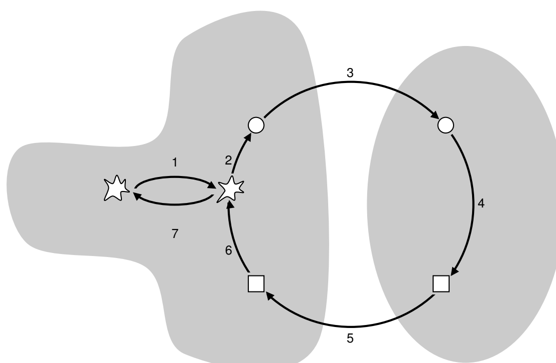
Kann mathematisches Modellieren selbständig gelernt werden? Ergebnisse aus der Lehr-/Lernforschung

Universität Paderborn, 29.4.2010

Werner Blum, Universität Kassel



Programm:

① Die „Neue Aufgabenkultur“

② Schüler und Modellieren

③ Lehrer und Modellieren

④ Eine Unterrichtseinheit zum Modellieren

⑤ Der „Lösungsplan“

① Die „Neue Aufgabenkultur“

Ziel aktueller Forschungs- und Entwicklungsanstrengungen: „Guter Mathematikunterricht“

Definition „Unterrichtsqualität“ (Helmke, Baumert, Leuders, SINUS, ...)**:**

- **Fachlich gehaltvolle Unterrichtsgestaltung**
  (Gelegenheiten zum Kompetenzerwerb, verstehendes Lernen, Vernetzungen)
- **Kognitive Aktivierung der Lernenden**
  (Eigenaktivitäten/Selbständigkeit, Reflexionen, adaptives Coaching)
- **Effektive und schülerorientierte Unterrichtsführung**
  (Methodenvariation, Strukturierung, Zeitnutzung, Störungsprävention, Trennung Lernen/Beurteilen, konstruktives Umgehen mit Fehlern, Förderung Schüler-Kommunikation, Mediennutzung, ...)

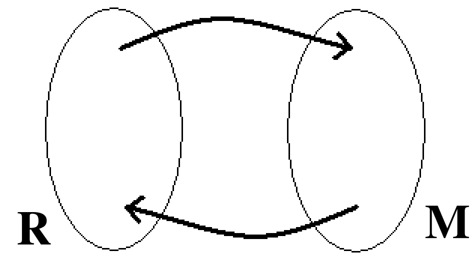
Zentral dabei: *Balance* zwischen *Lehreranleitung* und *Schülerselbständigkeit* (Montessori: „Hilf mir, es selbst zu tun“)

Vehikel für „Guten Unterricht“: Aufgaben →

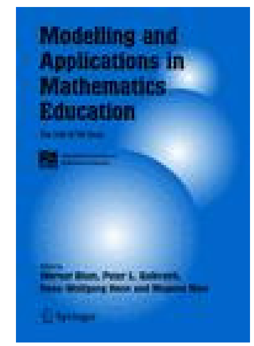
„Neue Aufgabenkultur“ (wie beim SINUS-Projekt):
(„Wie?“) qualitätvolle Behandlung von („Was?“) bildungs-gangsadäquaten kompetenzorientierten schüleraktivierenden Aufgaben; breites Aufgabenspektrum auch für Klassenarbeiten

Heute: Thema Modellieren, d.h. Übersetzen R ↔ M

„Modellierungsaufgabe“ = realitäts-bezogene Aufgabe mit substantiellen Übersetzungsanforderungen R ↔ M



„Modellierungskompetenz“ (ICMI Study 14)**:**
Fähigkeit, Prozessschritte beim Modellieren problemadäquat auszuführen, sowie Fähigkeit, geg. Modelle zu analysieren oder zu vergleichen



Modellieren/Realitätsbezüge aus vielen Gründen wichtig, u.a. als Hilfe beim Weltverstehen wie auch beim Mathematiklernen und als Beitrag für angemessenes Mathematikbild

Quellen für Modellierungsaufgaben:

ISTRON-Materialien 1993-2010, MUED-Materialien, SINUS-Materialien, Bildungsstandards-Buch/CD 2006, Herget/Scholz, Herget/Jahnke/Kroll, Büchter/Leuders, Maaß, Greefrath, Hinrichs, Dockhorn/Drüke-Noe/Leiß/Wiegand, ...

Aufgabenbeispiel 1: „Tanken" (DISUM, Leiß 2002)

Frau Stein wohnt in Trier, 20 km von der Grenze zu Luxemburg entfernt. Sie fährt mit ihrem VW Golf zum Tanken nach Luxemburg, wo sich direkt hinter der Grenze eine Tankstelle befindet. Dort kostet der Liter Benzin nur 1,15 Euro, im Gegensatz zu 1,35 Euro in Trier.

Lohnt sich diese Fahrt für Frau Stein? Begründe deine Antwort.

① Aufgaben | ② Schüler | ③ Lehrer | ④ Unterrichtseinheit | ⑤ Lösungsplan

Aufgabenbeispiel 2: „Zuckerhut“ (DISUM, Leiß 2004)

Aus einer Zeitungsmeldung:

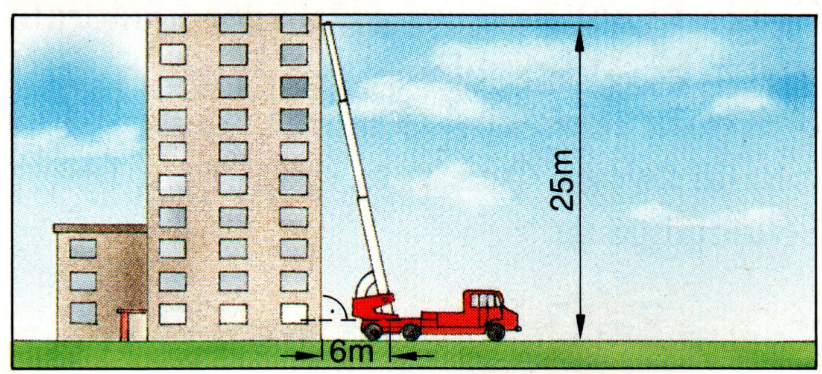
Die Zuckerhutbahn benötigt für die Fahrt von der Talstation bis zum Gipfel des als Zuckerhut bekannten Berges rund 3 Minuten. Dabei fährt sie mit einer Geschwindigkeit von 30 km/h und überwindet einen Höhenunterschied von ca. 180 m. Der Cheftechniker Giuseppe Pelligrini würde viel lieber zu Fuß gehen. So wie früher, als er Bergsteiger war und erst von der Talstation über die ausgedehnte Ebene zum Berg rannte und diesen dann in zwölf Minuten bestieg.

Wie weit ist die Strecke ungefähr, die Giuseppe von der Talstation bis zum Fuß des Berges rennen musste? Schreibe deinen Lösungsweg auf.

Oft leicht möglich: Verändern herkömmlicher (eingekleideter) Schulbuchaufgaben zu Modellierungsaufgaben

Beispiel (aus SINUS Hessen, 2002):

Wie lang muss die Feuerwehrleiter sein, falls es im obersten Stockwerk des Hochhauses brennen sollte?



Aufgabenbeispiel 3: „Feuerwehr“ (DISUM, Leiß 2006)

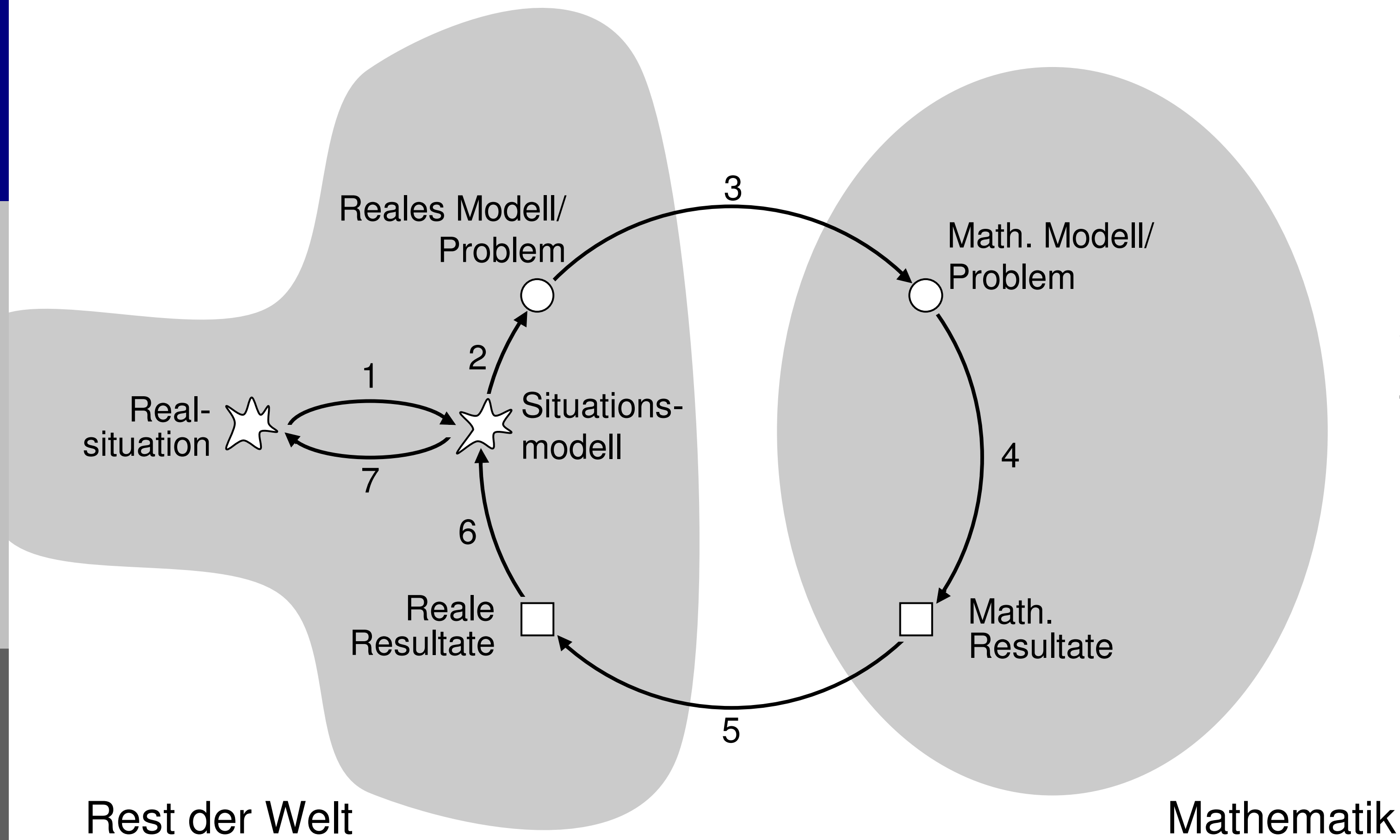
Die Münchner Feuerwehr hat sich im Jahr 2004 ein neues Drehleiter-Fahrzeug angeschafft. Mit diesem kann man über einem am Ende der Leiter angebrachten Korb Personen aus großen Höhen retten. Dabei muss das Feuerwehrauto laut einer Vorschrift 12 m Mindestabstand vom brennenden Haus einhalten.

Die technischen Daten des Fahrzeugs sind:

Fahrzeugtyp:	Daimler Chrysler AG Econic 18/28 LL - Diesel
Baujahr:	2004
Leistung:	205kw (279 PS)
Hubraum:	6374 cm³
Maße des Fahrzeug:	Länge 10m Breite 2,5m Höhe 3,19m
Maße der Leiter:	30m Länge
Leergewicht:	15540kg
Gesamtgewicht:	18000 kg

Aus welcher maximalen Höhe kann die Münchner Feuerwehr mit diesem Fahrzeug Personen retten?

Das Modellierungskreislauf-Schema bei „Feuerwehr“:



1 Konstruieren/ Verstehen

2 Vereinfachen/ Strukturieren

3 Mathematisieren

4 Mathematisch arbeiten

5 Interpretieren

6 Validieren

7 Darlegen/Erklären

Entstehungskontext von Kreislaufmodell und Beispielen:

DISUM-Projekt

„Didaktische Interventionsformen für einen selbständigkeitsorientierten aufgabengesteuerten Unterricht am Beispiel Mathematik“

W. Blum / R. Messner / R. Pekrun/ S. Schukajlow/ J. Krämer/ R. Brode (/ D. Leiß) (Kassel/München)

Beginn 2002 (seit 2005 DFG-gefördert, im Rahmen der Kasseler Forschergruppe zur empirischen Bildungsforschung)

Untersuchungsschwerpunkt: Lehren/Lernen mit Modellierungsaufgaben in Klassen 8-10 (alle Schulformen); Untersuchungen im *Labor* und im *Unterricht*

Leitfrage bei DISUM (entstanden im SINUS-Kontext):

Wie lässt sich eine kognitiv anspruchsvolle Fachkompetenz wie Modellierungskompetenz im Mathematikunterricht wirksam vermitteln?

Ausgangspunkt hierbei: Modellieren allenthalben als wichtig angesehen (seit 2003 sogar eine der verbindlichen Kompetenzen in den Bildungsstandards Mathematik), im Alltagsunterricht allerdings weiterhin eher wenig Modellieren

Gründe dafür: mit Modellieren verbundene erhöhte kognitive Ansprüche an Lehrer und Schüler sowie Mangel an wiss. Erkenntnissen über effektives Lehren/Lernen mit Modellierungsaufgaben

Untersuchungsfragen bei DISUM:

- Kognitives Potential von Modellierungs*aufgaben*?
- Umgehen von *Schülern* mit Modellierungsaufgaben, speziell: „Schlüsselstellen“ (kognitive Hürden) für Schüler?
- Umgehen von *Lehrern* mit Modellierungsaufgaben, speziell: schüler- und aufgabenadäquate Diagnose-, Rückmelde- und Unterstützungsmöglichkeiten?
- Effekte verschiedener Unterrichts*designs* zum Modellieren auf Leistungen und Einstellungen?

② Schüler und Modellieren

Aufgaben wie „Tanken“, „Zuckerhut“ oder „Feuerwehr“ haben hohes Kompetenz- und Aktivierungs-Potential für Lernende

Wie kann Potential lernwirksam realisiert werden?

Aus mehreren Studien bekannt: Sehr viele Schüler kommen mit solch komplexen Aufgaben i.a. nicht von alleine zurecht; insb. Übersetzen R ↔ M kognitiv anspruchsvoll; daher oft Ausweichen in Ersatzhandlungen

Aufgabenbeispiel 4: „Riesenschuhe“

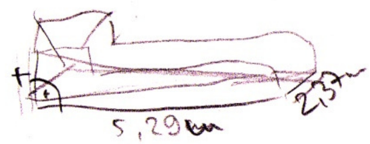
Florentino poliert in einem Sportzentrum auf den Philippinen das laut Guinness-Buch der Rekorde weltgrößte Paar Schuhe mit einer Breite von 2,37 m und einer Länge von 5,29 m.

Wie groß wäre der Riesenmensch ungefähr, dem dieses Paar Schuhe passen würde? Beschreibe deinen Lösungsweg.

Beispiel: „Riesenschuhe“ im Labor mit Gymnasiasten

laut Guiness Buch der Rekorde weltgrößte Paar Schuhe mit einer Breite von a 2,37 m und einer Länge von b 5,29 m.

Wie c groß wäre der Riesenmensch ungefähr, dem dieses Paar Schuhe passen würde? Beschreibe deinen Lösungsweg.



$a^2 + b^2 = c^2$

$(2{,}37\,m)^2 + (5{,}29\,m)^2 = c^2$

$c^2 \approx 33{,}6\,m^2$

wäre = P

A: Der Mensch ~~ist~~ wäre etwa 33,6 m groß.

Weit verbreitete und im Alltagsunterricht oft erfolgreiche Schülerstrategie (Baruk, Verschaffel/Greer/deCorte, ...)**:**
„Denk nicht über den Kontext nach, sondern entnimm einfach dem Aufgabentext die gegebenen Größen und rechne mit ihnen nach einem vertrauten Schema!"

Hier also Schritt 1 („Situationsmodell bilden“) als kognitive Hürde

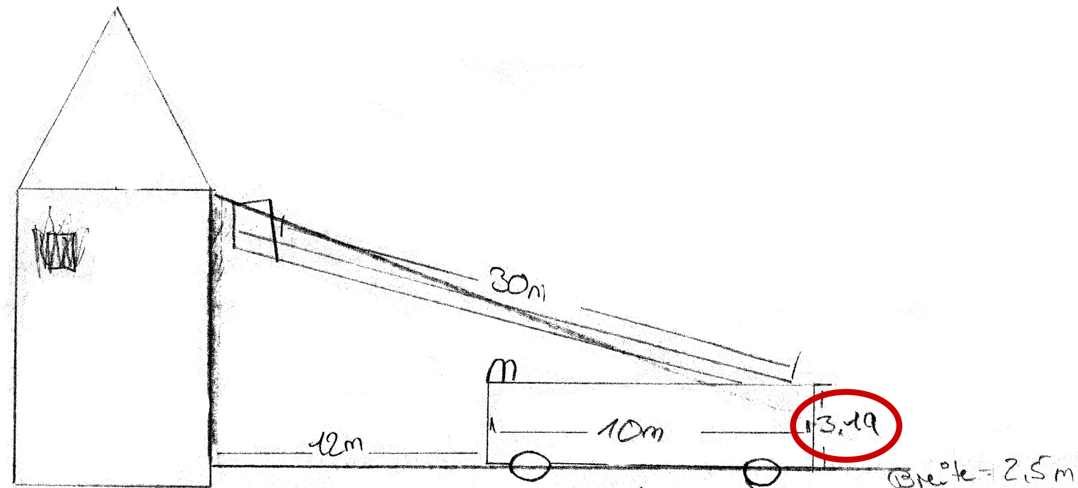
Weitere Beispiele für Schülerschwierigkeiten beim Modellieren:

Schritt 2 („Vereinfachen, Annahmen treffen“) ebenfalls kognitiv anspruchsvoll; Beispiel „Tanken“:

Man kann nicht wissen ob es sich lohnt, weil man nicht weiß, wieviel der Golf verbraucht. Auch weiß man nicht wieviel er tanken will.

① Aufgaben | ② Schüler | ③ Lehrer | ④ Unterrichtseinheit | ⑤ Lösungsplan

Schritt 3 („Mathematisieren“) ebenfalls fehleranfällig; Beispiel „Feuerwehr“:



Das ist eine Phytagoras Aufgabe und wir Rechnen vom Boden bis ~~da~~ zum ~~Fahrerhaus~~ Korb

$\cancel{a^2+b^2=c^2}$

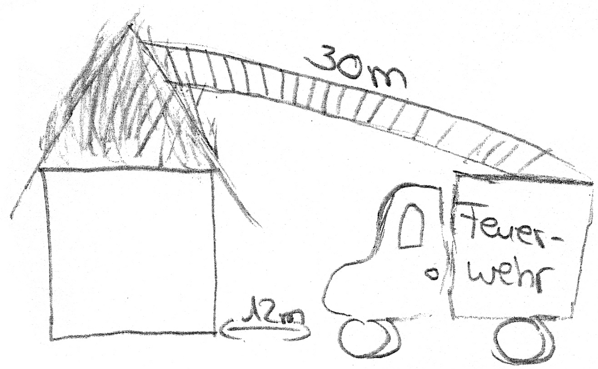
$c^2-a^2=b^2$

$900-484=b^2$

$416=b^2 \mid \sqrt{\ } \quad 20{,}4\,m=b$

Die Höhe vom Boden bis zum Korb beträgt 20,4 m

Auch Schritt 5 („Interpretieren“) nicht selbstverständlich; Beispiel „Feuerwehr“:



$a^2 - c^2 = b^2$

$900m^2 - 144\,m^2 = b^2$

$b^2 = 756 \;/\sqrt{}$

$b = 27{,}49m$

Die Feuerwehr Leiter ist 27,49 m lang wen sie ausgefahren ist.

Weitere **Beobachtungen** zum Lösungsverhalten von **Schülern**:

- **Alle Schritte des Modellierungskreislaufs als potentielle kognitive Hürden; speziell: kein eigenständiges Validieren, für Beurteilung von Lösungen nur Lehrkraft zuständig**
  Folgerung*: *Gezielte Förderung von Teil-Kompetenzen des Modellierens (entsprechend Schritten)!

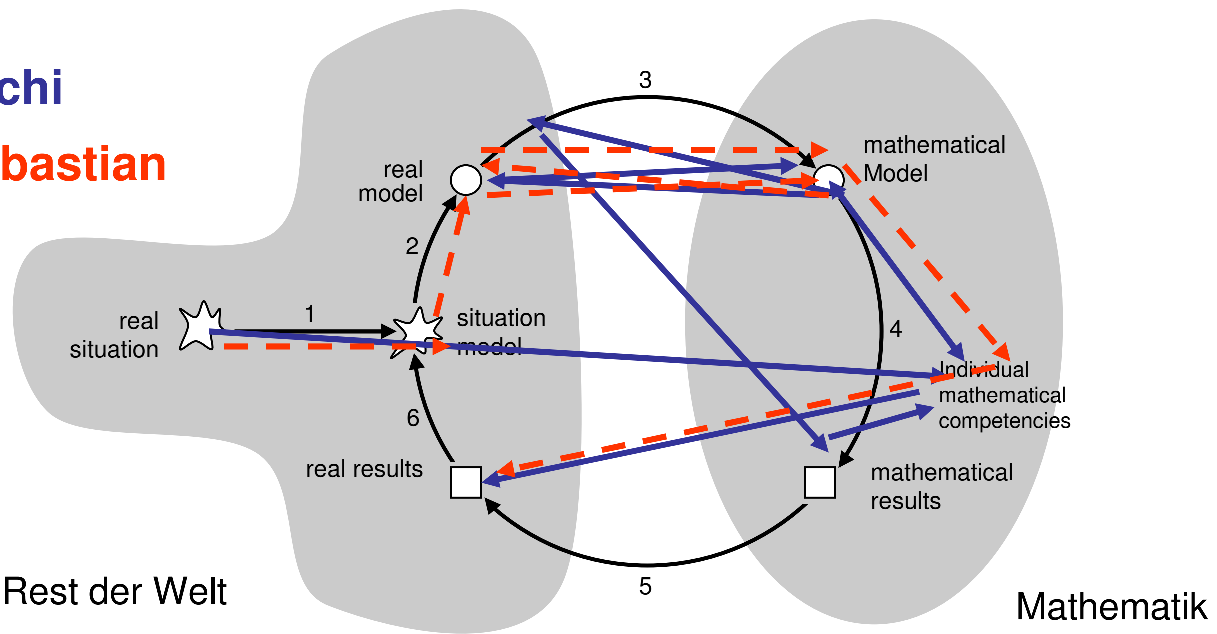
- **Keine bewussten Lösungsstrategien bei Schülern**
  Folgerung*: *Vermittlung schüleradäquater Strategien für Modellierungsaufgaben! (siehe ⑤)

- **Lösungswege i.a. nicht linear und ganz unterschiedlich („individuelle Modellierungsverläufe“** – Borromeo Ferri)

Folgerung*: *Unterstützung individueller Lösungswege!

Michi

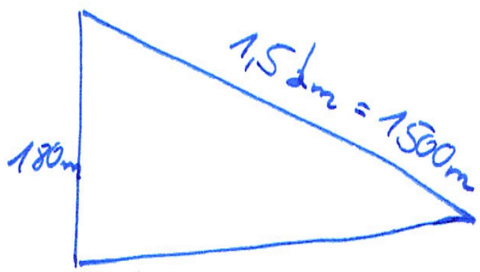
Sebastian



- **Kaum Bewusstsein bei Schülern für sinnvolle Genauigkeiten**

Folgerung*: *Permanentes Bewusstmachen des Rundens!

30 km/h => 3 min ist $\frac{1}{20}$ der Strecke => 1,5 km



$a^2 + b^2 = c^2$

$a^2 = c^2 - b^2$

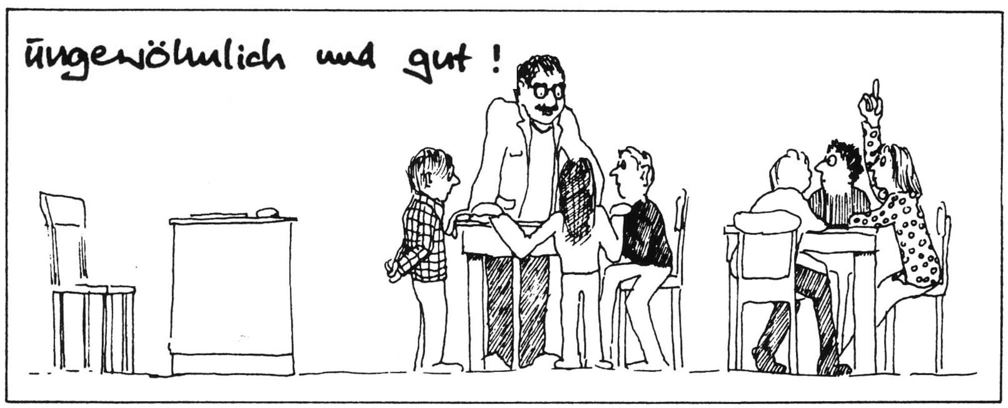
$a^2 = 1500^2 - 180^2$

$a^2 = 2.217.600$

$a = 1489,16\ m$

=> Die Strecke ist ca. 1489,16 m

- **Lehrer unentbehrlich (**Pauli/Reusser, Burkhardt, ...)**, Unterschied selbständig Arbeiten mit L.-Unterstützung/ alleine Arbeiten**
***Folgerung*: Gezielte Schulung von Lehrern in Diagnose- und Unterstützungsmöglichkeiten beim Modellieren!**



③ Lehrer und Modellieren

Aus Lehr-/Lernforschung bekannt: Entwicklung von Modellierungskompetenz(en) schwierig, u.a. wegen „Situiertheit" jeglichen Lernens (u..a.: Nunes et al., Lave et al., Brown et al., Boaler, Niss)**; Lerneffekte höchstens bei hinreichend „qualitätvollem" Unterrichten erwartbar (~ ①)**

Im Folgenden: Beispiele für (unspektakuläres aber effektives und selbständigkeitsförderndes) Lehrerhandeln aus DISUM-Teilstudien mit SINUS-Lehrern

Aufgabenbehandlung günstig in 6 Phasen:

1. Vorstellung der Aufgabe im Plenum
2. Einzelarbeit
3. Ko-konstruktive Arbeit in Gruppen
4. Aufschreiben von Lösungen individuell oder in Gruppen
5. Lösungs-Präsentation im Plenum oder in neuen Gruppen
6. Vergleich der Lösungen und reflektierender Rückblick

Wichtig u.a.: rückblickende Reflexionen

Beispiel: „Zuckerhut" (Hauptschule)

Validierung mit starker L.-Unterstützung als Ausgangspunkt für Ergebnisrevisionen und sinnvolle Rundungen

Einige allgemeine Beobachtungen zum Lehrerverhalten:

- **Kaum Stimulierung von Lösungsstrategien durch Lehrer**
  Folgerung: Bewusstmachen der Bedeutung von Lösungsstrategien und Vermittlung potentieller Strategien auf Basis Modellierungskreislauf! (siehe ⑤)

- **Spontane Lehrerhilfen meist nicht adaptiv und minimal, oft inhaltliche statt „bloß“ strategischer Hilfen**
  Folgerung: Schulung von Lehrern in Interventionsmöglich-keiten! (insbesondere: inhaltlich vs. strategisch).

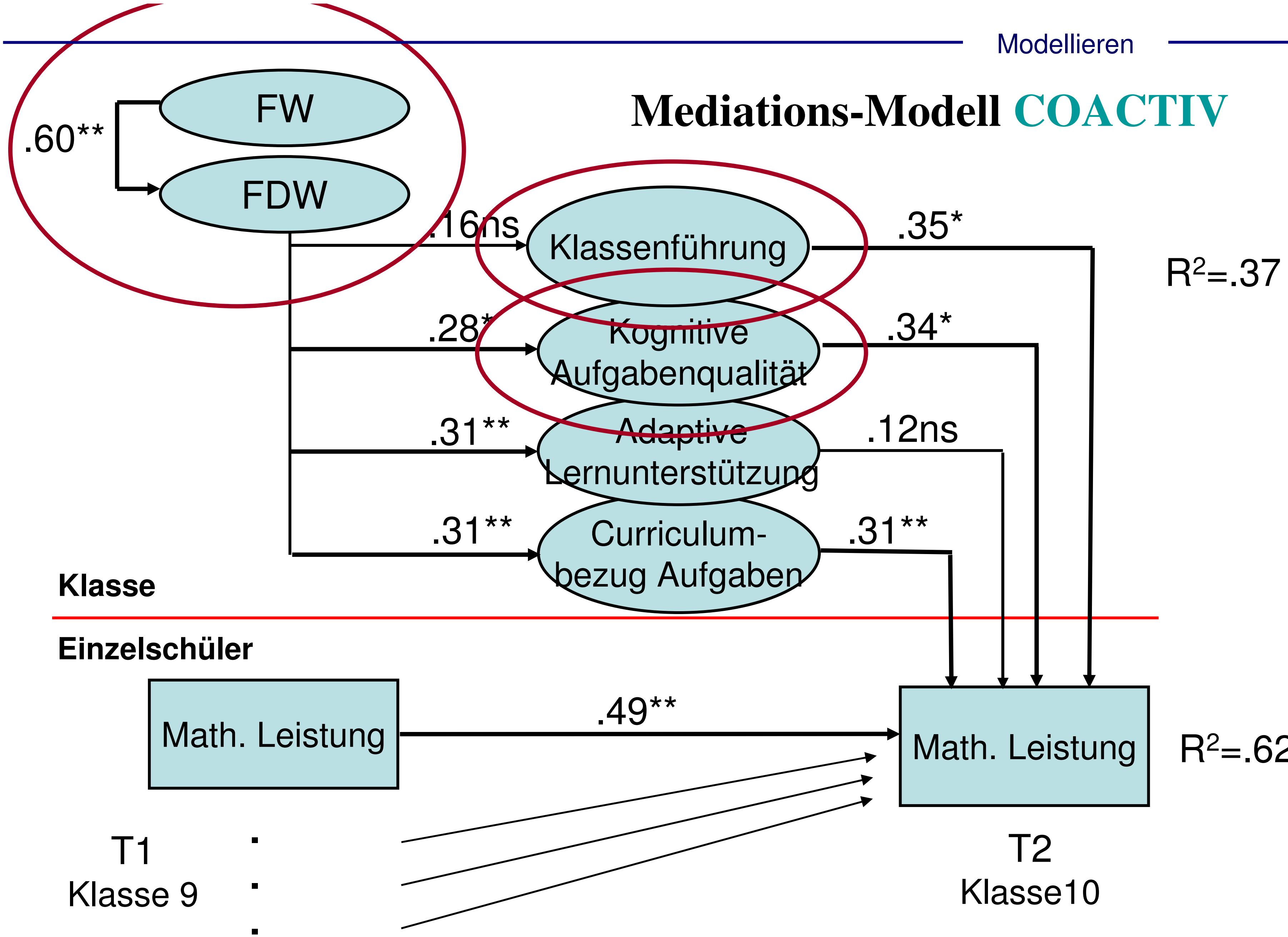
- **Oft keine Ermutigung zu eigenen Lösungswegen, sondern unbewusstes Durchsetzen der Lehrerlösung bei Schülern, auch durch unzureichende Kenntnis des Lösungsraums**
  Folgerung*: *Schulung von Lehrern bzgl. Lösungsraum und bzgl. selbständigkeitserhaltender, eigener Lösungswege, ermutigende Interventionen auf diesem Hintergrund!

Erneut bestätigt: Zentrale Rolle Lehrkraft

Auch aus anderen Studien bekannt (TEDS: Blömeke/Kaiser/Lehmann u.a.; COACTIV: Baumert/Blum/Neubrand/Krauss/Kunter u.a.)**:**

Notwendig für guten Unterricht und für Lerneffekte ist hohe fachdidaktische Kompetenz der Lehrkraft, gespeist von tiefem Fachverständnis

Mediations-Modell COACTIV



④ Eine Unterrichtseinheit zum Modellieren

DISUM: „Operativ-strategische“ Lehr-/Lernform für UE zum Modellieren; Leitprinzipien u.a.

- **Lehrersteuerung mit Ziel aktiver Schüler-Eigenkonstruktionen (Balance Lehreranleitung/Schülerselbständigkeit; Maxime: minimale, selbständigkeitserhaltende Lehrerinterventionen)**
- **Situationsspezifischer Formenwechsel zwischen selbständiger Einzelarbeit in der Gruppe (Ziel individuelle Lösungen) sowie Vergleich und Reflexion von Lösungen im Plenum**
- **Adaptives Lehrer-Coaching auf Basis von „Lösungsplänen“ und individuellen Diagnosen**

Ziel: Vergleich mit „herkömmlichem“ Unterricht, modelliert mit „direktiver“ Lehr-/Lernform; Leitprinzipien u.a.

- Entwicklung gemeinsamer Bearbeitungsmuster, orientiert am durchschnittlichen Leistungsniveau der Klasse
- Systematischer Wechsel zwischen klar strukturiertem und zielgerichtetem fragend-entwickelnden Gespräch im Plenum und lehrerangeleiteter übender Einzelarbeit

Herbst 2006 (4 Klassen) und Herbst 2007 (21 Klassen): zehnstündige Unterrichtseinheit in Realschulen, Klasse 9; Vergleich von „operativ-strategischer“ Form, „direktiver“ Form und Alleinarbeit von Schülern (ohne Lehrer) bzgl. Schüler-Leistungen und -Einstellungen

Beschränkung auf zwei Typen von Modellierungsaufgaben: Pythagoras und „lineare Entscheidung“

Beide Designvarianten als Optimalunterricht konzipiert, i.a. mit SINUS-Lehrkräften, für Unterrichtseinheit geschult (u.a. mit detaillierten „Regiebüchern“ für jede Phase der UE)


UNI KASSEL VERSITÄT

DISUM[1]

REGIEBUCH

Direktiver Unterricht

10 Unterrichtsstunden (je 45 min)

Vor- und Nachtest; 6 Kurzbefragungen

Hauptstudie II
(September bis Oktober 2007)

Untersuchung alternativer
Lehr- Lernformen (Kompetenzstufen 2/3)

F V/2
(10.08.07)

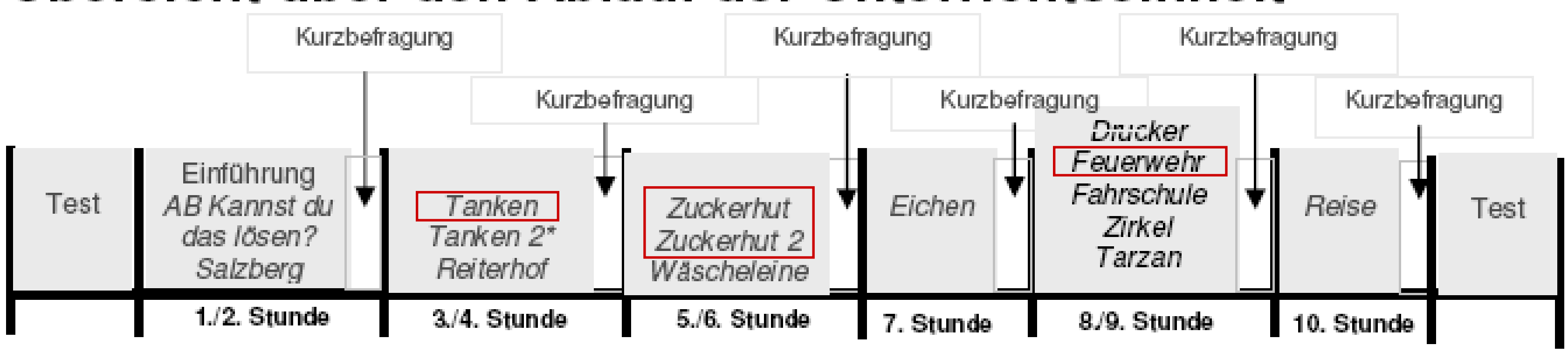
[1] Didaktische Interventionsformen für einen selbständigkeitsorientierten aufgabengesteuerten Unterricht am Beispiel Mathematik (Blum, Messner, Pekrun; Leiß, Schukajlow; Müller)

In allen Designvarianten selber Ablauf:

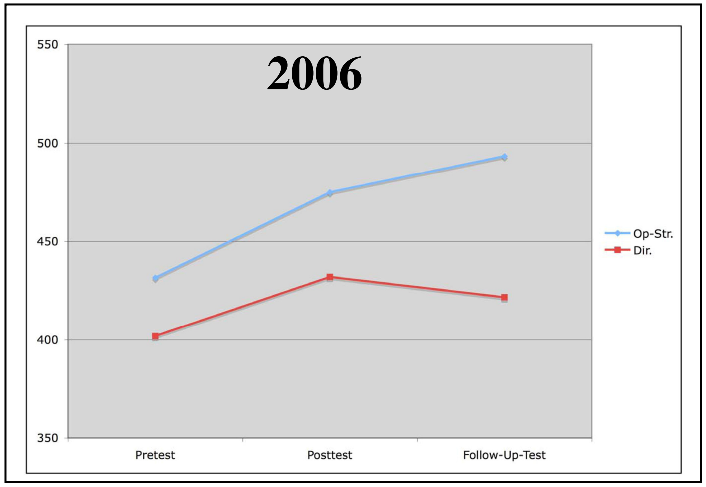
Auswahltest (40‘, BS)/ Vortest (85‘, Modellieren&technisch)/ Unterricht mit Begleitbefragungen/ Nachtest (85‘)/ Followuptest (3 Monate später)

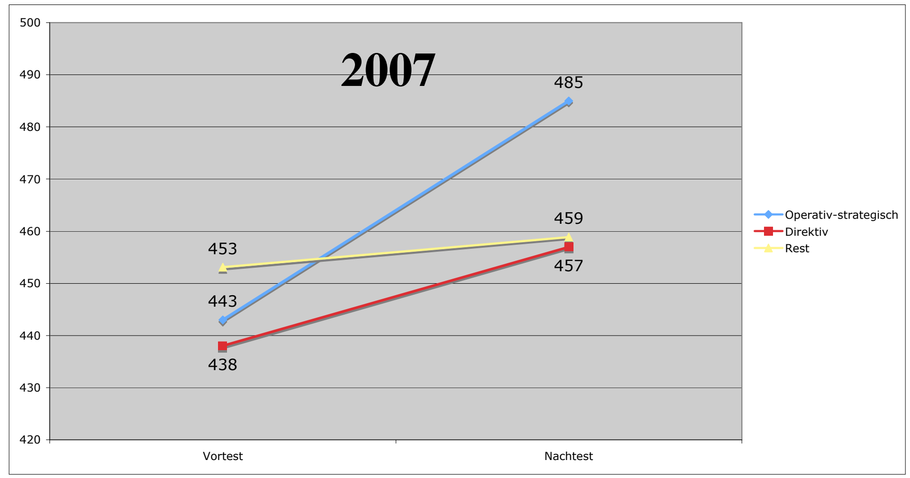
In allen Unterrichtsvarianten selbe Aufgabenfolge

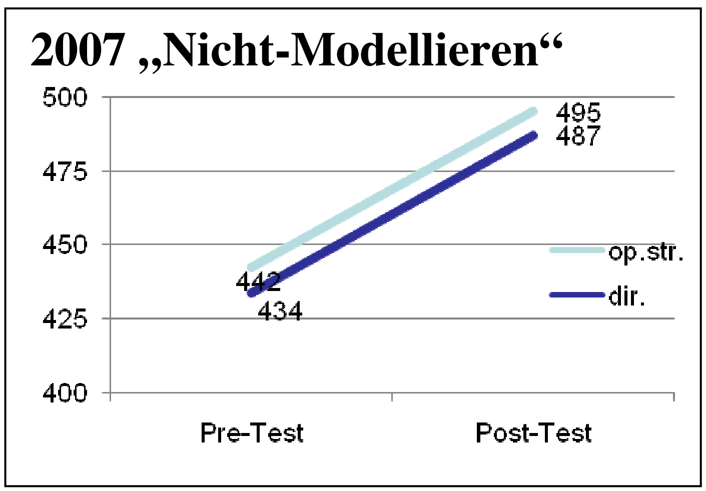
Übersicht über den Ablauf der Unterrichtseinheit

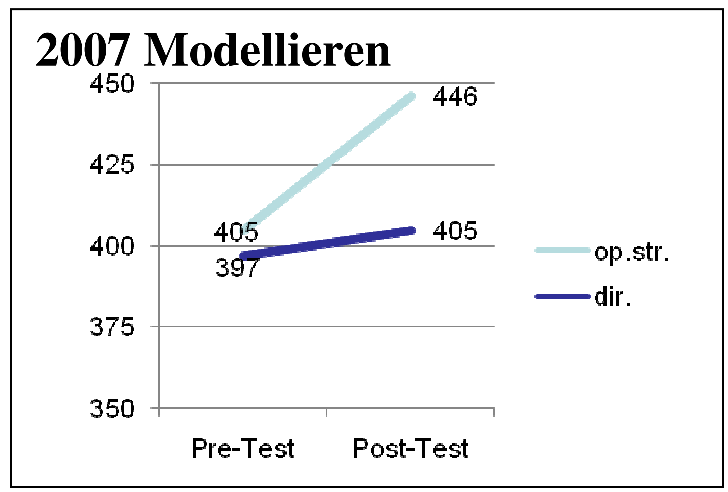


Quantitative Ergebnisse:









Wesentliche Ergebnisse im Detail:

- Bei beiden Designs substantielle Lernzuwächse (.20 - .45 SD), nicht so bei allein arbeitenden Schülern
- Lernzuwächse der „operativ-strategisch“ unterrichteten Schüler im Mittel signifikant höher und nachhaltiger als die der „direktiv“ unterrichteten Schüler
- Fortschritte speziell beim Modellieren nur im „operativ-strategischen“ Design
- Beste Ergebnisse in Klassen, wo Balance Lehreranleitung/ Schülerselbständigkeit am besten realisiert, mit adaptiven Interventionen und mit Wertlegen auf Lösungsstrategien

Kriterial (etwa ~ Bildungsstandards) jedoch: Fortschritte noch lange nicht befriedigend!

In beiden Designs hohes Optimierungspotential, insbes.:

- **„Lösungsplan“ nicht nur für Lehrer, sondern (als lernstrategisches Instrument) auch für Schüler!**
- **Im operativ-strategischen Design auch direktive Phasen, vor allem zu Beginn (Lehrer als „Muster-Modellierer“)!**

→ Weiterer Forschungsbedarf!

Aktuell: Entwicklung „methoden-integratives Design“

Ab 2011: Feldstudie im Alltagsunterricht (3 Monate)

⑤ Der „Lösungsplan“

Strategisches Verhalten beim Aufgabenlösen hilfreich
(u.a.: Burkhardt et al., Carreira/Matos, Galbraith/Stillman, Kramarski et al.; Reiss/Zöttl; Greer/Verschaffel in Blum/Henn/Galbraith/Niss 2007)

Bei Modellierungsaufgaben: Modellierungskreislauf als spezifisches strategisches Hilfsmittel

Siebenschrittiges Modell für Forschungszwecke adäquat und unentbehrlich; für Lehrer diagnostisch hilfreich, mitunter nicht griffig genug; für Schüler zu aufwendig

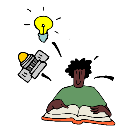
In DISUM entwickelt: vierschrittiges Modell
(verwandt mit Polyas allgemeinem Problemlösemodell)

„Lösungsplan" für Modellierungsaufgaben

1. Aufgabe verstehen

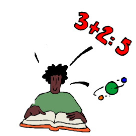
- Lies den Aufgabentext genau durch und stell dir dabei die Situation ganz konkret vor!
- Mach dir eine Skizze dazu!
- Mach dir klar: Was wird hier von dir verlangt?

2. Mathematik suchen



- Suche die Angaben, die du zur Lösung brauchst, und ergänze sie falls nötig!
- Suche mathematische Zusammenhänge zwischen den Angaben (z.B. Gleichung oder Formel oder Graph)!

3. Mathematik benutzen



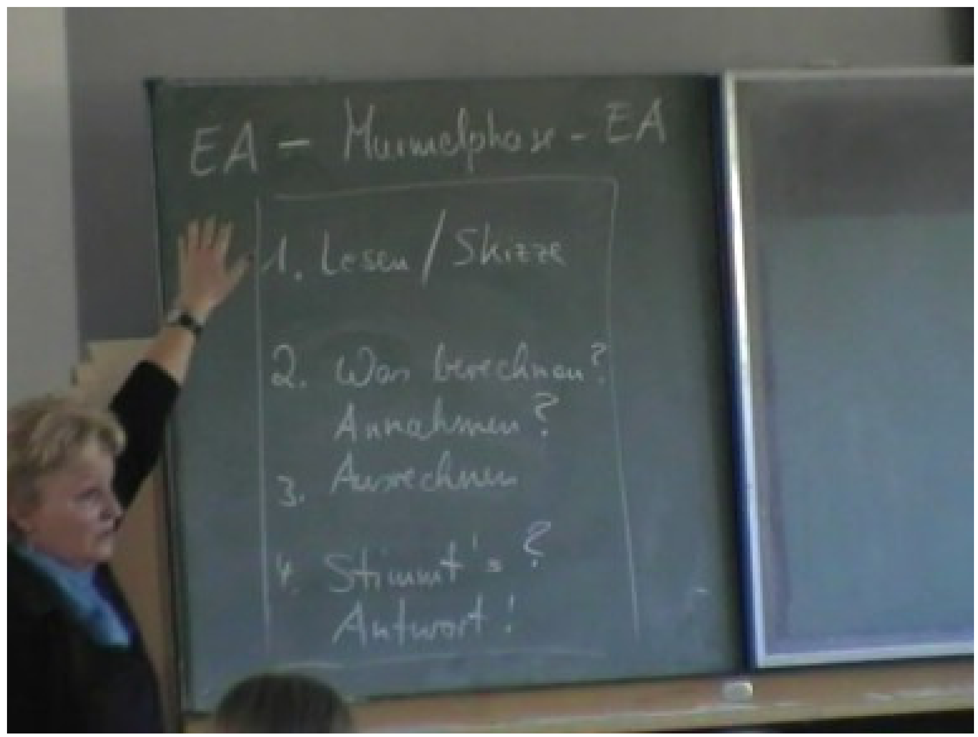
- Verwende ein passendes mathematisches Verfahren!

4. Ergebnis erklären

- Runde dein Ergebnis sinnvoll!
- Überschlage, ob dein Ergebnis ungefähr passt! Falls nein: zurück zu **1!** Falls ja: Schreib einen Antwortsatz auf!

Lösungsplan nicht als stur einzuhaltendes Schema, sondern als Hilfe bei allfälligen Schwierigkeiten im Lösungsprozess; Ziel: selbständige Verwendung durch Schüler bei Bedarf; nötig: systematische Einübung in Gebrauch

Einsatz Lösungsplan in Hauptschule:



Lösungsplan als Basis für strategische Lehrerinterventionen
Beispiel: Einsatz Lösungsplan bei „Feuerwehr“ (RS)

Erfolgreiche strategische Lehrerintervention

① Aufgaben ② Schüler ③ Lehrer ④ Unterrichtseinheit ⑤ Lösungsplan

Beispiel: Einsatz Lösungsplan bei „Zuckerhut“ (RS)

DISUM-Lösungsplanstudie (Herbst 2009): 6 Klassen (RS 9), operativ-strategischer Unterricht mit/ohne Lösungsplan

Wesentliche Ergebnisse der Lösungsplanstudie:

- Lösungsplan-Schüler mit signifikant höheren Zuwächsen bei Modellierungskompetenz (allerdings nur wegen Vorsprung bei Pythagoras-Aufgaben) und bei Strategienutzung
- Gebrauch Lösungsplan nur bei massiven Lehrerhinweisen
- Langfristige Einübung nötig
- Transfer zwischen verschiedenen Kontexten muss bewusst gemacht werden

Hinweise auf Bereichsspezifität von Modellierungsfähigkeiten auch aus anderen Studien:

Co²CA (Klieme/Blum/Rakoczy/Leiß): Mod_Pyth $\xleftrightarrow{.60}$ Mod_LinFu

Fazit: Studien wie DISUM oder Maaß 2004 machen Mut zu Veränderungen:

Qualitätskriterien auch im Alltagsunterricht umsetzbar, und hierdurch auch nachweisbare Lernerfolge, bzgl. Kompetenzentwicklung wie auch bzgl. Einstellungen und Meta-Wissen

Ziel:
Implementation Erkenntnisse in Unterricht und Lehrerbildung!