

# Zum Mehrwert von CAS im Mathematikunterricht - zum Stand der Forschung -

26.05.2011

Universität Paderborn

Bärbel Barzel

# Was ist CAS?

1.1 GRD AUTO REELL

$\sqrt{9-4\sqrt{5}}$   $\sqrt{5-2}$

$3\cdot a+5\cdot a+2\cdot b+b$   $8\cdot a+3\cdot b$

$\text{solve}\left(\frac{1}{f}=\frac{1}{b}+\frac{1}{g},g\right)$   $g=\frac{b\cdot f}{b-f}$

$\text{solve}\left(\frac{1}{f}=\frac{1}{b}+\frac{1}{g},b\right)$   $b=\frac{f\cdot g}{f-g}$

$\sqrt{5}\cdot\sqrt{2}$   $\sqrt{10}$

$\frac{d}{dx}(a\cdot x+b\cdot x^2)=2\cdot b\cdot x+a$  true

6/6

1.1 GRD AUTO REELL

$3\cdot a+5\cdot a+2\cdot b+b$   $8\cdot a+3\cdot b$

$\text{solve}\left(\frac{1}{f}=\frac{1}{b}+\frac{1}{g},g\right)$   $g=\frac{b\cdot f}{b-f}$

$\text{solve}\left(\frac{1}{f}=\frac{1}{b}+\frac{1}{g},b\right)$   $b=\frac{f\cdot g}{f-g}$

$\sqrt{5}\cdot\sqrt{2}$   $\sqrt{10}$

$\frac{d}{dx}(a\cdot x+b\cdot x^2)=2\cdot b\cdot x+a$  true

1/6

fz 1: Extras

1: Ableitung

2: Integral

3: Kor

3: Limes

4: Summe

5: Produkt

6: Funktionsminimum

7: Funktionsmaximum

8: Bogenlänge

9: Taylor-Polynom

A: Differentialgleichungslöser

B: Implizite Ableitung

C: Numerische Ableitung

D: Numerisches Integral

1.1 GRD AUTO REELL

$\text{solve}\left(\frac{1}{f}=\frac{1}{b}+\frac{1}{g},g\right)$   $g=\frac{b\cdot f}{b-f}$

$\text{solve}\left(\frac{1}{f}=\frac{1}{b}+\frac{1}{g},b\right)$   $b=\frac{f\cdot g}{f-g}$

4/6

A B C D

12.95 y

5 x

-20 5 20

A1 |  $f(x)=$

1.1 GRD AUTO REELL

Fehler

Zu wenig Argumente

Der Funktion oder dem Befehl fehlen ein oder mehr Argumente.

OK

6/99

1: Datei

2: Bearbeiten

3: Zurück

4: Vor

5: Seitensortierer

6: Seitenlayout

7: App auswählen (Ctrl+K)

8: Seite löschen

9: Anmeldung

1: Neues Dokument (Ctrl+N)

2: Eigene Dateien

3: Speichern (Ctrl+S)

4: Speichern unter...

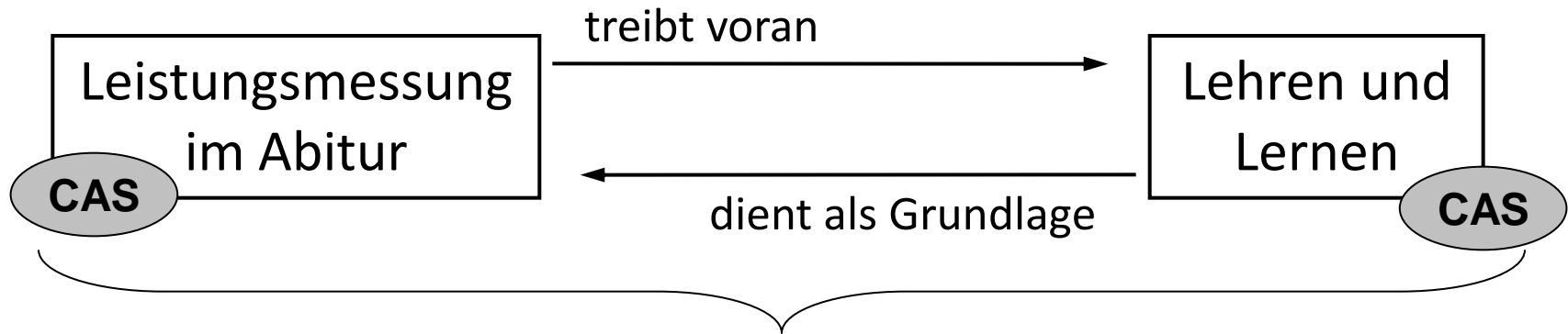
5: Senden

6: Dokumenteinstellungen...

# CAS & andere Werkzeuge für den MU

	Daten erfassen & darstellen	Geo-metrische Objekte konstruieren, manipulieren & messen	Dynamische Graphen-Darstellung	Exakt symbolisch rechnen & arbeiten	Daten interaktiv darstellen & manipulieren	Text erfassen
<b>HH</b> TI-84	o		x			o
DynaGeo		x	o			
Excel	x		o		o	o
Derive, u.a.	x			x		o
<b>HH</b> TI-Nsp. N-CAS	x	x	x		x	x
<b>HH</b> TI-Nsp.CAS	x	x	x	x	x	x
<b>HH</b> TI-92, V-200	x	x	x	x		x
Geogebra	x	x	x			o
<b>HH</b> Casio Class 330	x	x	x	x		x

# Überblick



- Grundlagen dieser Arbeit
- Veränderungen & Auswirkungen durch:
  - CAS beim Lernen
  - CAS beim Lehren
  - CAS in der Leistungsmessung

- Gelingensbedingungen als Kristallisation der Erkenntnisse

# Einbezogene Quellen

---

Insgesamt 275 Quellen, Auswahl nach:

- Zeitlichem Filter (Grenze Erscheinungsjahr 2000)
- Redundanzen vermeiden
- Erkenntnisse zum Einsatz von CAS?
- Aussagen zu Gelingensbedingungen zum Einsatz von CAS?

Letztlich 163 Quellen näher betrachtet aus:

- Zeitschriften, z.B.:
  - International Journal on Mathematics Education (ZDM),
  - International Journal for Technology in Mathematics Education,
  - International Journal of Computers for Mathematical Learning
  - Journal für Mathematikdidaktik (JMD);
- Sammelwerke und Metastudien  
z.B. (Fey et al. 2003) oder (Heid und Blume 2008a);
- Monographien & Dissertationen (z.B: Barzel 2006, Ingelmann 2009, Bichler 2010)
- Tagungsbände

# Beispielstudien

## **Calimero (2005-2010), (Computer-Algebra im Mathematikunterricht - Entdecken, Rechnen, Organisieren), Deutschland - Niedersachsen**

### Rahmen der Studie:

- 29 Experimental-, 5 Kontrollklassen (Stufe 7); TI - V200
- Fokus auf Lehren und Lernen, Vergleichs- und Interventionsstudie

### Ergebnisse von CAS-Gruppen im Vergleich zu Kontrollgruppen:

- Leistungssteigerungen bei mathematischem Forschen
- Sichererer Umgang mit Algebra und Funktionen
- Leistungssteigerungen beim Kommunizieren und Argumentieren
- Grundfähigkeiten konnten wach gehalten werden
- Signifikante Leistungssteigerungen bei schwächeren Lernenden

(z.B. Bruder und Ingelmann 2009)

# Beispielstudien

---

## **CAS-CAT (2000-2002) (Computer Algebra Systems in Schools – Curriculum, Assessment and Teaching), Australien**

### Rahmen der Studie:

- 3 Schulen (Stufen 11 und 12); TI-89, CASIO FX 2.0 CAS, HP40G
- Fokus auf Lehren und Prüfen, qualitative Interventionsstudie

### Ergebnisse:

- CAS-Schüler tendieren dazu kürzere Lösungen aufzuschreiben
- CAS-Schüler nutzen eine Mischung aus mathematischer Notation und Rechnersprache
- Lehrpersonen beobachten Lernende, wenn sie selbst sicher mit dem Rechner umgehen können
- Lehrpersonen unterstützten sich gegenseitig (z.B. Ball und Stacey 2005)

# Beispielstudien

---

## CAS Pilot Programme (2005-2008), Neuseeland

### Rahmen der Studie:

- 22 Schulen
- Fokus auf Lehren und Lernen, mixed-method Vergleichsstudie

### Ergebnisse zum Lernen:

- 1-2 Jahre bis Einfluss von CAS auf Schülerleistungen deutlich wurde
- Hohe Interaktion in den Klassen
- CAS-Schüler erzielten mind. die gleichen Leistungen wie die Kontrollschüler
- CAS-Schüler erzielten bessere Ergebnisse in der Algebra
- Konzentration auf mathematische Konzepte, Repräsentationsmöglichkeiten, individuelle Lösungswege

(Smith 2006, Neil 2009)



# Beispielstudien

---

## CAS Pilot Programme (2005-2008), Neuseeland

### Rahmen der Studie:

- 22 Schulen
- Fokus auf Lehren und Lernen, mixed-method Vergleichsstudie

### Ergebnisse zum Lehren:

- Lehrpersonen reflektieren und ändern ihren Unterricht, wenn sie sich in der technischen Bedienung kompetent fühlen
- Entdeckender und konstruktivistischer Unterricht wird begünstigt
- CAS ist ein mathematisches Werkzeug, das Lernen und Verstehen fördert
- CAS erlaubt offene Fragen und Entdeckungen realer Kontexte

(Smith 2006, Neil 2009)

# Übersicht

- 1 CAS beim Lernen
  - 1.1 Konzeptuelles Wissen kann durch CAS gefördert werden
  - 1.2 Rechnerfreie Fertigkeiten können auch beim CAS-Unterricht erworben werden
  - 1.3 Nutzung mathematischer Sprache kann durch CAS angeregt werden
  - 1.4 Technische Fertigkeiten können fachliche Ziele sinnvoll ergänzen
  
- 2 CAS beim Lehren
  - 2.1 CAS kann einen umfassenden, genetischen Aufbau der Unterrichtsinhalte begünstigen
  - 2.2 Integration offener Aufgaben wird durch CAS unterstützt
  - 2.3 CAS erhöht die Anzahl individueller Lösungswege
  - 2.4 Unterrichtsmethoden erscheinen mit CAS in einem neuem Licht
  
- 3 CAS in der Leistungsmessung
  - 3.1 Neue Aufgabenformate nötig um zusätzliche Kompetenzen zu überprüfen
  - 3.2 CAS kann die sprachlichen Anteile in Lösungen erhöhen
  - 3.3 CAS kann zu neuen Prüfungsformaten anregen

# Übersicht

- 1 CAS beim Lernen
  - 1.1 Konzeptuelles Wissen kann durch CAS gefördert werden
  - 1.2 Rechnerfreie Fertigkeiten können auch beim CAS-Unterricht erworben werden
  - 1.3 Nutzung mathematischer Sprache kann durch CAS angeregt werden
  - 1.4 Technische Fertigkeiten können fachliche Ziele sinnvoll ergänzen
  
- 2 CAS beim Lehren
  - 2.1 CAS kann einen umfassenden, genetischen Aufbau der Unterrichtsinhalte begünstigen
  - 2.2 Integration offener Aufgaben wird durch CAS unterstützt
  - 2.3 CAS erhöht die Anzahl individueller Lösungswege
  - 2.4 Unterrichtsmethoden erscheinen mit CAS in einem neuem Licht
  
- 3 CAS in der Leistungsmessung
  - 3.1 Neue Aufgabenformate nötig um zusätzliche Kompetenzen zu überprüfen
  - 3.2 CAS kann die sprachlichen Anteile in Lösungen erhöhen
  - 3.3 CAS kann zu neuen Prüfungsformaten anregen

# 1 CAS beim Lernen

---

## 1.1 Konzeptuelles Wissen kann durch CAS gefördert werden

(Kieran und Drijvers 2006, Cuoco und Levasseur 2003, Abdullah 2007, Zeller und Barzel 2010)

## 1.2 Rechnerfreie Fertigkeiten können auch beim CAS-Unterricht erworben werden

(Kieran und Yerushalmy 2004, Ingelmann 2009, Artigue 2004, Lagrange 2003)

## 1.3 Nutzung mathematischer Sprache kann durch CAS angeregt werden

(Drijvers 2003, Greefrath 2007, Ball und Stacey 2005, Zeller und Barzel 2010)

## 1.4 Technische Fertigkeiten können fachliche Ziele sinnvoll ergänzen

(Fuglestad 2005, Ball und Stacey 2005, Zbiek 2001, Drijvers und Trouche 2007)

# 1.1 Konzeptuelles Wissen kann durch CAS gefördert werden

$$x^n - 1$$

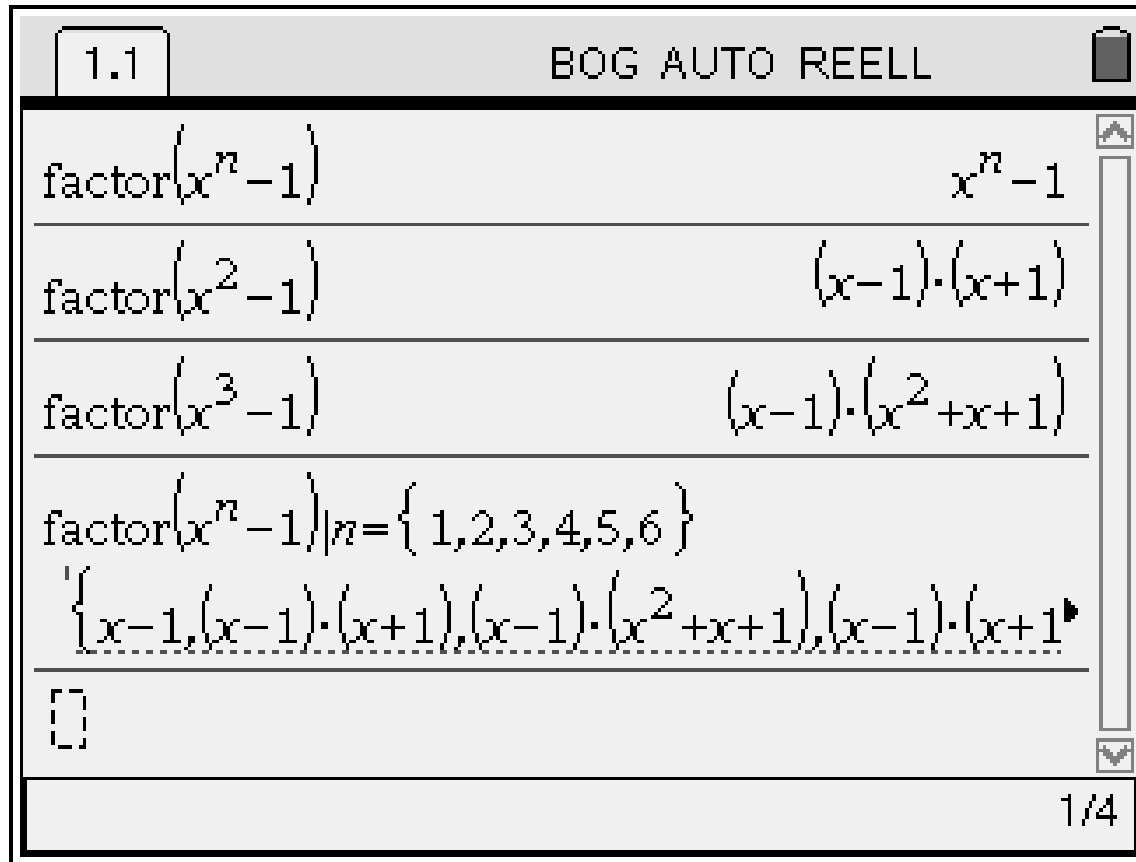
Some of the initial tasks of the activity

1. Perform the indicated operations:  $(x - 1)(x + 1)$ ;  $(x - 1)(x^2 + x + 1)$ .
2. Without doing any algebraic manipulation, anticipate the result of the following product  $(x - 1)(x^3 + x^2 + x + 1) =$
3. Verify the above result using paper and pencil, and then using the calculator.
4. What do the three expressions have in common? And, also, how do  $(x - 1)(x^3 + x^2 + x + 1)$ ,  $(x - 1)(x^2 + x + 1)$ , and  $(x - 1)(x^3 + x^2 + x + 1)$  relate to each other?
5. Explain the fact that when you multiply: (i) the two binomials above, (ii) the binomial with the trinomial above, and (iii) the binomial with the quadrinomial above, you always obtain a binomial as the product?
6. Is your explanation valid for the following equality:  $(x - 1)(x^{134} + x^{133} + x^{132} + \dots + x^2 + x + 1) = x^{135} - 1$ ? Explain.

Algebraic insight

(Kieran und Drijvers 2006)

# 1.1 Konzeptuelles Wissen kann durch CAS gefördert werden



Zeiteinsparung:

- verkürzt den gesamten Lösungsprozess

(Abdullah 2007)

- Ermöglicht direkten Abgleich von Input und Output

(Zeller und Barzel 2010)

CAS wird zum mathematischen Labor

(Cuoco und Levasseur 2003)

(Kieran und Drijvers 2006)

# 1.1 Konzeptuelles Wissen kann durch CAS gefördert werden

Factorization using paper and pencil	Result produced by the FACTOR command
$x^2 - 1 =$	$(x - 1) \cdot (x + 1)$
$x^3 - 1 =$	$(x - 1) \cdot (x^2 + x + 1)$
$x^4 - 1 =$	$(x - 1) \cdot (x + 1) \cdot (x^2 + 1)$
$x^5 - 1 =$	$(x - 1) \cdot (x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$
$x^6 - 1 =$	$(x - 1) \cdot (x + 1) \cdot (x^2 + x + 1) \cdot (x^2 - x + 1)$

## Vermutungen:

- Jedes der Polynome hat  $(x-1)$  als Faktor
- Polynome mit geradem Exponent haben zusätzlich  $(x+1)$  als Faktor

(Kieran und Drijvers 2006)

# 1.1 Konzeptuelles Wissen kann durch CAS gefördert werden

Übersetzungsprozess notwendig (Greefrath 2007)

```

1.1 BOG AUTO REELL
factor(x^3-1)      (x-1)·(x^2+x+1)
factor(x^n-1)|n={1,2,3,4,5,6}
{x-1,(x-1)·(x+1),(x-1)·(x^2+x+1),(x-1)·(x+1)·(x^2-x+1)}
expand({(x+1)·(x^2+x+1)·(x^2-x+1)})
{x^5+x^4+x^3+x^2+x+1}
    
```

produced by  
R command

Calculation to reconcile  
the two, if necessary

$(x^2 + 1)$   
 $(x^2 + x + 1)$

$(x-1) \cdot (x^3 + x^2 + x + 1)$

$$x^6 - 1 =$$

$$(x-1) \cdot (x+1) \cdot (x^2+x+1) \cdot (x^2-x+1)$$

$$(x-1) \cdot (x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)$$

$$x^n - 1 = (x - 1) (x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1)$$

(Kieran und Drijvers 2006)



## 1.2 Rechnerfreie Fertigkeiten können auch beim CAS-Unterricht erworben werden

---

### Kopfmathematik

*Interviewer:* Can you solve  $7x + 4 = 5x + 8$ ?

*Jer:* Well, you could, see, it would be like start at 4 and 8, this one would go up by 7, hold on, 8, 8 and 7, hold on, no, 4 and 7, 4 and 7 is 11. ...They'd be equal, like, 2 or 3 or something like that.

*Interviewer:* How are you getting that 2 or 3?

*Jer:* I'm just like graphing it in my head.

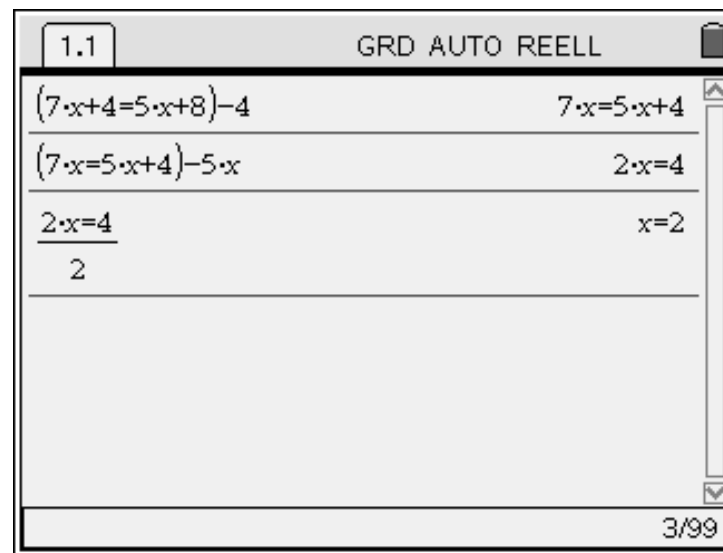
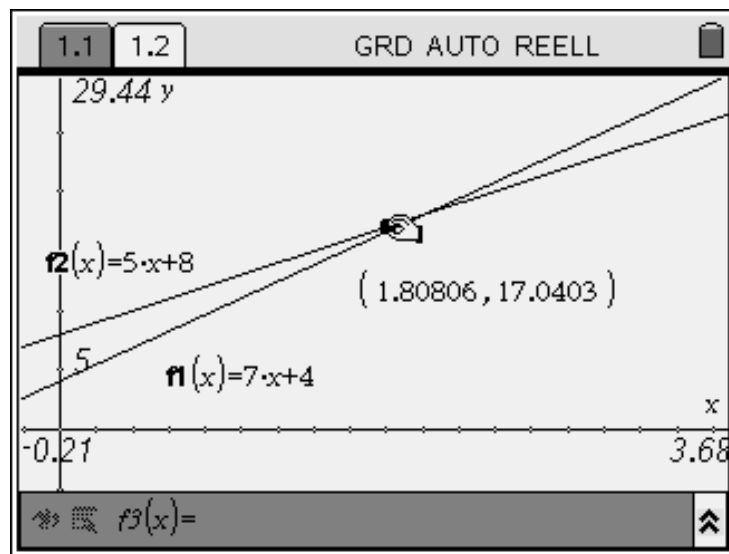
(Kieran und Yerushalmy 2004)

# 1.2 Rechnerfreie Fertigkeiten können auch beim CAS-Unterricht erworben werden

**Kopfmathematik**, auch auf Basis von CAS-Tätigkeiten (Ingelmann 2009)

- Prozedurale Fertigkeiten können mit CAS aufgebaut werden

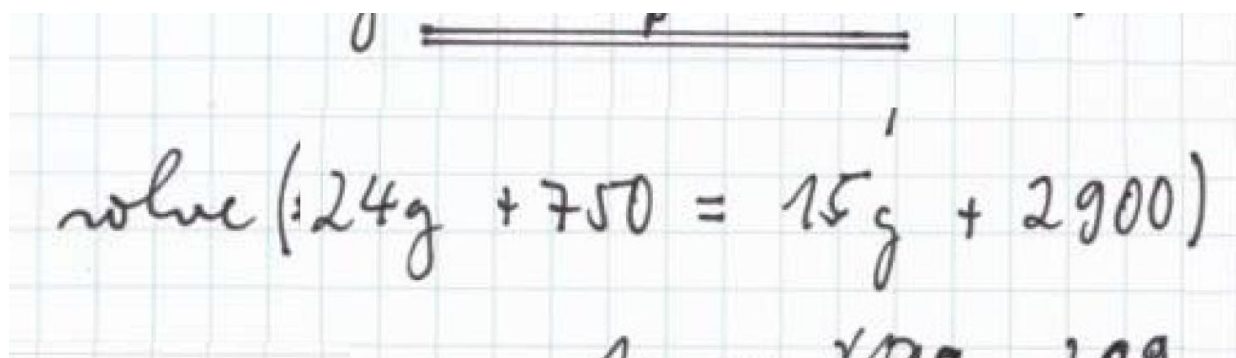
(Artigue 2004, Lagrange 2003)



- In vielen Bereichen möglich, z.B. Funktionen, Algebra, Geometrie (Weber 2010)

# 1.3 Nutzung mathematischer Sprache kann durch CAS angeregt werden

- Betonung mathematischer Aspekte beim Input (Drijvers 2003)
- Angleichung von ‚Papier-Sprache‘ möglich



## 1.3 Nutzung mathematischer Sprache kann durch CAS angeregt werden

- Betonung mathematischer Aspekte beim Input (Drijvers 2003)
- Angleichung von ‚Papier-Sprache‘ möglich
- Übersetzung des Output nötig (Greefrath 2007)

$$\text{solve}\left(\frac{1}{f} = \frac{1}{b} + \frac{1}{g}, g\right)$$

$$g = \frac{b \cdot f}{b - f}$$

$$\text{solve}\left(\frac{1}{f} = \frac{1}{b} + \frac{1}{g}, b\right)$$

$$b = \frac{f \cdot g}{f - g}$$

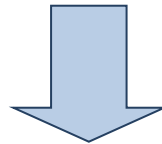
# 1.4 Technische Fertigkeiten können fachliche Ziele sinnvoll ergänzen

---

- Medienkompetenz beinhaltet auch rein technische Aspekte (Fuglestad 2005)

**3 Jahre, Jg. 8-10, 6 Klassen beteiligt**

**Welche Werkzeuge (TK, FP/CAS, DGS) nutzen Schüler/innen bei Aufgaben, bei denen grundsätzlich alle Werkzeuge weiterhelfen und zur Verfügung stehen?**



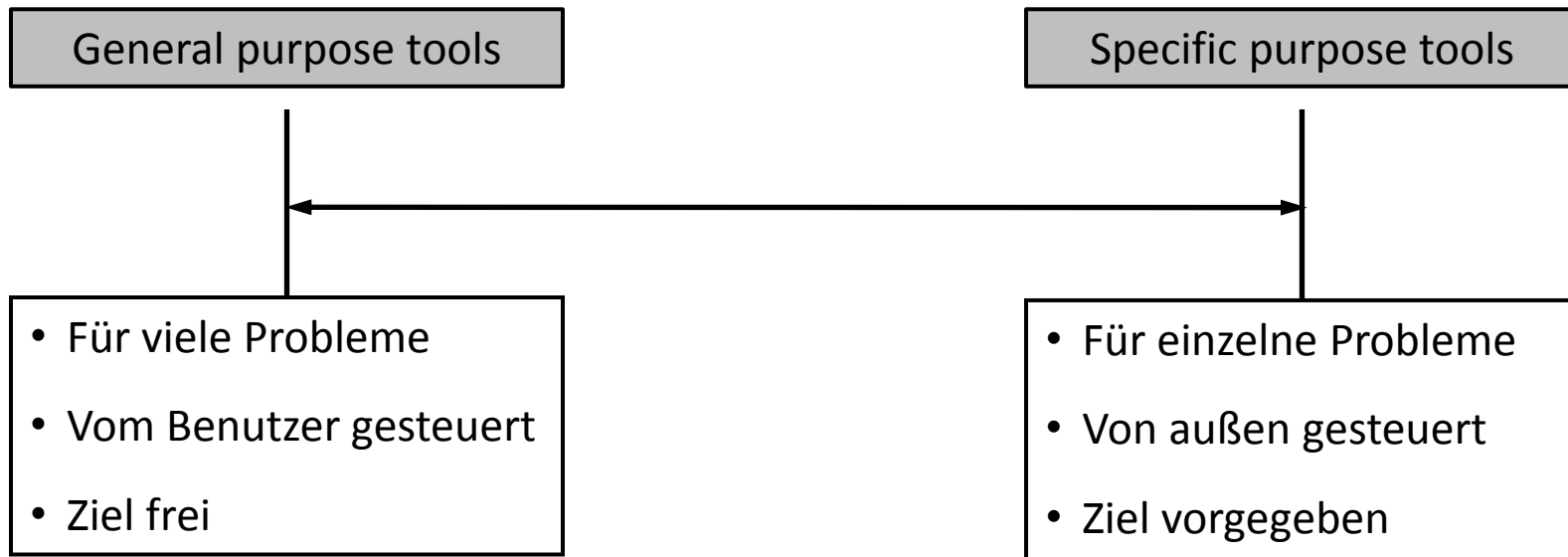
**Schüler/innen benutzen alle drei Werkzeuge und können ihre Wahl im Zusammenhang mit ihrem Lösungsweg begründen**

**Aber: Sofern sie die Werkzeuge alle kennen lernen!**



# 1.4 Technische Fertigkeiten können fachliche Ziele sinnvoll ergänzen

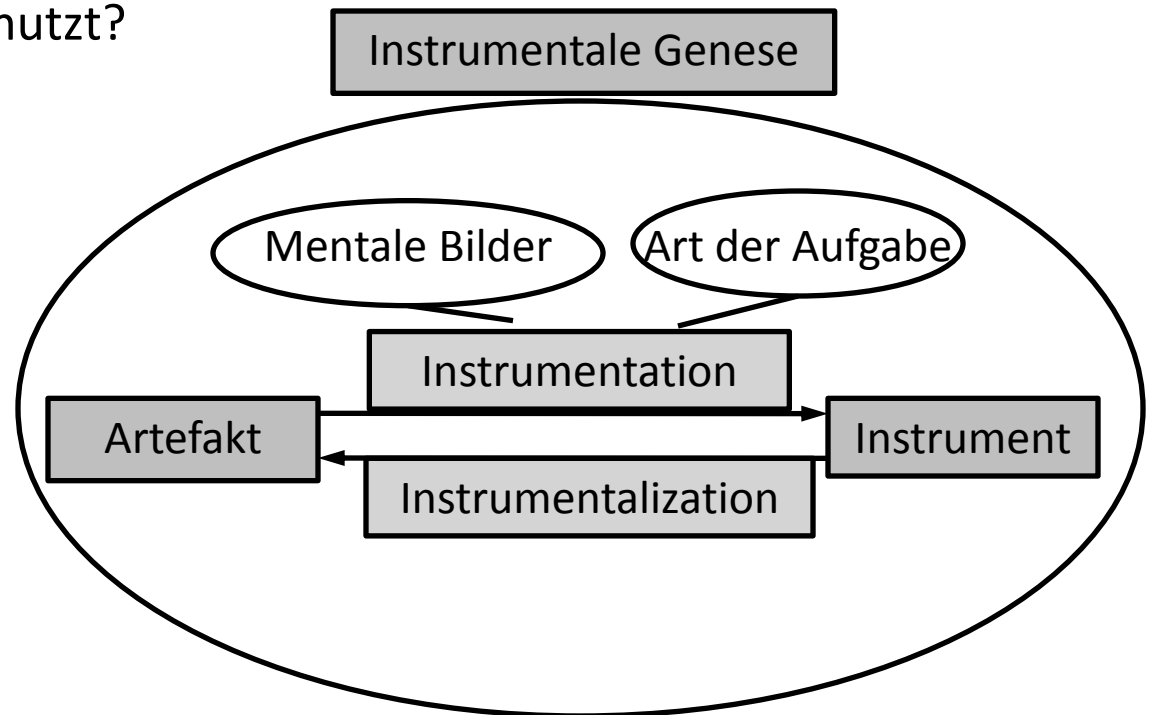
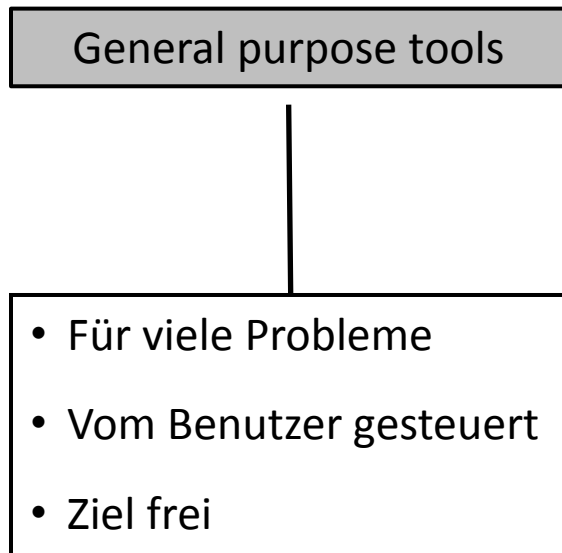
- Entscheiden Schüler oder Lehrer ob und wie ein Medium genutzt wird?



(Zbiek 2001)  
(Noss, Hoyles 1996)

# 1.4 Technische Fertigkeiten können fachliche Ziele sinnvoll ergänzen

- Wie werden Werkzeuge genutzt?



(Zbiek 2001)  
(Noss, Hoyles 1996)

(Drijvers, Trouche 2007)



# Übersicht

- 1 CAS beim Lernen
  - 1.1 Konzeptuelles Wissen kann durch CAS gefördert werden
  - 1.2 Rechnerfreie Fertigkeiten können auch beim CAS-Unterricht erworben werden
  - 1.3 Nutzung mathematischer Sprache kann durch CAS angeregt werden
  - 1.4 Technische Fertigkeiten können fachliche Ziele sinnvoll ergänzen
  
- 2 CAS beim Lehren
  - 2.1 CAS kann einen umfassenden, genetischen Aufbau der Unterrichtsinhalte begünstigen
  - 2.2 Integration offener Aufgaben wird durch CAS unterstützt
  - 2.3 CAS erhöht die Anzahl individueller Lösungswege
  - 2.4 Unterrichtsmethoden erscheinen mit CAS in einem neuem Licht
  
- 3 CAS in der Leistungsmessung
  - 3.1 Neue Aufgabenformate nötig um zusätzliche Kompetenzen zu überprüfen
  - 3.2 CAS kann die sprachlichen Anteile in Lösungen erhöhen
  - 3.3 CAS kann zu neuen Prüfungsformaten anregen

## 2 CAS beim Lehren

---

### 2.1 CAS kann einen umfassenden, genetischen Aufbau der Unterrichtsinhalte begünstigen

(Goldenberg 2003, Buchberger 1990, Kendal und Stacey 2001, Zeller und Barzel 2010)

### 2.2 Integration offener Aufgaben wird durch CAS unterstützt

(Challis und Gretton 2002, Doerr und Zangor 2000, Böhm et al. 2004)

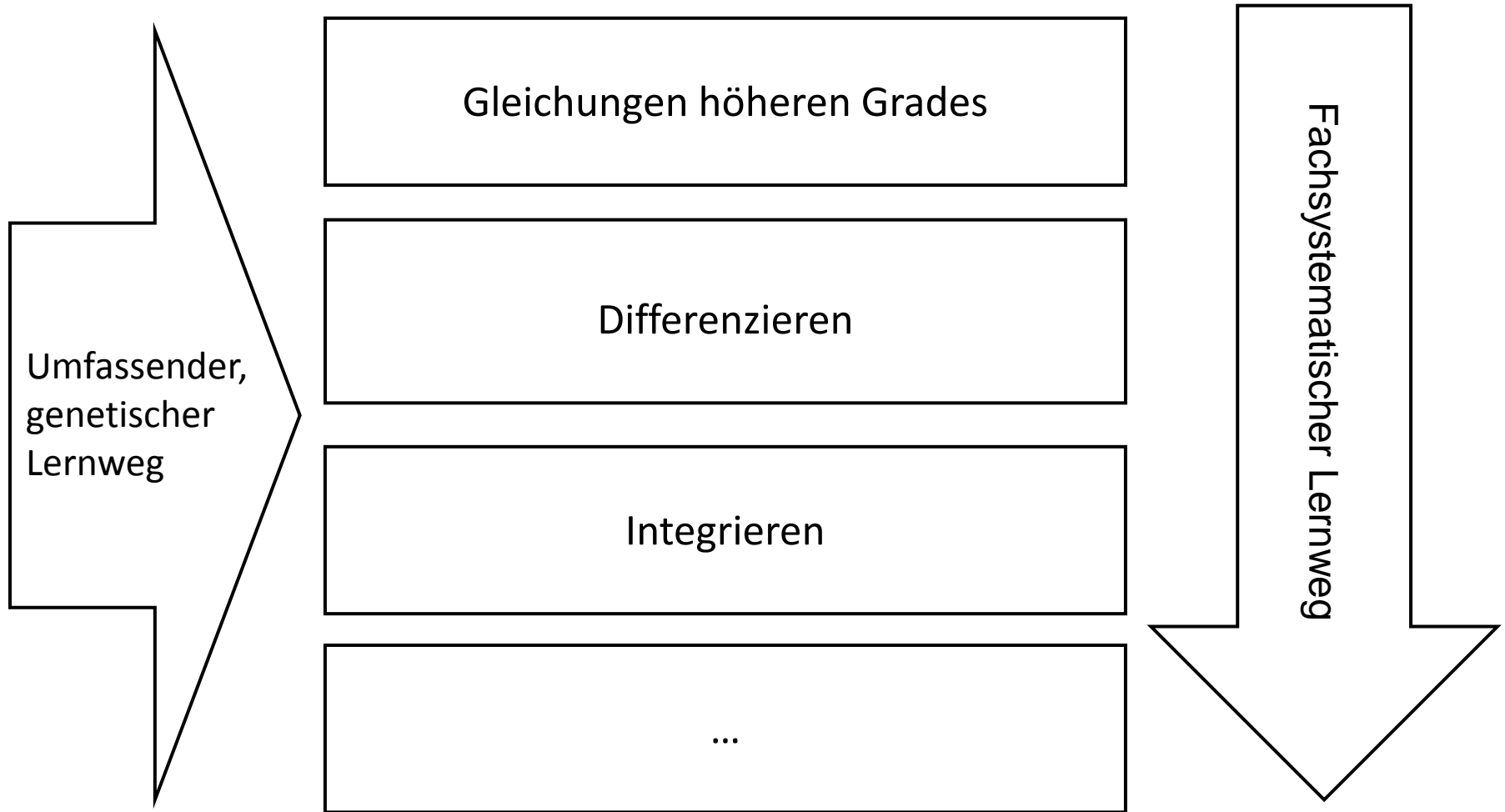
### 2.3 CAS erhöht die Anzahl individueller Lösungswege

(Heid und Blume 2008, Drijvers 2003, Laakman 2008, Leng 2003, Zeller und Barzel 2010)

### 2.4 Unterrichtsmethoden erscheinen mit CAS in einem neuem Licht

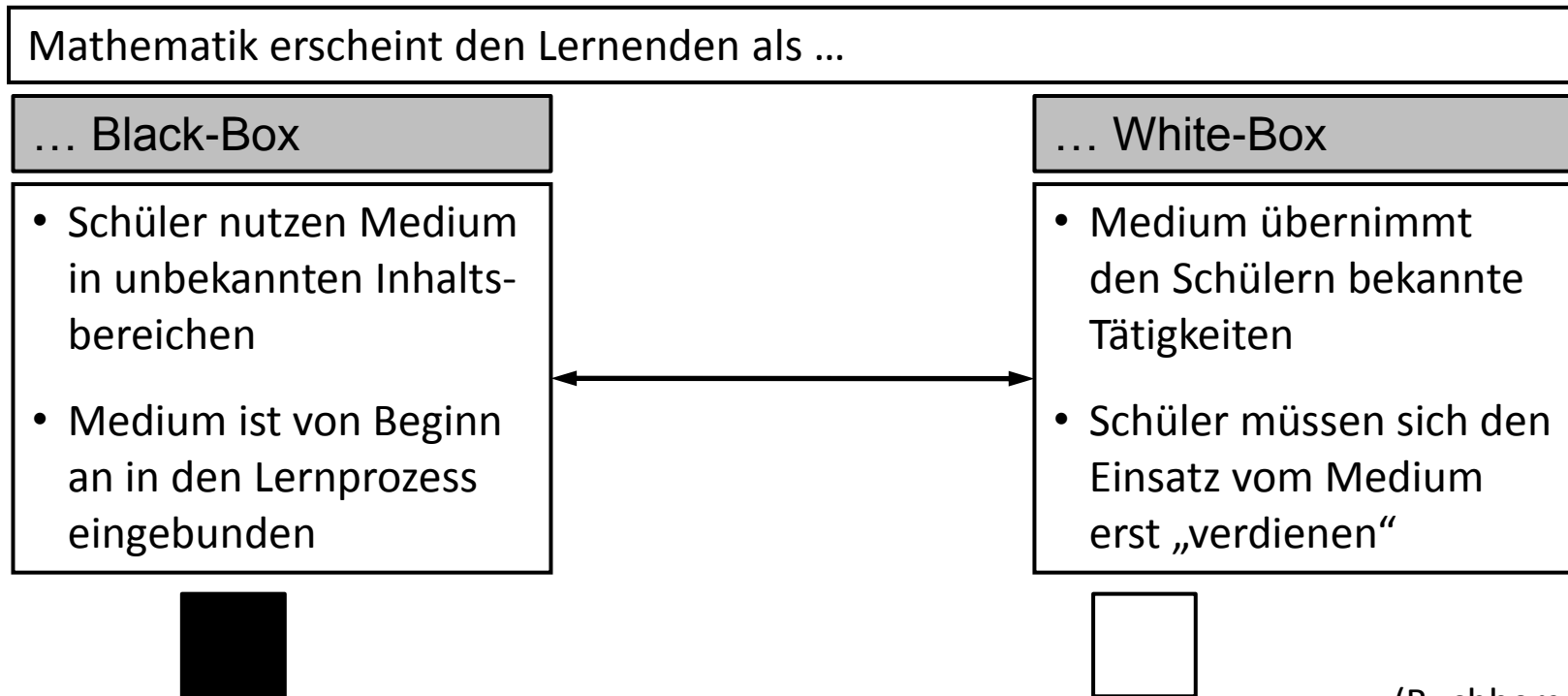
(Drijvers und Trouche 2007, Lagrange 2007, Ball und Stacey 2005, Barzel 2006)

## 2.1 CAS kann einen umfassenden, genetischen Aufbau der Unterrichtsinhalte begünstigen



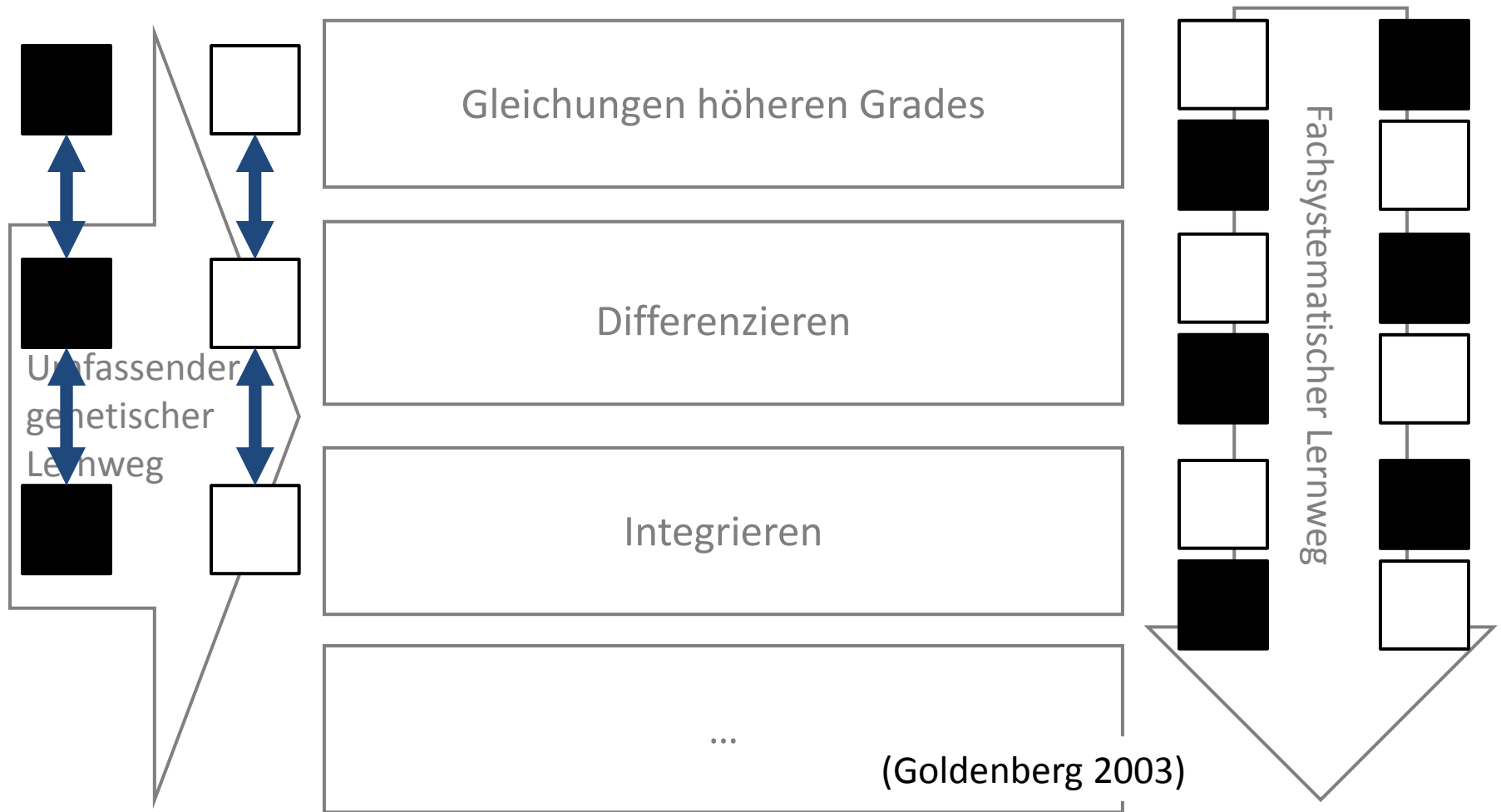
## 2.1 CAS kann einen umfassenden, genetischen Aufbau der Unterrichtsinhalte begünstigen

Wie transparent ist die vom Medium übernommene Mathematik?

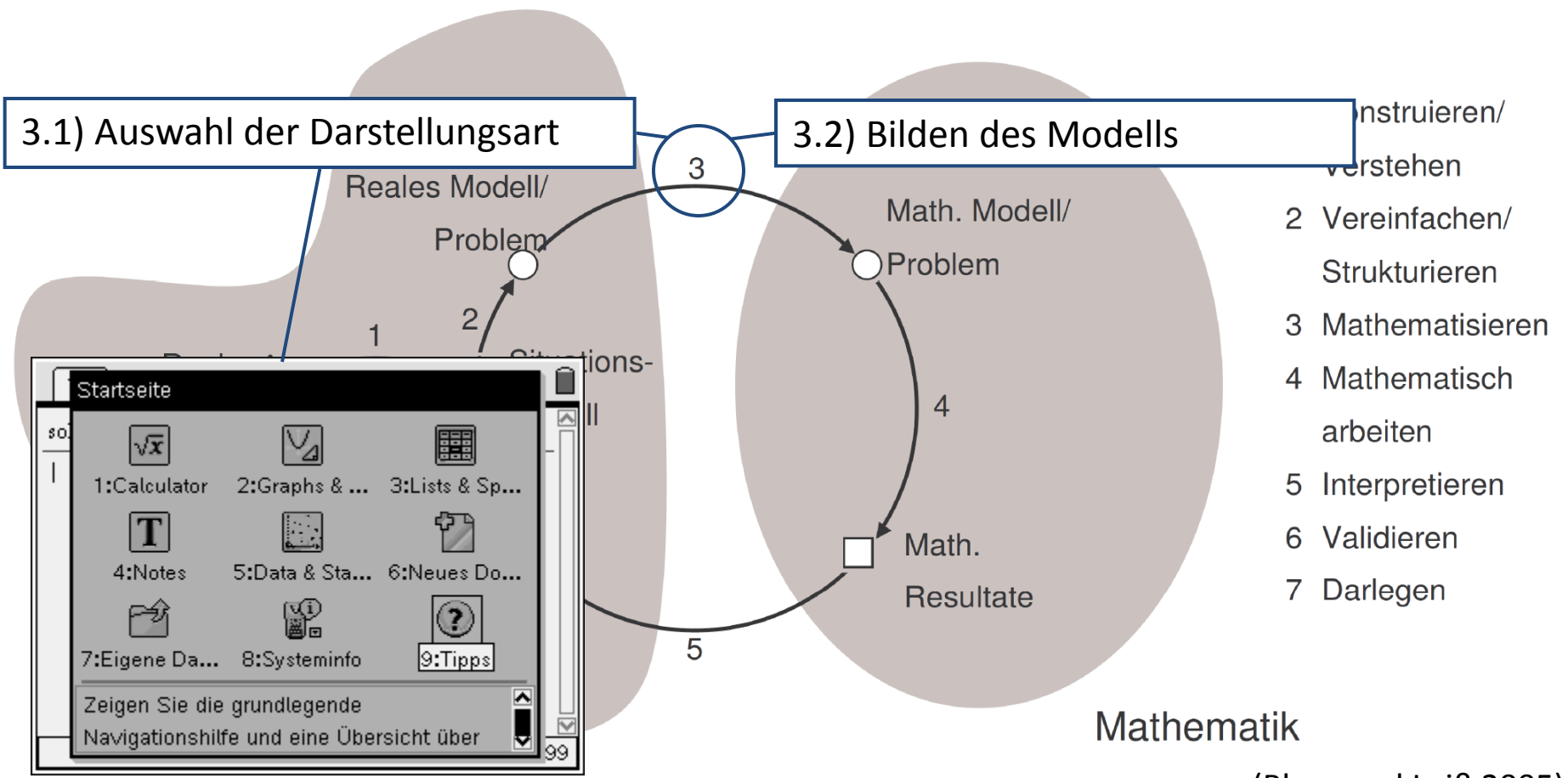


(Buchberger 1990)  
(Kendal und Stacey 2001)

## 2.1 CAS kann einen umfassenden, genetischen Aufbau der Unterrichtsinhalte begünstigen



## 2.2 Integration offener Aufgaben wird durch CAS unterstützt



## 2.2 Integration offener Aufgaben wird durch CAS unterstützt

Zeiteinsparung:

- verkürzt den gesamten Lösungsprozess
- Ermöglicht direkten Abgleich von ‚Math. Modell‘ und ‚Math. Resultat‘

1.1 GRD AUTO REELL

`solve(24·g+750=15·g+2900,g)`  $g=238.889$

Vergleich: *yuki-Event und Partymael*

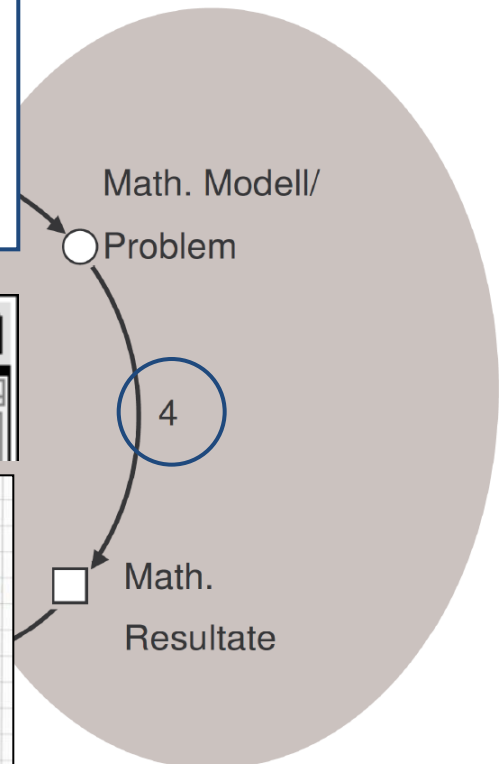
$$24x + 750 = 15x + 2900 \quad | -750$$

$$24x = 15x + 2150 \quad | -15x$$

$$9x = 2150 \quad | :9$$

$$x \approx 239$$

Bis 239 Gäste ist das *yuki-Event* günstiger.



- 1 Konstruieren/  
Verstehen
- 2 Vereinfachen/  
Strukturieren
- 3 Mathematisieren
- 4 Mathematisch  
arbeiten
- 5 Interpretieren
- 6 Validieren
- 7 Darlegen

Mathematik

(Blum und Leiß 2005)

## 2.2 Integration offener Aufgaben wird durch CAS unterstützt

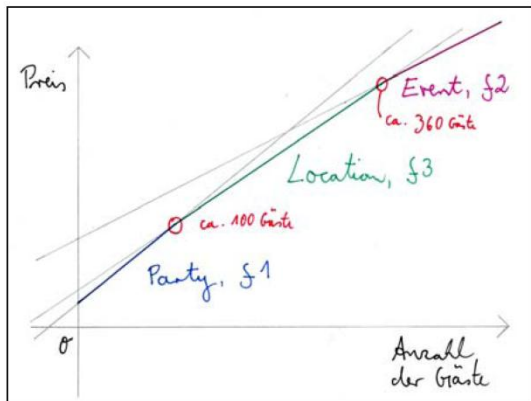
- Einbezug realistischer und ausgefallener Daten (Kendal und Stacey 2001)
- Aufgabenstellung wird freier (Drijvers 2003)





# 2.3 CAS erhöht die Anzahl individueller Lösungswege

- Theoretisch mindestens doppelt so viele Lösungswege



Gäste	Preis für... in €			KLASSENFEIER
	Party	Event	Location	
112	3438	4580	3440	
113	3462	4595	3460	
...	...	...	...	
339	8886	7985	7980	
340	8910	8000	8000	
341	8934	8015	8020	
	bis 112 Gäste	zwischen 113 und 340 Gäste	ab 341 Gäste	

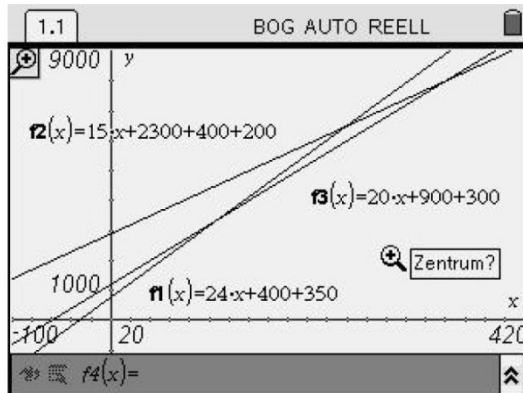
Klassenfeier

$$\begin{aligned} \text{Yuki-Event} &= 24x + 400 + 350 \\ &= 24x + 750 \\ \text{Partymad} &= 15x + 2900 \\ \text{Flask} &= 20x + 1200 \end{aligned}$$

Vergleich: Yuki-Event und Partymad

$$\begin{aligned} 24x + 750 &= 15x + 2900 & | -750 \\ 24x &= 15x + 2150 & | -15x \\ 9x &= 2150 & | :9 \\ x &\approx 239 \end{aligned}$$

Bis 239 Gäste ist das Yuki-Event günstiger!



x	f1(x):= 24*x+400	f2(x):= 15*x+230	f3(x):= 20*x+900
338.	8862.	7970.	7960.
339.	8886.	7985.	7980.
340.	8910.	8000.	8000.
341.	8934.	8015.	8020.
342.	8958.	8030.	8040.
343.	8982.	8045.	8060.
344.	9006.	8060.	8080.
345.	9030.	8075.	8100.

24\*x+400+350=20\*x+900+300

$$24x+750=20x+1200$$

$$(24x+750=20x+1200)-20x \quad 4x+750=1200$$

$$(4x+750=1200)-750 \quad 4x=450$$

$$\frac{4x=450}{4} \quad x=112.5$$

solve(f2(x)=f3(x),x) x=340

5/99

## 2.3 CAS erhöht die Anzahl individueller Lösungswege

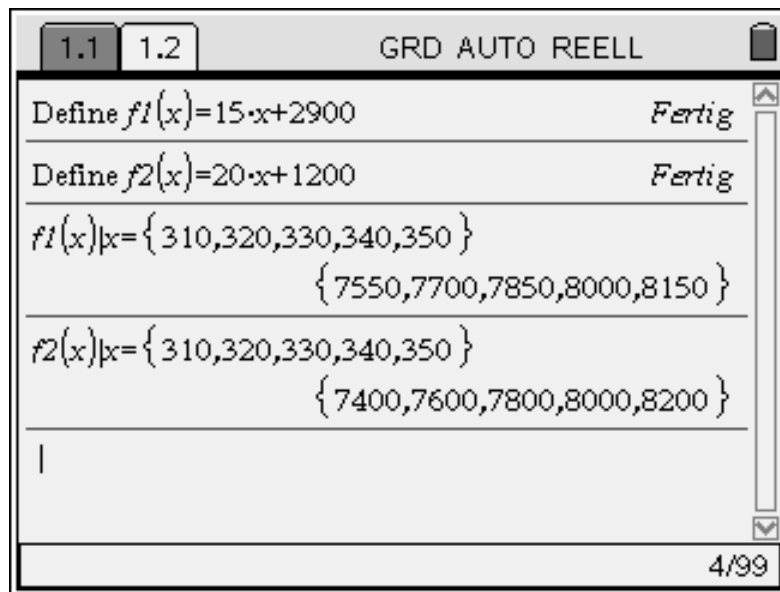
---

- Theoretisch mindestens doppelt so viele Lösungswege
- Das Medium beeinflusst die Wahl der Repräsentation (Drijvers 2003)

- 87: Lea: Ich denke wir sollten noch mehr Angebote ausprobieren und sie mit Partymad vergleichen.
- 88: Markus: Dann müssen wir für jedes Angebot eine Gleichung rechnen.
- 89: Lea: Ich denke wir könnten den Graph vom neuen Angebot zeichnen und verändern. [nimmt ihren Taschenrechner]
- 90: Jana: Dann müssen wir nicht die ganzen Rechnungen machen.
- 91: Lea: Wir müssen den Schnittpunkt von beiden Angeboten anschauen.

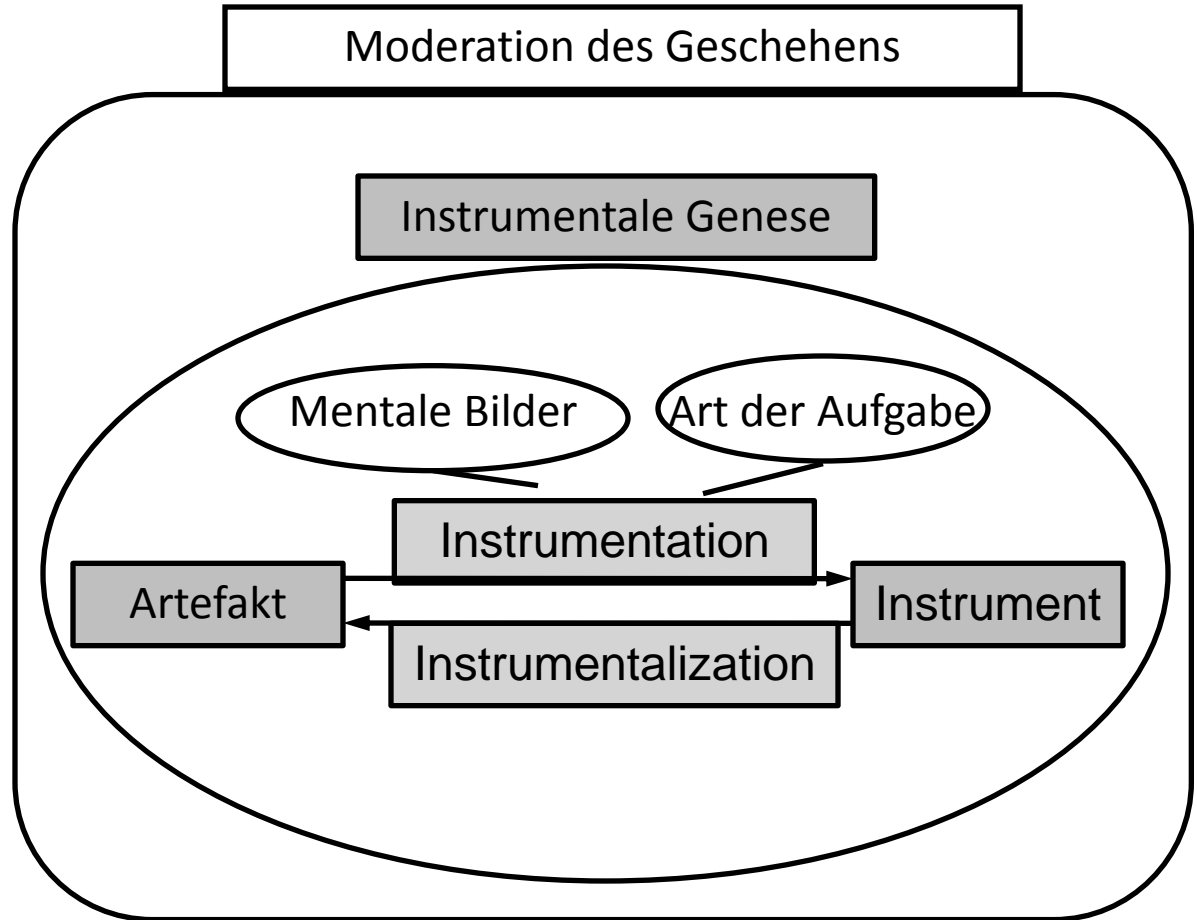
## 2.3 CAS erhöht die Anzahl individueller Lösungswege

- Theoretisch mindestens doppelt so viele Lösungswege
- Das Medium beeinflusst die Wahl der Repräsentation (Drijvers 2003)
- Einzelne Lösungswege können umgangen werden (Heid und Blume 2008)



## 2.4 Unterrichtsmethoden erscheinen mit CAS in einem neuem Licht

- Der Lehrer moderiert und dirigiert das Unterrichtsgeschehen (Drijvers und Trouche 2007)



(Drijvers und Trouche 2007)

## 2.4 Unterrichtsmethoden erscheinen mit CAS in einem neuem Licht

- Der Lehrer moderiert und dirigiert das Unterrichtsgeschehen (Drijvers und Trouche 2007)
- Verstärkte individuelle Auseinandersetzungen in informellen Gesprächen (Barzel 2006)
- Bewusstes Gestalten und Wechseln von lehrer- und schülerzentrierten Phasen (Ball und Stacey 2005)



# Übersicht

- 1 CAS beim Lernen
  - 1.1 Konzeptuelles Wissen kann durch CAS gefördert werden
  - 1.2 Rechnerfreie Fertigkeiten können auch beim CAS-Unterricht erworben werden
  - 1.3 Nutzung mathematischer Sprache kann durch CAS angeregt werden
  - 1.4 Technische Fertigkeiten können fachliche Ziele sinnvoll ergänzen
  
- 2 CAS beim Lehren
  - 2.1 CAS kann einen umfassenden, genetischen Aufbau der Unterrichtsinhalte begünstigen
  - 2.2 Integration offener Aufgaben wird durch CAS unterstützt
  - 2.3 CAS erhöht die Anzahl individueller Lösungswege
  - 2.4 Unterrichtsmethoden erscheinen mit CAS in einem neuem Licht
  
- 3 CAS in der Leistungsmessung
  - 3.1 Neue Aufgabenformate nötig um zusätzliche Kompetenzen zu überprüfen**
  - 3.2 CAS kann die sprachlichen Anteile in Lösungen erhöhen**
  - 3.3 CAS kann zu neuen Prüfungsformaten anregen**

# 3 CAS in der Leistungsmessung

---

## 3.1 Neue Aufgabenformate nötig um zusätzliche Kompetenzen zu überprüfen

(Neill 2009, Pallack 2007, Ball und Stacey 2005, Kieran und Drijvers 2006)

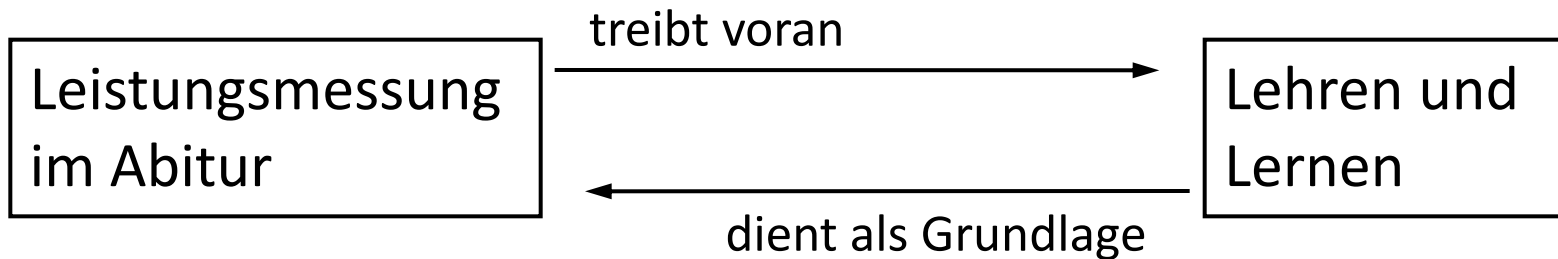
## 3.2 CAS kann die sprachlichen Anteile in Lösungen erhöhen

(Bardini et al. 2004, Weigand 2006, Brown 2003, Bradford et al. 2009, Bichler 2007)

## 3.3 CAS kann zu neuen Prüfungsformaten anregen

(Bichler 2007, Brown 2003, Thomas et al. 2004, Weigand 2006)

# 3.1 Neue Aufgabenformate nötig um zusätzliche Kompetenzen zu überprüfen

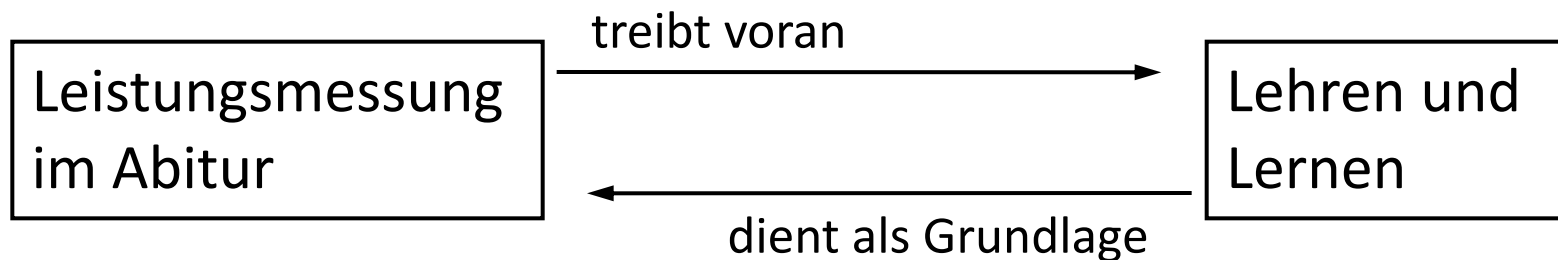


## Zum Status Quo:

- Nur geringe Unterschiede zwischen CAS und traditionellen Prüfungsaufgaben (Brown 2003, Pallack 2007, Weigand 2006)
- Ein Grund: Prüfungsaufgaben sind weniger offen wie Lernaufgaben (Objektivität)
- CAS- Aufgaben haben höhere Komplexität, höhere sprachliche Anforderungen, mehrere Zugänge und Modellierungen, adäquater Medieneinsatz (Pallack 2007)
- Mehr Lösungsstrategien möglich durch CAS (Brown 2003, Weigand 2006)



## 3.1 Neue Aufgabenformate nötig um zusätzliche Kompetenzen zu überprüfen



### Vorschläge:

- Keine Änderung der Aufgaben nötig, wenn gleiche Lernziele verfolgt werden (Bauer 2006), aber instrumentelles Wissen als Zusatz
- Kompetenzmodell muss entwickelt werden (Weigand 2010)
- Es soll nicht die Fähigkeit Ergebnisse von CAS zu bekommen geprüft werden, sondern mathematisches Verständnis (Neill 2009)
- Klare Vorgaben zur Notation (Ball und Stacey 2005)
- CAS kann direkt in Aufgabenstellungen eingebunden werden (Kieran & Drijvers 2006)

## 3.1 Neue Aufgabenformate nötig um zusätzliche Kompetenzen zu überprüfen

Q.5 The following equation has  $x = 2$  and  $x = 2/3$  as solutions:

$$x(2x - 4) + (-x+2)^2 = -3x^2 + 8x - 4$$

- (i) Precisely what does it mean to say that “the values 2 and  $2/3$  are solutions of this equation”?
- (ii) Use the CAS to show that: (a) the two values above are indeed solutions, and  
(b) there are no other solutions.

What I entered into the CAS	What the CAS displays <u>and</u> my interpretation of it

- (iii) Are the expressions on the left- and right-hand sides of this equation equivalent?  
Please explain.

(Kieran und Drijvers 2006)

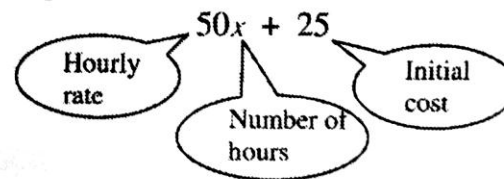
## 3.2 CAS kann die sprachlichen Anteile in Lösungen erhöhen

---

- Keine Belohnung für Umformungen und Zwischenergebnisse  
(Ball und Stacey 2005)
- Zwischenschritte schwerer zu bewerten, da individuell (Ball und Stacey 2003)
- Klare Vorgaben wichtig, was im Vordergrund steht:  
Ergebnis oder Lösungsprozess (Brown 2003)
- Schwerer zu bewerten, da individuelle Wege und Medieneinsatz bewertet werden müssen (Bradford et al. 2009)

## 3.2 CAS kann die sprachlichen Anteile in Lösungen erhöhen

<i>Student</i>	<i>Pre-test response</i>	<i>Post-test response</i>
5	Add \$50 onto every number from #9 until you get to #14	Bob's prices go up by fifty dollars an hour starting at \$25. $50 \times 14 = \$700$ , plus the starting 25, and it would cost \$725.
8	Well you find out how much it cost per day and $\times 4$	Bob: Well the initial cost is \$25, so you would add that to they're hourly, which for Bob is, \$50 per hour. So the equation would be.



(Bardini et al. 2004)

## 3.3 CAS kann zu neuen Prüfungsformaten anregen

---

- Verbot von CAS in Prüfungen führt zu Nichteinsetzen im Unterricht  
(Bichler 2007)
- Einordnung von Aufgaben: Required / optional / neutral / excluded  
(Brown 2003)
- Referate und Präsentationen zeigen  
Kompetenzen wie Beschreiben, Präsentieren, Argumentieren  
(Thomas et al. 2004)

# Gelingensbedingungen und Empfehlungen

---

## 1. CAS - verpflichtend im Curriculum

Zunächst Einbindung erst in Oberstufe,  
dann in Mittelstufe

# Gelingensbedingungen und Empfehlungen

---

1. CAS - verpflichtend im Curriculum

2. CAS - verpflichtend im Abitur

- Aufteilung von Prüfungsaufgaben mit/ ohne Rechner
- Schrittweise Änderung von Aufgaben, um weitere Kompetenzen zu testen
- Entwicklung von Kompetenzmodellen
- weitere Prüfungsformate einbinden (z.B. Präsentation)

# Gelingensbedingungen und Empfehlungen

---

1. CAS - verpflichtend im Curriculum
2. CAS - verpflichtend im Abitur
3. Lehrerbildung verstärken

Drei Herausforderungen :

- Mathematik lernen mit Medien
- Medieneinsatz bewusst gestalten
- Denk- und Lernprozesse beim Medieneinsatz anregen & erforschen



# Gelingensbedingungen und Empfehlungen

---

1. CAS - verpflichtend im Curriculum
2. CAS - verpflichtend im Abitur
3. Lehrerbildung verstärken
4. Netzwerke für Eltern, Lehrer und Schüler
5. Strukturellen Rahmen klären

Anschaffung der Geräte:  
Finanzierung und Modelle

# Rückblick und Ausblick

---

- Qualitative Interventionsstudien zeigen deutliche Ergebnisse:
  - Lehren und Lernen kann durch CAS unterstützt werden
  - Das Potential von CAS wird durch eine kognitiv aktivierende Unterrichtsgestaltung mit Fokus auf konzeptionellem Wissen besonders ausgeschöpft
- Nur wenige quantitative, vergleichende Feldstudien, die nur geringe Effekte hinsichtlich klassischer Leistungsmessung zeigen

Weitere Forschung zur Unterrichtsentwicklung ist nötig:

- Unterrichtseinheiten auf Basis aktueller Forschungsergebnisse
- Zentrale Steuerung des CAS-Einsatzes (Prüfungen, Curricula)
- Lehrerfortbildungen und Netzwerke
- Öffentlichkeitsarbeit (Schüler, Lehrer, Eltern)

---

Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit!