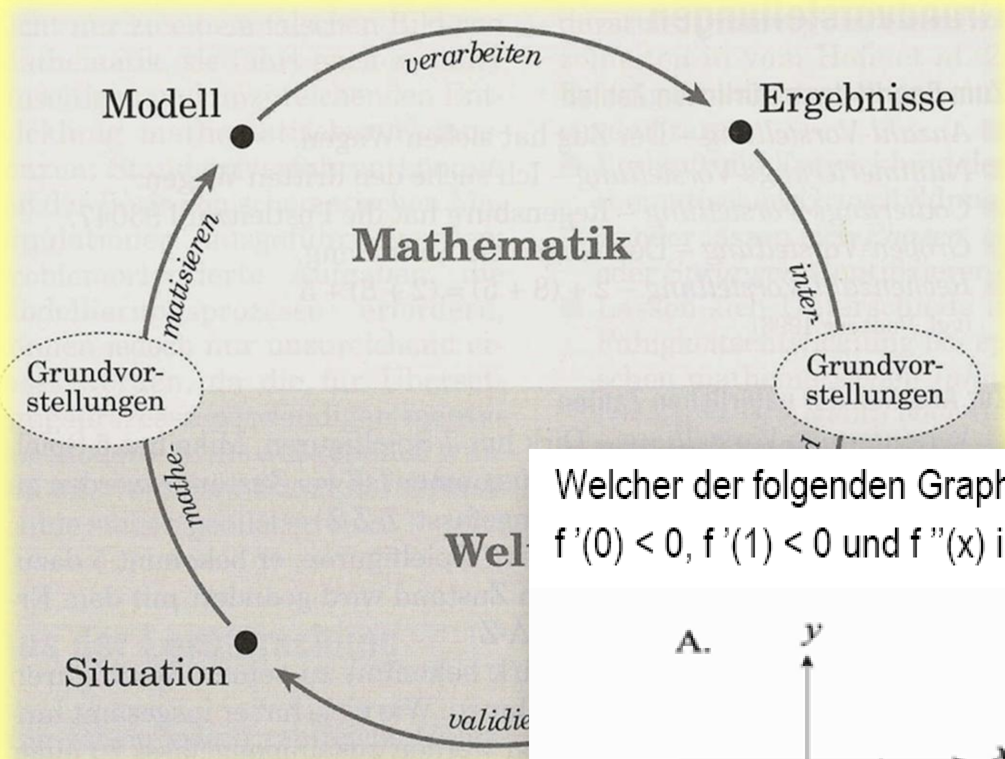
Stephan Hußmann

IEEM – Universität Dortmund

Zwei mögliche Problemlagen :

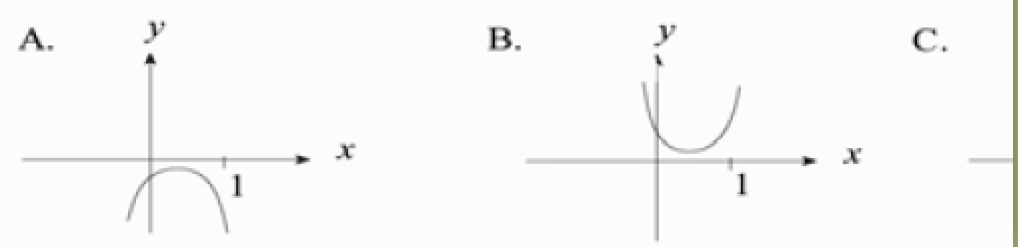
(1) Verschiedene Darstellungen wurden nicht genutzt/erlernt

(2) Grundvorstellungen sind nicht adäquat aufgebaut.



Welcher der folgenden Graphen hat die nachstehenden Eigenschaften:

$f'(0) < 0$, $f'(1) < 0$ und $f''(x)$ ist immer negativ?



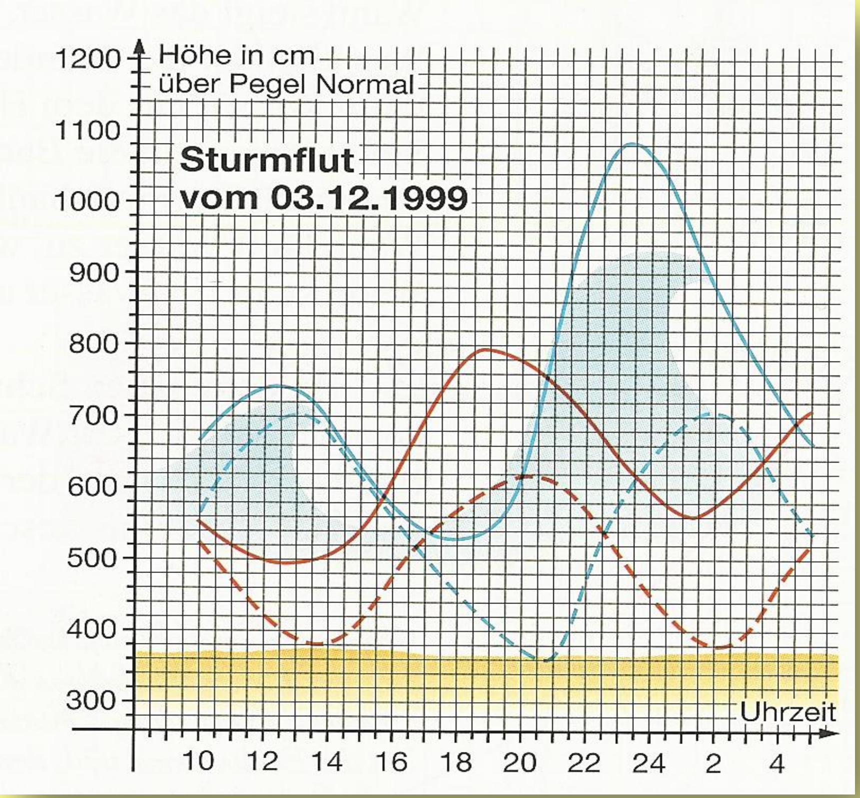
Stephan Hußmann
IEEM – Universität Dortmund

Zwei mögliche Problemlagen :

(1) Verschiedene Darstellungen wurden nicht genutzt/erlernt

(2) Grundvorstellungen sind nicht adäquat aufgebaut.

- Zuordnung (als Beschreibung eines gegebenen Zusammenhangs)
- Betrachtung der gemeinsamen Veränderung
- Betrachtung des funktionalen Zusammenhangs als Ganzes (Abhängigkeitsmuster)



(Bilder und Grafik aus Mathe live 8, S. 93)

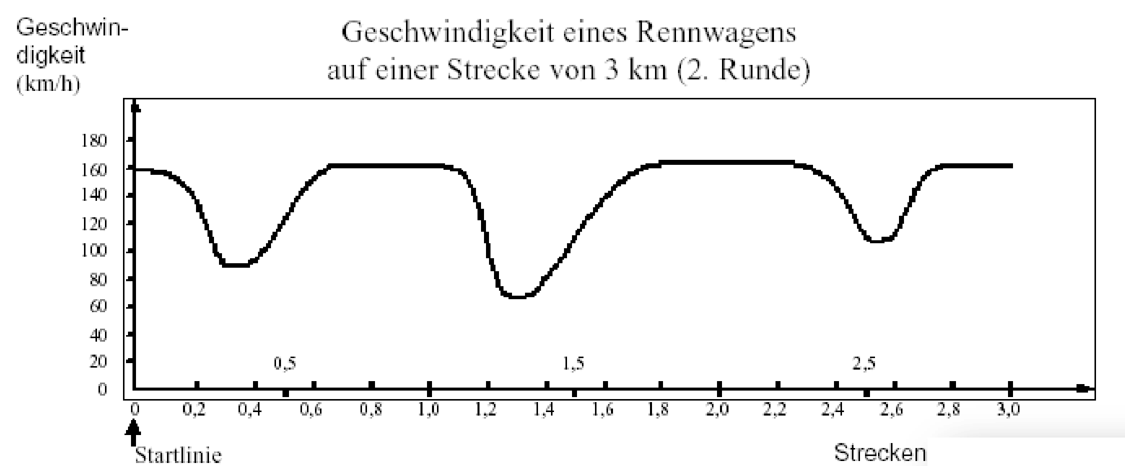
Stephan Hußmann

IEEM – Universität Dortmund

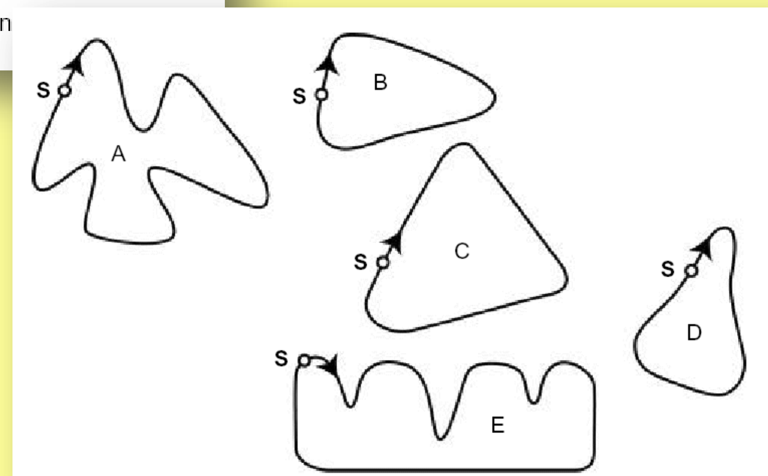
Zwei mögliche Problemlagen :

(1) Verschiedene Darstellungen wurden nicht genutzt/erlernt

(2) Grundvorstellungen sind nicht adäquat aufgebaut.



	D	USA	NL	JAP
A	15,8	18,3	18,7	12,3
B	29,8	20,6	42,6	55,4
C	9,5	8,9	11,5	10,3
D	5,6	4,4	6,6	7,7
E	36,0	44,3	19,3	12,5



Stephan Hußmann

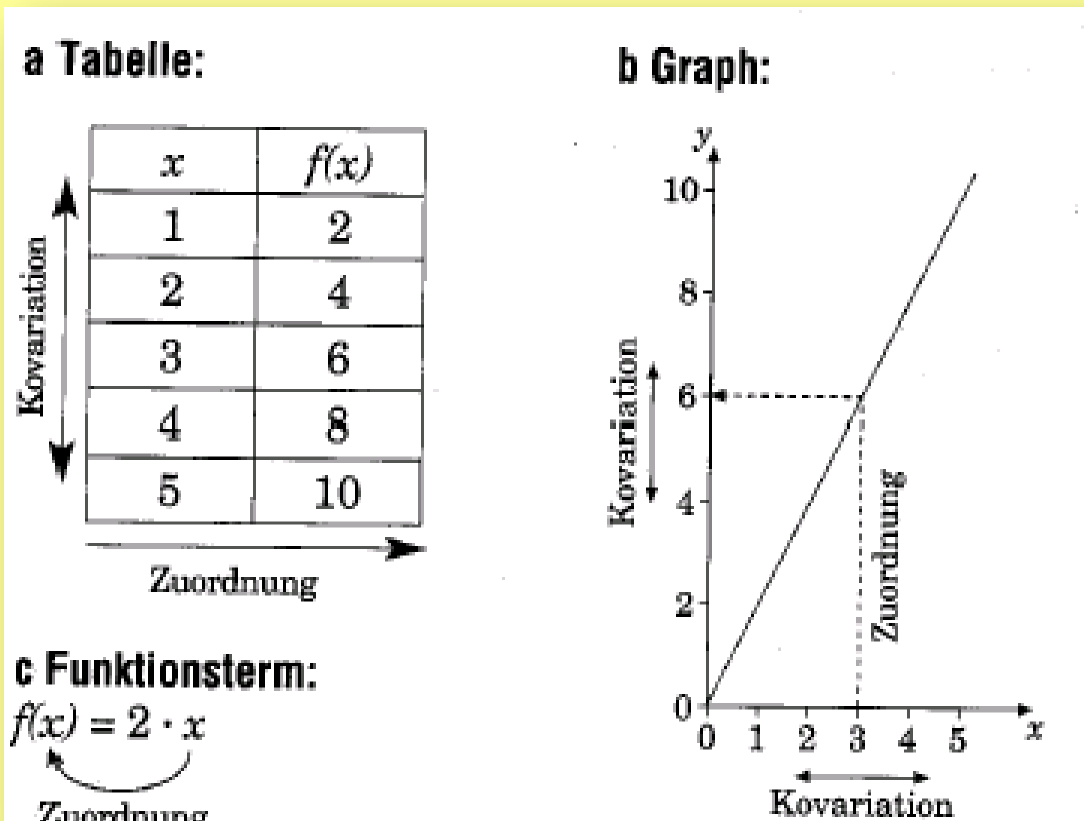
IEEM – Universität Dortmund

Zwei mögliche Problemlagen :

(1) Verschiedene **Darstellungen** wurden nicht genutzt/erlernt

(2) Grundvorstellungen sind nicht adäquat aufgebaut.

Leuders/Prediger 2006



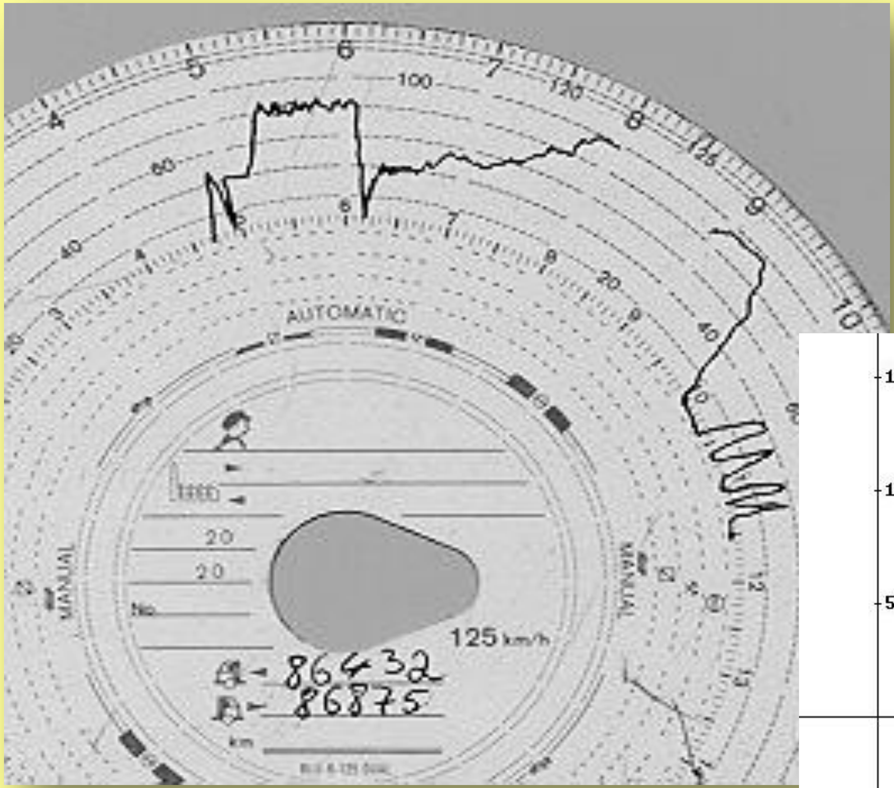
Stephan Hußmann

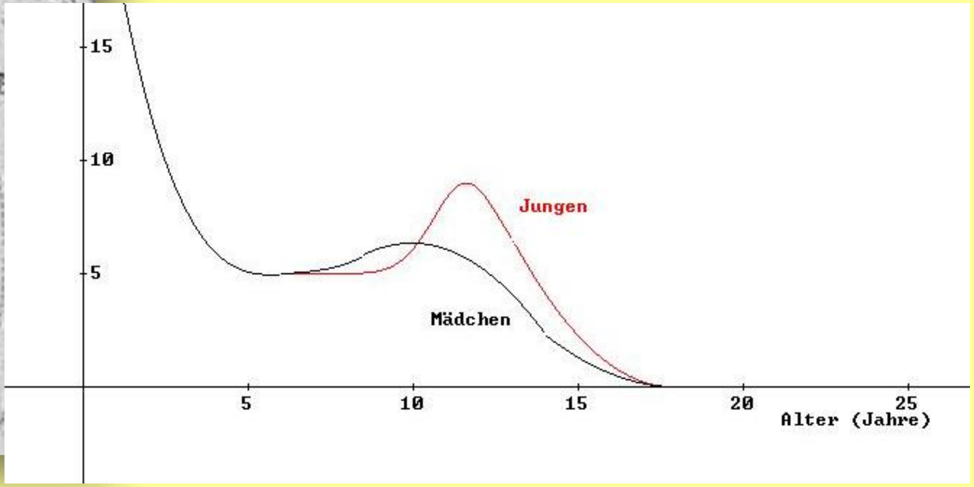
IEEM – Universität Dortmund

Zwei mögliche Problemlagen:

(1) Verschiedene **Darstellungen** wurden nicht genutzt/erlernt

(2) Grundvorstellungen sind nicht adäquat aufgebaut.





Stephan Hußmann

IEEM – Universität Dortmund

Zwei mögliche Problemlagen :

(1) Verschiedene **Darstellungen** wurden nicht genutzt/erlernt

(2) Grundvorstellungen sind nicht adäquat aufgebaut.

Ableitung als
- lokale Änderungsrate
- lokale lineare Approximation
- Tangentensteigung (geometrisch gedeutet)

Integral als
- Rekonstruktion der Wirkung bzw. des Gesamteffekts
- Mittelung
- Fläche unter der Kurve (geometrisch gedeutet)

Extrem- und Wendestellen als
- markante Punkte in funktionalen Zusammenhängen, bei denen sich Änderungsverhalten ändert
- Werkzeuge zur Lösung von Optimierungsproblemen

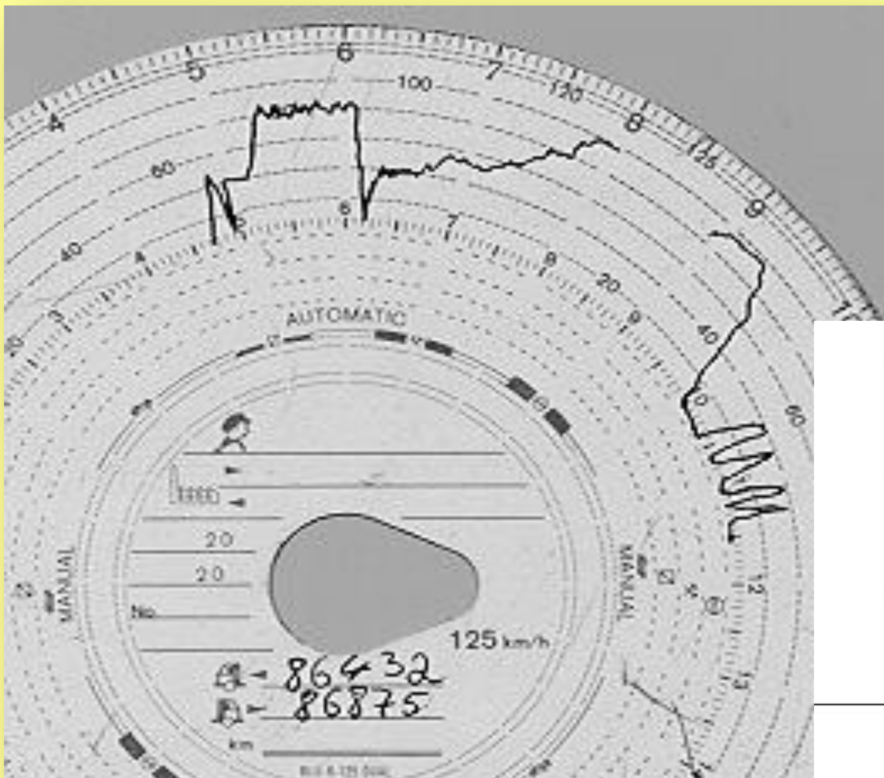
Stephan Hußmann

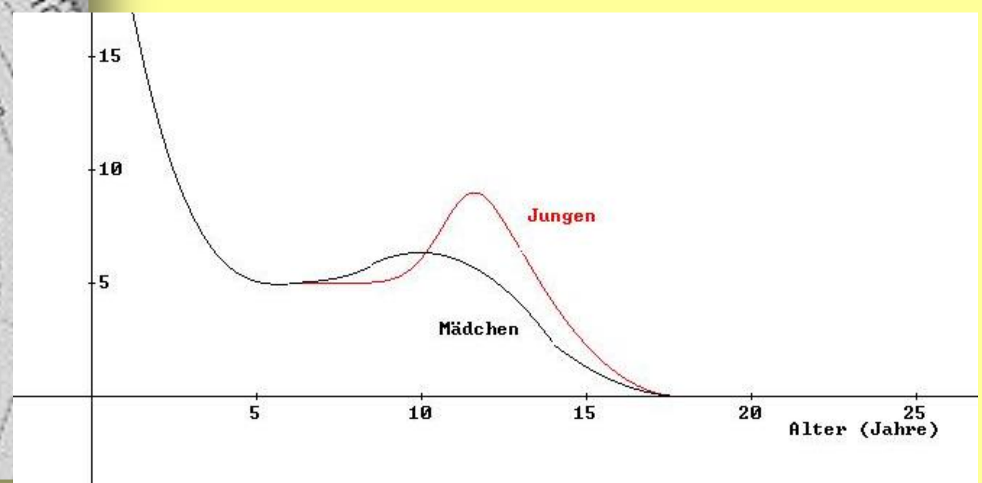
IEEM – Universität Dortmund

Zwei weitere Problemlagen :

(1) Sinnstiftung der Kontexte wird vernachlässigt

(2) Vorerfahrungen der Lernenden werden zu wenig genutzt





Stephan Hußmann

IEEM – Universität Dortmund

Zwei weitere Problemlagen :

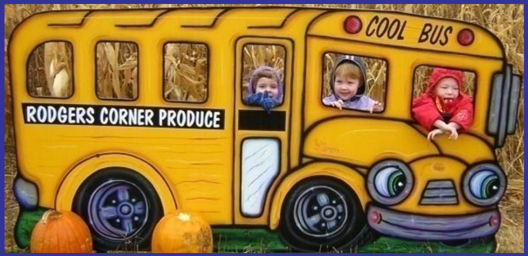
(1) Sinnstiftung der Kontexte wird vernachlässigt

(2) Vorerfahrungen der Lernenden werden zu wenig genutzt

Lernstandserhebungen 2006

1128 Schülerinnen und Schüler einer Schule sollen von der Schule aus zu einer Sportveranstaltung fahren.
Ein Schulbus kann 36 Schülerinnen und Schüler befördern.

Wie viele Busse sind nötig, um alle Schülerinnen und Schüler zu der Veranstaltung zu bringen?



Rechnung:

1128:36=31,33333

Abrunden oder aufrunden??

Was würden Ihre Schüler tun?

62,5 % falsche Lösungen (in ganz NRW)

23 % machten den Fehler, falsch zu runden

Stephan Hußmann

IEEM – Universität Dortmund

Bzgl. der Lernendenperspektvie bedeutet

Verstehen

- Sinnstiftung
- Differenzierende Zugänge
- Berücksichtigung von individuellen Vorstelllungen
- Nutzen von Vorerfahrungen

Stephan Hußmann
IEEM – Universität Dortmund

WESER KURIER
BREMER TAGESZEITUNG

Neuverschuldung soll sinken

Regierung will Steuerplus fü

Von unserem Korrespondenten
Dietrich Eickmeier

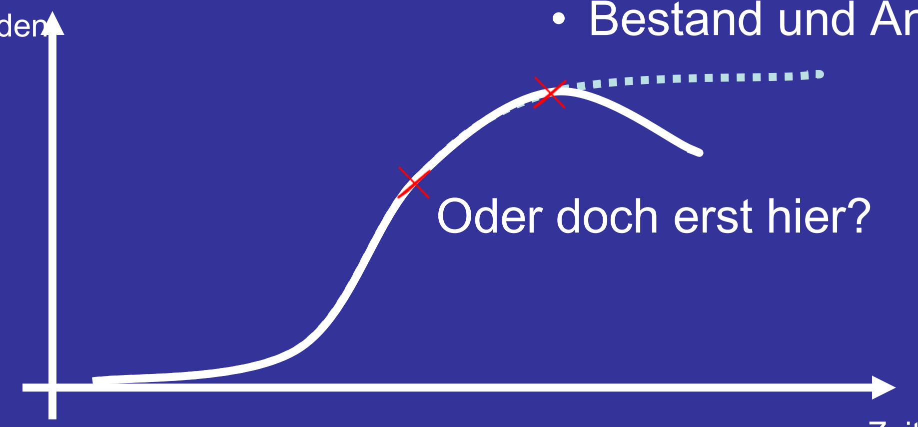
BERLIN. Die Bundesregierung will die derzeit kräftig sprudelnden Steuerquellen vor allem zum Schuldenabbau nutzen. Es müsse die erste Pflicht sein, die 2006 veranschlagte Neuverschuldung von 38,2 Milliarden Euro zu senken, sagten Kanzlerin Angela Merkel und Vizekanzler Franz Müntefering gestern nach einer Kabinettsklausur in Berlin.

Diese Summe sei eine der höchsten Neuverschuldungen in der Nachkriegsgeschichte, betonte Merkel. Bei einer Senkung würden die Menschen in Form geringerer Zinszahlungen profitieren. Auch Finanzminister Peer Steinbrück erteilte allen Forderungen nach zusätzlichen Ausgaben sowie dem Verzicht auf die geplante Mehrwertsteuererhöhung erneut eine Absage: „Die Situation ist nach wie vor sehr ernst, trotz der erfreulichen Entwicklung." Der Finanzminister begründete den Sparkurs da-

Hahn 2008

Wo in der Schuldenkurve sind wir denn nun?

Unterschied zwischen
- Hoch- und Wendepunkt?
- Bestand und Änderung?



Stephan Hußmann
IEEM – Universität Dortmund

WESER KURIER
BREMER TAGESZEITUNG

Neuverschuldung soll sinken

Regierung will Steuerplus fü

Von unserem Korrespondenten
Dietrich Eickmeier

BERLIN. Die Bundesregierung will die derzeit kräftig sprudelnden Steuerquellen vor allem zum Schuldenabbau nutzen. Es müsse die erste Pflicht sein, die 2006 veranschlagte Neuverschuldung von 38,2 Milliarden Euro zu senken, sagten Kanzlerin Angela Merkel und Vizekanzler Franz Müntefering gestern nach einer Kabinettsklausur in Berlin.

Diese Summe sei eine der höchsten Neuverschuldungen in der Nachkriegsgeschichte, betonte Merkel. Bei einer Senkung würden die Menschen in Form geringerer Zinszahlungen profitieren. Auch Finanzminister Peer Steinbrück erteilte allen Forderungen nach zusätzlichen Ausgaben sowie dem Verzicht auf die geplante Mehrwertsteuererhöhung erneut eine Absage: „Die Situation ist nach wie vor sehr ernst, trotz der erfreulichen Entwicklung." Der Finanzminister begründete den Sparkurs da-

Hahn 2008

Gängige, technisch anspruchsvolle Abituraufgaben:

Berechne Hoch- und Wendepunkt von f(x)= $\dfrac{ax^5 - \frac{3}{17}x^2}{x^2 - \frac{15}{9}}$

Reiner Kalkül in grauen Päckchen

99

11.2.2 Satz

Sei $f : I \to \mathbb{R}$ und x_0 ein innerer Punkt von I. Angenommen, f hat bei x_0 ein lokales Extremum. Wenn f differenzierbar in x_0 ist, dann muss $f'(x_0) = 0$ gelten.

Beweis: Angenommen, f hat in x_0 ein lokales Minimum. (Der andere Fall kann analog gezeigt werden). Das heißt:

$$\underset{\delta>0}{\exists} \underset{x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)}{\forall} f(x_0) \le f(x)$$

Daraus folgt:

(a) $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \ge 0$, falls $x_0 < x < x_0+\delta$

(b) $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \le 0$, falls $x_0-\delta < x < x_0$

Da $f'(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ existiert, muss dieser Grenzwert gleich dem linksseitigen und gleich dem rechtsseitigen Grenzwert sein.

Aus (a) folgt damit: Der rechtsseitige Grenzwert ist ≥ 0, also $f'(x_0) \ge 0$.

Aus (b) folgt damit: Der linksseitige Grenzwert ist ≤ 0, also $f'(x_0) \le 0$.

Insgesamt muss also $f'(x_0) = 0$ gelten. □

Skript zur Analysis I

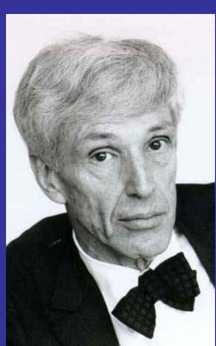
Stephan Hußmann
IEEM – Universität Dortmund

Problem:
- fortschreitende Spezialisierung der wiss. Disziplinen
- „Tatsache, dass unsere Wissenschaften immer schwerer zu verstehen und zu lernen und - ihrer Absicht zum Trotz - fast nur noch für Experten verfügbar sind."

Hartmut von Hentig
Magier oder Magister?
Über die Einheit der Wissenschaft im Verständigungsprozeß
suhrkamp taschenbuch

Ziel statt dessen:
- Einheit der Wissenschaft
- Zugänglichkeit für Allgemeinheit
- Sinn und Bedeutung sichtbar machen

Weg: Restrukturierung der Wissenschaften
- um sie besser lernbar, gegenseitig verfügbar und allgemeiner kritisierbar zu machen
- nach Mustern, die den allgemeinen Wahrnehmungs-, Denk- und Handlungsformen entnommen sind



Hartmut von Hentig 1974

Stephan Hußmann

IEEM – Universität Dortmund

Problem:

- fortschreitende Spezialisierung der wiss. Disziplinen

Ziel statt dessen:

- Zugänglichkeit für Allgemeinheit
- Sinn und Bedeutung sichtbar machen

Kompetenzbereich (nach R. Fischer)	**Bedeutung des Bereiches**	**Beispielkompetenzen im Bereich „Wachstum“**
Grundwissen und Grundfertigkeiten (Begriffe, Konzepte, Darstellungs-formen)	gehört zur **Allgemeinbildung**	Kenntnis von Funktions-typen, die als Wachstums-modelle dienen können, Darstellungsweisen von Funktionen nutzen
Operatives Wissen und Können (Handlungswissen und -können)	brauchen vor allem **Exper-ten**, die beruflich mit Wachs-tumsmodellen arbeiten	Algebraische Techniken zum Umgang mit Funktions-termen beherrschen
Reflexionswissen (Möglichkeiten, Grenzen und Bedeutung von Begriffen, Konzepten und Methoden)	brauchen **Laien**, um mit Experten zu kommunizieren und reflektierte Entscheidungen treffen zu können	Den Nutzen und die Eigen-schaften von Wachstums-modellen reflektieren

Stephan Hußmann
IEEM – Universität Dortmund

Restrukturierung der Analysis?

Ist auch eine Aufgabe
für die Hochschulmathematik
und die Mathematikdidaktik

- Hinter Analysis liegende allgemeine Denk- und Handlungsmuster sind von Bedeutung
- Betrachtung von Beständen und Änderungen (vor allem qualitativ)
- zentrale Bedeutung der Analysis liegt in Beschreibung von Beständen und Änderungen
- dafür stellt Differentialkalkül sehr effektive Werkzeuge bereit
- alltagsweltlich bedeutsamer sind Begriffe wie Hoch- und Wendepunkt als (zunächst qualitative) Beschreibungsmittel für markante Punkte im Änderungsprozess
- noch wichtiger als Lösung von Extremwertproblemen durch jedermann (nicht jeder muss jede Modellierung beherrschen!)

Stephan Hußmann

IEEM – Universität Dortmund

Analysis als Fortführung der Arbeit mit Funktionen:

- mathematisches Erfassen
- von Beziehung und Veränderung
- Funktionen als Typen von Abhängigkeiten
- Funktionen in verschiedenen Darstellungen
- Funktionen als Modelle für Realsituationen
- mit Funktionen (Optimierungs)probleme lösen

Analysis als begriffliche Vertiefung reeller Funktionen:

- infinitesimale Konzepte
- (quantitative) Beschreibung von Veränderungsprozessen
- Kumulation von Größen zu einer Gesamtbilanz
- Grenzwertbegriff

Für das letztere muss die Notwendigkeit der Verwendbarkeit sichtbar werden!

Stephan Hußmann
IEEM – Universität Dortmund

In der Sekundarstufe I kann und sollte man Erfahrungen und Grundvorstellungen anlegen, denn

- im Hinblick auf die fachlichen Bildungsziele der Sekundarstufe I bilden Vorstellungen zu Veränderung und Bilanzierung die Basis für einen verstehensorientierten Umgang mit Begriffen der Analysis

- im Hinblick auf die allgemeinbildenden Ziele der Sekundarstufe II sind die Konzepte auch *ohne einen ausgeprägten* Grenzwertbegriff zentral

Zu diesen Vorstellungen gehören:
- Beziehungen und Veränderung beschreiben und erkunden
- ein grundlegendes Verständnis von funktionaler Abhängigkeit besitzen und dieses zum Erfassen und Beschreiben von Beziehungen und Veränderungen in Mathematik und Umwelt nutzen
- markante Stellen in funktionalen Zusammenhängen und deren kontextbezogende Bedeutung erkennen und beschreiben

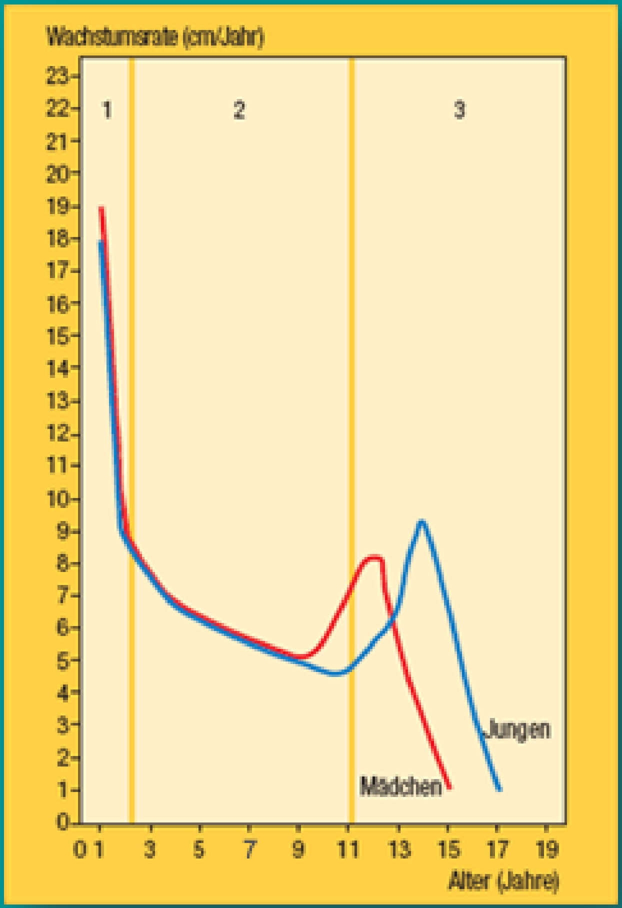
Stephan Hußmann

IEEM – Universität Dortmund

1. Erläutere den Verlauf der beiden Wachstumsgraphen. Gehe dabei auf alle interessanten Stellen ein.

2. Zeichne zu beiden Graphen einen passenden Graphen, der für jedes Alter die Körpergröße angibt.

3. Untersuche auch die Körpergrößen-Graphen auf interessante Stellen. Wie hängen die Stellen dieser Graphen mit interessanten Stellen des ursprünglichen Wachstumsgraphen zusammen?



Stephan Hußmann
IEEM – Universität Dortmund

Alter [Jahre]	Wachstumsrate [cm/Jahr]	
	Jungen	Mädchen
1	19	18
2	9	9
3	7	7
4	6,5	6,5
5	6,2	6,2
6	5,9	5,9
7	5,6	5,6
8	5,3	5,3
9	5	5
10	4,8	6
11	5	7
12	5,5	8
13	6,2	6,2
14	9,2	3,5
15	7,5	1
16	4,5	0
17	1	0

1. Erläutere den Verlauf der Funktionen. Gehe dabei auf alle interessanten Stellen ein.
2. In welchem Alter holen die Jungen die Mädchen wieder ein?

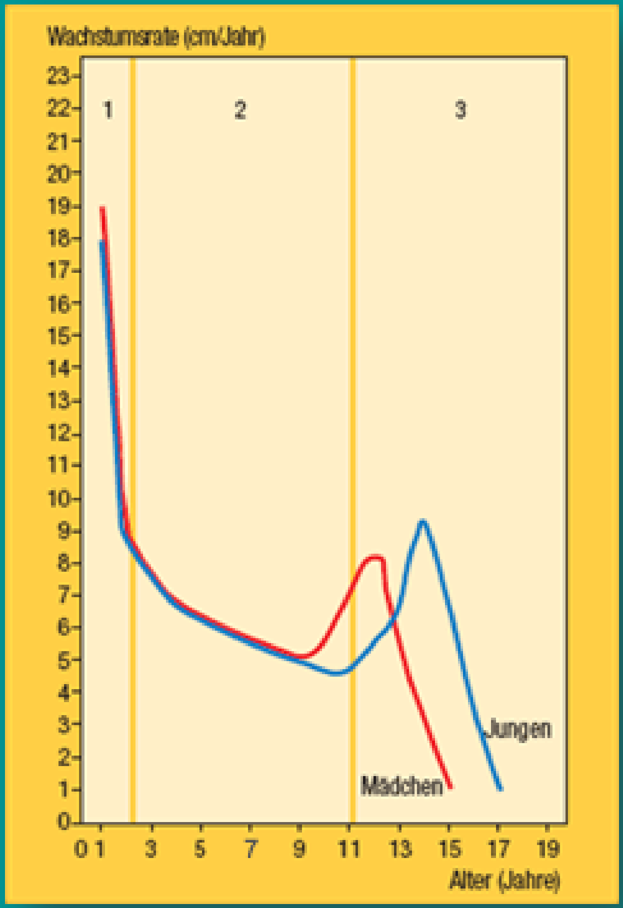
Die „qualitative" Aufgabe setzt das Augenmerk auf die Stammfunktions-eigenschaft.
Die ‚diskrete' Aufgabe fokussiert auf die Summation.
In beiden Fällen ist eine anschauliche Erfassung des Begriffes der Änderungsrate entscheidend.

Stephan Hußmann

IEEM – Universität Dortmund

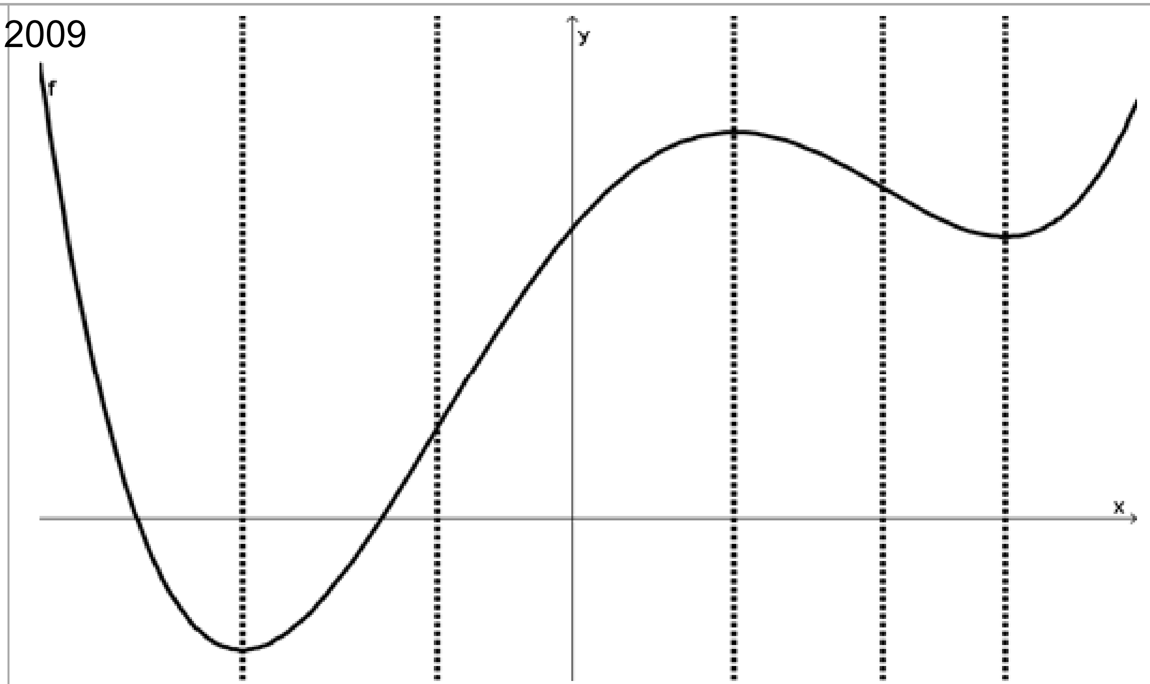
Der Ebenenwechsel zwischen Bestand und Änderung ist schwierig,

- weil Bestand und Änderungen voneinander unabhängig gedacht werden können,
- weil zwischen Kovariations- und Zuordnungsvorstellung gewechselt werden muss.



Stephan Hußmann
IEEM – Universität Dortmund

Hahn / Prediger 2009



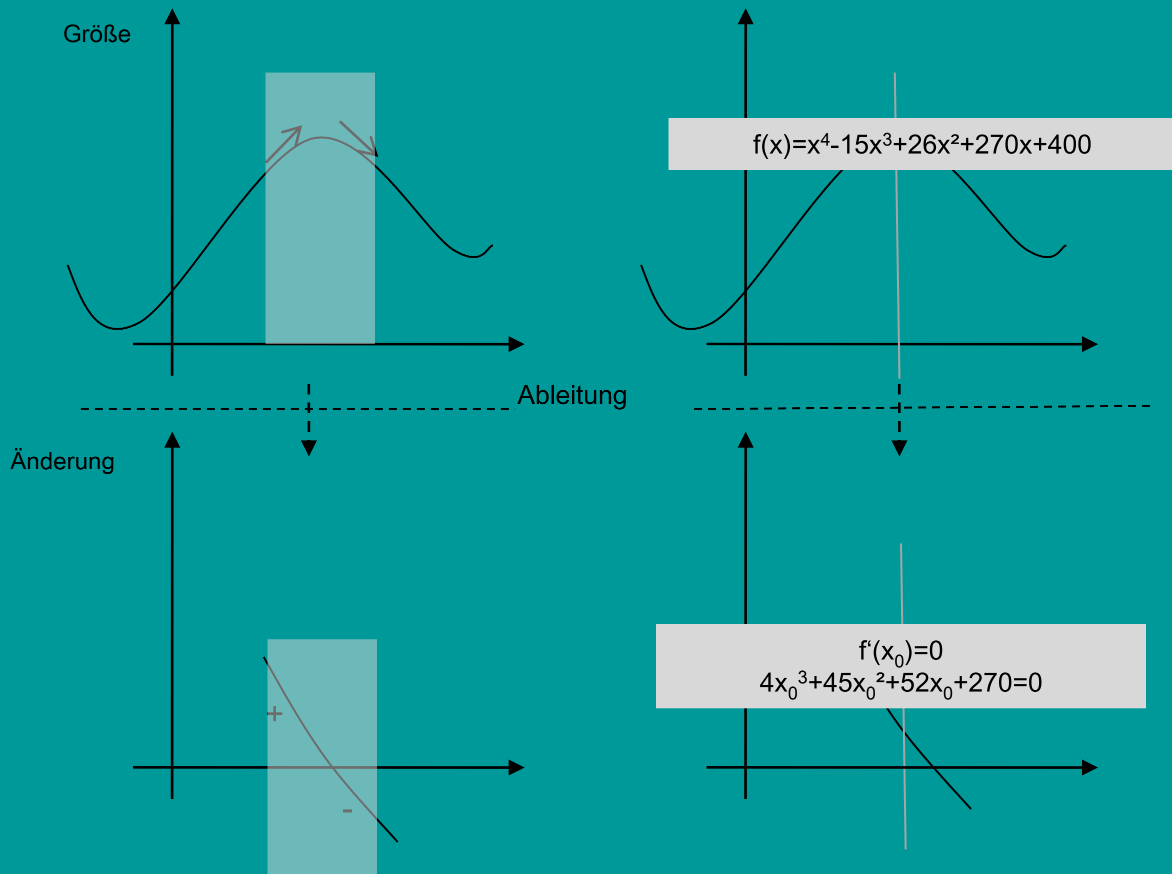
<table>
<tr><td>Änderungsverhalten des Bestands</td><td>nimmt ab</td><td colspan="2">nimmt zu</td><td colspan="2">nimmt ab</td><td>nimmt zu</td></tr>
<tr><td>Änderungsverhalten der Änderung des Bestands</td><td colspan="2">nimmt zu</td><td colspan="2">nimmt ab</td><td colspan="2">nimmt zu</td></tr>
<tr><td>Qualität des Wachstums</td><td>gegensinnig</td><td>gleichsinnig</td><td>gegensinnig</td><td>gleich-sinnig</td><td>gegen-sinnig</td><td>gleich-sinnig</td></tr>
</table>

Stephan Hußmann

IEEM – Universität Dortmund

Graphische Deutung:
Veränderung in einem Bereich

Symbolische Deutung:
Veränderung an einer Stelle



Stephan Hußmann

IEEM – Universität Dortmund

Der Weg zur lokalen Änderungsrate

$$f(x_0)$$

Bestand an der Stelle x_0

$$\downarrow$$

$$f(x_0 + h) - f(x_0)$$

Absoluter Zuwachs beim Übergang von x_0 zu $x_0 + h$

$$\downarrow$$

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Relativer Zuwachs beim Übergang von x_0 zu $x_0 + h$
= mittlere Änderungsrate im Intervall $[x_0, x_0 + h]$

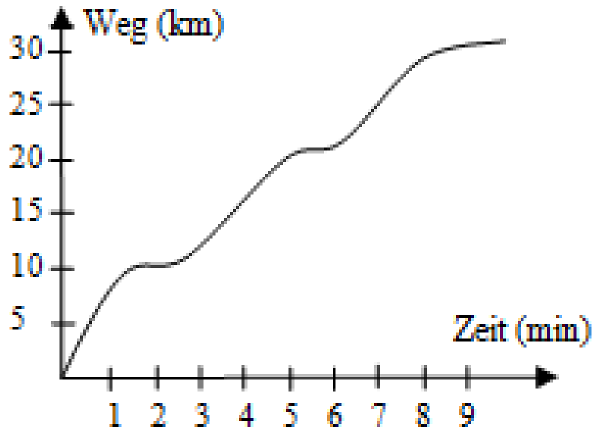
$$\downarrow$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0)$$

Lokale Änderungsrate an der Stelle x_0 , i.a. **Modellgröße**

Stephan Hußmann

IEEM – Universität Dortmund



Rennwagen

a) Beschreibe die Fahrt des Rennwagens.

b) Wie weit kommt der Wagen in den ersten vier Minuten, wie weit kommt er über den gesamten Zeitraum?

c) Wie groß ist die Durchschnittsgeschwindigkeit über den gesamten Zeitraum ungefähr?

d) Wie groß ist die Durchschnittsgeschwindigkeit zwischen der dritten und fünften Minute ungefähr?

e) Wann ändert sich die zurückgelegte Weglänge pro Minute am meisten, wann am wenigsten?

f) Wann ist das Auto am schnellsten, wann am langsamsten?

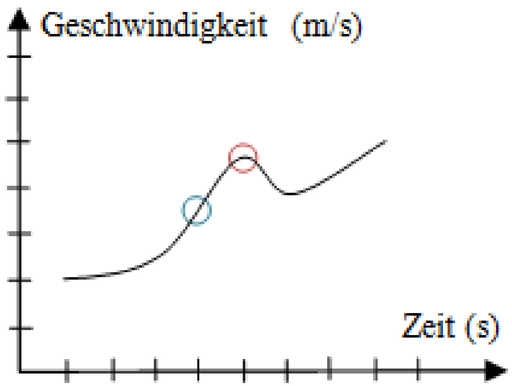
g) Skizziere eine mögliche Strecke, die der Wagen gefahren sein kann. Erkläre deine Strecke mit den Ergebnissen aus a-e.

h) Skizziere den dazu gehörigen Geschwindigkeit-Zeit-Graphen.

i) In welchen Phasen beschleunigt bzw. bremst das Fahrzeug? Erkläre deine Vermutungen erst an dem Weg-Zeit-Graph, dann an dem Geschwindigkeit-Zeit-Graphen. Wo ist es leichter zu erklären?

Stephan Hußmann

IEEM – Universität Dortmund



Geschwindigkeit

Der Graph zeigt einen Geschwindigkeitsverlauf.

a) Erläutere, warum die markierten Punkte besondere Punkte im Verlauf sind.

b) Gib den Punkten Namen und erkläre, woran man solche Punkte im Graphen erkennen kann.

c) Gibt es weitere solcher Punkte. Überprüfe deine Erklärung an diesen Punkten.

d) Wann hat das Fahrzeug am stärksten beschleunigt, wann am wenigsten? Skizziere den Beschleunigungsgraphen.

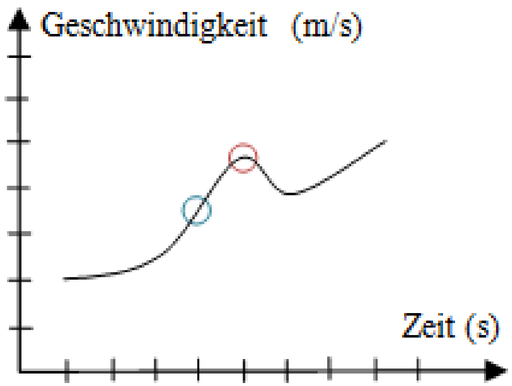
e) Erkläre die Eigenschaften der beiden Punkte noch einmal, nur dieses Mal allein mit Hilfe des Beschleunigungsgraphen.

f) Welcher Punkt lässt sich einfacher mit dem Geschwindigkeitsgraphen erläutern, welcher mit dem Beschleunigungsgraphen? Woran liegt das?

Ein Punkt auf einem Funktionsgraphen ist ein **größter Punkt**, wenn es in seiner Nähe keinen Punkt gibt mit größerer Geschwindigkeit.

Ein Punkt auf einem Funktionsgraphen ist ein **Umkehrpunkt**, wenn vor dem Punkt die Geschwindigkeit langsamer zunimmt und hinter dem Punkt schneller zunimmt.

Stephan Hußmann
IEEM – Universität Dortmund



Geschwindigkeit

Der Graph zeigt einen Geschwindigkeitsverlauf.

a) Erläutere, warum die markierten Punkte besondere Punkte im Verlauf sind.

b) Gib den Punkten Namen und erkläre, woran man solche Punkte im Graphen erkennen kann.

c) Gibt es weitere solcher Punkte. Überprüfe deine Erklärung an diesen Punkten.

d) Wann hat das Fahrzeug am stärksten beschleunigt, wann am wenigsten? Skizziere den Beschleunigungsgraphen.

e) Erkläre die Eigenschaften der beiden Punkte noch einmal, nur dieses Mal allein mit Hilfe des Beschleunigungsgraphen.

f) Welcher Punkt lässt sich einfacher mit dem Geschwindigkeitsgraphen erläutern, welcher mit dem Beschleunigungsgraphen? Woran liegt das?

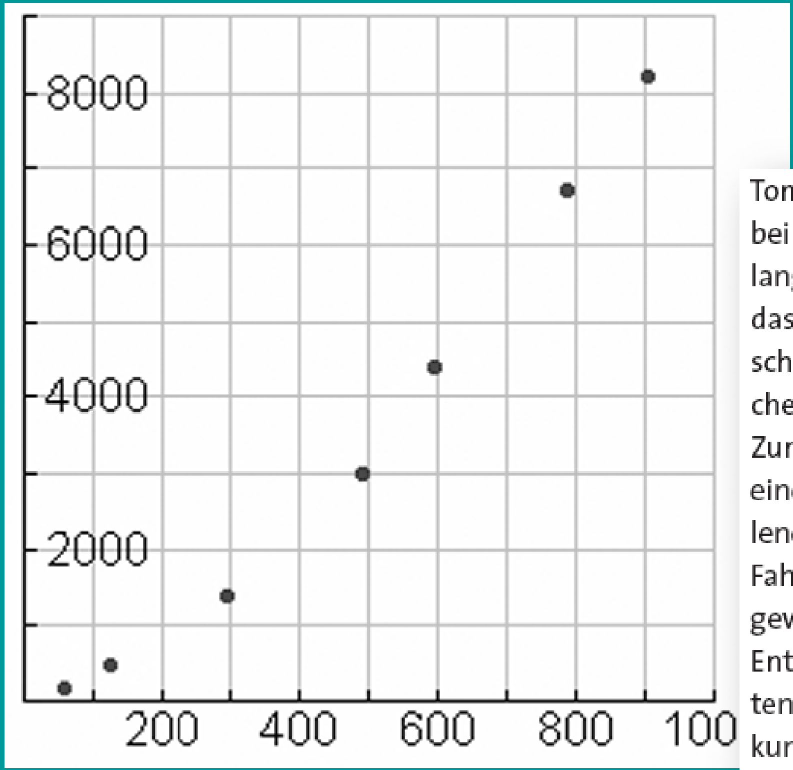
Ein Punkt auf einem Funktionsgraphen ist ein **größter Punkt**, wenn die Beschleunigung in dem Punkt gleich Null ist.

Ein Punkt auf einem Funktionsgraphen ist ein **Umkehrpunkt**, wenn in dem Punkt die kleinste Beschleunigung vorliegt.

Stephan Hußmann

IEEM – Universität Dortmund

Wieso dann überhaupt Infinitesimalrecnung?



Tom fährt Rad. Tom behauptet, er könne beim Radfahren seine Geschwindigkeit langsam, aber kontinuierlich steigern, so dass er nach einer gewissen Zeit eine Geschwindigkeit von nahezu 60 km/h erreiche.

Zum Beweis fährt er über etwa 15 Minuten eine Strecke von gut 8 km. Freudestrahlend berichtet er im Anschluss an die Fahrt, dass er sogar schneller als 60 km/h gewesen ist.

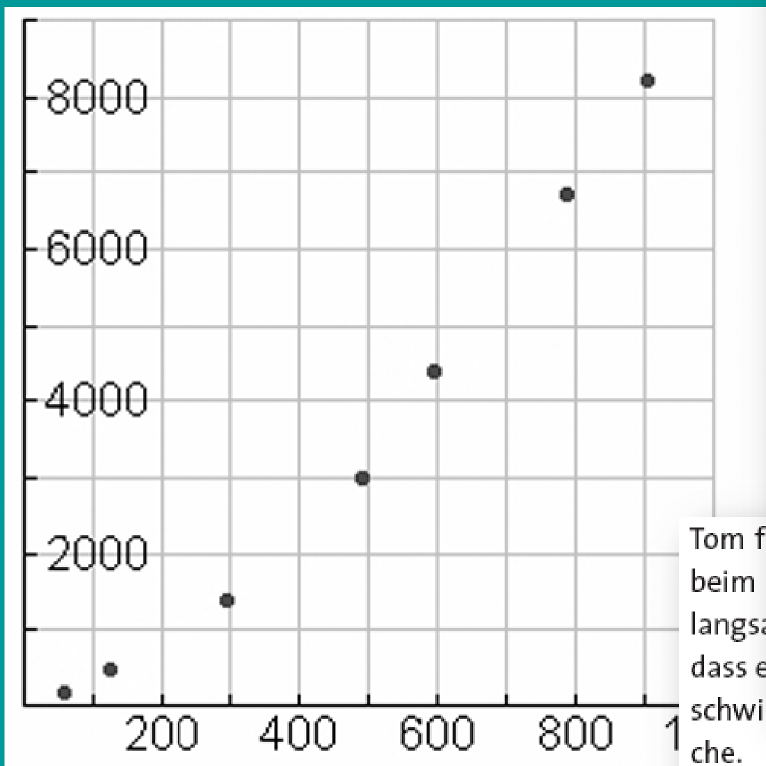
Zeit	Weg
1 min	200 m
2 min 4 s	500 m
4 min 54 s	1400 m
8 min 10 s	3000 m
9 min 56 s	4400 m
13 min 8 s	6700 m
15 min 4 s	8200 m

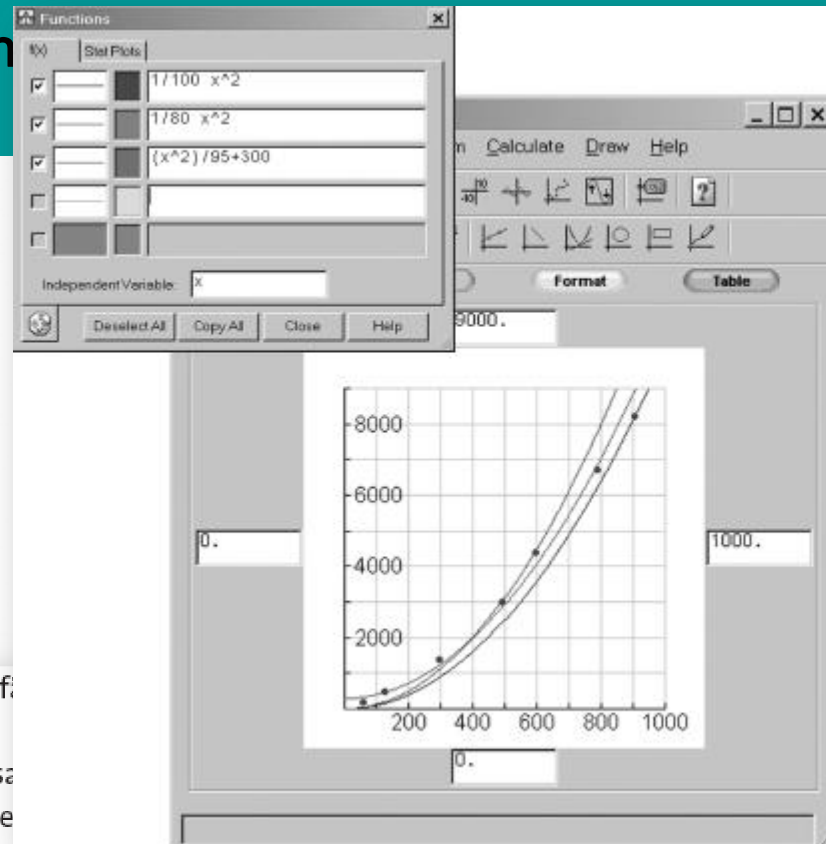
Entlang der Strecke haben sich seine Freunde an festen Orten postiert, um festzuhalten, wie schnell Tom gefahren ist. Sie runden ihre Beobachtung immer auf ganze Sekunden. Diese Werte sind in der Tabelle festgehalten.

Stephan Hußmann

IEEM – Universität Dortmund

Wieso dann überhaupt Infin





Tom f
beim
langsa
dass e
schwindigkeit von nahezu 60 km/h erreiche.
Zum Beweis fährt er über etwa 15 Minuten eine Strecke von gut 8 km. Freudestrahlend berichtet er im Anschluss an die Fahrt, dass er sogar schneller als 60 km/h gewesen ist.

	Weg
	00 m
	00 m
4 min 54 s	1400 m
8 min 10 s	3000 m
9 min 56 s	4400 m
13 min 8 s	6700 m
15 min 4 s	8200 m

Entlang der Strecke haben sich seine Freunde an festen Orten postiert, um festzuhalten, wie schnell Tom gefahren ist. Sie runden ihre Beobachtung immer auf ganze Sekunden. Diese Werte sind in der Tabelle festgehalten.

Stephan Hußmann

IEEM – Universität Dortmund

Hußmann /Prediger 2009

Ausschnitt wichtiger vorstellungsorientierter Fähigkeiten in der Analysis

- absolute und relative Änderungsmaße unterscheiden und angemessen verwenden können
- den Zusammenhang zwischen mittleren Änderungsraten und momentanen Änderungsraten kennen und auf der Grundlage eines intuitiven Grenzwertbegriffes beschreiben und in verschiedenen Situationen anwenden können
- den Zusammenhang zwischen Funktion und Ableitungsfunktion (bzw. Funktion und Stammfunktion) in deren grafischer Darstellung erkennen und beschreiben können
- den Unterschied zwischen Bestand und Änderung in Anwendungssituationen erklären und zur Problembearbeitung nutzen können
- Eigenschaften von funktionalen Zusammenhängen mit Hilfe der Ableitung(sfunktion) beschreiben können: Monotonie, lokale Extrema, Links- und Rechtskrümmung, Wendestellen

Wichtige Aufgabenformate zum Abprüfen inhaltlicher Vorstellungen

Was abprüfen?	Beispiele für Aufgabentypen auf unterschiedlichen Schwierigkeitsniveaus
Vorstellungen zur Mathematisierung nutzen können	1. Eine gegebene Sachsituation mathematisieren, z. B.: *Geben Sie eine Funktion für den Gesamteffekt der im Sachkontext gegebenen Änderungsfunktion an.* 2. Analysieren einer falschen Mathematisierung, z. B.: *Beurteilen Sie, inwiefern die Inflationsrate keine Ableitung der Preisniveau-Funktion darstellt. Vergleichen Sie dazu folgende Formel für die Inflationsrate (…) mit dem Differenzenquotienten.*
Vorstellungen zur Veranschaulichung und Interpretation nutzen können	3. Zuordnen von Mathematisierung und Sachsituation oder Bild, z. B. Aufgabe 1 in *Abb. 2* 4. Interpretation eines mathematischen Ausdrucks im Bild oder Sachkontext, z. B. Aufgabe 3 in der *Kopiervorlage* oder: *Interpretieren Sie die Bedeutung des Integrals in Bezug auf die im Sachzusammenhang gegebene Änderungsfunktion.*
Sachverhalte und Rechenverfahren durch Rückgriff auf inhaltliche Vorstellungen erklären können	5. Erklären eines Rechenverfahrens unter Rückgriff auf eine geometrische oder inhaltliche Interpretation, z. B. Aufgabe 1 in der *Kopiervorlage* 6. Erklären komplexerer Sachverhalte durch Rückgriff auf inhaltliche Vorstellungen, z. B.: *Erklären Sie die Beziehung zwischen Integrieren und Differenzieren am Beispiel folgenden Sachverhalts ...*

Stephan Hußmann

IEEM – Universität Dortmund

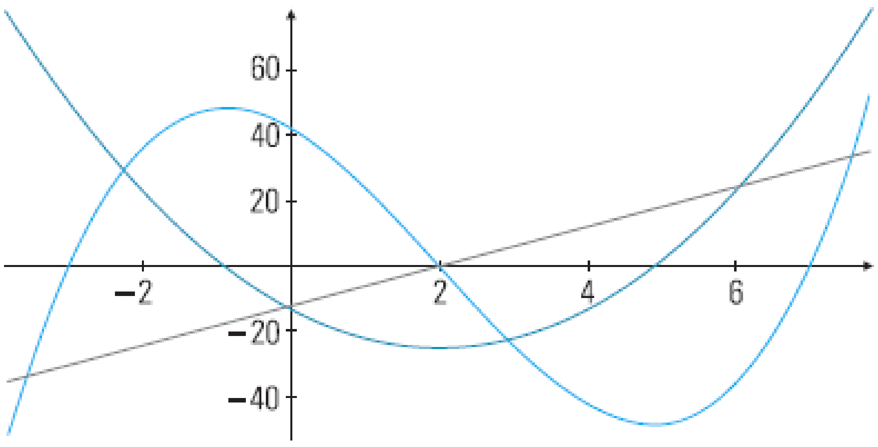
Aufgabe 1: Rechenverfahren erklären

Um eine Maximalstelle zu berechnen, sind zwei Schritte notwendig:

(1) Man bestimmt die Nullstelle x_0 der Ableitung und

(2) man überprüft, ob $f''(x_0) < 0$ ist.

Erläutern Sie anhand der Graphen, warum man mit den Schritten (1) und (2) eine Maximalstelle erhält.



Stephan Hußmann

IEEM – Universität Dortmund

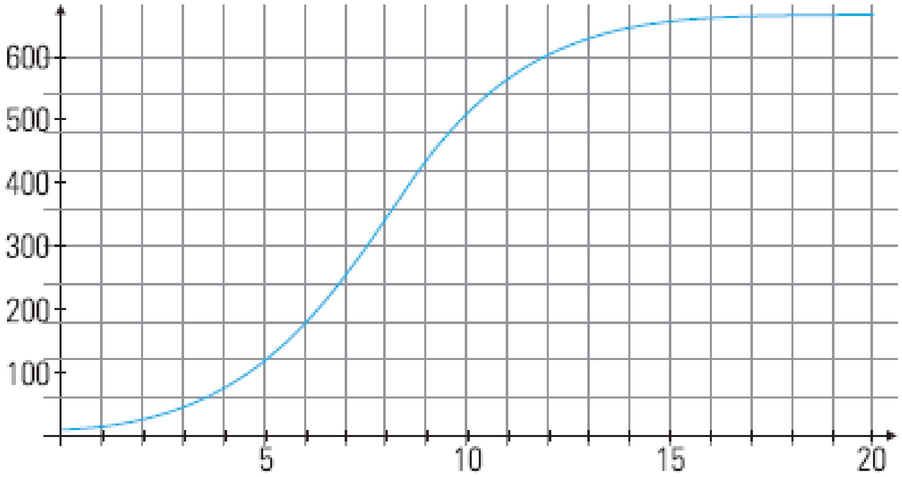
Aufgabe 2: Hefewachstum (Dangl u. a. 2009)

In der Grafik ist das Wachstum einer Hefekultur dargestellt (Zeitangaben in Stunden; Hefemenge in mg).

a) Schätzen Sie die ungefähre Lage des Wendepunktes ab und zeichnen Sie ihn in der Grafik ein!

b) Schätzen Sie ab, wie groß die Wachstumsgeschwindigkeit an der Wendestelle ist.

c) Deuten Sie den Wendepunkt im Hinblick auf die Wachstumsgeschwindigkeit.

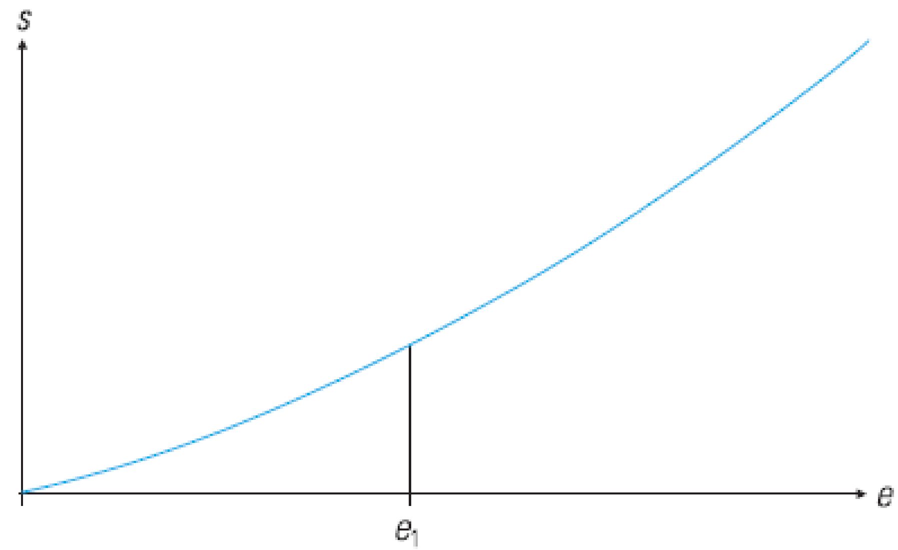


Stephan Hußmann

IEEM – Universität Dortmund

Aufgabe 3: Einkommenssteuer (nach Dangl u. a. 2009)

Es sei $s\colon\ e \to s(e)$ die Funktion, die jedem Einkommen e die zugehörige Einkommenssteuer s zuordnet; e_1 ist das Einkommen von Frau Meier (siehe Grafik, alles in Euro).



a) Interpretieren Sie die Terme $e_1 - s(e_1)$ und $\dfrac{e_1}{s(e_1)}$.

b) $s'(e)$ wird als Grenzsteuersatz bezeichnet. Erklären Sie diesen Begriff.

c) Frau Meier erhält eine Gehaltserhöhung um h Euro.

Interpretieren Sie den Ausdruck $\dfrac{s(e_1+h)-s(e_1)}{h}$ im Sachzusammenhang.

d) Interpretieren Sie die Ungleichung $\dfrac{s(e_1+h)-s(e_1)}{h} > \dfrac{s(e_1)}{e_1}$ im Sachzusammenhang.

e) In den meisten Steuersystemen gilt für Einkommen über einer bestimmten Einkommensgrenze die Beziehung $s''(e) = 0$. Deuten Sie diese Beziehung im Sachzusammenhang.

Stephan Hußmann

IEEM – Universität Dortmund

Analysisunterricht - erst Verstehen, dann Kalkül

Stephan Hußmann