Fourieranalysis + Distributionen | WS 15/16

§1 Einführung

1. Motivation

Grundidee der FA: Geg. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ 2π-period.

Schreibe f als $f(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k e^{ikx}$ Fourierreihe von f

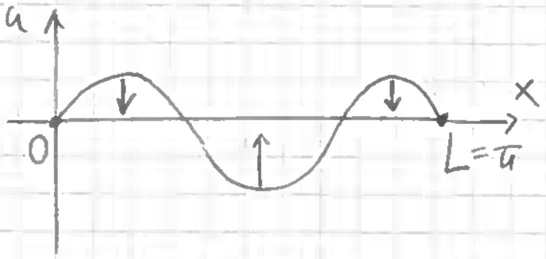
Falls $\sum |c_k| < \infty \Rightarrow c_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx}\, dx =: \hat{f}(k)$

k-ter Fourierkoeff. von f

Konvergenzfragen!

Anwendung (z.B.): Lsg partieller DGL

Bsp: Schwingende Saite:



$u(x,t)$: vertikale Auslenk. am Ort x zur Zeit t

Schwingungsgl.: $u_{xx} = u_{tt}$

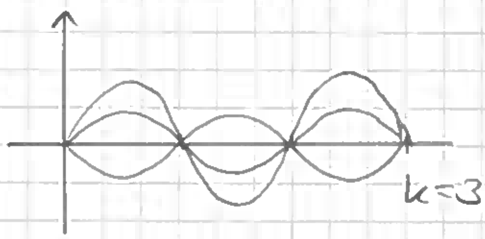
Randbed: $u(0,t) = u(\pi,t) = 0$

Separationsansatz: $u(x,t) = v(x)w(t)$

$\rightsquigarrow u(x,t) = (a\cos(kt) + b\sin(kt))\cdot\sin(kx)$; $a,b\in\mathbb{R}$, $k\in\mathbb{N}$

„Grundschwingungen"

zeitl. Moment-aufnahmen



Superposition liefert Lsg d. Form

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} (a_k\cos(kt) + b_k\sin(kt))\cdot\sin(kx) \qquad (*)$$

Konvergenz? Ist jede Lsg von dieser Form?

AWP: $u(x,0) \overset{!}{=} f(x)$, $u_t(x,0) \overset{!}{=} g(x)$

legt a_k, b_k fest.

f,g glatt genug $\Rightarrow$ $(*)$ löst das AWP

Fourieranalysis auf $\mathbb{R}$ (analog $\mathbb{R}^d$):

Darst. von $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ als Überlagerung von Schwingungen mit bel. Perioden:

$$(*) \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} g(\xi) e^{i\xi x} d\xi$$

Falls $f \in L^1(\mathbb{R}) \Rightarrow (*)$ gilt mit

$$g(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-i\xi x} dx =: \underbrace{\hat{f}(\xi)}_{\text{Fouriertrafo von } f}, \text{ sofern auch } \hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$$

Wichtig: $\widehat{f'}(\xi) = i\xi \hat{f}(\xi)$

Anwendungen: PDG, Physik, Stochastik ...

Lsg von PDG erfordert Erweiterung des Lsg-Begriffs
$\rightsquigarrow$ Distributionen (verallgemeinern Fkt im funktionalen Sinne, bel. oft diffbar)

Begründer: L. Schwartz, 1944/45 (Vorläufer: Dirac, Sobolev)

Grobe Gliederung:

1. Fourieranalysis im $\mathbb{R}^d$
2. (kürzer) Fourierreihen + Querverbind. zu 1. (Poisson-Summ.)
3. Distributionen, Paley-Wiener-Sätze (Träger einer Fkt / Distr. aus Wachstumsverh. der F.T.)
4. Anwend. auf lineare Diff. Operatoren
   (Fundamentallösungen, Regularitätsfragen)

(5. Poisson-Integrale, H^p-Theorie)

2. L^p-Räume

(Lit.: Folland, Real Analysis)

$(X, \mathcal{A}, \mu)$ Maßraum

(d.h. X Menge, $\mathcal{A}$ σ-Alg. auf X, $\mu : \mathcal{A} \to [0,\infty]$ (pos.) Maß

Bsp: X top. Raum;

$\mathcal{A} = \sigma(\{U \subseteq X \text{ offen}\}) = \mathcal{B}(X)$ Borel-σ-Alg. von X

Maße auf $\mathcal{B}(X)$ heißen Borelmaße

Bei uns oft: $X \subseteq \mathbb{R}^d$ offen, $\mu = \lambda_d$ d-dim. Lebesgue-Maß auf $\mathcal{B}(X)$

Def. $1 \leq p \leq \infty$

$\mathcal{L}^p(\mu) = \mathcal{L}^p(X,\mu) := \{f : X \to \mathbb{C}$ ($\mathcal{A}$-) meßbar, $\|f\|_p < \infty\}$

wo $\|f\|_p = \left(\int_X |f|^p d\mu\right)^{1/p}$, $p < \infty$

$\|f\|_\infty = \operatorname{ess\,sup}_{x \in X} |f(x)| = \inf\{c \geq 0 : |f| \leq c \ \mu\text{-f.ü.}\}$

Wichtige Ungleichungen (ohne Bew.):

1.1. Satz $1 \leq p, p' \leq \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ (d.h. p, p' konjugiert)

$f, g : X \to \mathbb{C}$ meßbar $\Rightarrow$

(1) $\int_X |fg| \, d\mu \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_{p'}$ (Hölder-Ungl.)

(2) $\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$ (Minkowski-Ungl. bzw Δ-Ungl.)

$\mathcal{L}^p(\mu)$ ist $\mathbb{C}$-VR mit Halbnorm $\|.\|_p$

Normierte Versionen:

$\mathcal{N}(\mu) = \{f : \Omega \to \mathbb{C} : f = 0 \text{ f.ü.}\}$ UVR von $\mathcal{L}^p(\mu)$

$L^p(\mu) := \mathcal{L}^p(\mu) / \mathcal{N}(\mu)$

1.2 Satz v. Riesz-Fischer ($1 \leq p \leq \infty$)

$L^p(\mu)$ ist BR mit induz. Norm $\|.\|_p$, $L^2(\mu)$ ist HR mit $\langle f, g \rangle = \int f \bar{g} \, d\mu$

Bem: $\mu(X) < \infty \Rightarrow L^p(\mu) \subseteq L^q(\mu)$ für $p > q$ (Üb., mit Hölder)

Falls $X \subseteq \mathbb{R}^d$ Borelmenge (z.B. offen), λ_d Lebesgue-Maß auf X:
$L^p(X, \lambda_d) =: L^p(X)$

§2 Fourier-Transformation + Faltung auf $\mathbb{R}^d$

1. Fourier-Trafo

Multiindex-Notation: $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{N}_0^d$ Multiindex

$|\alpha| := \alpha_1 + \dots + \alpha_d$ (Ordnung von α)

$\alpha! = \alpha_1! \cdot \ldots \cdot \alpha_d!$

Für $x \in \mathbb{R}^d$ (oder $\mathbb{C}^d$): $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot x_d^{\alpha_d}$

Ableitungsop.: $\partial_j = \frac{\partial}{\partial x_j}$, $\partial^\alpha = \partial_1^{\alpha_1} \cdots \partial_d^{\alpha_d}$; $D_j = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_j}$;
$D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \cdots D_d^{\alpha_d}$

Def. Fouriertransformierte von $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$:

$$\hat{f}(\xi) := \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-i\langle \xi, x\rangle} \, dx, \quad \xi \in \mathbb{R}^d$$

$\uparrow$ Lebesgue-M. $\qquad \langle \cdot, \cdot \rangle$: Standard-Skalarprod.

Stetigkeitssatz f. Parameterintegrale

$\Rightarrow \hat{f} \in C_b(\mathbb{R}^d)$ mit $\|\hat{f}\|_\infty \le \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \|f\|_1$; $f \mapsto \hat{f}$ linear auf $L^1(\mathbb{R}^d)$)

$\uparrow$ stetig + beschr.

Bez: Für $z \in \mathbb{C}^d$ setze $e_z(x) := e^{i\langle z, x\rangle}$, $x \in \mathbb{R}^d$

(1) $e_z(x+y) = e_z(x) \cdot e_z(y)$

(2) $\xi \in \mathbb{R}^d \Rightarrow e_\xi : (\mathbb{R}^d, +) \to (\mathbb{T}, \cdot)$ ist stetiger Gruppenhomom.
$\quad \mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$

Die e_ξ, $\xi \in \mathbb{R}^d$ sind die sog. Charaktere der Gruppe $(\mathbb{R}^d, +)$
(→ Übungen)

(3) e_ξ ist gemeinsame Eigenfkt aller D^α: $\quad D^\alpha e_\xi = \xi^\alpha e_\xi$

Für $f: \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$, $y \in \mathbb{R}^d$ setze

$$L_y f(x) := f(x-y) \qquad \text{Translationsoperator}$$

$\widehat{L_y f}(\xi) = \int f(x-y) e^{-i\langle \xi, x\rangle}$
$= \int f(x) e^{-i\langle \xi, x\rangle}$
$e^{-i\langle \xi, y\rangle}$

2.1. <u>Lemma</u> $f \in L^1(\mathbb{R}^d) \Rightarrow$

1. $\widehat{L_y f}(\xi) \underset{dx \text{ transl. invar.}}{=} e^{-i\langle \xi, y\rangle} \hat{f}(\xi)$, d.h. $\widehat{L_y f} = e_{-y} \hat{f}$ ← Modulation
2. $\widehat{e_y f}(\xi) = \hat{f}(\xi - y)$, d.h. $\widehat{e_y f} = L_y \hat{f}$
3. $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $f_c(x) = \frac{1}{|c|^d} f\left(\frac{x}{c}\right) \Rightarrow \hat{f_c}(\xi) = \hat{f}(c\xi)$
4. $f^*(x) := \overline{f(-x)} \Rightarrow \widehat{f^*} = \overline{\hat{f}}$
5. $A \in GL(d, \mathbb{R}) \Rightarrow (f \circ A)^\wedge = \frac{1}{|\det A|} \hat{f} \circ (A^{-1})^t$ (Übung)

   wo $(f \circ A)(x) = f(Ax)$

Insbes.: f radial, d.h. $f \circ A = f$ f.ü. $\forall A \in SO(d) \Rightarrow$
$\hat{f}$ ebenfalls radial

2.2. <u>Faltung</u>

<u>Def.</u> Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ offen. $L^1_{loc}(\Omega) = \{ f: \Omega \to \mathbb{C}$ meßbar, $\int_K |f| dx < \infty \ \forall$ komp. $K \subseteq \Omega \} / \sim$

$1 \leq p \leq \infty \Rightarrow L^p(\Omega) \subseteq L^1_{loc}(\Omega)$, denn

$$\int_\Omega |f| \cdot 1_K \, dx \underset{\text{Hölder}}{\leq} \|f\|_p \cdot \|1_K\|_{p'} < \infty$$

<u>Def.</u> Seien $f, g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$. Für $x \in \mathbb{R}^d$ definiere die Faltung

$$f * g(x) := \int_{\mathbb{R}^d} f(y) g(x-y) \, dy \qquad \text{(Superposition gewichteter Translate von } g\text{)}$$

sofern das Integral exist. (evtl. mit Wert ∞, falls $f, g \geq 0$)

Die Faltung ist kommutativ, d.h.:
$f * g(x)$ exist. $\underset{\text{Subst. } x-y=y'}{\Longrightarrow}$ $g * f(x)$ exist., und beide sind gleich.

Def. Träger von $f \in L^1_{loc}(\Omega)$:

$\operatorname{Tr} f := \Omega \setminus \mathcal{U}_f$, $\mathcal{U}_f = \bigcup \{ \mathcal{U} \subseteq \Omega$ offen, $f = 0$ f.ü. auf $\mathcal{U} \}$

$\mathcal{U}_f$: größte offene Menge, auf der f f.ü. verschwindet. In der Tat $f = 0$ f.ü. auf $\mathcal{U}_f$, denn: $\mathcal{U}_f = \bigcup_{i=1}^{\infty} K_i$, $K_i \subseteq \Omega$ kompakt

Aber $f = 0$ f.ü. auf K_i (wird durch endlich viele der $\mathcal{U}$'s oben überdeckt)

$\operatorname{Tr} f$ ändert sich nicht, wenn man f auf Nullm. abändert

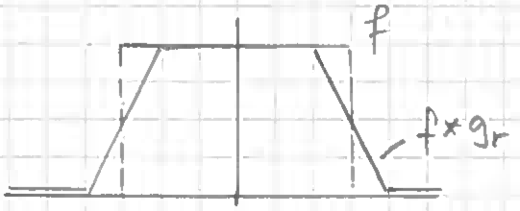
2.2. Lemma $f, g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$, $f * g(x)$ existiere f.ü.,
$f * g(x) := 0$ sonst $\Rightarrow$

$\operatorname{Tr}(f * g) \subseteq \overline{\operatorname{Tr} f + \operatorname{Tr} g}$ (A, B abg $\overset{!}{\not\Rightarrow}$ A + B abgeschl. !)

Beweis: $(f * g)(x) = \int_{\operatorname{Tr} f \cap (\{x\} - \operatorname{Tr} g)} f(y) g(x-y)\, dy \neq 0 \Rightarrow x \in \operatorname{Tr} f + \operatorname{Tr} g$ ∎

Bsp: $f, g \in L^1(\mathbb{R}^d)$, $\operatorname{Tr} g \subseteq \overline{B_r(0)}$ $\Rightarrow$

$f * g(x) = \int_{B_r(x)} f(y) g(x-y)\, dy$ mit g gewichtetes Mittel von f im $B_r(x)$



$g_r = \frac{1}{2r} 1_{[-r,r]}$

Die Faltung glättet:

2.3. Diffsatz der Faltung ← C_c: stetig mit kompaktem Träger

Sei $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$, $\phi \in C_c^k(\mathbb{R}^d)$ $(0 \leq k \leq \infty)$ $\Rightarrow$

$f * \phi \in C^k(\mathbb{R}^n)$, $\partial^\alpha (f * \phi) = f * \partial^\alpha \varphi$ $\forall |\alpha| \leq k$

Beweis: $f * \phi(x) = \int \underbrace{f(y)\, \phi(x-y)}_{C^k \text{ in } x}\, dy$. Betrachte $\int_{\mathbb{R}^d} \underbrace{f(y)\, \partial^\alpha \phi(x-y)}_{=: M(x,y)}\, dy$

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ rel. komp. $\operatorname{Tr} \phi$ komp. $\Rightarrow \exists$ komp. $L \subseteq \mathbb{R}^d$ mit

$\operatorname{Tr} H(x,\cdot) \subseteq L \;\forall x \in \Omega$. Also: $x \in \Omega \Rightarrow$

$|H(x,y)| \leq |f(y)| \cdot \|\partial^\alpha \phi\|_\infty \cdot 1_L(y)$, von x unabh. int.bare Majorante

Stetigkeits-/Diffbark f. Parameterint. (rekursiv) $\Rightarrow$

ϕ ist C^k auf Ω, $\partial^\alpha(f * \phi) = f * \partial^\alpha \phi$ auf Ω $\underset{\Omega \text{ bel.}}{\Longrightarrow}$ Beh ∎

<u>Faltung von L^p-Fkt</u>:

2.4. <u>Lemma</u>. $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$, $g \in L^{p'}(\mathbb{R}^d)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, $1 \leq p \leq \infty$
$\Rightarrow f * g \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$, $\|f * g\|_\infty \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_{p'}$
(direkt aus Hölder)

$\longrightarrow$ Bem hinten

2.5 <u>Satz</u> (<u>Youngsche Ungleichung</u>) $1 \leq p \leq \infty$
$f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, $g \in L^p(\mathbb{R}^d) \Rightarrow f * g \in L^p(\mathbb{R}^d)$, $\|f * g\|_p \leq \|f\|_1 \cdot \|g\|_p$

<u>Beweis</u>: o.E. $p < \infty$, $p = \infty$ ist in Lemma 2.4. enthalten (L^1/L^∞)
(I) $f, g \geq 0$, o.E. $\|f\|_1 = 1$ (sonst reskalieren)
$(x,y) \mapsto f(y) g(x-y)$ meßbar auf $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ bzgl. $\mathcal{B}_d \otimes \mathcal{B}_d \overset{\shortparallel}{} \mathcal{B}(\mathbb{R}^{d})$
Tonelli $\Rightarrow x \mapsto \int f(y) g(x-y)\,dy$ ist meßbar (mit Werten in $[0,\infty]$)
$\Rightarrow f * g$ wohldef. auf $\mathbb{R}^d$ und meßbar.

Fall $p > 1$: $|f * g(x)| = \int g(x-y) \underbrace{f(y)dy}_{}^{\cdot 1} \underset{\text{Hölder bzgl. } f dy}{\leq}$

$$\leq \left(\int g(x-y)^p f(y)\,dy\right)^{1/p} \cdot \underbrace{\left(\int f(y)\,dy\right)^{1/q}}_{=1} \qquad \otimes$$

$\Rightarrow \int |f * g(x)|^p dx \leq \int \left(\int g(x-y)^p f(y)\,dy\right) dx \overset{f,g \geq 0}{\underset{\text{Tonelli}}{=}} \|g\|_p^p < \infty$
$\Rightarrow f * g(x) < \infty$ für f.a. $x \in \mathbb{R}^d$, und $\|f * g\|_p \leq \|g\|_p$
Fall $p = 1$: $\otimes$ trivial, Rest wie oben.
(II) f, g bel. $\Rightarrow \int |f(y)| \cdot |g(x-y)|\,dy = |f| * |g|(x) \overset{(I)}{<} \infty$ für f.a $x \Rightarrow$
$f * g(x)$ konvergiert für f.a. x. $f * g$ meßbar: Reduktion auf (I)
durch Zerleg. $f = f_1 - f_2 + i(f_3 - f_4)$, $f_i \geq 0$, ebenso g,
$|f * g| \leq |f| * |g| \Rightarrow \|f * g\|_p \leq \||f| * |g|\|_p \leq \|f\|_1 \cdot \|g\|_p$ ∎

Speziell: $f,g \in L^1 \Rightarrow f*g \in L^1$, $\|f*g\|_1 \le \|f\|_1 \cdot \|g\|_1$

<u>Def.</u> Eine Banach-Algebra ist ein BR $(A, \|.\|)$ mit einer assoz. + bilin. Multiplikation $(x,y) \mapsto xy$, so dass

$$\|xy\| \le \|x\| \cdot \|y\| \qquad \text{(Submultiplikativität)}$$

Falls A eine Eins e hat, fordert man $\|e\| = 1$.

Eine Banach-$*$-Algebra ist eine BA mit einer isometrischen Involution $x \mapsto x^*$, $A \to A$, d.h.

$$x^{**} = x, \quad (\lambda x + y)^* = \bar{\lambda} x^* + y^*, \quad (xy)^* = y^* x^*, \quad \|x^*\| = \|x\|.$$

2.6. <u>Korollar.</u> $(L^1(\mathbb{R}^d), *)$ ist kommut. Banach-$*$-Alg. mit Invol. $f^* = \overline{f^-}$. (L¹-Faltungsalgebra des $\mathbb{R}^d$)

Assoziativität: Leichte Rechnung mit Fubini, Invol.: $(f*g)^* = g^* * f^*$ ähnlich.

2.7. <u>Faltungssatz der Fouriertrafo</u>

$$f,g \in L^1(\mathbb{R}^d) \Rightarrow (f*g)^\wedge = (2\pi)^{d/2} \hat{f}\hat{g}$$

→ hinten

<u>Konsequenz:</u> $\Phi : (L^1(\mathbb{R}^d), *) \to (C_0(\mathbb{R}^d), \cdot)$

$$f \mapsto (2\pi)^{d/2} \hat{f}(\xi) = \int f(x) e^{-i\langle x,\xi\rangle} dx$$

ist stetiger (normfallender) $*$-Homom. von kommut. Banach-$*$-Algebren ($\widehat{f^*} = \overline{\hat{f}}$)

3. <u>Approximation durch Faltung</u>

<u>Vorbereitung:</u> Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ offen

$$C_c(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{C},\ \operatorname{Tr} f \text{ kompakt}\}$$

2.8. <u>Satz</u> $C_c(\Omega)$ ist dicht in $L^p(\Omega)$ für $1 \le p < \infty$ (nicht für ∞!)

Der Beweis beruht auf folgenden Fakten:

1. Regularitätseigensch. von $\mu = \lambda_d$ auf Ω:
   $\forall A \in \mathcal{B}(\Omega)$ mit $\mu(A) < \infty$ gilt
   $\mu(A) = \sup\{\mu(K) : K \subseteq A \text{ komp.}\} = \inf\{\mu(U) : U \supseteq A \text{ offen}\}$

2. Lemma v. Urysohn: $\mathcal{U} \subseteq \Omega$ offen, $K \subseteq \Omega$ komp. mit $K \subseteq \mathcal{U}$

$\Rightarrow \exists f \in C_c(\Omega): 0 \le f \le 1,\ f|_K = 1,\ \operatorname{Tr} f \subseteq \mathcal{U}$

Explizite Konstr. von f:

$\varepsilon = \operatorname{dist}(K, \mathcal{U}^c) > 0 \Rightarrow \exists V \subseteq \mathbb{R}^d$ offen:

$K \subseteq V \subseteq \overline{V} \subseteq \mathcal{U}$ $\quad (V = \{x \in \Omega : d(x,K) < \frac{\varepsilon}{2}\})$

$V^c := \mathbb{R}^d \setminus V$ abgeschl. in $\mathbb{R}^d$

$$f(x) := \frac{d(x,V^c)}{d(x,K) + d(x,V^c)} = \begin{cases} 0, & x \in V^c \\ 1, & x \in K \end{cases} \qquad (x \in \Omega)$$

<u>Beweis v. 2.8:</u> Die Elementarfkt $\sum c_k 1_{A_k}$, $\lambda(A_k) < \infty$ liegen dicht in $L^p(\Omega)$ $\Rightarrow$ es genügt, 1_A mit $\lambda(A) < \infty$ zu approx.

Sei $\varepsilon > 0$. λ regulär $\Rightarrow \exists$ komp. $K \subseteq A$, offenes $\mathcal{U} \supseteq A$:

$\lambda(\mathcal{U} \setminus K) < \varepsilon$

Urysohn $\Rightarrow \exists f \in C(\Omega): 0 \le f \le 1,\ f|_K = 1,\ \operatorname{Tr} f \subseteq \mathcal{U}$

$$\Rightarrow \|f - 1_A\|_p^p = \int_{\mathcal{U} \setminus K} \underbrace{|f - 1_A|^p}_{\le 1}\, dx \le \lambda(\mathcal{U} \setminus K) < \varepsilon \quad \blacksquare$$

<u>Bem:</u> der Satz gilt allg. für $L^p(X, \mu)$, X lokalkomp., μ Radonmaß auf X

2.9. <u>Korollar</u> <u>(Stetigkeit d. Translation in L^p)</u>

$1 \le p < \infty$, $f \in L^p(\mathbb{R}^d) \Rightarrow$ die Abb. $x \mapsto L_x f$, $\mathbb{R}^d \to L^p(\mathbb{R}^d)$ ist stetig $\quad (L_x f(y) = f(y-x))$

<u>Beweis:</u> $L_{x+x_0} f = L_x \overbrace{L_{x_0} f}^{\text{fixen}} \Rightarrow$ es genügt, Stetigkeit in $x = 0$ z.z.

Zu $\varepsilon > 0$ wähle $g \in C_c$ mit $\|f - g\|_p < \varepsilon \Rightarrow$

$$\|L_x f - f\|_p \le \underbrace{\|L_x f - L_x g\|_p}_{< \varepsilon} + \underbrace{\|L_x g - g\|_p}_{(*)} + \underbrace{\|g - f\|_p}_{< \varepsilon}$$

Zu $(*)$: Wähle komp. $K \subseteq \mathbb{R}^d$ mit $\operatorname{Tr}(L_x g) \subseteq K \ \forall |x| \le 1$

g glm. stetig auf $K \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} \|L_x g - g\|_\infty = 0$

$\Rightarrow \|L_x g - g\|_p \leq \lambda(K)^{1/p} \cdot \|L_x g - g\|_\infty \to 0$ ■

Bem: Die Aussage gilt nicht für $f \in L^\infty$. Man kann zeigen:
$\lim\limits_{x\to 0} \|L_x f - f\|_\infty = 0 \Rightarrow f$ hat einen auf $\mathbb{R}^d$ gleichm. stetigen Vertreter

Approximative Einsen

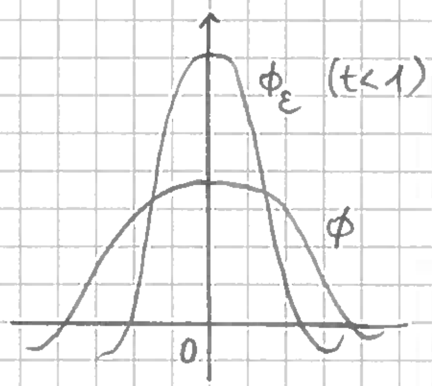
2.10. Satz + Def. Sei $\phi \in L^1(\mathbb{R}^d)$, $\int_{\mathbb{R}^d} \phi \, dx = 1$

$\phi_\varepsilon(x) := \frac{1}{\varepsilon^d}\phi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$, $\varepsilon > 0 \Rightarrow$

(i) $\|\phi_\varepsilon\|_1 = \|\phi\|_1$

(ii) $\int \phi_\varepsilon \, dx = 1$

(iii) $\delta > 0 \Rightarrow \lim\limits_{\varepsilon\to 0} \int_{|x|>\delta} |\phi_\varepsilon(x)| \, dx = 0$



(ϕ_ε): Approximative Eins (Summationskern) auf $\mathbb{R}^d$

Beweis: (i), (ii) klar (Trafosatz)

(iii) $\int_{|x|>\delta} \frac{1}{\varepsilon^d} |\phi(\frac{x}{\varepsilon})| \, dx \underset{y=x/\varepsilon}{=} \int_{|y|>\delta/\varepsilon} |\phi(y)| \, dy \to 0$ für $\varepsilon \to 0$

da $\phi \in L^1$ ■

2.11. Approximationssatz Sei (ϕ_ε) approx. Eins auf $\mathbb{R}^d$

(1) $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$, $1 \leq p < \infty \Rightarrow \lim\limits_{\varepsilon\to 0} \|\underbrace{\phi_\varepsilon * f}_{\in L^p} - f\|_p = 0$

(2) $f \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ sei stetig auf offenem $U \subseteq \mathbb{R}^d \Rightarrow$

$\phi_\varepsilon * f \to f$ lokal glm. auf U

($\phi_\varepsilon * f \in C_b(\mathbb{R}^d)$ + glm. stetig nach Aufg. 1, Bl. 2)

(3) $f \in C_b(\mathbb{R}^d) \Rightarrow \phi_\varepsilon * f(x) \to f(x_0)$ für $(\varepsilon, x) \to (0, x_0)$

(3): nützlich für Anwendungen!

Beweis: (1) $|\phi_\varepsilon * f(x) - f(x)| \underset{(ii)}{=} |\int (f(x-y) - f(x))\phi_\varepsilon(y) \, dy| \underset{y=\varepsilon z}{\leq}$

$\leq \int |\underbrace{f(x-\varepsilon z)}_{L_{\varepsilon z} f(x)} - f(x)| \, |\phi(z)| \, dz \underset{\text{Hölder bzgl. } |\phi(z)|dz}{\leq}$

$$\leq \left(\int |L_{\varepsilon z} f(x) - f(x)|^p \, |\phi(z)| \, dz\right)^{1/p} \cdot \underbrace{\left(\int 1 \cdot |\phi(z)| \, dz\right)^{1/p'}}_{<\infty}$$

$$\Rightarrow \|\phi_\varepsilon * f - f\|_p^p \leq C_\phi \int \left(\int |L_{\varepsilon z} f(x) - f(x)|^p \, |\phi(z)| \, dz\right) dx$$

$$\underset{\text{Fubini}}{=} C_\phi \int \underbrace{\|L_{\varepsilon z} f - f\|_p^p}_{\substack{\to 0 \text{ punktweise für } \varepsilon \to 0 \\ (\text{Kor. 2.9.}), \quad \leq (2\|f\|_p)^p}} |\phi(z)| \, dz$$

$$\xrightarrow[\text{Konvergenz}]{\text{maj.}} 0 \quad \text{für } \varepsilon \to 0 .$$

(2) Sei $K \subseteq \mathcal{U}$ kompakt, $\tilde{\varepsilon} > 0$

$$x \in K \Rightarrow |\phi_\varepsilon * f(x) - f(x)| \leq \int |f(x - \varepsilon z) - f(x)| \, |\phi(z)| \, dz =: I(x)$$

Wähle $R > 0$ mit $\int_{|z|>R} |\phi| \, dz < \tilde{\varepsilon}$

ε klein genug $\Rightarrow K - \varepsilon \overline{B_R(0)} \subseteq \mathcal{U}$,

und $|f(x - \varepsilon z) - f(x)| < \tilde{\varepsilon} \quad \forall x \in K, |z| \leq R$

(da f glm. stetig auf Kompakta in $\mathcal{U}$)

$$\Rightarrow I(x) \leq \int_{|z| \leq R} (\ldots) + \int_{|z|>R} (\ldots) \leq$$

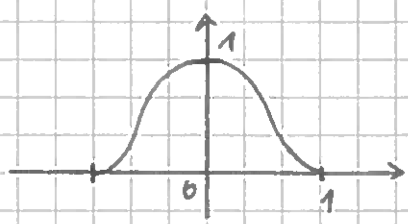
$$\leq \tilde{\varepsilon} \|\phi\|_1 + 2\|f\|_\infty \underbrace{\int_{|z|>R} |\phi| \, dz}_{<\tilde{\varepsilon}} \qquad \blacksquare$$

(3) Sei $K \subseteq \mathbb{R}^d$ komp. Umgeb. von $x_0 \Rightarrow$

$$|\phi_\varepsilon * f(x) - f(x_0)| \leq \underbrace{|\phi_\varepsilon * f(x) - f(x)|}_{\leq \|\phi_\varepsilon * f - f\|_{\infty, K} \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} 0} + \underbrace{|f(x) - f(x_0)|}_{\to 0, \, x \to x_0} \qquad \blacksquare$$

Bsp: Friedrichs-Kern

$$j(x) := \begin{cases} c \cdot e^{-1/(1-|x|^2)}, & |x| < 1 \\ 0, & |x| \geq 1 \end{cases}$$



Dabei $c > 0$ so, dass $\int_{\mathbb{R}^d} j \, dx = 1$

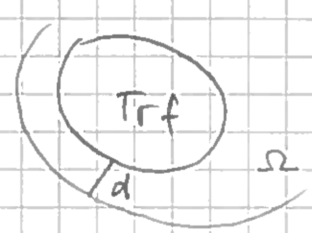
$t \mapsto e^{-1/(1-t^2)} \in C_c^\infty(\mathbb{R}) \Rightarrow j \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$, $\operatorname{Tr} j = \overline{B_1(0)}$

$(j_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$: Friedrichs-Kern: $j_\varepsilon \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$, $\operatorname{Tr} j_\varepsilon = \overline{B_\varepsilon(0)}$

$f \in L^p \Rightarrow$ die Schar $(j_\varepsilon * f)_{\varepsilon > 0} \subseteq C^\infty \cap L^p$ heißt die Friedrichs-glättung von f.

2.12. <u>Korollar</u> $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ offen $\Rightarrow$ $C_c^\infty(\Omega)$ ist dicht in $(L^p(\Omega), \|.\|_p)$, $1 \le p < \infty$, sowie in $(C_0(\Omega), \|.\|_\infty)$

<u>Beweis:</u> Es genügt, $f \in C_c(\Omega)$ zu approx. (da $C_c(\Omega)$ dicht in jedem der obigen BR)



Setze f durch 0 auf ganz $\mathbb{R}^d$ fort

$d := \operatorname{dist}(\operatorname{Tr} f, \partial\Omega) > 0$ $\quad$ ($d := 1$, falls $\Omega = \mathbb{R}^d$)

$\underbrace{\operatorname{Tr}(j_\varepsilon * f)}_{\text{Kompakt}} \subseteq \overline{B_\varepsilon(0)} + \operatorname{Tr} f \subseteq \Omega$ für $\varepsilon < d$

$\Rightarrow j_\varepsilon * f \in C_c^\infty(\Omega)$. $\quad 1 \le p \le \infty \Rightarrow$

$\|j_\varepsilon * f - f\|_{p,\Omega} = \|j_\varepsilon * f - f\|_{p,\mathbb{R}^d} \to 0$ nach Approx. Satz Teil (1) bzw. (2) im Fall $p = \infty$ (wähle Komp. $K \subseteq \mathbb{R}^d$ mit $\operatorname{Tr} f, \operatorname{Tr}(j_\varepsilon * f) \subseteq K \ \forall \varepsilon < 1$)

§3. Der Schwartz-Raum

<u>Def.</u> $\mathcal{S}_d := \{ f \in C^\infty(\mathbb{R}^d) : \|x^\beta D^\alpha f\|_\infty < \infty \ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^d \}$

$\mathcal{S}_d$ ist $\mathbb{C}$-VR; er besteht aus den glatten Fkt, die samt all ihren Ableitungen schneller als jede Potenz von x gegen 0 gehen. (Schnell abfallende Fkt)

<u>Bsp:</u> 1. $C_c^\infty(\mathbb{R}^d) \subseteq \mathcal{S}_d$

2. $c > 0 \Rightarrow e^{-c|x|^2} \in \mathcal{S}_d$. Denn: $D^\alpha(e^{-c|x|^2}) = p_\alpha(x) e^{-c|x|^2}$

↑ Polynom

3. $\frac{1}{(1+|x|^2)^n} \notin \mathcal{S}_d \quad (n \in \mathbb{N})$

Beachte: $\mathcal{S}_d \subseteq L^p(\mathbb{R}^d)$ für $1 \leq p \leq \infty$

Denn: $f \in \mathcal{S}_d \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}$ ist $|f(x)| \leq \underbrace{\frac{c_n}{(1+|x|^2)^n}}_{\in L^p \text{ für } 2np > d}$

3.1. <u>Lemma.</u> $f \in \mathcal{S}_d \Rightarrow D^\alpha f, gf \in \mathcal{S}_d \ \forall \alpha \in \mathbb{N}_0^d, g \in \mathcal{S}_d$

Ferner: $\Pi_d := \{ p : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C} \text{ Polynomfkt} \}$

$p \in \Pi_d \Rightarrow pf \in \mathcal{S}_d$

Abl. von $D^\alpha f$ sind Abl. von f!

<u>Beweis:</u> $D^\alpha f$ klar. gf, pf mit Leibnizregel:

$$D^\alpha(gf) = \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} D^\beta g \cdot D^{\alpha-\beta} f \qquad \text{(Bew. mit Ind. nach } |\alpha|)$$

wo $\beta \leq \alpha :\Leftrightarrow \beta_k \leq \alpha_k \ \forall k = 1, \ldots, d$

$$\binom{\alpha}{\beta} = \binom{\alpha_1}{\beta_1} \cdots \binom{\alpha_d}{\beta_d}$$

Äquivalente Charakt. von $\mathcal{S}_d$:

Fkte auf $C^\infty(\mathbb{R}^d)$ für $n \in \mathbb{N}_0$: $\qquad q_0(f) = \|f\|_\infty$

$$q_n(f) := \max_{|\alpha| \leq n} \|(1+|x|^2)^n D^\alpha f\|_\infty \qquad q_n(f) \leq q_{n+1}(f)$$

3.2. <u>Lemma</u> $\mathcal{S}_d = \{ f \in C^\infty(\mathbb{R}^d) : q_n(f) < \infty \ \forall n \in \mathbb{N}_0 \}$

__Beweis:__ „$\subseteq$" klar, da $(1+|x|^2)^n$ Polynom

„$\supseteq$": $\|x^\beta D^\alpha f\|_\infty \leq \| |x|^{|\beta|} D^\alpha f\|_\infty \leq q_n(f)$ für $|\beta| \leq 2n$, $|\alpha| \leq n$

Die q_n sind Normen auf $\mathcal{S}_d$. Def. einer Metrik ϱ auf $\mathcal{S}_d$, die stärker ist als alle q_n:

die $\|x^\beta D^\alpha f\|_\infty$ nur Halbnormen

$$\varrho(f,g) := \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} \underbrace{\frac{q_n(f-g)}{1+q_n(f-g)}}_{\in [0,1)}$$

$(f,g) \mapsto \dfrac{q_n(f-g)}{1+q_n(f-g)}$ ist bereits Metrik (Üb; kritisch nur Δ)

Vorsicht: ϱ kommt nicht von einer Norm! (keine Homogenität)

ϱ ist translationsinvariant: $\varrho(f+h, g+h) = \varrho(f,g)$

Insbes: $f_k \xrightarrow[\varrho]{} f \iff \varrho(f_k - f, 0) \to 0$

__3.3. Lemma__ Für $(f_k) \subseteq \mathcal{S}_d$ sind äquiv.:

(a) $\lim\limits_{k\to\infty} f_k = 0$ in $\mathcal{S}_d$ (dh. bzgl. ϱ)

(b) $\lim\limits_{k\to\infty} q_n(f_k) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$

(c) $\lim\limits_{k\to\infty} \|x^\beta D^\alpha f_k\|_\infty = 0 \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^d$

__Beweis:__ $\varrho(f_k, 0) = \sum 2^{-n} \dfrac{q_n(f_k)}{1+q_n(f_k)}$

(a) $\Rightarrow$ (b) damit klar. (b) $\iff$ (c) analog zu Lemma 3.2.

(b) $\Rightarrow$ (a): Zu $\varepsilon > 0$ sei $N \in \mathbb{N}$ so groß, dass $\sum\limits_{n=N}^{\infty} 2^{-n} < \varepsilon$

Wähle $k_\varepsilon \in \mathbb{N}$ so, dass $q_n(f_k) < \varepsilon \ \forall k \geq k_\varepsilon, n < N$

$\Rightarrow \varrho(f_k, 0) \leq \sum\limits_{n=0}^{N-1} (2^{-n} \varepsilon) + \varepsilon < 3\varepsilon$ ∎

__3.4. Satz__ $\mathcal{S}_d$ ist vollständig (bzgl. ϱ)

__Beweis:__ Sei $(f_k) \subseteq \mathcal{S}_d$ Cauchyf. $\Rightarrow \forall \alpha, \beta$ ist $(x^\beta D^\alpha f_k)_k$ C.F. bzgl. $\|.\|_\infty$ in $C_b(\mathbb{R}^d)$ (vollst.) $\Rightarrow \exists g_{\alpha,\beta} \in C_b(\mathbb{R}^d)$:

$x^\beta D^\alpha f_k \to g_{\alpha,\beta}$ glm. auf $\mathbb{R}^d$. Insbes: $f_k \to g_{0,0} =: g$ glm.,

$D^\alpha f_k \to g_\alpha$ glm. $\Rightarrow$ $g \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$, und $D^\alpha g = g_\alpha$. Also $D^\alpha f_k \to D^\alpha g$
$x^\beta D^\alpha f_k \to g_{\alpha,\beta}$ glm. $\Rightarrow$ $x^\beta D^\alpha g = g_{\alpha,\beta}$, also beschr. $\Rightarrow$
$g \in \mathcal{S}_d$, und $f_k \xrightarrow[\mathcal{S}_d]{} g$ (nach Lemma 3.3.c) ∎

Auf $\mathcal{S}_d$ hat die Fouriertrafo sehr schöne Eigenschaften:

3.5. Satz (1) Jede der Abb. $f \mapsto D^\alpha f$, $f \mapsto pf$ $(p \in \Pi_d)$
$f \mapsto gf$ $(g \in \mathcal{S}_d)$ ist stetig auf $\mathcal{S}_d$

(2) $f \in \mathcal{S}_d \Rightarrow \hat{f} \in \mathcal{S}_d$ mit

$$(D^\alpha f)^\wedge(\xi) = \xi^\alpha \hat{f}(\xi), \quad (x^\alpha f)^\wedge(\xi) = (-D)^\alpha \hat{f}(\xi), \quad \alpha \in \mathbb{N}_0^d$$

(3) $f \mapsto \hat{f}$, $\mathcal{S}_d \to \mathcal{S}_d$ ist stetig $\qquad (-ixf)^\wedge = \hat{f}'$

Beweis: (1) Es genügt jeweils, Stetigkeit in $f=0$ zu zeigen.
$f \mapsto D^\alpha f$: Sei $f_k \xrightarrow[\mathcal{S}_d]{} 0 \underset{\text{Lemma 3.3}}{\overset{\forall \beta,\gamma:}{\Longleftrightarrow}} x^\beta D^\gamma f_k \xrightarrow[\|\cdot\|_\infty]{} 0 \ \forall \gamma \Rightarrow D^\alpha f_k \xrightarrow[\mathcal{S}_d]{} 0$

$f \mapsto pf$, $f \mapsto gf$ mit Leibnizregel. Etwa: $f_k \to 0$ in $\mathcal{S}_d$

$$\Rightarrow \|x^\beta D^\alpha (p f_k)\|_\infty = \|x^\beta \sum_{\gamma \le \alpha} \binom{\alpha}{\gamma} \underbrace{D^{\alpha-\gamma} p}_{\text{Polynom}} \cdot D^\gamma f_k\|_\infty \to 0 \quad \text{für } k \to \infty$$

(2) Mit Aufg. 2, Bl. 2
Die 1. Formel folgt mit Ind. aus $\widehat{D_j f}(\xi) = \xi_j \hat{f}(\xi)$
(beachte: $D^\alpha f$ erfüllt die Voraussetz. von Aufg. 2 (1))
2. Formel mit Ind. aus $\widehat{x_j f}(\xi) = -D_j \hat{f}(\xi)$
(beachte: $x^\alpha f \in L^1 \ \forall \alpha$)
$f \in \mathcal{S}_d \Rightarrow \hat{f} \in \mathcal{S}_d$, denn: $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^d \Rightarrow$

$$|\xi^\beta D^\alpha \hat{f}(\xi)| = |(\underbrace{D^\beta x^\alpha f}_{\in \mathcal{S}_d \subseteq L^1})^\wedge(\xi)| \in C_b(\mathbb{R}^d)$$

(3) Übung ∎

Beachte: $\mathcal{S}_d \subseteq C_0(\mathbb{R}^d)$, denn: $f \in \mathcal{S}_d \Rightarrow \exists C > 0$:
$(1+|x|^2)|f(x)| \le C \Rightarrow |f(x)| \to 0$ für $|x| \to \infty$.

§4 Fourierinversion und Satz v. Plancherel

$$\widehat{-xf} = D\hat{f} = \frac{1}{i}\hat{f}'$$
$$\hat{g}'(\xi) = -i\xi\hat{g}(\xi)$$

4.1. Lemma $f(x) = e^{-|x|^2/2} \Rightarrow \hat{f} = f$.

Beweis: $\hat{f}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-|x|^2/2} e^{-i\langle x,\xi\rangle} dx = \hat{g}(\xi_1) \cdot \ldots \cdot \hat{g}(\xi_d)$

mit $g(x) = e^{-x^2/2} \in \mathcal{S}_1$

Also z. zeigen: $\hat{g} = g$

Dazu: $y = g(x)$ erfüllt $y' = -xy$ (homog. lin. DGL 1. Ord.)

$\hat{g}$ ebenso, denn: $\hat{g}'(\xi) \underset{3.5.}{=} (-ixg)^\wedge(\xi) \underset{DGL}{=} (ig')^\wedge(\xi) \underset{3.5.}{=} -\xi\hat{g}(\xi)$

$\Rightarrow \hat{g} = cg,\ c \in \mathbb{C}$

Zu c: $\hat{g}(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/2} dx = 1 = g(0) \Rightarrow c = 1$ ∎

4.2. Satz Lemma v. Riemann-Lebesgue

$f \in L^1(\mathbb{R}^d) \Rightarrow \hat{f} \in C_0(\mathbb{R}^d)$

Bew: $f \in \mathcal{S}_d \Rightarrow \hat{f} \in \mathcal{S}_d \subseteq C_0(\mathbb{R}^d)$

$\mathcal{S}_d$ ist dicht in $L^1(\mathbb{R}^d)$ bzgl. $\|.\|_1$ (da sogar C_c^∞ dicht, Kor. 2.12) $\Rightarrow$

Zu $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ $\exists$ Folge $(f_k) \subseteq \mathcal{S}_d$: $\|f_k - f\|_1 \to 0$ $\Rightarrow$

$\|\hat{f}_k - \hat{f}\|_\infty \leq c \cdot \|f_k - f\|_1 \to 0$

$\hat{f}_k \in C_0(\mathbb{R}^d)\ \forall k \underset{(C_0, \|.\|) \text{ vollst.}}{\Longrightarrow} \hat{f} \in C_0(\mathbb{R}^d)$ ∎

Bem: $\overline{\mathcal{S}_d}^{\|.\|_\infty} = C_0(\mathbb{R}^d)$, da sogar C_c^∞ dicht in C_0 (Kor. 2.12)

4.3. Lemma $f, g \in L^1(\mathbb{R}^d) \Rightarrow \int_{\mathbb{R}^d} f\hat{g}\, dx = \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f} g\, dx$ („Fubini")

Beweis: $\int f\hat{g}\, dx = c \cdot \int\left(\int f(x) g(y) e^{-i\langle y,x\rangle} dy\right) dx \underset{\text{Fubini}}{=} \int \hat{f} g\, dy$ ∎

Nächstes Ziel: Inversion der Fouriertrafo

Für $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$: $\check{f}(x) := \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} f(\xi) e^{i\langle \xi,x\rangle} d\xi = \hat{f}(-x)$

$\vee$ ist invers zu $\wedge$:

4.4. L^1-Inversionssatz

Sei $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ mit $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^d)$ $\Rightarrow$ Für fast alle $x \in \mathbb{R}^d$ gilt

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(\xi)\, e^{i\langle \xi, x\rangle}\, d\xi \quad = (\hat{f})^\vee(x)$$

D.h. $(\hat{f})^\vee$ ist stetiger Vertreter von f

Zusatz: Falls f stetig in x $\Rightarrow$ $f(x) = (\hat{f})^\vee(x)$

Vorbem. zum Beweis:

$$(\hat{f})^\vee(x) = c \cdot \int_{\mathbb{R}^d} \Big(\int_{\mathbb{R}^d} f(y)\, e^{-i\langle \xi, y\rangle}\, dy \Big)\, e^{i\langle \xi, x\rangle}\, dx$$

Integrand $\notin L^1(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$! Idee: führe konvergenzerzeugenden Faktor ein, dann Fubini.

$$\phi(x) := \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} e^{-|x|^2/2} \Rightarrow \phi \in L^1, \ \int \phi\, dx = 1$$

$\Rightarrow \phi_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^d} \phi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$, $\varepsilon > 0$, ist approx. Eins auf $\mathbb{R}^d$

(Gauß-Kern)

Beweis v. 4.4. $\quad \phi_\varepsilon * f(x) = \int f(y)\, \phi_\varepsilon(x-y)\, dy$ exist. $\forall x \in \mathbb{R}^d$ (L^∞/L^1-Falt.)

$\uparrow$ Gauß-Kern

Approx. Satz $\Rightarrow$ $\phi_\varepsilon * f \to f$ in $L^1(\mathbb{R}^d)$ $\quad (*)$

Andererseits: $\phi = \hat{\phi}$ $\Rightarrow$

$$\phi_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^d} \hat{\phi}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) = \frac{1}{\varepsilon^d (2\pi)^{d/2}} \int \phi(y)\, e^{-i\langle y, \frac{x}{\varepsilon}\rangle}\, dy \overset{\xi := -\frac{y}{\varepsilon},\ \phi \text{ gerade}}{=}$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int \phi(\varepsilon\xi)\, e^{i\langle \xi, x\rangle}\, d\xi$$

$$\Rightarrow \phi_\varepsilon * f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int f(y) \int \phi(\varepsilon\xi)\, e^{i\langle \xi, x-y\rangle}\, d\xi\, dy \overset{\text{Fubini}}{=}$$

$$= \int \underbrace{\phi(\varepsilon\xi)}_{\to\, \phi(0) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \text{ punktweise auf } \mathbb{R}^d \text{ für } \varepsilon \to 0} \hat{f}(\xi)\, e^{i\langle \xi, x\rangle}\, d\xi$$

$$\hat{f} \in L^1 \xRightarrow[\text{Konvergenz}]{\text{Maj.}} \phi_\varepsilon * f(x) \to \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int \hat{f}(\xi)\, e^{i\langle \xi, x\rangle}\, d\xi = (\hat{f})^\vee(x) \quad \forall x$$

Zusammen mit $(*)$ folgt: $f = (\hat{f})^\vee$ f.ü.

Zum Zusatz: Sei f stetig in x. $f = (\hat{f})^\vee$ f.ü. $\Rightarrow$

$\exists$ Folge $(x_k) \subseteq \mathbb{R}^d$ mit $x_k \to x$ und $f(x_k) = (\hat{f})^\vee(x_k)$ $\forall k$

$\underset{k\to\infty}{\Longrightarrow}$ $f(x) = (\hat{f})^\vee(x)$, da beide Seiten stetig in x ∎

4.5. <u>Korollar</u> Die Fouriertrafo auf $L^1(\mathbb{R}^d)$ ist injektiv:

$f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ mit $\hat{f} = 0 \Rightarrow f = 0$ (f.ü.)

Auf $\mathcal{S}_d$ ist $\mathcal{F}: f \mapsto \hat{f}$ stetig + bijektiv mit

$\mathcal{F}^{-1}(f) = \check{f}$ (d.h. $\mathcal{F}^2(f) = f^-$, $f^-(x) = f(-x)$)

4.6. <u>Korollar</u> $\mathcal{F}$ ist Homöom. von $\mathcal{S}_d$ mit $\mathcal{F}^4 = id$

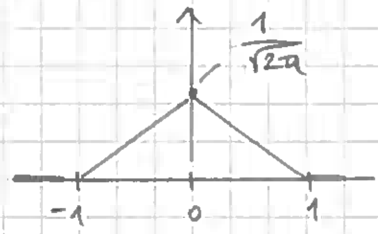
<u>Bsp: Der Fejér-Kern auf $\mathbb{R}$</u>

$$F(x) := \frac{1}{2\pi}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2 \in L^1(\mathbb{R}) \quad \text{(stetig in 0 fortgesetzt)}$$

Beh: $\int_{\mathbb{R}} F\,dx = 1$ ⊗

Hieraus folgt dann, dass $F_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon}F\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$ $(\varepsilon > 0)$ eine approx. Eins auf $\mathbb{R}$ ist. (Fejér-Kern)

Bew. von ⊗: $\Delta(x) := \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(1-|x|), & |x|<1 \\ 0 & |x|>1 \end{cases}$



$$\hat{\Delta}(\xi) = \frac{1}{2\pi}\Big(\underbrace{\int_0^1 (1-x)e^{-i\xi x}\,dx}_{\frac{1}{i\xi} - \frac{1}{\xi^2}(e^{-i\xi}-1)} + \underbrace{\int_{-1}^0 (1+x)e^{-i\xi x}\,dx}_{-\frac{1}{i\xi} - \frac{1}{\xi^2}(e^{i\xi}-1)}\Big)$$

$4\sin^2\frac{x}{2} = 2 - 2\cos x$

$2\sin^2\frac{x}{2} = 1 - \cos x$

$$\Rightarrow \hat{\Delta}(\xi) = \frac{1}{2\pi}\,\frac{2-2\cos\xi}{\xi^2} = F(\xi) \in L^1(\mathbb{R}) \;!$$

Inv. Satz $\Rightarrow$ $\Delta = \check{F}$

Insbes: $\int_{\mathbb{R}} F\,dx = \sqrt{2\pi}\,\check{F}(0) = \sqrt{2\pi}\,\Delta(0) = 1$. ∎

Ferner: $F_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon} F\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) = \frac{1}{\varepsilon}\widehat{\Delta}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \overset{\text{Lemma 2.1.}}{=} \widehat{\Delta}_\varepsilon(x)$ mit

$\Delta_\varepsilon(x) = \Delta(\varepsilon x)$; Träger $[-\varepsilon, \varepsilon]$

Folgerung: $f \in L^1(\mathbb{R}) \Rightarrow$

$$(f * F_\varepsilon)(x) = f * \widehat{\Delta}_\varepsilon(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y)\,\widehat{\Delta}_\varepsilon(y)\,dy \overset{*}{=} \quad \text{* } \widehat{\Delta}_\varepsilon \text{ gerade}$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \underbrace{f(x+y)}_{L_{-x}f(y)}\,\widehat{\Delta}_\varepsilon(y)\,dy \underset{\text{L. 4.3.}}{=} \int_{\mathbb{R}} (L_{-x}f)^\wedge(\xi)\,\Delta_\varepsilon(\xi)\,d\xi$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1/\varepsilon}^{1/\varepsilon} \hat{f}(\xi)\, e^{i\xi x}\,(1-\varepsilon|\xi|)\,d\xi$$

$f * F_\varepsilon \to f$ im L^1 für $\varepsilon \to 0$. Dies zeigt:

4.7. Korollar $f \in L^1(\mathbb{R}) \Rightarrow$

$$f(x) = \lim_{R\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-R}^{R} \left(1 - \frac{|\xi|}{R}\right) \hat{f}(\xi)\, e^{i\xi x}\,d\xi \quad \text{im } L^1\text{-Sinne}$$

(ohne Voraus. an $\hat{f}$, im Gegensatz zum Inversionssatz!)

Nun: Ausdehnung der F.T. auf $L^2(\mathbb{R}^d)$. Starte mit $\mathcal{S}_d$.

4.8. Lemma $f, g \in \mathcal{S}_d \Rightarrow \int_{\mathbb{R}^d} f\bar{g}\,dx = \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}\,\overline{\hat{g}}\,d\xi$

Insbes.: $\|f\|_2 = \|\hat{f}\|_2 \quad \forall f \in \mathcal{S}_d$

Bew.: $g^*(x) = \overline{g(-x)} \Rightarrow h := \widehat{g^*} = \overline{\hat{g}}$

$\hat{h}(\xi) = \check{h}(-\xi) \underset{\text{Inv. Satz}}{=} g^*(-\xi) = \overline{g(\xi)}$

$\Rightarrow \int f\bar{g}\,dx = \int f\hat{h}\,dx \underset{\text{L.4.3.}}{=} \int \hat{f} h\,d\xi = \int \hat{f}\,\overline{\hat{g}}\,d\xi \quad \blacksquare$

4.9. Satz v. Plancherel

Es gibt einen eindeutigen isometr. Isomorphismus

$\mathcal{F}: L^2(\mathbb{R}^d) \to L^2(\mathbb{R}^d)$ mit $\mathcal{F}f = \hat{f} \quad \forall f \in \mathcal{S}_d$

Insbes.: $\|\mathcal{F}f\|_2 = \|f\|_2 \quad \forall f \in L^2 \quad \otimes$

$\mathcal{F}$: Fourier-Plancherel-Trafo.

Folgerung: <u>Parseval-Identität</u>

$f, g \in L^2(\mathbb{R}^d) \Rightarrow \langle f, g\rangle = \langle \mathcal{F}f, \mathcal{F}g\rangle$

Folgt mit Polarisation: $4\langle f,g\rangle = \|f+g\|^2 - \|f-g\|^2 + i\|f+ig\|^2 - i\|f-ig\|^2$ ∎

<u>Bew. von Plancherel</u>: $\mathcal{S}_d \subseteq L^2$ dicht und $f \mapsto \hat{f}$ isometr. auf $\mathcal{S}_d$ nach Lemma 4.8 $\Rightarrow$

$f \mapsto \hat{f}$ hat eind. Fortsetzung zu isometr. lin. Operator $\mathcal{F}: L^2 \to L^2$.

(Insbes. $\mathcal{F}$ inj. auf L^2). $\mathcal{F}$ surjektiv, denn $\mathcal{S}_d \subseteq \operatorname{Im}\mathcal{F}$,

$\mathcal{S}_d \subseteq L^2$ dicht, aber $\operatorname{Im}\mathcal{F} \subseteq L^2$ abg., da $\mathcal{F}$ isometr.

[Sei $\mathcal{F}f_n \to g \in L^2 \Rightarrow (\mathcal{F}f_n)$ ist CF, also auch $(f_n) \Rightarrow$

$f_n \to f \in L^2 \Rightarrow \mathcal{F}f_n \to \mathcal{F}f \Rightarrow g = \mathcal{F}f \in \operatorname{Im}\mathcal{F}$]

Also: $\operatorname{Im}\mathcal{F} = L^2$ ∎

Mit Approx. aus $\mathcal{S}_d$ sieht man: $\mathcal{F}^{-1}f = (\mathcal{F}f)^-$, $g^-(x) = g(-x)$.

$\mathcal{F}$ ist konsistent mit Fouriertrafo auf $L^1(\mathbb{R}^d)$:

4.10. <u>Satz</u> $f \in L^1 \cap L^2(\mathbb{R}^d) \Rightarrow \mathcal{F}f = \hat{f}$ f.ü.

<u>Beweis</u>: 1. $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ ist dicht in $L^1 \cap L^2(\mathbb{R}^d)$ bzgl. $\|.\|_0 = \|.\|_1 + \|.\|_2$

Denn: Sei $f \in L^1 \cap L^2$; $f_n = f \cdot 1_{\{|x| \le n\}} \Rightarrow \|f_n - f\|_0 \to 0$

$(j_\varepsilon)_{\varepsilon > 0} \subseteq L^1 \cap C_c^\infty$ Friedrichs-Kern

Tr f_n komp. $\Rightarrow j_\varepsilon * f_n \in C_c^\infty$, und nach Approx. Satz gilt:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \|j_\varepsilon * f_n - f_n\|_0 = 0$$

2. Zu $f \in L^1 \cap L^2$ wähle $(f_n) \subseteq C_c^\infty$ mit $f_n \to f$ in $\|.\|_0$

$\Rightarrow \|\hat{f}_n - \hat{f}\|_\infty \to 0$ und $\|\underbrace{\hat{f}_n}_{\mathcal{F}f_n} - \mathcal{F}f\|_2 \to 0$

$\Rightarrow \exists$ Teilfolge (f_{n_k}): $\hat{f}_{n_k} \to \mathcal{F}f$ punktweise f.ü. $\Rightarrow$ Beh

∎

4.11. Korollar $f \in L^2(\mathbb{R}^d) \Rightarrow$

$$\mathcal{F}f(\xi) = \lim_{R\to\infty} \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{|x|<R} f(x) e^{-i\langle\xi,x\rangle}\,dx \quad \text{im } L^2\text{-Sinne}$$

Beweis: $g_R(\xi) :=$ rechte Seite $= \widehat{\underbrace{f\cdot 1_{B_R(0)}}_{\in L^1\cap L^2 \text{ (Hölder)}}}(\xi)$

Satz 4.10 $\Rightarrow g_R = \mathcal{F}(f\cdot 1_{B_R(0)})$ f.ü.

$f\cdot 1_{B_R(0)} \to f$ in $L^2 \Rightarrow g_R \to \mathcal{F}f$ in L^2 ∎

Schreibweise: $\hat{f}$ statt $\mathcal{F}f$ für $f\in L^2$.

Die Regeln für Translation, Modulation etc. gelten im L^2-Sinne auch für die Planch.-Trafo. (Approx. aus $\mathcal{S}_d$ in $\|.\|_2$ und Stetigkeit von $\mathcal{F}$)

Anwendung: Ein Vollständigkeitssatz für orthogonale Polynomsysteme

Sei $w: \mathbb{R} \to [0,\infty)$ meßbar, $|\mathrm{Tr}\, w| = \infty$

Vorauss: $\int_{\mathbb{R}} |x|^n w(x)\,dx < \infty \quad \forall n\in\mathbb{N}_0$ (Existenz aller Momente)

Betrachte $L^2(\mathbb{R}, w)$. Gram-Schmidt für $(x^n)_{n\geq 0} \subseteq L^2(\mathbb{R},w)$ liefert eindeutiges orthonormales Polynomsystem $(p_n)_{n\geq 0}$ auf $\mathbb{R}$ bzgl. w:

$$\int_{\mathbb{R}} p_n p_m\, w\,dx = \delta_{n,m} \quad (\text{alle } p_n\ \mathbb{R}\text{-wertig, grad } p_n = n)$$

Ist (p_n) auch ONB von $L^2(\mathbb{R},w)$?

Klassische OP'S:

1. $w(x) = e^{-x^2}$: $p_n(x) = a_n \cdot \underbrace{(-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2})}_{=: H_n(x)}$ Hermite-Polys

2. $w_\alpha(x) = x^\alpha e^{-x}\cdot 1_{[0,\infty)}(x)$, $\alpha > -1 \to$ Laguerre-Polys

3. $w_{\alpha,\beta}(x) = (1-x)^\alpha (1+x)^\beta \cdot 1_{[-1,1]}(x)$, $\alpha,\beta > -1$: Jacobi-Polys

Bsp: $(H_n)_{n\geq 0}$ orthonormal in $L^2(\mathbb{R}, e^{-x^2})$, denn:

$$m\leq n \Rightarrow \int_{\mathbb{R}} x^m H_n(x) e^{-x^2}dx \underset{\text{part. Int.}}{=} m\int_{\mathbb{R}} x^{m-1} H_{n-1}(x) e^{-x^2}dx =$$

$= \ldots = m! \int_{\mathbb{R}} H_{n-m}(x) e^{-x^2} dx \overset{HDI}{=} 0$, falls $n-m \neq 0$.

4.12. <u>Satz.</u> Sei w wie oben und $(p_n)_{n\geq 0}$ das orthonormale Polynomsystem bzgl. w auf $\mathbb{R}$. Es gelte

$$(*) \quad \exists \delta > 0: \; e^{\delta|x|} w(x) \in L^1(\mathbb{R})$$

$\Rightarrow (p_n)_{n\geq 0}$ ist ONB von $L^2(\mathbb{R}, w)$

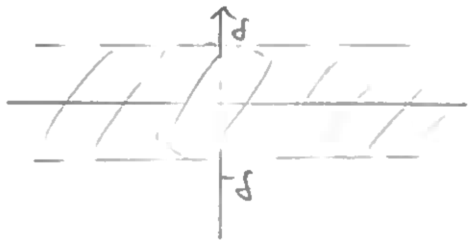
(*) erfüllt für alle klass. OPS!

Zum Beweis:

4.13. <u>Lemma</u> Sei $f \in L^1(\mathbb{R})$ und $\exists \delta > 0: e^{\delta|x|} f \in L^1(\mathbb{R}) \Rightarrow$

$\hat{f}(z) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-izx} dx$

ist holom. in $\{z \in \mathbb{C} : |\operatorname{Im} z| < \delta\}$



<u>Beweis:</u> Holomorphiesatz f. Parameterint.: $|\operatorname{Im} z| < \delta \Rightarrow$

$|f(x) e^{-izx}| \leq |f(x)| e^{\delta|x|} \in L^1(\mathbb{R})$ (von z unabh. intbare Majorante)

<u>Bew. von 4.12:</u> z.z.: $g \in L^2(\mathbb{R}, w)$ mit $\langle g, p_n\rangle_w = 0 \;\forall n \in \mathbb{N}_0$, d.h. $\langle g, x^n\rangle_w = 0 \;\forall n \in \mathbb{N}_0 \Rightarrow g = 0$.

Dazu: $(*) \Rightarrow e^{\delta|x|/2}\sqrt{w} \in L^2(\mathbb{R})$; ferner $g\sqrt{w} \in L^2(\mathbb{R})$

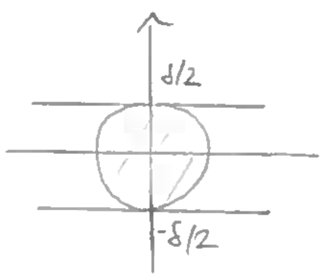
$\underset{\text{Cauchy-Schw.}}{\Rightarrow} e^{\delta|x|/2} g w \in L^1(\mathbb{R}) \Rightarrow gw \in L^1(\mathbb{R})$

L. 4.13 $\Rightarrow (gw)^\wedge$ ist holom. in $\{|\operatorname{Im} z| < \frac{\delta}{2}\}$

PRE um 0: $|z| < \frac{\delta}{2} \Rightarrow$

$$(gw)^\wedge(z) = \sum_{n\geq 0}^{\infty} \frac{1}{n!} [(gw)^\wedge]^{(n)}(0) z^n \overset{\text{Holom. Satz}}{=}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} g(x) w(x) (-ix)^n dx\right)}_{= 0 \text{ nach Vorauss.}} \cdot z^n$$



Id. Satz $\underset{\text{in } |\operatorname{Im} z| < \frac{\delta}{2}}{\Rightarrow} \widehat{gw} \equiv 0 \underset{\wedge \text{ inj. auf } L^1}{\Rightarrow} gw = 0 \Rightarrow g = 0$. ∎

§5 Fourierreihen

1 Analysis auf dem Torus

$\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ 1-dim. Torusgruppe

Kanon. Proj: $p: \mathbb{R} \to \mathbb{T}$, $x \mapsto \dot{x} = x + 2\pi\mathbb{Z}$

Identifiziere 2π-period. Fkt F auf $\mathbb{R}$ mit $f: \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ via

$$F(x) = f(\dot{x})$$

Top. auf $\mathbb{T}$: Quotiententop, dh. $U \subseteq \mathbb{T}$ offen $:\Leftrightarrow p^{-1}(U) \subseteq \mathbb{R}$ offen

$\Rightarrow$ p stetig + offen $\quad \left(p^{-1}(p(U)) = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} U + 2\pi n \right)$

Also: f stetig $\Leftrightarrow$ F stetig

f (Borel-) meßbar $\overset{(*)}{\Leftrightarrow}$ F (Borel-) meßbar

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R} \arrow[r, "F"] \arrow[d, "p"'] & \mathbb{C} \\ \mathbb{T} \arrow[ur, "f"'] & \end{tikzcd}$$

$F = f \circ p$

$C^k(\mathbb{T}) := \{ f: \mathbb{T} \to \mathbb{C} : F \in C^k(\mathbb{R}) \}$

Top. Modell für $\mathbb{T}$: $(\mathbb{T}, +) \cong (S^1, \cdot)$ $\quad S^1 = \{ z \in \mathbb{C} : |z| = 1 \}$

via $\dot{x} \mapsto e^{ix}$

top. hom., denn:

$q(x) = e^{ix}$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R} \arrow[r, "q"] \arrow[d, "p"'] & S^1 \\ \mathbb{T} \arrow[ur, "\cong"'] \arrow[u, phantom, "\circlearrowleft"] & \end{tikzcd}$$

p, q stetig + offen

Das Lebesgue-Maß $\frac{1}{2\pi} dx|_{[-\pi,\pi)}$ induz. ein Borelmaß $m = dt$ auf $\mathbb{T}$ (Bildmaß) mit

$$\int_{\mathbb{T}} f(t)\, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx$$

als 2π-period. Fkt auf $\mathbb{R}$ betrachtet

m ist translationsinvar.: $a \in \mathbb{R} \Rightarrow$

$$\int_{\mathbb{T}} f(t+a)\, dt = \int_{\mathbb{T}} f(t)\, dt$$

m: Haarmaß / Lebesgue-Maß auf $\mathbb{T}$

$m(\mathbb{T}) = 1$

---

zu $(*)$: „$\Rightarrow$" klar. „$\Leftarrow$" $U \subseteq \mathbb{C}$ offen $\Rightarrow f^{-1}(U) = p(F^{-1}(U)) \subseteq \mathbb{T}$ offen, also meßbar

L^p-**Räume**: $L^p(\mathbb{T}) := L^p(\mathbb{T}, m)$, $1 \leq p \leq \infty$

Inklusionen: $C(\mathbb{T}) \subseteq L^p(\mathbb{T})$ $(1 \leq p \leq \infty)$

$$\|f\|_p = \Big(\int_{\mathbb{T}} |f(t)|^p\, dt\Big)^{1/p} \leq \|f\|_\infty \quad \text{falls } p < \infty$$

$$1 \leq p < q \leq \infty \underset{\text{üb.!}}{\Rightarrow} L^q(\mathbb{T}) \subseteq L^p(\mathbb{T}) \subseteq L^1(\mathbb{T}), \ \|f\|_1 \leq \|f\|_p \leq \|f\|_q$$

$L^2(\mathbb{T})$ ist HR mit $\langle f, g\rangle = \int_{\mathbb{T}} f\bar{g}\, dt$

5.1. Lemma $e_n(t) = e^{int}$, $n \in \mathbb{Z} \Rightarrow$

$(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ ist Orthonormalsystem in $L^2(\mathbb{T})$ (ONB ?)

Beweis: $\langle e_n, e_m\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{int} e^{-imt}\, dt = \delta_{n,m}$

Bez: $\mathcal{T} := \langle e_n : n \in \mathbb{Z}\rangle_{\mathbb{C}}$ VR der trig. Polynome auf $\mathbb{T}$

$$p \in \mathcal{T} \Leftrightarrow p(t) = \sum_{k=-n}^{n} a_k e^{ikt}, \quad a_k \in \mathbb{C}$$

$$\operatorname{grad} p := \max\{k \in \mathbb{N}_0 : |a_k| + |a_{-k}| \neq 0\}$$

Def. Fouriertrafo auf $\mathbb{T}$

$f \in L^1(\mathbb{T})$, $n \in \mathbb{Z} \Rightarrow \hat{f}(n) := \int_{\mathbb{T}} f(t) e^{-int}\, dt = \langle f, e_n\rangle$

n-tes Fourierkoeff. von f

$|\hat{f}(n)| \leq \|f\|_1$, insbes. $\hat{f} \in \ell^\infty(\mathbb{Z})$, $\|\hat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1$

Fourierreihe von f: $S[f](t) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n) e^{int}$ (rein formal)

n-tes Fourierpolynom von f:

$$S_n f(t) = \sum_{k=-n}^{n} \hat{f}(k) e^{ikt} \in \mathcal{T}$$

Fragen: Für welche f konv. die Fourierreihe, dh. die Folge $(S_n f)$? In welchem Sinne? Wann stellt sie f (z.B. punktweise) dar?

$N \subseteq \mathbb{T}$ bel. Nullmenge $\Rightarrow \exists f \in C(\mathbb{T})$, so dass $S[f]$ in jedem $t \in N$ divergiert (→ Katznelson)

L. Carleson (1966): $f \in L^2(\mathbb{T}) \Rightarrow S[f](t)$ konv. punktweise für fast alle t gegen $f(t)$ (war alte Vermutung von Lusin, 1913)

R. Hunt, 1968: verallg. auf $L^p(\mathbb{T})$, $1 < p \leq \infty$ (nicht L^1!)

Kolmogorov 1926: $\exists f \in L^1(\mathbb{T})$, so dass $S[f]$ überall divergiert

Bem: die e_n, $n \in \mathbb{Z}$ sind die Charaktere von $(\mathbb{T},+)$, dh. die stetigen Gruppenhom. $(\mathbb{T},+) \to (S^1, \cdot)$

5.2. Lemma 1. $p = \sum_{k=-N}^{N} a_k e_k \in \mathcal{T} \Rightarrow \hat{p}(n) = \sum_{k=-n}^{n} a_k \langle e_k, e_n \rangle = a_n$

2. $f \in L^p(\mathbb{T})$, $1 \leq p \leq \infty$, $a \in \mathbb{T} \Rightarrow L_a f(t) := f(t-a) \in L^p(\mathbb{T})$ mit $\|L_a f\|_p = \|f\|_p$. Ferner $\widehat{L_a f}(n) = e^{-ina} \hat{f}(n)$

3. $\widehat{e_k f}(n) = \hat{f}(n-k)$

4. $f: \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ diffbar mit $f' \in L^1(\mathbb{T}) \Rightarrow \hat{f'}(n) = in\hat{f}(n)$

Bew. von 4.: $\hat{f'}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(t) e^{-int} dt \overset{\text{part. Int.}}{=}$

$$= \underbrace{\left[\frac{1}{2\pi} f(t) e^{-int}\right]_{-\pi}^{\pi}}_{=0} + \frac{in}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt = in \hat{f}(n) \quad \blacksquare$$

5.3. Kor. $f \in C^k(\mathbb{T}) \Rightarrow \hat{f}(n) = O(\frac{1}{n^k})$, $k \in \mathbb{N}$.

Insbes: $f \in C^2(\mathbb{T}) \Rightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(n)| < \infty$, und $S[f]$ konv. glm. (gegen f ?!)

5.4. Def + Satz (Faltung)

1. $f, g \in L^1(\mathbb{T}) \Rightarrow f * g(t) := \int_{\mathbb{T}} f(s) g(t-s) ds$ exist. für f.a. $t \in \mathbb{T}$. $f * g \in L^1(\mathbb{T})$, $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \cdot \|g\|_1$

Ferner $f * g = g * f$.

2. (Youngsche Ungl.) $f \in L^1(\mathbb{T}), g \in L^p(\mathbb{T}) \overset{1 \leq p \leq \infty}{\Rightarrow} f * g \in L^p(\mathbb{T})$, $\|f * g\|_p \leq \|f\|_1 \cdot \|g\|_p$

3. $f \in L^1(\mathbb{T})$, $g \in C^k(\mathbb{T}) \Rightarrow f * g \in C^k(\mathbb{T})$, $(f * g)^{(k)} = f * g^{(k)}$, $k \geq 0$. Diffsatz d. Falt.

Beweise: wie auf $\mathbb{R}^d$

Insbes: $(L^1(\mathbb{T}), *)$ ist kommut. Banach-*-Alg. mit Invol. $f^*(t) = \overline{f(-t)}$

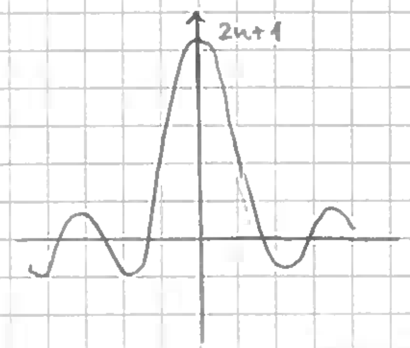
Bsp: $p = \sum_{k=-n}^{n} a_k e_k \in \mathcal{T}$, $f \in L^1(T) \Rightarrow$

$$f * p(t) = \sum_{k=-n}^{n} a_k \int_T f(s) \underbrace{e_k(t-s)}_{e^{ik(t-s)}} ds = \sum_{k=-n}^{n} a_k \hat{f}(k) e^{ikt}$$ wieder trig. Pol.

Speziell: $D_n(t) = \sum_{k=-n}^{n} e^{ikt}$ $\quad (D_n)_{n \geq 0}$: Dirichlet-Kern

$$\Rightarrow \boxed{f * D_n = S_n f}$$ (n-tes Fourierpol.)

Explizit: $D_n(t) = \dfrac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{\sin\frac{t}{2}}$



2. Approximative Einsen + L^2-Theorie

Banachraumwertige Integration

Sei X BR, $I \subseteq \mathbb{R}$ komp. Intervall, $f \in C(I, X)$.

Ziel: $\int_I f(t)\,dt \in X$

(Spezialfall d. Bochner-Integrals → Arendt et al: Vector-valued Laplace Transforms + Cauchy problems)

$C(I,X)$: BR mit Norm $\|f\|_{I,\infty} = \sup_{t \in I} \|f(t)\|$

1. $g = \sum_{k=1}^{n} x_k \mathbb{1}_{I_k}$ Treppenfkt ($x_k \in X$, $I_k \subseteq I$ Teilintervall)

$$\int_I g\,dt := \sum_{k=1}^{n} x_k |I_k| \in X$$

$$\Rightarrow \left\| \int_I g\,dt \right\| \leq \int_I \|g(t)\|\,dt \leq |I| \cdot \|g\|_{I,\infty} \quad (*)$$

2. $f \in C(I,X) \Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists$ T.F. g: $\|f - g\|_{I,\infty} < \varepsilon$.
(da f glm. stetig auf I)

Wähle T.F. $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $\|g_n - f\|_{I,\infty} \to 0$

$$\int_I f\,dt := \lim_{n \to \infty} \int_I g_n\,dt \in X.$$

Mit (*) folgt: Def. unabh. von der Wahl der (g_n). Ferner:

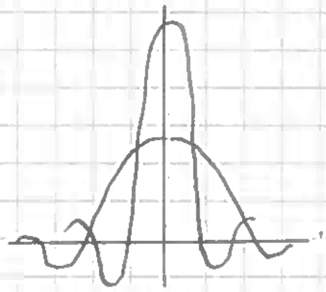
- $\left\| \int_I f\,dt \right\| \le \int_I \|f(t)\|\,dt$
- $S \in L(X,Y)$, Y BR $\Rightarrow S\left(\int_I f\,dt\right) = \int_I Sf\,dt$

<u>Def.</u> $(k_n)_{n\in\mathbb{N}_0} \subseteq C(\mathbb{T})$ heißt Summationskern auf $\mathbb{T}$:$\Leftrightarrow$

(1) $\int_{\mathbb{T}} k_n\,dt = 1 \quad \forall n$

(2) $\exists M > 0 : \|k_n\|_1 \le M \quad \forall n$

(3) $\forall\, 0 < \delta < \pi : \lim\limits_{n\to\infty} \int_{\delta<|t|<\pi} |k_n(t)|\,dt = 0$



(Def. etwas allgemeiner als bei approx. Einsen auf $\mathbb{R}^d$) Falls $k_n \geq 0 \Rightarrow$ (2) obsolet.

Oft auch Fam. $(k_r)_{r\in[0,1)}$, $r \to 1$.

<u>Im Folgenden stets:</u> X eines der BR $L^p(\mathbb{T})$, $1 \le p < \infty$ oder $(C(\mathbb{T}), \|\cdot\|_\infty)$

$X \subseteq L^1(\mathbb{T})$, $\|\cdot\|_X \geq \|\cdot\|_1$.

5.5. <u>Lemma</u> Die Translation in X ist stetig, d.h. $f \in X \Rightarrow$

$$\|L_t f - f\|_X \to 0 \quad \text{für } t \to 0 \quad (t \in \mathbb{T})$$

<u>Beweis:</u> 1. klar für $X = C(\mathbb{T})$, da $f \in C(\mathbb{T}) \Rightarrow f$ glm. stetig

2. $C(\mathbb{T}) \subseteq L^p(\mathbb{T})$ dicht für $1 \le p < \infty$ (da $\mathbb{T}$ komp., Lebesgue-Maß dt regulär, mit Urysohn, vgl. Satz 2.8)

$f \in L^p$, $\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists\, g \in C(\mathbb{T}) : \|f - g\|_p < \varepsilon$.

$$\|L_t f - f\|_p \le \underbrace{\|L_t(f-g)\|_p}_{<\varepsilon} + \underbrace{\|L_t g - g\|_p}_{\to 0} + \underbrace{\|g - f\|_p}_{<\varepsilon} \qquad \blacksquare$$

5.6. <u>Satz</u> (k_n) Summationskern auf $\mathbb{T} \Rightarrow (k_n)$ ist approx. Eins für X, d.h.

$$\|\underbrace{k_n * f}_{\in X \text{ nach Falt. Satz 5.4}} - f\|_X \to 0 \quad \text{für } n \to \infty$$

5.6 a) <u>Lemma</u> $f \in X$ $(= L^p(\mathbb{T}),\ 1 \le p < \infty$ oder $C(\mathbb{T}))$, $k \in C(\mathbb{T}) \Rightarrow$

$$k * f = \int_{\mathbb{T}} L_s f \cdot k(s)\, ds \in X$$

<u>Beweis:</u> 1. $X = C(\mathbb{T})$: $t \in \mathbb{T} \Rightarrow f \mapsto f(t) \in X' \Rightarrow$

$$\left(\int_{\mathbb{T}} L_s f \cdot k(s)\, ds\right)(t) = \int_{\mathbb{T}} L_s f(t)\, k(s)\, ds = k * f(t)$$

2. $X = L^p$: $f \in X \Rightarrow \exists f_n \in C(\mathbb{T}): f_n \longrightarrow f$ in X

Youngsche Ung. $\Rightarrow k * f_n \to k * f$ in X $\qquad (\|k * f\|_X \le \|k\|_1 \cdot \|f\|_X)$

$$\underbrace{k * f_n}_{= \int_{\mathbb{T}} L_s f_n \cdot k(s)\, ds} \to \int_{\mathbb{T}} L_s f \cdot k(s)\, ds,$$

da $\left\| \int_{\mathbb{T}} L_s(f_n - f)\, k(s)\, ds \right\|_p \le \int_{\mathbb{T}} \|f_n - f\|_p \cdot |k(s)|\, ds \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$ ∎

Beweis: $k_n * f = \int_{\mathbb{T}} \underbrace{L_s f \cdot k_n(s)}_{\in X}\, ds$ (X-wertiges Int.)

$$\Rightarrow \|k_n * f - f\|_X = \Big\| \int_{T} (L_s f - f)\, k_n(s)\, ds \Big\|_X \le \int_{\mathbb{T}} \|L_s f - f\|_X \, |k_n(s)|\, ds =: I_n$$

Sei $\varepsilon > 0$, dazu $\delta > 0$ so, dass $\|L_s f - f\|_X < \varepsilon$ für $|s| < \delta$ $\Rightarrow$

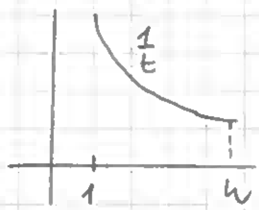
$$I_n = \underbrace{\int_{|s|<\delta} (\dots)}_{\substack{\le \varepsilon \cdot \|k_n\|_1 \\ \le \varepsilon M}} + \underbrace{\int_{\delta<|s|<\pi} (\dots)}_{\le 2\|f\|_X \cdot \int_{\delta<|s|<\pi} |k_n(s)|\, ds \;\to\; 0 \text{ für } n \to \infty}$$ ∎

Der Dirichlet-Kern $(D_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ ist kein Summationskern, denn:

5.7. Lemma $\|D_n\|_1 \geq \frac{4}{\pi^2} \ln n$

↑ „Lebesgue-Konstanten"

Beweis:
$$\frac{\pi}{2} \|D_n\|_1 \underset{D_n \text{ gerade}}{=} \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \left| \frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{\sin\frac{t}{2}} \right| dt \underset{t=2x}{=} \int_0^{\pi/2} \frac{|\sin(2n+1)x|}{\sin x}\, dt$$
$$\underset{\sin x \le x}{\geq} \int_0^{\pi/2} \frac{|\sin(2n+1)x|}{x}\, dx \underset{(2n+1)\frac{x}{\pi} = r}{=} \int_0^{n+\frac{1}{2}} \frac{\overbrace{|\sin(\pi r)|}^{1\text{-period.}}}{r}\, dr \geq$$
$$\int_0^1 \underbrace{\left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right)}_{\geq \ln n} |\sin(\pi r)|\, dr \geq \frac{2}{\pi} \cdot \ln n$$



Daher hat $S_n f = D_n * f$ schlechte Konvergenzeigenschaften!

Konvergenzverbesserung: geeignete Summation

Def. Geg. Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$, $a_k \in \mathbb{C}$

$s_n := \sum_{k=0}^{n} a_k$ Partialsummenfolge

$\sigma_n := \frac{1}{n+1}(s_0 + \dots + s_n)$ n-tes Cesàro-Mittel von (s_n)

n-te Cesàro-Summe von $\sum a_k$

Falls $\lim_{n \to \infty} \sigma_n = \sigma$ exist., so heißt $\sum a_k$ Cesàro-summierbar gegen σ

Ana I: $\lim s_n = s \Rightarrow \lim \sigma_n = s$.

Nun: $f \in L^1(\mathbb{T})$, $S_n f = D_n * f$ (n-tes Fourierpol.)

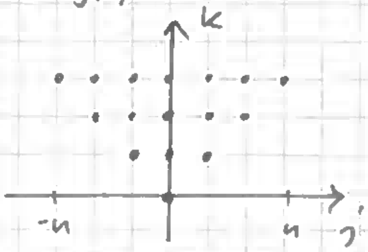
Cesàro-Mittel der $S_n f$:

$\sigma_n(f) := F_n * f$ mit $F_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} D_k \in \mathcal{T}$

$(F_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$: Fejér-Kern auf $\mathbb{T}$

Explizit: $F_n(t) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \left(\sum_{j=-n}^{n} e^{ijt} \right) = \frac{1}{n+1} \sum_{j=-n}^{n} (n+1-|j|) e^{ijt}$

$= \sum_{k=-n}^{n} \left(1 - \frac{|k|}{n+1}\right) e^{ikt}$



Also: $F_n * f(t) = \sum_{k=-n}^{n} \left(1 - \frac{|k|}{n+1}\right) \hat{f}(k)\, e^{ikt} \in \mathcal{T}$

n-tes Fejér-Polynom von f

5.8. Satz $(F_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist Summationskern auf $\mathbb{T}$ mit $F_n \geq 0$

Beweis: ÜG.

5.9. Korollar (1) $f \in X \Rightarrow F_n * f \to f$ in X (aus Approx. Satz 5.6.)

(2) $\mathcal{T} \subseteq X$ dicht (für $X = C(\mathbb{T})$ Spezialfall v. Stone-Weierstraß)

(3) $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ mit $e_n(t) = e^{int}$ ist ONB von $L^2(\mathbb{T})$)

5.10. Korollar (1) Lemma v. Riemann-Lebesgue:

$f \in L^1(\mathbb{T}) \Rightarrow \hat{f} \in c_0(\mathbb{Z})$, d.h. $\lim_{|n|\to\infty} \hat{f}(n) = 0$

(2) $\mathcal{F}: f \mapsto \hat{f}$ ist injektiv auf X

Beweis: (1) $\widehat{\sigma_n(f)} \in c_c(\mathbb{Z})$. $\|\hat{f} - \widehat{\sigma_n(f)}\|_\infty \leq \|f - \overbrace{\sigma_n(f)}^{F_n * f}\|_1 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \Rightarrow$ Beh.

(2) $\hat{f}(n) = 0 \;\forall n \Rightarrow \sigma_n(f) = 0 \;\forall n$. $\sigma_n(f) \to f$ in X $\Rightarrow f = 0$ ∎

5.11. Bem. Sei $f \in L^1(\mathbb{T})$, und $(S_n f)$ konvergiere gleichmäßig auf $\mathbb{T}$ (z.B. falls $f \in C^2(\mathbb{T})$) $\Rightarrow$ f hat stetigen Vertreter $\tilde{f}$ mit $\tilde{f}(t) = \lim_{n\to\infty} S_n f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}(k)\, e^{ikt}$ $\forall t$, d.h. $\tilde{f}$ wird durch seine Fourierreihe dargestellt.

Denn: $g(t) := \lim_{n\to\infty} S_n f(t)$ ist stetig

$$\hat{g}(n) = \int_{\mathbb{T}} g(t) e^{-int} dt \underset{\text{glm. konv.}}{=} \sum_{k=-n}^{n} \hat{f}(k) \underbrace{\int_{\mathbb{T}} e^{ikt} e^{-int} dt}_{\delta_{kn}} = \hat{f}(n) \Rightarrow$$

$f = g$ f.ü. ∎

<u>Bez</u>: $A(\mathbb{T}) := \{ f \in C(\mathbb{T}) : \hat{f} \in \ell^1(\mathbb{Z}) \}$

↑ dh. $(S_n f)$ konv. absolut

$$f \in A(\mathbb{T}) \Rightarrow f(t) = \lim_{n\to\infty} S_n f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n) e^{int} \quad \forall t \in \mathbb{T}$$

(L^1-Inversion der Fouriertrafo)

5.12. <u>Faltungssatz</u> $\mathcal{F} : (L^1(\mathbb{T}), *) \to (c_0(\mathbb{Z}), \cdot)$

ist stetiger Homom. kommutativer Banach-$*$-Algebren:

$$\widehat{f*g} = \hat{f}\hat{g}, \quad \widehat{f^*} = \overline{\hat{f}}, \quad \|\hat{f}\|_\infty \le \|f\|_1$$

<u>Beweis</u>: $\widehat{f*g}(n) = \int_{\mathbb{T}} \left(\int_{\mathbb{T}} f(s) g(t-s) ds \right) e^{-ins} e^{-in(t-s)} dt \underset{\text{Fubini}}{=} \hat{f}(n)\hat{g}(n)$

Rest klar ∎

Kor. 5.9.(3) + Hilbertraum-Theorie liefern:

5.13. <u>Satz</u> (1) <u>L^2-Fourierreihen-Satz</u>:

$f \in L^2(\mathbb{T}) \Rightarrow \hat{f} \in \ell^2(\mathbb{Z})$, und $f = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n) e_n$ in $L^2(\mathbb{T})$,

wobei die Reihe unbedingt konv. (dh. unabh. von der Abzählung von $\mathbb{Z}$)

Insbes: $f = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=-n}^{n} \hat{f}(k) e_k = \lim_{n\to\infty} S_n f$ im L^2-Sinne

(Standard-Abz.: $0, 1, -1, 2, -2, \ldots$)

(2) $S_n f$ = Ortho-Proj. von f auf $\mathcal{T}_n = \{ p \in \mathcal{T} : \operatorname{grad} p \le n \}$

(3) <u>Satz v. Plancherel</u>: $\mathcal{F} : f \mapsto \hat{f}$, $L^2(\mathbb{T}) \to \ell^2(\mathbb{Z})$

ist isometr. Isomorphismus

(4) Parseval-Id.: $\langle \hat{f}, \hat{g} \rangle = \langle f, g \rangle \quad \forall f, g \in L^2(\mathbb{T})$

Noch ein wichtiger Summationskern:

<u>Def</u>. (<u>Poisson-Kern</u>) $\quad P_r(t) := \sum_{k\in\mathbb{Z}} r^{|k|} e^{ikt}, \quad 0 \le r < 1$

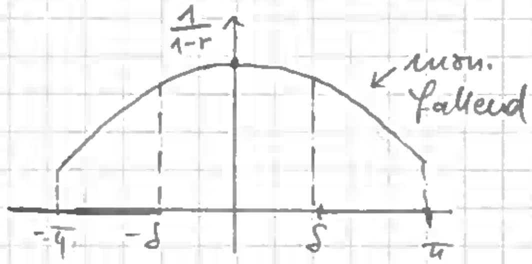
$P_r \in C(\mathbb{T})$ (glm. konv.)

$$P_r(t) = 1 + 2\sum_{k=1}^{\infty} r^k \cos(kt) = \operatorname{Re}\Big(1 + 2\sum_{k=1}^{\infty} (re^{it})^k\Big)$$

$$= \operatorname{Re}\Big(1 + 2\,\frac{re^{it}}{1-re^{it}}\Big) = \operatorname{Re}\Big(\frac{1+re^{it}}{1-re^{it}}\Big)$$

$$\Rightarrow P_r(t) = \frac{1-r^2}{1-2r\cos t + r^2}$$; insbes. $P_r > 0$, P_r gerade

5.14. Satz $(P_r)_{0 \le r < 1}$ ist Summationskern auf $\mathbb{T}$ (für $r \uparrow 1$)



Beweis: (1) $\int_{\mathbb{T}} P_r\, dt = r^0 = 1$

$0<\delta<\pi \Rightarrow$

(2) $\int_{\delta<|t|<\pi} P_r(t)\,dt \le P_r(\delta)\cdot 2(\pi-\delta)$

$\rightarrow 0$ mit $r \rightarrow 1$ ∎

$$f \in L^1(\mathbb{T}) \Rightarrow \underbrace{P_r * f(t)}_{\text{stetig}} = \int_{\mathbb{T}} f(s) \sum_{k=-\infty}^{\infty} r^{|k|} e^{ik(t-s)}\, ds \underset{\text{Fubini}}{=}$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} r^{|k|} \hat{f}(k)\, e^{ikt}$$

5.15. Kor $f \in X$ $(= L^p(\mathbb{T}),\ 1 \le p < \infty$ oder $C(\mathbb{T}))$

$\underset{\text{Satz 5.6.}}{\Rightarrow} \lim_{r\to 1} \|P_r * f - f\|_X = 0$ Abel-Summierbarkeit der Fourierreihe $(S_n f)$

3. Zur punktweisen Konvergenz von $(S_n f)$

5.16. Satz (Dini-Kriterium)

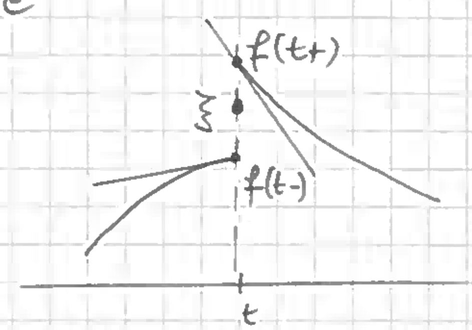
Sei $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{T})$, $t \in \mathbb{T}$. Dann gilt $\lim_{n\to\infty} S_n f(t) = \xi$, falls

$$(*) \quad \exists\, \delta > 0: \int_0^{\delta} \left|\frac{f(t+s) + f(t-s) - 2\xi}{s}\right| ds < \infty$$

Bsp: (1) f diffbar in $t \Rightarrow (*)$ erfüllt mit $\xi = f(t)$

Denn dann ist $\lim_{s\downarrow 0} \frac{f(t\pm s)-\xi}{s} = \pm f'(t)$

(2) Allgemeiner: f habe in t rechts- und linksseitige Grenzwerte $f(t\pm) = \lim_{s\downarrow 0} f(t\pm s)$,
und f sei in t rechts- und linksseitig diffbar, dh.
$f'(t\pm) := \lim_{s\downarrow 0} \frac{f(t\pm s)-f(t\pm)}{\pm s}$ existiere



$\Rightarrow$ (*) ist erfüllt mit
$$\xi = \tfrac{1}{2}(f(t+)+f(t-))$$

(3) f erfülle lokale Lipschitz-Bed. der Ordnung $\alpha > 0$ in t, dh.
$\exists \delta > 0: \; |f(t+s)-f(t)| \leq L\cdot |s|^\alpha \quad \forall |s| < \delta$

$\left|\frac{f(t+s)+f(t-s)-f(t+)-f(t-)}{s}\right| \to$

$\Rightarrow$ (*) erfüllt mit $\xi = f(t)$

Das Dini-Kriterium ist lokaler Natur. In der Tat: die Konv. von S_nf ist eine lokale Eigenschaft, dh. die Änderung von f außerhalb einer Umgeb. von t beeinflußt nicht die Konv. von $S_nf(t)$ (obwohl sich die $\hat{f}(n)$ evtl. alle ändern!)
Genauer:

5.17. Kor. (Riemannsches Lokalisationsprinzip)
Sei $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{T})$, $f \equiv 0$ in einer offenen Umgeb. von t $\Rightarrow$
$\lim_{n\to\infty} S_nf(t) = 0$

Bew. d. Dini-Krit.:
$$S_nf(t) = D_n * f(t) \underset{D_n \text{ gerade}}{=} \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi (f(t-s)+f(t+s))\,D_n(s)\,ds$$
$$\Rightarrow S_nf(t) - \xi \underset{\frac{1}{2\pi}\int_0^\pi D_n(s)ds = \frac{1}{2}}{=} \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi (f(t+s)+f(t-s)-2\xi)\,D_n(s)\,ds$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi \underbrace{\frac{f(t+s)+f(t-s)-2\xi}{s}}_{\in L^1(\mathbb{T}) \text{ nach } (*)} \cdot \underbrace{\frac{s}{\sin\frac{s}{2}}}_{\in C_b(\mathbb{T})} \cdot \underbrace{\sin(n+\tfrac{1}{2})s}_{\frac{1}{2i}(e^{\frac{is}{2}}e^{ins} - e^{-\frac{is}{2}}e^{-ins})}\,ds \xrightarrow{\text{(Riemann-Lebesgue)}} 0 \text{ f. } n\to\infty$$

4. Zur Normkonvergenz von $S_n f$

$X = L^p(\mathbb{T})$, $1 \le p < \infty$ oder $C(\mathbb{T})$.

$f \in X \Rightarrow S_n f = D_n * f \in X$; $S_n \in L(X)$

Young'sche Ungl.: $\|S_n f\|_X \le \underbrace{\|D_n\|_1}_{=: L_n} \cdot \|f\|_X$, (Lebesgue-Konst.)

$\Rightarrow \|S_n\|_X := \|S_n\|_{op.} \le L_n$ ($\sim \ln n$)

$X = L^2(\mathbb{T}) \Rightarrow \|S_n\|_{L^2(\mathbb{T})} = 1$, da $\|S_n f\|_2 \le \|f\|_2$ und $S_n e_n = e_n$

Bez: X läßt Konvergenz in der Norm zu, falls gilt:

$f \in X \Rightarrow S_n f \to f$ in X

Bsp: $L^2(\mathbb{T})$ läßt Konv. in Norm zu.

5.18. Satz X läßt Konv. in der Norm zu $\Leftrightarrow$

$\exists M > 0 : \|S_n\|_X \le M \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Beweis: „$\Rightarrow$" Sei $S_n f \to f$ in X $\forall f \in X \Rightarrow \sup_{n \in \mathbb{N}} \|S_n f\|_X < \infty \; \forall f \in X$

$\underset{\text{Banach-Steinhaus}}{\Longrightarrow} \sup_{n \in \mathbb{N}} \|S_n\|_X < \infty$

„$\Leftarrow$" Sei $f \in X$, $\varepsilon > 0 \underset{\text{Kor. 5.9.}}{\Longrightarrow} \exists$ trig. Polynom $p \in \mathcal{T}$: $\|f - p\|_X < \varepsilon$

Sei $n \ge \operatorname{grad} p \Rightarrow S_n p = p \Rightarrow$

$\|S_n f - f\|_X \le \underbrace{\|S_n f - S_n p\|_X}_{\le M \|f - p\|_X} + \underbrace{\|S_n p - p\|_X}_{0} + \|p - f\|_X < \varepsilon(M+1)$ ∎

5.19. Satz $\|S_n\|_{L^1(\mathbb{T})} = L_n$, $\|S_n\|_{C(\mathbb{T})} = L_n$

$L^1(\mathbb{T})$ und $C(\mathbb{T})$ lassen daher Konv. in der Norm nicht zu

Beweis: Hier für $L^1(\mathbb{T})$; $C(\mathbb{T})$ Übung

Nur „$\ge$" zu zeigen.

Fejér-Kern: $F_m = \sum_{k=-m}^{m} \left(1 - \frac{|k|}{m+1}\right) e_k \in \mathcal{T}$,

$$S_n(F_m) = F_m * D_n \left(\underset{m \geq n}{=} \sum_{k=-n}^{n} \left(1 - \frac{|k|}{m+1}\right) e_k \right)$$

$$\Rightarrow \underbrace{\|F_m * D_n\|_1}_{\xrightarrow[m\to\infty]{} \|D_n\|_1 \geq L_n} = \|S_n(F_m)\|_1 \leq \|S_n\|_{L^1} \cdot \|F_m\|_1 = \|S_n\|_{L^1}$$

da $F_m * D_n \to D_n$ in L^1 (Approx Satz)

$$\Rightarrow \|S_n\|_{L^1} \geq L_n \quad \blacksquare$$

Bem: $1 < p < \infty \Rightarrow L^p$ läßt Konv. im Norm zu (→ Katznelson)

5. Poissonsche Summationsformel

5.20. Satz Sei $f \in L^1(\mathbb{R})$.

(1) $f_p(t) := 2\pi \cdot \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(t+2\pi n)$ konv. für f.a. $t \in \mathbb{R}$

$f_p \in L^1(\mathbb{T})$ mit $\|f_p\|_1 \leq \|f\|_1$, $\hat{f}_p(n) = \sqrt{2\pi}\, \hat{f}(n) \quad \forall n \in \mathbb{Z}$

f_p: Periodisierung von f

(2) Falls $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\hat{f}(n)| < \infty \Rightarrow$

$$(*) \quad \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n) e^{int} = \sqrt{2\pi} \cdot \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(t+2\pi n) \quad \text{für f.a. } t \in \mathbb{T}$$

Falls die Reihe rechts glm. auf Intervall $I \subseteq \mathbb{T}$ konv. $\Rightarrow$ $(*)$ gilt $\forall t \in I$

Beweis: (1) (Zählmaß auf $\mathbb{Z}$)

$$\int_0^{2\pi} \sum_{n\in\mathbb{Z}} |f(t+2\pi n)|\, dt \underset{\text{Tonelli}}{=} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_0^{2\pi} |f(t+2\pi n)|\, dt = \int_{\mathbb{R}} |f(t)|\, dt = \|f\|_1 < \infty$$

$\overset{\text{Fubini}}{\Longrightarrow}$ $f_p(t)$ konv. absolut für f.a. $t \in [0,2\pi)$, und $f_p \in L^1(\mathbb{T})$ mit

$$\|f_p\|_1 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f_p(t)|\, dt \leq \|f\|_1$$

$$\hat{f}_p(n) = \int_{\mathbb{T}} f_p(t) e^{-int} dt = \int_0^{2\pi} \sum_{k\in\mathbb{Z}} f(t+2\pi k)\, e^{-int}\, dt \underset{\text{abs. konv.}}{=}$$

$$= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_0^{2\pi} f(t+2\pi k) \underset{2\pi\text{-period.}}{e^{-int}} dt = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_{2\pi k}^{2\pi(k+1)} f(t) e^{-int} dt = \sqrt{2\pi}\, \hat{f}(n)$$

(2) $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\hat{f}_p(n)| < \infty \Rightarrow f_p$ hat stetigen Vertreter $\tilde{f}_p \in A(\mathbb{T})$, und

$$\tilde{f}_p(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}_p(n) e^{int} = \sqrt{2\pi} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n) e^{int} \quad \forall t \in \mathbb{T}$$

$\Rightarrow$ Für fast alle $t \in \mathbb{T}$ gilt

$$2\pi \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(t+2\pi n) = \underbrace{\sqrt{2\pi}\sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat f(n) e^{int}}_{\in C(\mathbb{T})} \implies \text{Beh.} \qquad \blacksquare$$

5.21. Bsp: $g_t(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-x^2/4t} \in L^1(\mathbb{R})$, $t>0$

Gauß-Kern

$\hat g_t(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t\xi^2}$, insbes. $\hat g_t(n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-n^2 t}$ $\forall n\in\mathbb{Z}$

5.20 (2) mit $f = g_t$:

$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat g_t(n) e^{inx} = \sqrt{2\pi} \sum_{n\in\mathbb{Z}} g_t(x+2\pi n)$ für f. a. $x\in\mathbb{T}$ $\implies$

$\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-n^2 t} e^{inx} = \sqrt{\frac{\pi}{t}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-(x+2\pi n)^2/4t}$ $\forall x\in\mathbb{T}$

↑ Reihe konv. glm. auf $\mathbb{T}$

„Theta-Transformationsformel" (Jacobi)

Theta-Reihe: $\vartheta(z,\tau) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{\pi i n^2 \tau} e^{2\pi i n z}$, $z\in\mathbb{C}$, $\operatorname{Im}\tau > 0$

oben: $\tau = it$, $2\pi z = x$ (normal konv., holom. in $\mathbb{C}$)

$$\left.\begin{aligned}\vartheta(z+1,\tau) &= \vartheta(z,\tau)\\ \vartheta(z+\tau,\tau) &= e^{-\pi i(\tau+2z)}\vartheta(z,\tau)\end{aligned}\right\} \text{ Quasi-Periodizität}$$

wichtig bei Konstr. elliptischer Fkt zum Gitter $\mathbb{Z}+\mathbb{Z}\tau \subseteq \mathbb{C}$.

nicht gemacht

Bem. zur Fourieranalysis auf $\mathbb{T}^d$, $d>1$:

Charaktere von $(\mathbb{T}^d,\cdot)$: $\{e_k(t) = e^{i\langle k,t\rangle}, k\in\mathbb{Z}^d\}$

$\mathcal{T} = \langle e_k, k\in\mathbb{Z}^d\rangle_{\mathbb{C}}$ dicht in $(C(\mathbb{T}^d), \|.\|_\infty)$ nach

Satz v. Stone-Weierstraß: X komp., $A\subseteq C(X)$ Unteralg mit

- $1\in A$; $f\in A \Rightarrow \bar f\in A$
- A trennt Pkte von X, d.h. $x\neq y \Rightarrow \exists f\in A: f(x)\neq f(y)$

$\implies A\subseteq (C(X), \|.\|_\infty)$ dicht.

$\implies \mathcal{T}$ dicht in $L^p(\mathbb{T}^d)$, $1\le p<\infty$

↑ bzgl. Lebesgue-Maß $dt = dt_1\otimes\ldots\otimes dt_d$

Insbes: $(e_k)_{k\in\mathbb{Z}^d}$ ist ONB von $L^2(\mathbb{T}^d)$

Fourierkoeff. von $f \in L^1(\mathbb{T}^d)$: $\hat{f}(k) = \int_{\mathbb{T}^d} f(t)\, e^{-i\langle k, t\rangle} dt$

Riemann-Lebesgue: $\hat{f} \in c_0(\mathbb{Z}^d)$,

Plancherel: $L^2(\mathbb{T}^d) \to \ell^2(\mathbb{Z}^d)$ ist isometr. Isomorphismus

§6 Exkurs: Lokalkonvexe Räume

Motivation: Schwäche von Fkt aus L^p-Räumen / Maßen:

nicht im klass. Sinne diffbar

Idee: Betrachte Fkt u als (stetiges) lin. Funktional auf geeignetem Testfkt-Raum glatter Fkt via $L(\varphi) = \int \varphi u \, dx$
$\uparrow$ Testfkt

Motivation: Distributionen sind stetige lin. Funktionale auf geeigneten Räumen von Testfkt; diese sind lokalkonvex, Bsp: $\mathcal{S}_d$

Erinnerung: $\mathcal{S}_d = \{\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^d) : \|\varphi\|_{\alpha,\beta} = \|x^\beta D^\alpha \varphi\|_\infty < \infty \ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^d\}$

$= \{ \ " \ : q_n(\varphi) = \max_{|\alpha| \le n} \|(1+|x|^2)^n D^\alpha \varphi\|_\infty < \infty \ \forall n \in \mathbb{N}_0\}$

Die $\|.\|_{\alpha,\beta}$ sind Halbnormen auf $\mathcal{S}_d$, die q_n Normen, welche die Metrik von $\mathcal{S}_d$ definieren.

Def. Ein $\mathbb{K}$-VR X ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$) mit einer Hausdorffschen Top. τ heißt topologischer VR, falls die Abb.

$(x,y) \mapsto x+y$, $X \times X \to X$ und $(\lambda, x) \mapsto \lambda x$, $\mathbb{K} \times X \to X$

stetig sind.

Bem: 1. Jeder normierte Raum ist TVR

2. Translationen $x \mapsto x+y$ ($y \in X$ fest) und Dilationen $x \mapsto \lambda x$ ($\lambda \neq 0$) sind Homöom. $\Rightarrow$ τ ist translations- und dilationsinvar., d.h.

$U \in \tau, x \in X \Rightarrow x + U \in \tau, \ \lambda U \in \tau \ \forall \lambda \neq 0$

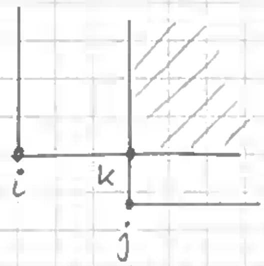
Wir werden es i.A. mit nicht metrisierbaren Räumen zu tun haben. Ersatz für Folgen:

Def. Sei X Menge. Ein Netz in X ist eine Abb. $I \to X$, $i \mapsto x_i$ wobei I eine gerichtete Menge, dh.

- $i \leq i$
- $i \leq j \wedge j \leq k \to i \leq k$
- $i,j \in I \Rightarrow \exists k \in I: i,j \leq k$

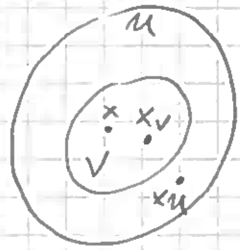
Schreibe $(x_i)_{i\in I}$.

Ein Netz (x_i) in einem top. Raum X konvergiert gegen $x \in X$ ($x_i \to x$)
$:\Leftrightarrow \forall$ Umgeb. U von x $\exists i_0 \in I: x_i \in U \ \forall i \geq i_0$
(Grenzwert eind., falls X Hausdorffsch)



Bsp: 1. $\mathbb{R}^2$ gerichtet mit $(a,b) \leq (c,d) \Leftrightarrow$
$a \leq c \wedge b \leq d$

2. X top. Raum, Umgebungssystem von $x \in X$:
$\mathfrak{U}_x = \{U \subseteq X: U \text{ Umgeb. von } x\}$
$\Rightarrow I = \mathfrak{U}_x$ ist gerichtet mit $U \leq V :\Leftrightarrow V \subseteq U$
Zu $U \in \mathfrak{U}_x$ wähle $x_U \in U \Rightarrow (x_U)_{U\in\mathfrak{U}} \to x$
(Denn: $x_V \in U \ \forall V \geq U$)



6.1. **Satz** (1) X top. Raum, $A \subseteq X$. Dann: $x \in \bar{A} \Leftrightarrow$
$\exists$ Netz $(x_i) \subseteq X: x_i \to x$

(2) $f: X \to Y$ (Y top. Raum) stetig in $x \in X \Leftrightarrow$
Für jedes Netz $(x_i) \subseteq X$ mit $x_i \to x$ gilt $f(x_i) \to f(x)$

Bew: wie in metr. Räumen.

Def. Sei X $\mathbb{K}$-VR. Eine Familie $\mathcal{P}$ von Halbnormen auf X heißt separierend $:\Leftrightarrow \forall x \in X\setminus\{0\} \ \exists p \in \mathcal{P}: p(x) \neq 0$

p Halbnorm $\Leftrightarrow p(\lambda x) = |\lambda|\cdot p(x)$, $\lambda \in \mathbb{K}$; $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$.

6.2. Satz Sei X $\mathbb{K}$-VR, $\mathcal{P}$ eine separierende Familie von Halbnormen auf X. $\tau = \tau_*(\mathcal{P})$ sei die von den p-Kugeln $\{x \in X : p(x-x_0) < \varepsilon\}$ ($p \in \mathcal{P}, x_0 \in X, \varepsilon > 0$) erzeugte Top. auf X
(dh. jedes $U \in \tau$ ist Vereinigung endlicher Schnitte solcher Kugeln)
$\Rightarrow (X,\tau)$ ist TVR. Ferner:
(1) Die $\mathcal{U}_{p_1,\dots,p_n,\varepsilon} = \{x \in X : p_k(x) < \varepsilon \;\; \forall k = 1,\dots,n\}$ $(\varepsilon > 0, p_k \in \mathcal{P})$ bilden eine Umgeb. basis von 0
(2) Ist $(x_i) \subseteq X$ Netz, so gilt:

$$x_i \to x \iff p(x_i - x) \to 0 \quad \forall p \in \mathcal{P}$$

(3) τ ist die schwächste Top. auf X, so dass alle $x \mapsto p(x-x_0)$ ($p \in \mathcal{P}, x_0 \in X$) stetig.

Def. Ein TVR (X,τ) heißt <u>lokalkonvex</u> $:\iff \tau = \tau_*(\mathcal{P})$, $\mathcal{P}$ separierende Fam. von Halbn.

<u>Beweis:</u> τ transl. invar. per Def., also: $x_i \to x \underset{\text{Satz 6.1.(2)}}{\iff} x_i - x \to 0$

(1) Sei $\mathcal{U}$ Umgeb. von 0, o.E. $\mathcal{U} = \bigcap_{k=1}^{n} \{x : p_k(x-x_k) < \varepsilon\}$
$p_k(x-x_k) < p_k(x) + p_k(x_k)$. $0 \in \mathcal{U} \Rightarrow \delta := \max_k p_k(x_k) < \varepsilon$
Also: $\mathcal{U} \supseteq \bigcap_{k=1}^{n} \{x : p_k(x) < \varepsilon - \delta\} = \mathcal{U}_{p_1,\dots,p_n,\varepsilon-\delta}$

(2) Sei $x_i \to x$, $p \in \mathcal{P} \Rightarrow x_i - x \to 0 \Rightarrow$ Zu $\varepsilon > 0 \; \exists i_0 \in I$:
$x_i - x \in \mathcal{U}_{p,\varepsilon} \; \forall i \geq i_0$, dh. $p(x_i - x) < \varepsilon \;\; \forall i \geq i_0 \Rightarrow p(x_i - x) \to 0$
Umgekehrt: Sei $p(x_i - x) \to 0 \;\; \forall p \Rightarrow$ Zu $\mathcal{U}_{p_1,\dots,p_n,\varepsilon} \; \exists i_0$:
$x_i - x \in \mathcal{U}_{p_1,\dots,p_n,\varepsilon} \;\; \forall i \geq i_0 \overset{\mathcal{U}_{p_1,\dots,p_n,\varepsilon}\text{ Basis}}{\Longrightarrow} x_i - x \to 0$
(3) z.zeigen: jedes $x \mapsto p(x-x_0)$ ist stetig (Rest klar)
Sei $x_i \to x \Rightarrow |p(x_i - x_0) - p(x - x_0)| \underset{\Delta\text{-Ungl.}}{\leq} p(x_i - x) \underset{(2)}{\to} 0 \Rightarrow$ Beh.

(X,τ) ist TVR, denn:
Hausdorffsch. $x \neq y \underset{\mathcal{P}\text{ sep.}}{\Longrightarrow} \exists p \in \mathcal{P} : c := p(x-y) > 0 \Rightarrow$
$\mathcal{U} = \{z : p(x-z) < \frac{c}{2}\}$, $V = \{z : p(y-z) < \frac{c}{2}\}$ sind disj. Umgeb. von x bzw. y.

VR-Op. stetig: Seien $x_i \to x$, $y_i \to y$ $\Rightarrow$ $\forall p \in \mathcal{P}$ gilt
$p(x_i+y_i-x-y) \leq p(x_i-x)+p(y_i-y) \underset{(2)}{\longrightarrow} 0 \Rightarrow x_i+y_i \to x+y$.
Analog für Skalarmult.

<u>Bsp</u>: 1. X norm. Raum $\Rightarrow$ X lok. konvex mit $\mathcal{P}=\{\|.\|\}$

2. M Menge, X ein $\mathbb{K}$-VR von Fkt $f: M \to \mathbb{K}$
$t \in M \Rightarrow p_t(f) := |f(t)|$ Halbnorm auf X
$\mathcal{P}=\{p_t : t \in M\}$ ist sep. $\Rightarrow$ $\tau_*(\mathcal{P})$ lokalkonvex
$(f_i) \subseteq X$ Netz, dann: $f_i \to f \Leftrightarrow f_i(t) \to f(t)$ $\forall t \in M$
Top. der punktweisen Konv. auf X

3. M Hausd. Raum, $X \subseteq C(M)$ UR
$K \subseteq M$ komp. $\Rightarrow p_K(f) := \|f\|_{\infty,K} = \sup_{t\in K}|f(t)|$ Halbnorm auf X
$\{p_K : K \subseteq M$ komp.$\}$ ist sep.
$f_i \to f \Leftrightarrow \|f_i - f\|_{\infty,K} \to 0$ $\forall K$
$\tau_*(\mathcal{P})$: Top. der glm. Konv. auf Kompakta

4. Schwartz-Raum $\mathcal{S}_d$
$\mathcal{P}=\{\|.\|_{\alpha,\beta} : \alpha,\beta \in \mathbb{N}_0^d\}$ ist separierend ($\|f\|_{0,0}=\|f\|_\infty$)
$\tau_*(\mathcal{P})$ ist lokalkonvex
Hier Folgen statt Netze für Konvergenzfragen ausreichend.

5. X norm. Raum, X' Dualraum.
$\mathcal{P}=\{|\varphi|, \varphi \in X'\}$ sep. Halbnormen, denn: $x \neq 0 \overset{\text{Hahn-Banach}}{\Rightarrow} \exists \varphi \in X'$: $\varphi(x) \neq 0$
$x_i \to x \Leftrightarrow \varphi(x_i) \to \varphi(x)$ $\forall \varphi \in X'$
$\tau_*(\mathcal{P})$: schwache Top. auf X (schwächste Top., so dass alle $\varphi \in X'$ stetig)

Woher der Name lokalkonvex?

Es gilt: X lok. konvex $\Rightarrow$ die $\mathcal{U}_{p_1,\dots,p_n,\varepsilon}$ sind konvex, balanciert + absorbierend, siehe ÜB.!

- $M \subseteq X$ balanciert, falls: $x \in M \Rightarrow \lambda x \in M$ $\forall \lambda \in \mathbb{K}, |\lambda| \leq 1$
- absorbierend, falls: $x \in X \Rightarrow \exists \alpha > 0 : \alpha x \in M$. ($x=0 \Rightarrow 0 \in M$!)

6.3. Lemma Sei (X,τ) LKR, wobei τ erzeugt wird von einer abz. baren Fam. von Halbnormen $P = \{p_n, n \in \mathbb{N}\}$

$\Rightarrow$ X ist metrisierbar;

$$d(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{p_n(x-y)}{1+p_n(x-y)}$$

ist translationsinvar. Metrik auf X (dh. $d(x+a, y+a) = d(x,y)$), die τ erzeugt.

Bsp: $\mathcal{S}_d$: $P = \{q_n, n \in \mathbb{N}_0\}$ erzeugt Schwartz-Raum Top.; lokalkonvex

Beweis: $(x,y) \mapsto p_n(x-y)$ ist Halbmetrik $\forall n$ (evtl. nicht def.), also auch d. d sogar Metrik, da die p_n separierend.

Noch z.z.: $id: (X,d) \to (X,\tau)$ ist Homöom.

Sei dazu $(x_i) \subseteq X$ Netz.

$$x_i \xrightarrow[d]{} 0 \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \underbrace{\frac{p_n(x_i)}{1+p_n(x_i)}}_{\in[0,1)} \to 0 \Leftrightarrow p_n(x_i) \to 0 \ \forall n \Leftrightarrow x_i \xrightarrow[\tau]{} 0 \qquad \blacksquare$$

Bem: In 6.3. gilt sogar „="

Def. Ein vollständiger metrisierbarer LKR heißt Fréchet-Raum

$\mathcal{S}_d$ ist Fréchet-Raum nach Satz 3.4. //

Def. Sei X LKR. Dualraum von X:

$X' := \{u: X \to \mathbb{K} : u \text{ linear + stetig}\}$ ($\mathbb{K}$-VR mit punktweisen Operationen)

Bem: X, Y TVR, $T: X \to Y$ linear. Dann:

T stetig auf X $\Leftrightarrow$ T stetig in 0

Zu „$\Leftarrow$": Sei $x_i \to x \Rightarrow x_i - x \to 0 \Rightarrow T(x_i) - T(x) = T(x_i - x) \to 0$
$\Rightarrow T(x_i) \to T(x)$.

6.4. Satz Sei (X,τ) LKR, $\tau = \tau_*(\mathcal{P})$

Dann sind für eine (bel.) Halbnorm q auf X äquiv.:

(1) q stetig

(2) q stetig in 0

(3) $\exists\, p_1, \dots, p_n \in \mathcal{P}$ und $C > 0$: $q(x) \leq C \cdot \max_{1 \leq k \leq n} p_k(x) \quad \forall x \in X$

Beweis: (2) $\Rightarrow$ (3): q stetig in $0 \Rightarrow \exists\, p_1, \dots, p_n \in \mathcal{P}, \varepsilon > 0$:

$q(x) < 1 \quad \forall x \in \mathcal{U}_{p_1, \dots, p_n, \varepsilon}$, dh. $\forall x$ mit $p_k(x) < \varepsilon \quad \forall 1 \leq k \leq n$

Sei $x \in X$, $x \neq 0$. o.E. $\max_k p_k(x) \neq 0$, sonst nehme $p \in \mathcal{P}$

mit $p(x) \neq 0$ hinzu.

$x' := \frac{\varepsilon}{2} \cdot \frac{x}{\max p_k(x)} \Rightarrow p_k(x') \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall k \Rightarrow$

$q(x') < 1 \Rightarrow q(x) < \frac{2}{\varepsilon} \cdot \max_k p_k(x)$.

(3) $\Rightarrow$ (2): $x_i \to 0 \Rightarrow p_k(x_i) \to 0 \quad \forall k \Rightarrow q(x_i) \to 0$

(2) $\Rightarrow$ (1): $x_i \to x \Rightarrow x_i - x \to 0 \Rightarrow |q(x_i) - q(x)| \leq$

$q(x_i - x) \to 0$ ∎

6.5. Korollar Für eine Linearform $u: X \to \mathbb{K}$ sind äquiv.:

(1) $u \in X'$ (dh. u stetig)

(2) $\exists\, p_1, \dots, p_n \in \mathcal{P}$, $C > 0$: $|u(x)| \leq C \cdot \max_{1 \leq k \leq n} p_k(x) \quad \forall x \in X$

Beweis: Satz 6.4. mit $q = |u|$.

Sei X LKR, Dualraum X'

Topologie auf X'?

Zu $x \in X$ betrachte $j(x): X' \to \mathbb{K}$, $j(x)u := u(x)$

$j(x)$ linear (Punktauswertung in x)

$\Rightarrow$ die $p_x(u) := |u(x)|$, $x \in X$ sind Halbnormen auf X'

und separierend (klar)

<u>Def</u>: <u>Schwach-$*$-Topologie</u> (w_*-Top.) auf X':

$\sigma(X', X) := \tau_*(\{p_x, x \in X\})$ lokalkonvex

Satz 6.2. zeigt:

1. Konvergenz von Netzen: $u_i \to u$ in $\sigma(X', X) \iff$

   $p_x(u_i - u) \to 0 \;\forall x \in X \iff u_i(x) \to u(x) \;\forall x \in X$ $\otimes$

   Dh. $\sigma(X', X)$ ist die Top. der punktweisen Konvergenz auf X

2. $\sigma(X', X)$ = schwächste Top. auf X', so dass alle

   $j(x): u \mapsto u(x)$ stetig

   (= schwächste Top., so dass alle $u \mapsto p_x(u - u_0) = |u(x) - u_0(x)|$ stetig) $\oplus$

τ: schwächste Top., so dass alle $j(x)$ stetig

$\otimes \Rightarrow \tau \subseteq \sigma(X', X)$

Aber: alle $j(x)$ stetig $\overset{}{\underset{\oplus}{\Rightarrow}}$ alle $u \mapsto p_x(u - u_0)$ stetig $\Rightarrow$

$\sigma(X', X) \subseteq \tau$.

§7 Temperierte Distributionen

Motivation:

Nützlich (z.B.) bei PDGs: Erweiterung des Lsg-Begriffs.

Bsp: Schwingungsgleichung

Gesucht: $u = u(x,t)$ auf $\mathbb{R}^2$ mit

$$(S) \quad u_{tt} - u_{xx} = 0$$

Anfangsbed.: $u(x,0) = f(x)$, $u_t(x,0) = 0$

Falls $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$: $u(x,t) = \frac{1}{2}(f(x+t) + f(x-t))$ ist Lsg.

Was, wenn f nur stetig?

Idee: Schwache Lsg: Sei $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$ Lsg von (S), $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2) \Rightarrow$

$$0 = \int_{\mathbb{R}^2} (u_{tt} - u_{xx}) \varphi \, d(x,t) \underset{\text{part. Int.}}{\Longleftrightarrow}$$

$$0 = \int_{\mathbb{R}^2} u(\varphi_{tt} - \varphi_{xx}) \, d(x,t) \qquad (*)$$

$u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^2)$ heißt schwache Lsg von (S), falls $(*)$ gilt $\forall \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$

$f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}) \Rightarrow u$ wie oben ist schwache Lsg von (S) (leichte Rechn.)

Allgemeiner (L. Schwartz, ab 1945): Verzicht auf punktweisen Charakter von Fkt; betrachte (stetige) lin. Funktionale auf Räumen von Testfkt.

1. Begriffsbildung + Bsp

Betrachte Schwartz-Raum $\mathcal{S}_d$; Fréchet-Raum

Top. erzeugt durch die Normen

$$q_n(\varphi) = \max_{|\alpha| \le n} \|(1+|x|^2)^n D^\alpha \varphi\|_\infty, \quad n \in \mathbb{N}_0$$

7.1. Def. $\mathcal{S}_d' := \{u : \mathcal{S}_d \to \mathbb{C} \text{ linear + stetig}\}$

Die $u \in \mathcal{S}_d'$ heißen temperierte Distributionen auf $\mathbb{R}^d$

Also für lin. $u: \mathcal{S}_d \to \mathbb{C}$: $\quad u \in \mathcal{S}_d' \iff u(\varphi_j) \to 0 \quad \forall (\varphi_j)_{j\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{S}_d$

mit $\varphi_j \xrightarrow[\mathcal{S}_d]{} 0$

<u>Bsp</u>: $x\in\mathbb{R}^d$; $\delta_x(\varphi) := \varphi(x)$, $\varphi\in\mathcal{S}_d$

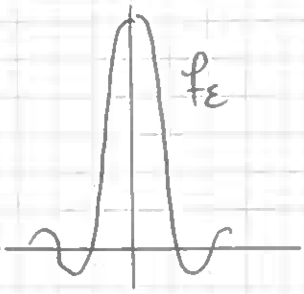
$\delta_x \in \mathcal{S}_d'$, denn: $(\varphi_j)_{j\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{S}_d$ mit $\varphi_j \xrightarrow[\mathcal{S}_d]{} 0 \Rightarrow \underbrace{\varphi_j(x)}_{=\delta_x(\varphi_j)} \to 0$

<u>Diracsche δ-Distribution in x</u>

7.2. <u>Bem.</u> Sei $(f_\varepsilon)_{\varepsilon>0} \subseteq L^1(\mathbb{R}^d)$ approx. Eins; $f_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^d} f(\frac{x}{\varepsilon})$

$\varphi\in C(\mathbb{R}^d) \Rightarrow \int_{\mathbb{R}^d}\varphi(x) f_\varepsilon(x)\,dx \underset{\text{Subst.}}{=} \int_{\mathbb{R}^d}\varphi(\varepsilon x) f(x)\,dx \xrightarrow[\varepsilon\downarrow 0]{}$ Lebesgue

$$\int \varphi(0) f\,dx = \varphi(0) = \delta_0(\varphi)$$



In welchem Sinne exist. $\lim_{\varepsilon\to 0} f_\varepsilon$?

Dirac (30-iger): $\lim f_\varepsilon(x) = \delta_0(x) = \begin{cases}\infty, & x=0\\ 0, & x\neq 0\end{cases}$

nicht rigoros!

7.3. <u>Lemma</u> Sei $u: \mathcal{S}_d \to \mathbb{C}$ linear. Dann:

$u\in\mathcal{S}_d' \iff \exists C>0, N\in\mathbb{N}_0 : |u(\varphi)| \le C\cdot q_N(\varphi) \quad \forall \varphi\in\mathcal{S}_d$

<u>Beweis</u>: Kor. 6.5., da $q_n \le q_{n+1}$

7.4. <u>Bsp</u> (1) μ: pos. Borelmaß auf $\mathbb{R}^d$, wobei gelte:

$\exists N\in\mathbb{N}_0$: $\int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{(1+|x|^2)^N}\,d\mu(x) < \infty$ (μ „temperiert")

$\Rightarrow$ μ def $u_\mu \in \mathcal{S}_d'$ via

$$u_\mu(\varphi) := \int_{\mathbb{R}^d} \varphi\, d\mu$$

Denn: $|u_\mu(\varphi)| \le \int|\varphi|\,d\mu \le \int_{\mathbb{R}^d} (1+|x|^2)^N |\varphi(x)| \frac{d\mu(x)}{(1+|x|^2)^N} \le C_\mu \cdot q_N(\varphi)$

Spezielle: $\mu = \delta_x$ Punktmaß in x $\hat{=}$ δ-Distr. in x

(2) $f\in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$ sei <u>temperiert</u>, d.h. $\exists N\in\mathbb{N}_0$, $1\le p\le\infty$:

$(1+|x|^2)^{-N} f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ (z.B. $f\in L^p$)

$\Rightarrow f$ def. $u_f \in \mathcal{S}_d'$ via
$$u_f(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^d} f\varphi\,dx$$

Denn: $|u_f(\varphi)| \underset{\text{Hölder}, \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1}{\leq} \underbrace{\|(1+|x|^2)^{-N} f\|_p}_{<\infty} \cdot \|(1+|x|^2)^N \varphi\|_q$

$\varphi_j \xrightarrow[\mathcal{S}_d]{} 0 \underset{\text{Satz 3.5.}}{\Rightarrow} (1+|x|^2)^N \varphi_j \xrightarrow[\mathcal{S}_d]{} 0 \Rightarrow \|(1+|x|^2)^N \varphi_j\|_q \to 0$ (UC.)

Wichtige Teilklassen:

$f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$ hat polynomiales Wachstum $:\Leftrightarrow$
$$\exists N \in \mathbb{N}_0 : (1+|x|^2)^{-N} f \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$$

$f \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ hat moderates Wachstum $:\Leftrightarrow$ jede Ableitung $D^\alpha f$, $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$ hat polyn. Wachstum (Bsp: $f \in \mathcal{S}_d$, $f \in \Pi_d$)

Temp. Distr. $u \in \mathcal{S}_d'$ der Form $u_f(\varphi) = \int \varphi f\,dx$ mit $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$ heißen regulär

$f \mapsto u_f$ ist injektiv, liefert also Einbettung temperierter Fkt in $\mathcal{S}_d'$. Insbes.: $L^p(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow \mathcal{S}_d'$. Dies folgt aus:

7.5. Nulltest: Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ offen, $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ mit
$$\int_\Omega f\varphi\,dx = 0 \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega) \Rightarrow f = 0 \ (\text{f.ü.})$$

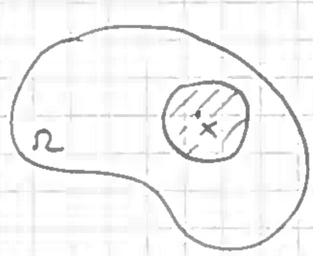
Vorbem. zum Bew: Für $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ gilt:
$$f = 0 \text{ f.ü.} \Leftrightarrow \underbrace{f\chi}_{\in L^1(\Omega)} = 0 \text{ f.ü.} \quad \forall \chi \in C_c^\infty(\Omega)$$
Zu "$\Leftarrow$": Schreibe $\Omega = \bigcup_{n=1}^\infty K_n$, $K_n \subseteq \Omega$ komp.
Aufg 1, Bl. 3 $\Rightarrow \exists \chi_n \in C_c^\infty(\Omega)$: $\chi_n|_{K_n} = 1$. $f\chi_n = 0$ f.ü. $\Rightarrow$
$f|_{K_n} = 0$ f.ü. $\forall n \Rightarrow f = 0$ f.ü.

Beweis v. 7.5: Wegen Vorbem. o.E. $f \in L^1(\Omega)$ $\quad$ $\int f\varphi = 0 \ \forall \varphi \in C_c^\infty \Rightarrow \forall \chi: \int \underbrace{f\chi}_{\in L^1} \varphi = 0$ "

Setze f durch 0 fort zu $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$

$(j_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$: Friedrichs-Schar, $\operatorname{Tr} j_\varepsilon = \overline{B_\varepsilon(0)}$

$x \in \Omega \Rightarrow f * j_\varepsilon(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(y) \underbrace{j_\varepsilon(x-y)}_{\substack{\in C_c^\infty(\Omega) \text{ als Fkt von } y, \\ \text{sofern } \varepsilon \text{ klein genug}}} dy \overset{\text{Vorauss.}}{=} 0$



Andererseits: $f * j_\varepsilon \to f$ in L^1 für $\varepsilon \to 0 \Rightarrow f = 0$ f.ü. ∎

Bem: Auch temp. Maße $\hookrightarrow \mathcal{S}_d'$ via $\mu \mapsto u_\mu$ (→ hinten)

Schreibweise: $\langle u, \varphi \rangle := u(\varphi)$ für $u \in \mathcal{S}_d'$, $\varphi \in \mathcal{S}_d$

Dann: μ, f statt u_μ, u_f, also $\langle f, \varphi \rangle = u_f(\varphi)$ etc.

Standard-Top. auf $\mathcal{S}_d'$: w_*-Top. $\sigma(\mathcal{S}_d', \mathcal{S}_d)$

Dh. für Folgen/Netze $(u_j) \subseteq \mathcal{S}_d'$ gilt:

$$u_j \xrightarrow[\mathcal{S}_d']{} u \in \mathcal{S}_d' \iff \langle u_j, \varphi \rangle \to \langle u, \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}_d$$

Bsp: Sei $(f_\varepsilon)_{\varepsilon > 0} \subseteq L^1(\mathbb{R}^d)$ approx. Eins

Betrachte f_ε als reg. temp. Distr.

$$\varphi \in \mathcal{S}_d \Rightarrow \lim_{\varepsilon \to 0} \langle f_\varepsilon, \varphi \rangle = \lim_{\varepsilon \to 0} \int f_\varepsilon \varphi \, dx \underset{\text{Bem 7.2}}{=} \varphi(0) = \langle \delta_0, \varphi \rangle$$

$$\Rightarrow f_\varepsilon \xrightarrow[\mathcal{S}_d']{} \delta_0$$

Übung

2. Seien $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^d$, $\lambda \in \mathbb{R}^d$. $u_\lambda(x) = \lambda^\alpha x^\beta e^{i\langle \lambda, x \rangle}$, $x \in \mathbb{R}^d$

u_λ ist temperiert

$$\langle u_\lambda, \varphi \rangle = \lambda^\alpha \int_{\mathbb{R}^d} x^\beta e^{i\langle \lambda, x \rangle} \varphi(x) \, dx = \lambda^\alpha \underbrace{\widehat{x^\beta \varphi}}_{\in \mathcal{S}_d}(-\lambda) \to 0 \text{ für } |\lambda| \to \infty$$

$$\Rightarrow u_\lambda \xrightarrow[\mathcal{S}_d']{} 0 \text{ für } |\lambda| \to \infty$$

(obwohl die u_λ polynomiell in λ anwachsen!)

Ursache: Oszillation von $e^{i\langle \lambda, x \rangle}$

2. Operationen auf temp. Distributionen

Viele Operationen auf $\mathcal{S}_d$ lassen sich vermöge Dualität auf $\mathcal{S}_d'$ übertragen.

Allg. Prinzip:

Sei $T: \mathcal{S}_d \to \mathcal{S}_d$ linear + stetig

Angen. $\exists\, T^t: \mathcal{S}_d \to \mathcal{S}_d$ lin. + stetig mit

$$\int_{\mathbb{R}^d} T\psi \cdot \varphi \, dx = \int_{\mathbb{R}^d} \psi \cdot T^t \varphi \, dx \quad \forall \varphi, \psi \in \mathcal{S}_d$$

T^t: transponierter Operator

Betrachte $\psi, T\psi$ als Distr., dann: $\langle T\psi, \varphi \rangle = \langle \psi, T^t \varphi \rangle$

Setze T fort auf $\mathcal{S}_d'$ via

$$\langle Tu, \varphi \rangle := \langle u, T^t \varphi \rangle \qquad (u \in \mathcal{S}_d', \varphi \in \mathcal{S}_d)$$

$Tu \in \mathcal{S}_d'$, da T^t lin. + stetig

7.7. <u>Lemma</u> $T: \mathcal{S}_d' \to \mathcal{S}_d'$ ist linear + w_*-stetig

<u>Beweis:</u> Lin. klar. Sei $(u_j) \subseteq \mathcal{S}_d'$, $u_j \to u$ in $\mathcal{S}_d'$

$\Rightarrow \langle Tu_j, \varphi \rangle = \langle u_j, T^t \varphi \rangle \to \langle u, T^t \varphi \rangle = \langle Tu, \varphi \rangle$

d.h. $Tu_j \to Tu$ in $\mathcal{S}_d'$ ■

(1) Ableitung temp. Distributionen

Satz 3.5. $\Rightarrow T = D^\alpha, \mathcal{S}_d \to \mathcal{S}_d$ ist lin. + stetig $(\alpha \in \mathbb{N}_0^d)$

$\varphi, \psi \in \mathcal{S}_d \Rightarrow$

$$\langle D^\alpha \psi, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^d} D^\alpha \psi \cdot \varphi \, dx \underset{\text{part. Int.}}{=} (-1)^{|\alpha|} \int \psi \cdot D^\alpha \varphi \, dx = \langle \psi, (-1)^{|\alpha|} D^\alpha \varphi \rangle$$

$\Rightarrow T^t = (-1)^{|\alpha|} D^\alpha$

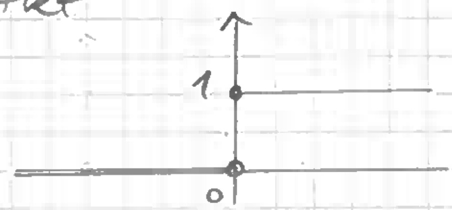
Def. daher für $u \in \mathcal{S}_d'$ Abl. $D^\alpha u \in \mathcal{S}_d'$ durch

$$\langle D^\alpha u, \varphi \rangle := (-1)^{|\alpha|} \langle u, D^\alpha \varphi \rangle$$

Bsp: 1. $x \in \mathbb{R}^d \Rightarrow \langle D^\alpha \delta_x, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle \delta_x, D^\alpha \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} D^\alpha \varphi(x)$

Also: Punktauswertungen von Ableitungen sind temp. Distr.

2. $H(x) := \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$ Heaviside-Fkt



$H \in L^\infty(\mathbb{R}) \hookrightarrow \mathcal{S}_1'$

$\langle H, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} \varphi H \, dx = \int_0^\infty \varphi \, dx$

$\langle H', \varphi \rangle = -\langle H, \varphi' \rangle = -\int_0^\infty \varphi' \, dx = \varphi(0) = \delta_0(\varphi) \Rightarrow H' = \delta_0$

4.8. Lemma 1. $u \in \mathcal{S}_d' \Rightarrow D^\alpha(D^\beta u) = D^{\alpha+\beta} u \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^d$

2. $f \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ habe moderates Wachstum ($\Rightarrow$ alle $D^\alpha f$ temp.)

$\Rightarrow D^\alpha u_f = u_{D^\alpha f} \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}_0^d$

Dh. Distr. Ableitung und gew. Ableitung sind kompatibel

Beweis: 1. $\langle D^\alpha(D^\beta u), \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle D^\beta u, D^\alpha \varphi \rangle =$

$= (-1)^{|\alpha|+|\beta|} \langle u, D^{\alpha+\beta} \varphi \rangle = \langle D^{\alpha+\beta} u, \varphi \rangle$

2. $\langle D^\alpha u_f, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle u_f, D^\alpha \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \int f \, D^\alpha \varphi \, dx =_{\text{part. Int.}}$

$= \int D^\alpha f \cdot \varphi \, dx = \langle u_{D^\alpha f}, \varphi \rangle$

(2) Multiplikation von temp. Distr. mit Fkt

$g \in \mathcal{S}_d$ oder $g \in \Pi_d \xRightarrow{\text{Satz 3.5}}$

$T: \varphi \mapsto g\varphi, \ \mathcal{S}_d \to \mathcal{S}_d$ ist linear + stetig

Dies gilt allg., falls $g \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ von moderatem Wachstum

(Beweis mit Leibnizregel: $\varphi_k \xrightarrow{\mathcal{S}_d} 0 \Rightarrow \|x^\beta D^\alpha(g\varphi_k)\|_\infty \to 0 \ \forall \alpha, \beta$)

$\varphi, \psi \in \mathcal{S}_d \Rightarrow \langle g\psi, \varphi \rangle = \int g\psi \cdot \varphi \, dx = \langle \psi, g\varphi \rangle$

$\Rightarrow T^t = T$

Also: $u \in \mathcal{S}_d' \Rightarrow$ def. $gu \in \mathcal{S}_d'$ durch $\langle gu, \varphi \rangle := \langle u, g\varphi \rangle$.

(3) Fouriertransformation auf $\mathcal{S}_d'$

$\mathcal{F}: \varphi \mapsto \hat{\varphi}$, $\mathcal{S}_d \to \mathcal{S}_d$ lin. + stetig nach Satz 3.5.

$\langle \hat{\psi}, \varphi \rangle = \int \hat{\psi} \varphi \, dx \underset{\text{Fubini}}{=} \int \psi \hat{\varphi} \, dx = \langle \psi, \hat{\varphi} \rangle \quad \forall \varphi, \psi \in \mathcal{S}_d$

$\Rightarrow \mathcal{F}^t = \mathcal{F}$

Also: $u \in \mathcal{S}_d' \Rightarrow$ definiere $\mathcal{F}u = \hat{u} \in \mathcal{S}_d'$ durch

$$\langle \hat{u}, \varphi \rangle := \langle u, \hat{\varphi} \rangle$$

Analog: $\langle \check{u}, \varphi \rangle := \langle u, \check{\varphi} \rangle$

7.9. Propos. 1. $u \mapsto \hat{u}$ und $u \mapsto \check{u}$ sind w_*-stetige, zueinander inverse VR-Isom. auf $\mathcal{S}_d'$

2. $f \in L^1(\mathbb{R}^d) \Rightarrow \widehat{u_f} = u_{\hat{f}}$; ebenso für $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$

D.h. $\mathcal{F}$ auf $\mathcal{S}_d'$ erweitert die F.T. auf L^1 und L^2.

Beweis: 1. Stetigkeit aus Lemma 7.7., Rest mit Dualität aus den Eigenschaften der F.T. auf $\mathcal{S}_d$.

2. $f \in L^1 \Rightarrow \hat{f} \in C_0$, also temperiert; $\langle u_{\hat{f}}, \varphi \rangle = \int \hat{f} \varphi = \int f \hat{\varphi} = \langle u_f, \hat{\varphi} \rangle$
$= \langle \widehat{u_f}, \varphi \rangle$. L^2 analog.

Bez: Sei $p(x) = \sum_{|\alpha| \le k} c_\alpha x^\alpha \in \Pi_d$ vom Grad k

Assoziierter linearer Differentialoperator der Ordnung k:

$$P(D) := \sum_{|\alpha| \le k} c_\alpha D^\alpha \qquad \text{(konst. Koeff.)}$$

p: Symbol von P

7.10. Lemma $p \in \Pi_d$, $u \in \mathcal{S}_d' \Rightarrow$

$$(p(D)u)^\wedge = p\hat{u}, \quad (pu)^\wedge = p(-D)\hat{u}$$

Beweis: $\varphi \in \mathcal{S}_d \Rightarrow \langle (p(D)u)^\wedge, \varphi \rangle = \langle p(D)u, \hat{\varphi} \rangle = \langle u, p(-D)\hat{\varphi} \rangle$

$\underset{\text{Satz 3.5.}}{=} \langle u, \widehat{p\varphi} \rangle = \langle \hat{u}, p\varphi \rangle = \langle p\hat{u}, \varphi \rangle$

2. Identität analog. ■

Bsp: 1. $\widehat{\delta_x} = ?$ $\quad (x \in \mathbb{R}^d)$

$$\langle \widehat{\delta_x}, \varphi \rangle = \widehat{\varphi}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int \varphi(\xi) e^{-i\langle \xi, x\rangle} d\xi$$

$$\Rightarrow \widehat{\delta_x} = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} e_{-x} \quad \text{mit} \quad e_x(\xi) = e^{i\langle x, \xi\rangle}$$

Insbes: $\widehat{\delta_0} = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \cdot 1 \quad (= \check{\delta_0})$

2. Nach 1.: $\delta_x = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \check{e}_{-x}$. $\check{e}_{-x} = \widehat{e_x}$, da

$$\langle \check{e}_{-x}, \varphi \rangle = \int e_{-x} \check{\varphi}\, d\xi = \int e_x \widehat{\varphi}\, d\xi = \langle \widehat{e_x}, \varphi \rangle$$

$$\Rightarrow \widehat{e_x} = (2\pi)^{d/2} \delta_x.$$

Insbes: $\widehat{1} = (2\pi)^{d/2} \delta_0$

3. $p \in \Pi_d \Rightarrow \widehat{p(D)\delta_0} \underset{L.7.10}{=} p\,\widehat{\delta_0} = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} p$, sowie

$$(2\pi)^{d/2} p(-D)\delta_0 \underset{2.}{=} p(-D)\,\widehat{1} \underset{L.7.10.}{=} (p\cdot 1)^\wedge = \widehat{p}$$

$\langle p(-D)\delta_0, \varphi\rangle = (p(D)\varphi)(0)$

wichtig! [Insbes. gilt: $u \in \widehat{\mathcal{S}_d}$ ist F.T. eines Polynoms $\Leftrightarrow$ u ist Punktauswertung eines lin. D.O. mit konst. Koeff. in 0

(4) Faltungen $u * g$, $u \in \mathcal{S}_d'$, $g \in \mathcal{S}_d$

Sei $g \in \mathcal{S}_d$. $\varphi \in \mathcal{S}_d \Rightarrow T_g(\varphi) := \varphi * g \in \mathcal{S}_d$ (Anfg. 3, Bl. 4)

$T_g: \mathcal{S}_d \to \mathcal{S}_d$ ist linear (klar) + stetig, da

$\varphi \mapsto \widehat{\varphi}$ Homöom. von $\mathcal{S}_d$ und $\varphi \mapsto \widehat{\varphi * g} = (2\pi)^{d/2}\widehat{\varphi}\widehat{g}$ stetig auf $\mathcal{S}_d$

$$\int T_g\psi \cdot \varphi\, dx = \int (\psi * g)\varphi\, dx \underset{\text{Fubini}}{=} \int \psi \cdot (\varphi * g^-)\, dx \quad \text{mit } g^-(x) = g(-x)$$

$$\Rightarrow T_g^t = T_{g^-}$$

Für $u \in \mathcal{S}_d'$ definiere also $u * g = T_g u \in \mathcal{S}_d'$ via

$$\langle u * g, \varphi \rangle := \langle u, \varphi * g^- \rangle, \quad \varphi \in \mathcal{S}_d$$

Analog: $g * u \in \mathcal{S}_d'$ def. durch

$$\langle g * u, \varphi \rangle := \langle u, g^- * \varphi \rangle$$

$\Rightarrow u * g = g * u.$ (da Falt. auf $\mathcal{S}_d$ kommutativ)

Bsp: $\langle \delta_x * g, \varphi \rangle = \langle \delta_x, \varphi * g^- \rangle = \varphi * g^-(x) = \int \varphi(y) \underbrace{g(y-x)}_{L_x g(y)} dy$

$\Rightarrow \delta_x * g = L_x g$

7.11. Lemma $u \in \mathcal{S}_d'$, $g \in \mathcal{S}_d$ $\Rightarrow$

(1) $(u*g)^\wedge = (2\pi)^{d/2}\, \hat{g}\hat{u}$

(2) $(u*g)*h = u*(g*h) \quad \forall h \in \mathcal{S}_d$

(3) $\hat{u} * \hat{g} = (2\pi)^{d/2}\, \widehat{gu}$ (4) $D^\alpha u * g = u * D^\alpha g \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}_0^d$

Beweis: (1) $\langle (u*g)^\wedge, \varphi \rangle = \langle u*g, \hat{\varphi} \rangle = \langle u, \hat{\varphi} * g^- \rangle$

$\hat{\varphi} * g^- = \hat{\varphi} * \hat{\hat{g}} = (2\pi)^{d/2} (\varphi \hat{g})^\wedge$, denn: $f, g \in \mathcal{S}_d \Rightarrow$

$\hat{f} * \hat{g} = (2\pi)^{d/2}\, \widehat{fg}$ ($^\vee$ anwenden!)

$\Rightarrow \langle (u*g)^\wedge, \varphi \rangle = (2\pi)^{d/2} \langle \hat{u}, \varphi \hat{g} \rangle \Rightarrow$ Beh.

(2) mit Def. und $(g*h)^- = h^- * g^-$:

$\langle (u*g)*h, \varphi \rangle = \langle u*g, \varphi * h^- \rangle = \langle u, \varphi * (g*h)^- \rangle = \langle u*(g*h), \varphi \rangle$

(3) $\langle \hat{u} * \hat{g}, \varphi \rangle = \langle \hat{u}, \varphi * \underbrace{\hat{g}^-}_{= \check{g}} \rangle = \langle u, \widehat{\varphi * \check{g}} \rangle = (2\pi)^{d/2} \langle u, \hat{\varphi} g \rangle$

(4) ähnlich ∎

Wir wollen $u*g \in \mathcal{S}_d'$ als reguläre temp. Distr. zu einer Fkt $u \circ g \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ interpretieren.

Beobachte: $f, g \in \mathcal{S}_d \Rightarrow f*g(x) = \int f(y) \underbrace{g^-(y-x)}_{L_x g^-(y)} dy$

7.12. Lemma $f \in \mathcal{S}_d \Rightarrow L_x f \in \mathcal{S}_d$, und $f \mapsto L_x f$ ist stetig auf $\mathcal{S}_d$

Beweis: $L_x f(y) = f(y-x)$. $q_n(f) = \max_{|\alpha| \le n} \|(1+|y|^2)^n D^\alpha f\|_\infty$

$\Rightarrow q_n(L_x f) = \max_{|\alpha| \le n} \|(1+|x+y|^2)^n D^\alpha f(y)\|_\infty$

$1+|x+y|^2 \le 2(1+|x|^2)(1+|y|^2) \Rightarrow q_n(L_x f) \le 2^n (1+|x|^2)^n q_n(f)$

$\Rightarrow$ Beh ∎

Also: $f,g \in \mathcal{S}_d \Rightarrow f*g(x) = \langle u_f, \underbrace{L_x g^-}_{\in \mathcal{S}_d} \rangle$

7.13. Satz Sei $u \in \mathcal{S}_d'$, $g \in \mathcal{S}_d$. Setze

$$u \circ g(x) := \langle u, L_x g^- \rangle, \quad x \in \mathbb{R}^d \Rightarrow$$

(1) $u \circ g \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ mit $D^\alpha(u \circ g) = u \circ D^\alpha g \quad \forall \alpha$

(2) $u \circ g$ hat polyn. Wachstum, d.h. $\exists N \in \mathbb{N}$ mit

$$(1+|x|^2)^{-N}(u \circ g) \in C_b(\mathbb{R}^d)$$

(3) $u \circ g = u * g$ im Distributionssinn. Also auch: $u \circ D^\alpha g = D^\alpha u \circ g$

Zum Beweis:

7.14. Lemma Sei $f \in \mathcal{S}_d$, $1 \le j \le d$. Setze für $r \neq 0$:

$$f_r(x) := \frac{1}{r}(f(x+re_j) - f(x)) \in \mathcal{S}_d$$

$$\Rightarrow \lim_{r \to 0} f_r = \partial_j f \quad \text{in } \mathcal{S}_d$$

Beweis: $(f_r - \partial_j f)^\wedge(\xi) = \underbrace{\left[\frac{1}{r}(e^{ir\xi_j} - 1) - i\xi_j\right]}_{=:\psi_r(\xi)} \cdot \hat{f}(\xi)$

Es genügt zu zeigen: $\lim_{r \to 0} \psi_r \hat{f} \to 0$ in $\mathcal{S}_d$.

Dazu: $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^d \Rightarrow \xi^\beta D^\alpha(\psi_r \hat{f})(\xi) \underset{\text{Leibniz}}{=} \sum_{\gamma \le \alpha} \binom{\alpha}{\gamma} \xi^\beta \cdot D^\gamma \psi_r \cdot \underbrace{D^{\alpha-\gamma}\hat{f}}_{\in \mathcal{S}_d}$

Betrachte $\psi_r(\xi)$

Taylorentw. um 0: $e^{it} = 1 + it + \underbrace{\int_0^t (t-s)(e^{is})'' \, ds}_{|\cdot| \le t^2} \quad (t \in \mathbb{R})$

$\Rightarrow |\psi_r(\xi)| \le |r| \xi_j^2$

Ferner: $D_j \psi_r(\xi) = e^{ir\xi_j} - 1$; $\quad |e^{it} - 1| \le |t| \ \forall t \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow |D_j \psi_r(\xi)| \le |r \xi_j|$

$|\gamma| > 1 \Rightarrow |D^\gamma \psi_r(\xi)| = |r|^{|\gamma|-1}$

Es folgt: $\lim_{r \to 0} \|\xi^\beta D^\alpha(\psi_r \hat{f})\|_\infty = 0$ ∎

$u\circ g(x) = \langle u, L_x g^- \rangle$

Wir benötigen ferner ein $\mathcal{S}_d$-wertiges Integral:

7.15. <u>Satz</u>. Sei X Fréchet-Raum. Sei K ein kompakter Hausd. Raum und μ ein (pos.) beschränktes Borelmaß auf K. Sei ferner $f: K \to X$ stetig $\Rightarrow$

$\exists!\, x \in X$: $\quad u(x) = \int_K u(f(t))\, d\mu(t) \quad \forall u \in X'$

Man schreibt $\quad x = \int_K f\, d\mu \quad$ (X-wertiges Integral)

<u>Beweis</u>: Rudin, FA, Thm. 3.27. (+ Vorspann)

ÜB.

<u>Beweis v. 7.13.</u> (1) $u\circ g$ stetig, da $x \mapsto L_x g^-$, $\mathbb{R}^d \to \mathcal{S}_d$ stetig ✓

$y \in \mathbb{R}^d \Rightarrow L_y(u\circ g)(x) = \langle u, L_{x-y} g^- \rangle \underset{\uparrow}{=} \langle u, L_x (L_y g)^- \rangle$

$L_{-y} g^- = (L_y g)^-$

$= (u \circ L_y g)(x) \Rightarrow$

$\forall x \in \mathbb{R}^d$ gilt: $\frac{1}{r}(L_{-re_j} - L_0)(u\circ g)(x) = (u\circ g_r)(x) \to (u\circ \partial_j g)(x)$

nach L. 7.14 + 7.12

$\Rightarrow u\circ g$ ist partiell diffbar mit

$\partial_j(u\circ g) = u\circ \partial_j g$ (stetig) $\Rightarrow u\circ g \in C^1$

Mit Ind. nach Ableitungsordn. folgt $u\circ g \in C^\infty$

(2) $u \in \mathcal{S}_d' \Rightarrow \exists C > 0, N \in \mathbb{N}: |\langle u, \varphi\rangle| \leq C \cdot q_N(\varphi) \ \forall \varphi \in \mathcal{S}_d$

$\Rightarrow |u\circ g(x)| = |\langle u, L_x g^- \rangle| \underset{L. 7.12}{\leq} C \cdot 2^N (1+|x|^2)^N \cdot q_N(g^-)$

(3) Da $C_c^\infty(\mathbb{R}^d) \subseteq \mathcal{S}_d$ dicht (Aufg 3, Bl. 3) genügt es z.z.:

$\langle u * g, \varphi \rangle = \int (u\circ g)\, \varphi\, dx \quad \forall \varphi \in C_c^\infty$

Dazu: Sei $\varphi \in C_c^\infty$, $K := \mathrm{Tr}\, \varphi$ (kompakt)

$\langle u*g, \varphi \rangle = \langle u, \varphi * g^- \rangle$, $\quad \varphi * g^-(x) = \int_K \varphi(y) \underbrace{g^-(x-y)}_{L_y g^-(x)} dy$

<u>Def.</u> $F: K \to \mathcal{S}_d$, $F(y) := \varphi(y) L_y g^-$

F stetig, da $y \mapsto L_y g^-$, $\mathbb{R}^d \to \mathcal{S}_d$ stetig

(und $(\lambda, f) \mapsto \lambda\cdot f$, $\mathbb{C} \times \mathcal{S}_d \to \mathcal{S}_d$ stetig) mit △-Ungl.

Beh: $\int_K F(y)dy = \varphi * g^-$ $\otimes$

Beweis: $u \in \mathcal{S}_d' \Rightarrow \langle u, F(y)\rangle = \varphi(y)\langle u, L_y g^-\rangle = \varphi(y)\cdot(u\circ g)(y)$

$\underset{\text{Satz 7.15.}}{\Rightarrow} \langle u, \int_K F(y)dy\rangle = \int_K \langle u, F(y)\rangle dy = \int_K \varphi(y)(u\circ g)(y)dy$

Mit $u = \delta_x$: $(\delta_x \circ g)(y) = \langle \delta_x, L_y g^-\rangle = g^-(x-y) \Rightarrow \otimes$

Also: $u \in \mathcal{S}_d' \Rightarrow \langle u, \varphi * g^-\rangle = \langle u, \int_K F(y)dy\rangle = \int_K \varphi(y)(u\circ g)(y)dy$ ■

Einfacher für $\otimes$: $\delta_x \in \mathcal{S}_d' \Rightarrow \langle \delta_x, \int_K F(y)dy\rangle = \int_K \langle \delta_x, F(y)\rangle dy$

$= \int_K \varphi(y) L_y g^-(x)dy = \varphi * g^-(x) \Rightarrow \otimes$

§8 Distributionen

(ab 2. Seite nach Werner, FA)

1. Testfunktionen

(1) Sei $K \subseteq \mathbb{R}^d$ kompakt

$$\mathcal{D}_K := \{\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d) : \operatorname{Tr}\varphi \subseteq K\}$$

Top. auf $\mathcal{D}_K$: lokalkonvexe Top τ_K, erzeugt durch die Normen

$$\|\varphi\|_n := \max_{|\alpha| \leq n} \|D^\alpha \varphi\|_\infty \quad , n \in \mathbb{N}_0$$

Damit $\mathcal{D}_K$ Frechét-Raum (Vollständigkeit wie bei $\mathcal{S}_d$)

$\varphi_n \to \varphi$ in $\mathcal{D}_K \Leftrightarrow D^\alpha \varphi_n \to D^\alpha \varphi$ glm. $\forall \alpha \in \mathbb{N}_0^d$

Nun: $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ offen, $\neq \emptyset$

(2) $\mathcal{E}(\Omega) := C^\infty(\Omega)$ mit der F-Raum-Top. erzeugt durch die

$$p_n(\varphi) = \max_{|\alpha| \leq n} \|D^\alpha \varphi\|_{\infty, K_n} \;,$$

(K_n) bel. komp. Ausschöpf. von Ω (→ Anfg 1, Bl. 8)

$\varphi_n \to \varphi$ in $\mathcal{E}(\Omega) \Rightarrow D^\alpha \varphi_n \to D^\alpha \varphi$ lokal glm. $\forall \alpha$

(3) $\mathcal{D}(\Omega) := C_c^\infty(\Omega) = \bigcup_{K \subseteq \Omega \text{ komp.}} \mathcal{D}_K$ <u>Testfkt auf Ω</u>

Top. ? sollte lokalkonvex + fein sein, damit Dual groß

1. Kandidat: die von den $\|.\|_n$ oben erzeugte Top

Nachteil: nicht vollst.

2. Kandidat: Die von $\mathcal{E}(\Omega)$ induzierte Top. (schwächer)

auch nicht gut: $\Omega = \mathbb{R}^d$, dann $\varphi \mapsto \int \varphi \, dx$ nicht stetig!

Denn: $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, $\int \varphi \, dx = 1$, $\varphi_n(x) = \frac{1}{n}\varphi(\frac{x}{n}) \Rightarrow \varphi_n \to 0$

aber $\int \varphi_n \, dx = n^{d-1}$.

Problem: Auseinanderlaufen der Träger.

$\mathcal{P} := \{p : p$ Halbnorm auf $\mathcal{D}(\Omega)$: $p|_{\mathcal{D}_K}$ τ_K-stetig $\forall$ komp. $K \subseteq \Omega\}$

Explizit (mit Satz 6.4.):

$p \in \mathcal{P} \iff \forall$ komp. $K \subseteq \Omega$ $\exists C > 0, N \in \mathbb{N}_0$:

$\otimes$ $\quad p(\varphi) \leq C \cdot \|\varphi\|_N \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}_K \qquad (\|\cdot\|_n \leq \|\cdot\|_{n+1})$

Beachte: 1. $x \in \Omega \Rightarrow p_x(\varphi) := |\varphi(x)| \in \mathcal{P}$, da

$\varphi \in \mathcal{D}_K \Rightarrow p_x(\varphi) \leq \|\varphi\|_0 \quad (= \|\varphi\|_\infty)$

2. $\mathcal{P}$ separierend: sei $\varphi \neq 0$, etwa $\varphi(x) \neq 0 \Rightarrow p_x(\varphi) \neq 0$

Def. Top auf $\mathcal{D}(\Omega)$: $\quad \tau := \tau_*(\mathcal{P})$ lokalkonvex

P.1. Lemma (1) $K \subseteq \Omega$ komp. $\Rightarrow$ die von τ auf $\mathcal{D}_K$ induz. Top. stimmt mit τ_K überein, d.h. die Inklusion $i : \mathcal{D}_K \hookrightarrow \mathcal{D}(\Omega)$ ist stetig

(2) $\mathcal{D}_K \subseteq \mathcal{D}(\Omega)$ abgeschlossen (bzgl. τ)

(3) Sei Y lokalkonvex, $T : \mathcal{D}(\Omega) \to Y$ linear. Dann:

T stetig $\iff T|_{\mathcal{D}_K}$ τ_K-stetig $\forall$ komp. $K \subseteq \Omega$

(3) $\Rightarrow$ τ = feinste lokalkonvexe Top. auf $\mathcal{D}(\Omega)$, so daß $i : \mathcal{D}_K \hookrightarrow \mathcal{D}(\Omega)$ stetig $\forall K \subseteq \Omega$ $\longrightarrow$

(von den $\mathcal{D}_K$ erzeugte induktive Limestop. auf $\mathcal{D}(\Omega)$)

Beweis: (1) Sei $(\varphi_i) \subseteq \mathcal{D}_K$ Netz. Dann:

$\varphi_i \to 0$ in $\mathcal{D}_K \underset{\text{Satz 6.2}}{\iff} \|\varphi_i\|_n \to 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$

$\underset{\otimes}{\iff} p(\varphi_i) \to 0 \quad \forall p \in \mathcal{P} \qquad$ („$\Leftarrow$" da alle $\|\cdot\|_n \in \mathcal{P}$)

$\underset{\text{Satz 6.2.}}{\iff} \varphi_i \xrightarrow{\tau} 0$

(2) $\mathcal{D}_K = \bigcap_{x \in \Omega \setminus K} \ker p_x \subseteq \mathcal{D}(\Omega)$ abgeschl., da

$p_x \in \mathcal{P}$, insbes. p_x τ-stetig

(3) „$\Rightarrow$" klar wegen (1). „$\Leftarrow$" es gilt: T stetig $\iff$ Aufg 1, Bl. 11

für jede stetige H.N. q auf Y ist $q \circ T$ stetige HN auf $\mathcal{D}(\Omega)$

Sei q stetige Halbnorm auf $Y \underset{\text{Vorauss.}}{\Rightarrow}$ per Def. von $\mathcal{P}$

$q \circ T|_{\mathcal{D}_K}$ ist τ_K-stetige H.N. auf $\mathcal{D}_K$ $\forall K$, d.h. $q \circ T \in \mathcal{P}$,

insbes. τ-stetig $\underset{\text{Aufg.}}{\Longrightarrow}$ T stetig ∎

<u>Bem:</u> τ ist nicht metrisierbar [(sonst $\mathcal{D}(\Omega)$ F-Raum, $\mathcal{D}(\Omega) = \bigcup_{\text{abzbar}} \mathcal{D}_K$, $\mathcal{D}_K \subseteq \mathcal{D}(\Omega)$ abgeschl. $\underset{\text{Baire im F.R.}}{\Longrightarrow}$ $\exists K: \mathring{\mathcal{D}}_K \neq \emptyset$, aber das ist nicht so!] → Hueke-Skript Bem 5.17.

Konvergenz von Folgen in $\mathcal{D}(\Omega)$:

8.2 <u>Satz</u> Seien $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{D}(\Omega)$, $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Dann sind äquiv:

(1) $\varphi_n \xrightarrow[\mathcal{D}]{} \varphi$ $\quad (:\Leftrightarrow \varphi_n \xrightarrow[\tau]{} \varphi)$

(2) $\exists$ komp. $K \subseteq \Omega$: • $\operatorname{Tr}\varphi, \operatorname{Tr}\varphi_n \subseteq K$ $\forall n$

• $\varphi_n \xrightarrow[\mathcal{D}_K]{} \varphi$, d.h. $D^\alpha \varphi_n \to D^\alpha \varphi$ glm. $\forall \alpha$

<u>Beweis:</u> (2) ⇒ (1) klar wegen $\tau_K = \tau|_{\mathcal{D}_K}$ (Lemma 8.1 (1))

(1) ⇒ (2): o.E. $\varphi = 0$. Es genügt z.z.: $\exists$ komp. $K \subseteq \Omega$: $\operatorname{Tr}\varphi_n \subseteq K$ $\forall n$.

Ang. nein. Sei (L_n) komp. Ausschöpf. von Ω, d.h. $\Omega = \bigcup L_n$, $L_n \subseteq \mathring{L}_{n+1}$. $K \subseteq \Omega$ komp. $\Rightarrow \exists n: K \subseteq L_n$

$\Rightarrow \exists$ Teilfolge (ψ_n) von (φ_n) und (K_n) von (L_n), so dass $\operatorname{Tr}\psi_n \subseteq K_n$, $\operatorname{Tr}\psi_n \not\subseteq$ ~~K_{n+1}~~ K_{n-1}

($\psi_1 := \varphi_1$, $\operatorname{Tr}\psi_1 \subseteq K_1$, ψ_2 erstes φ_n mit $\operatorname{Tr}\varphi_n \not\subseteq K_1$, $\operatorname{Tr}\psi_2 \subseteq K_2$ etc)

(K_n) ebenfalls Aussch. von Ω

Wähle $x_n \in K_n \setminus K_{n-1}$ mit $|\psi_n(x_n)| = c_n \neq 0$ ⇒

$\pi_n(\varphi) := \frac{1}{c_n}|\varphi(x_n)|$ ist stetige Halbnorm auf $\mathcal{D}(\Omega)$

$\pi_n(\psi_n) = 1$

$\pi := \sum_{n=1}^{\infty} \pi_n$ ist wohldef. Halbnorm auf $\mathcal{D}(\Omega)$,

da $\Sigma_i \pi_n(\varphi)$ endl. Summe $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$

Halbn. p auf $\mathcal{D}(\Omega)$ τ-stetig $\Leftrightarrow$ $p|_{\mathcal{D}_K}$ τ_K-stetig $\forall$ $K \subseteq \Omega$ komp.

$K \subseteq \Omega$ komp. $\Rightarrow \exists n: K \subseteq K_n \Rightarrow$

$\pi|_{\mathcal{D}_K} = \sum_{m=1}^{n} \pi_m|_{\mathcal{D}_K}$, also τ_K-stetig $\Rightarrow \pi \in P$, also τ-stetig.

Ferner: $\pi(\psi_n) \geq \pi_n(\psi_n) = 1$

Andererseits: $\psi_n \xrightarrow[\mathcal{D}]{} 0 \underset{\tau\text{-stetig}}{\Rightarrow} \pi(\psi_n) \to 0$ ↯

2. Distributionen auf Ω

<u>Def.</u> $\mathcal{D}'(\Omega) := \{u: \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{C}$ linear + stetig$\}$

Die $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ heißen Distributionen auf Ω

8.3. <u>Satz</u> Sei $u: \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{C}$ linear. Dann äquiv.:

(1) $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$

(2) $\forall$ komp. $K \subseteq \Omega$ ist $u|_{\mathcal{D}_K}$ τ_K-stetig

(3) $\forall$ komp. $K \subseteq \Omega$ $\exists$ $C = C(K) > 0$, $N = N(K) \in \mathbb{N}_0$:

$$|\langle u, \varphi \rangle| \leq C \cdot \|\varphi\|_N \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}_K$$

(4) u ist folgenstetig, d.h. ist $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{D}(\Omega)$ mit $\varphi_n \xrightarrow[\mathcal{D}]{} 0$
$\Rightarrow \langle u, \varphi_n \rangle \to 0$

<u>Beweis</u>: (1) $\Leftrightarrow$ (2): Lemma 8.1.(3)

(2) $\Leftrightarrow$ (3): Kor. 6.5. ; (1) $\Rightarrow$ (4) klar

(4) $\Rightarrow$ (2): $u|_{\mathcal{D}_K}$ folgenstetig, also stetig $\forall K$ (da τ_K metrisch)

$\underset{\text{Lemma 8.1.(3)}}{\Longrightarrow}$ u stetig ∎

<u>Def.</u> $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ hat endliche Ordnung $:\Leftrightarrow$ In (3) ist eine von K unabh. Wahl des Index $N = N(K)$ möglich. Das minimale N dieser Art heißt die <u>Ordnung</u> von u, $N = \mathrm{ord}(u)$

Bsp: 1. Sei $x \in \Omega$. $\langle \delta_x, \varphi \rangle := \varphi(x)$, $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

$\Rightarrow \delta_x \in \mathcal{D}(\Omega)'$ (δ-Distr.), $\mathrm{ord}(\delta_x) = 0$

2. <u>Reguläre Distributionen:</u> $f \in L^1_{loc}(\Omega) \Rightarrow$

$\langle u_f, \varphi \rangle := \int_\Omega f\varphi\,dx$ definiert $u_f \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $\operatorname{ord}(u_f) = 0$

Nulltest 7.5. $\Rightarrow$ $f \mapsto u_f$ injektiv, dh. $L^1_{loc}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{D}'(\Omega)$

Schreibe wieder f statt u_f

<u>Bsp</u>: $e^{|x|} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, aber $e^{|x|} \notin \mathcal{S}'_1$ (ÜB.)

<u>Bem</u>: δ_{x_0} ist keine reguläre Distr., denn:

Ang. $\delta_{x_0} = u_f$. $\tilde{\Omega} := \Omega \setminus \{x_0\} \Rightarrow \delta_{x_0}|_{\mathcal{D}(\tilde{\Omega})} = 0$, also

$\int f\varphi\,dx = 0 \;\; \forall \varphi \in \mathcal{D}(\tilde{\Omega}) \underset{\text{Nulltest}}{\Longrightarrow} f = 0$ f.ü. auf $\tilde{\Omega}$, also auch auf Ω

$\Rightarrow \delta_{x_0} = 0$ ↯

Besser nach Lokalisierung!!

3. μ Borelmaß auf Ω, mit $\mu(K) < \infty$ $\forall$ komp. $K \subseteq \Omega \Rightarrow$

$u_\mu(\varphi) = \int_\Omega \varphi\,d\mu$ def. $u_\mu \in \mathcal{D}'(\Omega)$ //

Top. auf $\mathcal{D}'(\Omega)$: w_*-Top. $\sigma(\mathcal{D}'(\Omega), \mathcal{D}(\Omega))$

Dh. $u_j \xrightarrow[\mathcal{D}']{} 0 \iff \langle u_j, \varphi \rangle \to 0 \;\; \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$

Temperierte Distr. als Distr.:

8.4. <u>Satz</u> 1. $u \in \mathcal{S}'_d \Rightarrow u|_{\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$

2. Die Inklusion $i: \mathcal{S}'_d \to \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ ist injektiv + stetig

(dh. top. Einbettung)

Fasse daher $u \in \mathcal{S}'_d$ als Distr. auf!

<u>Beweis</u>: $u \in \mathcal{S}'_d$, $(\varphi_n) \subseteq \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ mit $\varphi_n \xrightarrow[\mathcal{D}]{} 0 \Rightarrow$

$\exists$ komp. K: $\operatorname{Tr}\varphi_n \subseteq K$ $\forall n$

$\Rightarrow \|x^\beta D^\alpha \varphi_n\|_\infty \le C_{\beta K} \|D^\alpha \varphi_n\|_\infty \to 0 \Rightarrow \varphi_n \xrightarrow[\mathcal{S}_d]{} 0 \Rightarrow$

$\langle u, \varphi_n \rangle \to 0 \Rightarrow 1.$

2. Inj. klar, da $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d) \subseteq \mathcal{S}_d$ dicht. (w_*-) Stetigkeit klar ■

↑ Aufg. 3, Bl. 3

Kern des obigen Beweises ist die Folgenstetigkeit der Inklusion $i: \mathcal{D}(\mathbb{R}^d) \to \mathcal{S}_d$. i sogar stetig nach L. 8.1, da $i|_{\mathcal{D}_K}$ τ_K-stetig

3. Operationen auf Distributionen

Sei $T: \mathcal{D}(\Omega) \to \mathcal{D}(\Omega)$ linear [+ folgenstetig]

Angen. $\exists$ Operator $T^t: \mathcal{D}(\Omega) \to \mathcal{D}(\Omega)$, lin. + folgenstetig

mit $\int_\Omega T\psi \cdot \varphi\, dx = \int_\Omega \psi \cdot T^t\varphi\, dx \quad \forall \varphi, \psi \in \mathcal{D}(\Omega)$

Dh. $\langle u_{T\psi}, \varphi\rangle = \langle u_\psi, T^t\varphi\rangle$

$\Rightarrow$ Setze T fort auf $\mathcal{D}'(\Omega)$ via

$$\langle Tu, \varphi\rangle := \langle u, T^t\varphi\rangle, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

$Tu \in \mathcal{D}'(\Omega)$, da folgenstetig, $T: \mathcal{D}'(\Omega) \to \mathcal{D}'(\Omega)$ lin. + w_*-stetig

(1) Ableitungen:

$T = D^\alpha: \mathcal{D}(\Omega) \to \mathcal{D}(\Omega)$ lin. + folgenstetig

$T^t = (-1)^{|\alpha|} D^\alpha$ (part. Integr.)

Def. $D^\alpha: \mathcal{D}'(\Omega) \to \mathcal{D}'(\Omega)$; $\langle D^\alpha u, \varphi\rangle := (-1)^{|\alpha|}\langle u, D^\alpha\varphi\rangle$

(2) Multipl. mit C^∞-Fkt: sei $g \in C^\infty(\Omega)$

$T_g(\varphi) = g\varphi$, $\mathcal{D}(\Omega) \to \mathcal{D}(\Omega)$ lin. + folgenstetig.

denn: $\varphi_n \xrightarrow[\mathcal{D}]{} 0 \Rightarrow \mathrm{Tr}(\varphi_n) \subseteq K$, und $D^\alpha(\underbrace{g\varphi_n}_{\in \mathcal{D}_K}) \to 0$ glm. $\forall \alpha$

$T_g^t = T_g$

Also: $u \in \mathcal{D}'(\Omega) \Rightarrow gu \in \mathcal{D}'(\Omega)$ def. durch

$$\langle gu, \varphi\rangle := \langle u, g\varphi\rangle$$

Bem: 1. $f \in C^k(\Omega) \Rightarrow D^\alpha u_f = u_{D^\alpha f} \quad \forall |\alpha| \le k$

(part. Integration gegen $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$)

2. $u \in \mathcal{S}_d' \Rightarrow \mathcal{S}_d'$-Abl. von u stimmen auf $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ mit $\mathcal{D}'$-Abl. überein.

(3) Faltung: von $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ mit $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$

$\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d) \Rightarrow T_\psi(\varphi) = \varphi * \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$

T_ψ folgenstetig: $D^\alpha(\varphi * \psi)(x) = \int D^\alpha\varphi(x-y)\psi(y)\,dy$

$\Rightarrow \|D^\alpha(\varphi*\psi)\|_\infty \le C_\psi \cdot \|D^\alpha \varphi\|_\infty \quad \forall \alpha \qquad (*)$

$\varphi_n \xrightarrow[\mathcal{D}]{} 0 \Rightarrow \mathrm{Tr}\,\varphi_n \subseteq K$ (komp.) $\Rightarrow \mathrm{Tr}(\varphi_n * \psi) \subseteq L$ komp.

$(*) \Rightarrow \varphi_n * \psi \xrightarrow[\mathcal{D}]{} 0$

$T_\psi^t = T_{\psi^-}$. Also:

Def. $u * \psi \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$: $\langle u*\psi, \varphi\rangle := \langle u, \varphi * \psi^-\rangle$

Dann: $D^\alpha(u*\psi) = D^\alpha u * \psi = u * D^\alpha \psi \quad \forall \alpha$ (nachrechnen)

Ferner: $u*\psi$ ist reg. Distr. zu C^∞-Fkt $u \circ \psi$!

8.5. Satz $u\circ\psi(x) := \langle u, \underbrace{L_x\psi^-}_{\in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)}\rangle$, $x \in \mathbb{R}^d$. $\longrightarrow$ $f*g(x) = \langle u_f, L_x g^-\rangle$

; $x \mapsto L_x\psi^-$ stetig (sogar stetig bzgl. $\mathcal{G}_d$-Top., vgl. ÜB.!)

(1) $u \circ \psi \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$

(2) $u\circ\psi = u * \psi$ im Distr. Sinne

Beweis: (1) wörtlich wie für $\mathcal{G}_d'$.

(2) $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, $\mathrm{Tr}\,\varphi = K \Rightarrow \varphi * \psi^-(x) = \int_K \varphi(y) L_y\psi^-(x)\,dy$

$\exists$ komp. L: $\mathrm{Tr}(L_y\psi^-) \subseteq L \quad \forall y \in K$

$\rightsquigarrow \varphi * \psi^- = \int_K \varphi(y) L_y \psi^-\,dy \quad \mathcal{D}_L$-wertiges Integral. ← F-Raum

u stetig auf $\mathcal{D}_L \Rightarrow \langle u, \varphi*\psi^-\rangle = \int_K \varphi(y) \underbrace{u(L_y\psi^-)}_{u\circ\psi(y)}\,dy$ ∎

4. Lokalisierung

Sei $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $\tilde\Omega \subseteq \Omega$ offen. $\mathcal{D}(\tilde\Omega) \subseteq \mathcal{D}(\Omega)$.

Einschränkung von u auf $\tilde\Omega$:

$$\langle u|_{\tilde\Omega}, \varphi\rangle := \langle u, \varphi\rangle, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\tilde\Omega)$$

klar: $u|_{\tilde\Omega} \in \mathcal{D}'(\tilde\Omega)$ („Lokalisierung" von u)

$u = 0$ auf $\tilde\Omega$ $:\Leftrightarrow u|_{\tilde\Omega} = 0$.

8.6. Lemma. Sei $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$. $u = 0$ auf $\Omega \iff$

$\forall x \in \Omega$ $\exists$ offene Umgeb. $\mathcal{U}_x$ von x: $u = 0$ auf $\mathcal{U}_x$

Beweis: „$\Leftarrow$" $\mathfrak{V} = (\mathcal{U}_x)_{x\in\Omega}$ ist offene Überd. von Ω. Sei $(\varepsilon_j)_{j\in\mathbb{N}}$ eine $\mathfrak{V}$ untergeordnete C^∞-Teilung d. Eins; $\operatorname{Tr}\varepsilon_j \subseteq \mathcal{U}_{x_j}$

Sei $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ $\Rightarrow$ $\varphi = \sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon_j \varphi$, und nur endlich viele Summanden sind $\neq 0$, da $\operatorname{Tr}\varphi \cap \operatorname{Tr}\varepsilon_j \neq \emptyset$ für nur endlich viele j

$\Rightarrow u(\varphi) = \sum_j u(\varepsilon_j \varphi) = 0$ ∎

Konsequenz: Sei $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $\Omega_i \subseteq \Omega$ offen $(i \in I)$ mit $\Omega = \bigcup \Omega_i$ und $u|_{\Omega_i} = 0$ $\forall i$ $\Rightarrow$ $u = 0$ auf Ω.

Def. $\operatorname{Tr} u := \Omega \setminus \bigcup \{\tilde\Omega \subseteq \Omega \text{ offen}: u = 0 \text{ auf } \tilde\Omega\}$ Träger von u

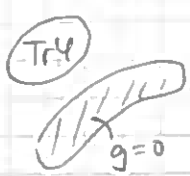
Damit: • $\Omega \setminus \operatorname{Tr} u$: größte offene Menge, auf der u verschwindet.

• $\langle u, \varphi\rangle = 0$ $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ mit $\operatorname{Tr}\varphi \cap \operatorname{Tr} u = \emptyset$

Bsp: 1. $\operatorname{Tr}\delta_x = \{x\}$, $\operatorname{Tr}(D^\alpha u) \subseteq \operatorname{Tr} u$, denn: $\operatorname{Tr}\varphi \cap \operatorname{Tr} u = \emptyset \Rightarrow$ $\operatorname{Tr}(D^\alpha\varphi) \cap \operatorname{Tr} u = 0$ $\langle D^\alpha u, \varphi\rangle = 0$

2. $g \in C^\infty(\Omega)$, $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ mit $gu = 0$ auf Ω $\Rightarrow$
$\operatorname{Tr} u \subseteq \{g = 0\}$ (evtl. $\operatorname{Tr} u \cap \operatorname{Tr} g \neq \emptyset$)

Denn: $\tilde\Omega := \Omega \setminus \{g = 0\}$ (offen). Sei $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, $\operatorname{Tr}\varphi \subseteq \tilde\Omega$ $\Rightarrow$ $\psi := \frac{\varphi}{g} \in \mathcal{D}(\Omega)$, und $\langle u, \varphi\rangle = \langle gu, \psi\rangle = 0$



8.7. Satz Sei $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ mit $\operatorname{Tr} u \subseteq \{x\}$, $x \in \mathbb{R}^d$

$\Rightarrow u = p(D)\delta_x$ mit einem Polynom $p \in \Pi_d$

Beweis: ÜB. Später! man braucht Distr. mit komp. Träger!!

8.8. Korollar (verallg. Satz v. Liouville)

Sei $p \in \Pi_d$ Polynom mit $p(x) \neq 0$ $\forall x \neq 0$, und $u \in \mathcal{S}'_d$ mit $p(D)u = 0$ $\Rightarrow$ u ist Polynom.

Beweis: $p(D)u=0 \iff \widehat{p(D)u}=0 \iff p\hat{u}=0$

$p(x)\neq 0 \ \forall x\neq 0 \underset{\text{Bsp. oben}}{\Longrightarrow} \operatorname{Tr}\hat{u} \subseteq \{0\} \underset{\text{Satz 8.7.}}{\Longrightarrow} \hat{u} = q(D)\delta_0,\ q\in\Pi_d$

$\to u = (q(D)\delta_0)^\vee = c\,q^-$ (vgl. Bsp nach L. 7.10)

Spezialfall: klass. Satz v. Liouville

Sei $u\in C^2(\mathbb{R}^d)$ beschränkt + harmonisch, d.h. $\Delta u = 0$

$\Rightarrow u =$ konst.

5. Distributionen mit komp. Träger

Erinnerung: $\mathcal{E}(\Omega) = C^\infty(\Omega)$ mit der F-Raum-Top. erzeugt von den

$p_n(\varphi) = \max_{|\alpha|\le n} \|D^\alpha\varphi\|_{\infty,K_n}$ $\quad (K_n)\subseteq\Omega$ komp. Ausschöpf.

$u\in\mathcal{E}'(\Omega) \iff u: \mathcal{E}(\Omega)\to\mathbb{C}$ lin. + stetig, d.h.

$\exists C>0, N\in\mathbb{N}_0: |\langle u,\varphi\rangle| \le C\cdot p_N(\varphi) \ \forall\varphi\in\mathcal{E}(\Omega)$ (*)

Sei $u\in\mathcal{E}'(\Omega) \Rightarrow$

1. $u|_{\mathcal{D}(\Omega)} \in \mathcal{D}'(\Omega)$

Denn: Sei $(\varphi_n)\subseteq\mathcal{D}(\Omega)$, $\varphi_n \xrightarrow[\mathcal{D}]{} 0 \Rightarrow \varphi_n \xrightarrow[\mathcal{E}]{} 0 \Rightarrow \langle u,\varphi_n\rangle \to 0$

2. $\operatorname{Tr} u$ ist kompakt

denn: (*) $\Rightarrow \forall\varphi\in\mathcal{D}(\Omega)$ mit $\operatorname{Tr}\varphi\cap K_N=\emptyset$ ist $\langle u,\varphi\rangle = 0$
$\Rightarrow \operatorname{Tr} u \subseteq K_N$.

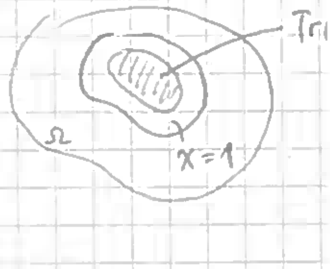
Umgekehrt:

8.9 Satz $u\in\mathcal{D}'(\Omega)$ habe komp. Träger $\Rightarrow$ u hat eindeutige Fortsetzung zu $\tilde{u}\in\mathcal{E}'(\Omega)$.

Beweis: Wähle $\chi\in\mathcal{D}(\Omega)$ so, dass $\chi\equiv 1$ in offener Umgeb. von $\operatorname{Tr} u$

$\Rightarrow u = \chi u$, denn:

$\varphi\in\mathcal{D}(\Omega) \Rightarrow \langle u,\varphi\rangle = \langle u,\chi\varphi\rangle + \underbrace{\langle u,(1-\chi)\varphi\rangle}_{=0}$ ✓



Def. $\langle\tilde{u},\varphi\rangle := \langle u,\chi\varphi\rangle \ \forall\varphi\in\mathcal{E}(\Omega)$

$\Rightarrow \tilde{u}|_{\mathcal{D}(\Omega)} = u$.

unnötig

[$\tilde u$ unabh. von der Wahl von χ, denn: Sei $\rho \in \mathcal{D}(\Omega)$, $\rho \equiv 1$ in Umg. von $\operatorname{Tr} u$ $\Rightarrow \langle u, \chi\varphi\rangle - \langle u, \rho\varphi\rangle = \langle u, \underbrace{(\chi-\rho)\varphi}_{=0 \text{ in Umg. von } \operatorname{Tr} u}\rangle = 0$]

$\tilde u$ eindeutig, da $\mathcal{D}(\Omega) \subseteq \mathcal{E}(\Omega)$ dicht (s. unten)

$\tilde u$ $\mathcal{E}(\Omega)$-stetig, denn: Sei $(\varphi_j) \subseteq \mathcal{E}(\Omega)$ mit $\varphi_j \xrightarrow[\mathcal{E}]{} 0$, dh. $D^\alpha \varphi_j \to 0$ lokal glm. $\forall\, \alpha$

$K = \operatorname{Tr} \chi$ komp. $\Rightarrow D^\alpha(\underbrace{\chi\varphi_j}_{\in \mathcal{D}_K}) \to 0$ glm. $\forall\, \alpha$

$\Rightarrow \chi\varphi_j \xrightarrow[\mathcal{D}]{} 0 \Rightarrow u(\chi\varphi_j) \to 0$. Also $\tilde u \in \mathcal{E}'(\Omega)$.

Identifiziere u und $\tilde u$. Damit:

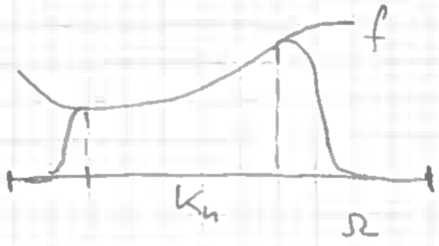
$\mathcal{E}'(\Omega) = \{u \in \mathcal{D}'(\Omega) : \operatorname{Tr} u \text{ komp.}\}$

8.10. Korollar Jedes $u \in \mathcal{E}'(\Omega)$ hat endliche Ordnung

Denn: $(*) \Rightarrow \exists\, C, N \in \mathbb{N}_0 : |\langle u, \varphi\rangle| \leq C \max_{|\alpha| \leq N} \|D^\alpha \varphi\|_\infty \quad \forall\, \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$

Das minimale solche N ist $\operatorname{ord}(u)$.

$\mathcal{D}(\Omega) \subseteq \mathcal{E}(\Omega)$ dicht:



(K_n) Aussch. von Ω

Bem: 1. Distr. mit komp. Träger auf $\mathbb{R}^d$ sind temperiert, dh.:
$u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d) \to u|_{\mathcal{S}_d} \in \mathcal{S}_d'$.

$u|_{\mathcal{S}_d} = u \circ i$

Denn: Die Inklusion $i: \mathcal{S}_d \to \mathcal{E}(\mathbb{R}^d)$ ist stetig

2. Falls $u \in \mathcal{E}'(\Omega)$ regulär, dh. $u = u_f$, $f \in L^1_{loc}(\Omega) \Rightarrow \operatorname{Tr} u = \operatorname{Tr} f$
(da $\langle u, \varphi\rangle = 0 \Leftrightarrow \int f\varphi\, dx = 0$)

§ 9 Paley-Wiener-Sätze

1. PW für Funktionen

Ziel: $C_c^\infty(\mathbb{R}^d) \underset{f \mapsto \hat{f}}{\longleftrightarrow}$ holom. Fkt auf $\mathbb{C}^d$ mit präzisen Wachstumsschranken.

<u>Def.</u> Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}^d$ offen. $f: \Omega \to \mathbb{C}$ <u>holomorph in Ω</u> $:\iff$ f stetig + partiell holom. in Ω (d.h. holom. in jeder Variablen).

$\mathcal{O}(\Omega) := \{f: \Omega \to \mathbb{C} \text{ holom.}\}$

<u>Bez:</u> $z = (z_1, \dots, z_d) \in \mathbb{C}^d \Rightarrow \operatorname{Re} z := (\operatorname{Re} z_1, \dots, \operatorname{Re} z_d)$, $\operatorname{Im} z$ ebenso

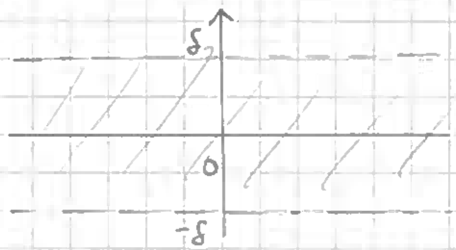
$z^\alpha = z_1^{\alpha_1} \cdots z_d^{\alpha_d} \quad (\alpha \in \mathbb{N}_0^d)$; $\quad |z| = (\sum |z_i|^2)^{1/2}$

$z, w \in \mathbb{C}^d \Rightarrow \langle z, w \rangle := \sum_{i=1}^d z_i w_i$

9.1. <u>Lemma.</u> $g \in L^1(\mathbb{R}^d)$ mit $|g(x)| e^{\delta |x|} \in L^1$ für $\delta > 0$

$$\Rightarrow \hat{g}(z) := \underbrace{\frac{1}{(2\pi)^{d/2}}}_{c_d} \int_{\mathbb{R}^d} g(x) e^{-i\langle z, x\rangle} \, dx$$

existiert und ist holom. im Streifen $\{z \in \mathbb{C}^d : |\operatorname{Im} z| < \delta\}$



(<u>Fourier-Laplace-Trafo von g</u>)

Beachte: $|\operatorname{Im} z| < \delta \Rightarrow |e^{-i\langle z, x\rangle}| = e^{\langle \operatorname{Im} z, x\rangle} \le e^{\delta |x|}$ $\in L$

Beweis wie für $d = 1$ (Stetigkeits- und Holomorphieaussage) $\hat{=}$ Lemma 4.13.

Sei $g \in L^1(\mathbb{R}^d)$, $\operatorname{Tr} g \subseteq \overline{B_R(0)}$

$\Rightarrow \hat{g} \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^d)$ mit $|\hat{g}(z)| \le c_d \int |g(x)| e^{R |\operatorname{Im} z|} dx = C e^{R |\operatorname{Im} z|}$

9.2. Satz (Paley-Wiener) (Raymond Paley, Norbert Wiener)

Für $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^d)$ sind äquiv:

(1) $f = \hat{g}$ für $g \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ mit $\operatorname{Trg} \subseteq \overline{B_R(0)}$ $(R>0)$

(2) f ist vom Paley-Wiener-Typ R, d.h.

$$\forall N \in \mathbb{N} \;\exists C_N > 0: \; |f(z)| \leq \frac{C_N}{(1+|z|)^N} e^{R \cdot |\operatorname{Im} z|} \quad \forall z \in \mathbb{C}^d$$

↑ auf $\mathbb{R}$ stark abklingend!

Zum Beweis:

9.3 Lemma. Sei $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^d)$ mit $f|_{\mathbb{R}^d} = 0 \Rightarrow f \equiv 0$

Beweis: Zeige für $0 \leq k \leq d$:

(E_k) $f(z) = 0$, falls mind. k Koordinaten von $z \in \mathbb{C}^d$ reell sind

(E_d) gilt nach Vorauss., (E_0) ist zu zeigen

Ind.: Es gelte (E_k), $k \geq 1$.

Seien $x_1, \dots, x_{k-1} \in \mathbb{R}$, $z_{k+1}, \dots, z_d \in \mathbb{C}$ fest (bel.)

$g(\zeta) := f(x_1, \dots, x_{k-1}, \zeta, z_{k+1}, \dots, z_d) \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$

Vorauss. $\Rightarrow g|_{\mathbb{R}} = 0 \underset{\text{Id. Satz}}{\Longrightarrow} g \equiv 0 \Rightarrow (E_{k-1})$ gilt ∎

Beweis v. Satz 9.2: (1) ⇒ (2): $\hat{g}(z) = c_d \cdot \int_{\mathbb{R}^d} g(t) e^{-i\langle z, t\rangle} dt \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^d)$

$$\Big| \int_{B_R(0)} D^\alpha g(t)\, e^{-i\langle z, t\rangle} dt \Big| \underset{\substack{\text{part. Int.} \\ \text{(Trg komp!)}}}{=} C \cdot |z^\alpha \hat{g}(z)| \quad \text{Bem. 2}$$

$$\Rightarrow |z^\alpha \hat{g}(z)| \leq C \cdot \|D^\alpha g\|_1 \cdot e^{R \cdot |\operatorname{Im} z|} \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}_0^d$$

$\Rightarrow \hat{g}$ ist vom PW-Typ R

(2) ⇒ (1): Vorauss. $\Rightarrow f|_{\mathbb{R}^d} \in C^\infty(\mathbb{R}^d) \cap L^1(\mathbb{R}^d)$

sogar: $(1+|x|^N) f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ $\forall N \in \mathbb{N}$ $\underset{\text{Diffsatz; Aufg. 2, Blatt 2}}{\Longrightarrow}$

$$g(t) := \check{f}(t) = c_d \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{i\langle t, x\rangle} dx \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$$

Beh 1: $g(t) = c_d \int_{\mathbb{R}^d} f(x+iy)\, e^{i\langle t, x+iy\rangle}\, dx \quad \forall y \in \mathbb{R}^d \quad (*)$

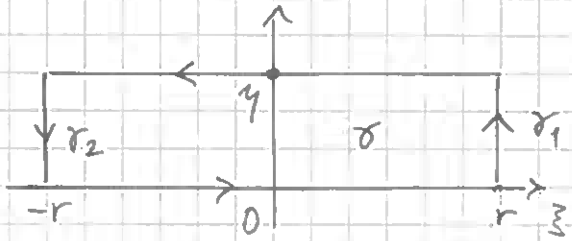
Beweis: Fixiere t. $z := x+iy$; fixiere $z_2, \dots, z_d \in \mathbb{C}$

$$\Rightarrow \int_{\mathbb{R}} \underbrace{f(\xi+i\eta, z_2, \dots, z_d)\, e^{i\langle t, (\xi+i\eta, z_2, \dots, z_d)\rangle}}_{=: h(\xi+i\eta)} d\xi$$

ist unabhängig von η, d.h.

$$\int_{\mathbb{R}} h(\xi+i\eta)\, d\xi = \int_{\mathbb{R}} h(\xi)\, d\xi \quad \forall \eta \in \mathbb{R} \quad (**)$$

Denn: Betrachte den geschlossenen Integrationsweg γ in $\mathbb{C}$ gemäß Skizze; $\eta > 0$



$h \in \mathcal{O}(\mathbb{C}) \Rightarrow \int_\gamma h(\xi)\, d\xi = 0$

$$\left|\int_{\gamma_{1/2}} h(\xi)\, d\xi\right| \underset{f \text{ vom PW-Typ } R}{\leq} \frac{C_N}{(1+r)^N}\, e^{R\eta}\, e^{-\langle t, (\eta, \operatorname{Im} z_2, \dots, \operatorname{Im} z_d)\rangle}$$

$\to 0$ für $r \to \infty$

$\Rightarrow (**)$ für $\eta > 0$, $\eta < 0$ analog.

Also: Das Integral in $(*)$ ist unabhängig von y_1.

Analog für $y_2, \dots, y_d$.

Beh 2: $\operatorname{Tr} g \subseteq \overline{B_R(0)}$

Hieraus folgt dann mit dem L^1-Inversionssatz: $\hat{g} = f|_{\mathbb{R}^d}$

$\hat{g}$ holom. auf $\mathbb{C}^d \underset{\text{Id. lemma 9.3}}{\Rightarrow} \hat{g} = f$ auf $\mathbb{C}^d$

Bew. von Beh 2: Setze in $(*)$: $y = \frac{\lambda}{|t|} \cdot t$, $t \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$, $\lambda > 0$ Parameter

$$\Rightarrow |f(x+iy)\, e^{i\langle t, x+iy\rangle}| \leq \frac{C_N}{(1+|x|)^N} \underbrace{e^{R|y|} \cdot e^{-\langle t, y\rangle}}_{e^{R\lambda - |t|\lambda}} \quad \forall N \in \mathbb{N}$$

$$(*) \Rightarrow |g(t)| \leq C \cdot e^{(R-|t|)\lambda} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{dx}{(1+|x|)^N} \leq C' e^{(R-|t|)\lambda} \quad (N \text{ groß genug})$$

$\to 0$ für $\lambda \to +\infty$, falls $|t| > R$

$\Rightarrow g(t) = 0$ für $|t| > R$ ∎

2. PW für Distributionen

$z \in \mathbb{C}^d \Rightarrow e_z(x) = e^{i\langle z, x\rangle}, \quad x \in \mathbb{R}^d$

9.4. Satz Sei $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d) \subseteq \mathcal{S}_d' \Rightarrow \hat{u} \in \mathcal{S}_d'$ ist regulär;

$$\hat{u}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \langle u, e_{-x}\rangle \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$$

Beweis: $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d) \Rightarrow \langle \hat{u}, \varphi\rangle = \langle u, \hat{\varphi}\rangle$

$$\frac{1}{c_d}\hat{\varphi}(\xi) \underset{\operatorname{Tr}\varphi = K}{=} \int_K \varphi(x) e_{-x}(\xi)\,dx = \langle \underset{\in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)}{\delta_\xi}, \underbrace{\int_K \varphi(x) e_{-x}\,dx}_{\mathcal{E}(\mathbb{R}^d)\text{-wertiges Int.}}\rangle$$

(denn $x \mapsto \varphi(x)e_{-x}$, $K \to \mathcal{E}(\mathbb{R}^d)$ stetig, leicht)

$$= \Big(\int_K \varphi(x) e_{-x}\,dx\Big)(\xi)$$

$$\Rightarrow \langle \hat{u}, \varphi\rangle = c_d \langle u, \int_K (\ldots)\rangle = c_d \int_K \varphi(x) \underbrace{\langle u, e_{-x}\rangle}_{\in C^\infty ?} dx$$

Wähle $\chi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ mit $\chi \equiv 1$ in Umgeb. von $\operatorname{Tr} u$

$\Rightarrow u = \chi u$ (siehe Bew. von Satz 8.9)

$$\Rightarrow \langle u, e_{-x}\rangle = \langle u, \chi e_{-x}\rangle \underset{\phi := \check{\chi}}{=} \langle u, e_{-x}\hat{\phi}\rangle = \langle u, \widehat{L_x\phi}\rangle$$

$$= \langle \hat{u}, L_x\phi\rangle = \underbrace{\hat{u} * \phi^-}_{\in C^\infty(\mathbb{R}^d) \text{ nach Satz 7.11}}(x) \quad = \Big[\hat{u} * \hat{\chi}(x)$$

$$\underset{7.11}{=} (2\pi)^{d/2} \widehat{\chi u}(x) = \hat{u}(x)\Big] \quad \blacksquare$$

+ $\hat{u} \in \mathcal{S}_d'$ festg. durch seine Werte auf $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$)

$e_z \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^d) \Rightarrow \hat{u}$ auf $\mathbb{C}^d$ fortsetzbar via

$$\hat{u}(z) := \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \langle u, e_{-z}\rangle, \quad z \in \mathbb{C}^d$$

<u>Fourier-Laplace-Trafo von u</u>

9.5. Satz (<u>Paley-Wiener-Schwartz</u>) Für $f: \mathbb{C}^d \to \mathbb{C}$ sind äquiv.:

(1) $f = \hat{u}$ (auf $\mathbb{C}^d$) für $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$ mit $\operatorname{Tr} u \subseteq \overline{B_R(0)}$

(2) $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^d)$, und $\exists N \in \mathbb{N}$ mit:

$$(*) \quad |f(z)| \leq C(1+|z|)^N e^{R|\operatorname{Im} z|} \quad \forall z \in \mathbb{C}^d$$

Beweis: (1) $\Rightarrow$ (2): $\hat{u} \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^d)$, denn:

1. $\hat{u}$ stetig, da $z \mapsto e_{-z}$, $\mathbb{C}^d \to \mathcal{E}(\mathbb{R}^d)$ stetig

$(z_n \to z_0 \Rightarrow D^\alpha e_{-z_n} \to D^\alpha e_{-z}$ lokal glm.)

2. $\lambda \mapsto \hat{u}(a+\lambda b) \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ $\forall a, b \in \mathbb{C}^d$

Zu 2.: Nach Satz v. Morera genügt es z. zeigen:

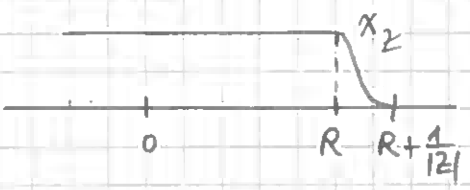
$\int_\gamma \hat{u}(a+\lambda b)\, d\lambda = 0$ für jeden geschlossenen Int. weg γ in $\mathbb{C}$

Aber: $\int_\gamma \langle u, e_{-a-\lambda b} \rangle d\lambda = \langle u, g \rangle$ mit

$$g = \int_\gamma e_{-a-\lambda b}\, d\lambda \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^d)$$

$x \in \mathbb{R}^d \Rightarrow g(x) = \int_\gamma \underbrace{e^{-i\langle a+\lambda b, x\rangle}}_{\in \mathcal{O}(\mathbb{C})} d\lambda = 0 \Rightarrow$ Beh.

Zu Abschätzung (*): Zu $z \in \mathbb{C}^d \setminus \{0\}$ wähle $\chi_z \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ mit



$\chi_z = 1$ auf $\overline{B_R(0)}$, $\operatorname{Tr} \chi_z \subseteq B_{R+\frac{1}{|z|}}(0)$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow f(z) = \hat{u}(z) = c\langle u, \underbrace{\chi_z e_{-z}}_{\in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)} \rangle$

Sei $\operatorname{ord}(u) = N \Rightarrow \exists C > 0$:

$$|f(z)| \le C \cdot \max_{|\alpha| \le N} \| D^\alpha(\chi_z e_{-z}) \|_\infty$$

χ_z so wählbar, dass $\| D^\alpha \chi_z \|_\infty \le C_\alpha (1+|z|)^{|\alpha|}$

$\| \underbrace{D^\alpha(e_{-z})}_{(-z)^\alpha e_{-z}} \|_{|x| \le R + \frac{1}{|z|}} \le (1+|z|)^{|\alpha|} \| e_{-z} \|_{(\dots)}$ $\Bigg\} \Rightarrow$ Leibniz

$$\Rightarrow |f(z)| \le C \cdot (1+|z|)^N \cdot \underbrace{\max_{|x| \le R + \frac{1}{|z|}} |e^{-i\langle z, x\rangle}|}_{\le e^{(R+\frac{1}{|z|})|\operatorname{Im} z|}} \le e \cdot e^{R|\operatorname{Im} z|}$$

(2) $\Rightarrow$ (1): mit PW-Satz 9.2.

$(*) \Rightarrow |f(x)| \le C(1+|x|)^N$ $\forall x \in \mathbb{R}^d \Rightarrow f|_{\mathbb{R}^d} \in \mathcal{S}_d'$

$\Rightarrow f|_{\mathbb{R}^d} = \hat{u}$, $u \in \mathcal{S}_d'$ $\quad (\times)$

$f_\varepsilon(z) := f(z)\, \hat{j_\varepsilon}(z)$, (j_ε) Friedrichs-Kern; $\operatorname{Tr} j_\varepsilon = \overline{B_\varepsilon(0)}$

Satz 9.2. für $j_\varepsilon \Rightarrow \hat{j}_\varepsilon$ vom PW-Typ ε

$\Rightarrow f_\varepsilon$ vom PW-Typ $R+\varepsilon$ (Vorsicht ...)

$\underset{\text{Satz 9.2.}}{\Longrightarrow} f_\varepsilon = \hat{\Phi}_\varepsilon, \quad \phi_\varepsilon \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d), \quad \operatorname{Tr} \phi_\varepsilon \subseteq \overline{B}_{R+\varepsilon}(0)$

Approx. argument $\rightsquigarrow \operatorname{Tr} u \subseteq \overline{B}_R(0)$ (Details: Rudin, FA, Thm. 7.23)

$\underset{(1)\Rightarrow(2)}{\Longrightarrow} \hat{u} \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^d) \underset{(\times)+\text{Id.Satz}}{\Longrightarrow} f \equiv \hat{u}$ auf $\mathbb{C}^d$ ▪

<u>Bem</u>: In (1) $\Rightarrow$ (2) ist $N = \operatorname{ord}(u)$

§10 Fundamentallösungen

1. Motivation + Beispiele

Lineare PDG: $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ offen,

$$Lu = f, \quad L = \sum_{|\alpha| \le m} c_\alpha(x) D^\alpha, \quad c_\alpha, f : \Omega \to \mathbb{C}$$

Frage: Ist $Lu = f$ lokal lösbar, d.h. exist. zu $x_0 \in \Omega$ eine Lsg u in einer Umgeb. von x_0?

Ja, falls f, c_α reell-analytisch und $c_\alpha(x_0) \neq 0$ für ein α mit $|\alpha| = m$
$\Rightarrow \exists$ (lokal) analyt. Lsg (Satz v. Cauchy-Kowalewski)

i.A. nicht richtig, falls nur $f, c_\alpha \in C^\infty(\Omega)$! (Bsp von Lewy 1957)

Aber: Lin. DO's mit konst. Koeff. sind lokal lösbar.
Studium der Lsg (inklusive Regularitätseigenschaften) via F-Lösungen.

Sei $p(D) = \sum_{|\alpha| \le m} c_\alpha D^\alpha$ lin. DO mit konst. Koeff. $c_\alpha \in \mathbb{C}$ auf $\mathbb{R}^d$

$p \in \Pi_d$: Symbol von $p(D)$

Bsp: $\Delta = p(D)$ mit $p(\xi) = -|\xi|^2$

Wärmeleitungs-Operator: $\partial_t - \overset{\Delta_x}{\Delta}$ auf $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$ $\quad p = i\tau + |\xi|^2$

Wellen-Operator: $\partial_t^2 - \Delta$ " "

Def. $E \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ heißt Fundamentallsg von $p(D)$ $:\Leftrightarrow$

$$p(D)E = \delta_0$$

10.1. Lemma Sei E F-Lsg von $p(D)$. Betrachte die PDG

$$(*) \quad p(D)u = f$$

in den Fällen (a) $E \in \mathcal{S}_d'$, $f \in \mathcal{S}_d$

(b) $E \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$, $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ [später obsolet!]

$\Rightarrow u := E * f \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ löst $(*)$ auf $\mathbb{R}^d$

Denn: $p(D)(E * f) = p(D)E * f = \delta_0 * f = f$ $\quad L_x f^{-}(y) = f(x-y)$

$$\left(\delta_0 * f(x) = \langle \delta_0, L_x f^{-} \rangle = f(x)\right)$$

F-Lsg sind i.A. nicht eindeutig!

Bsp 1: $p(D) = \frac{d}{dx}$ auf $\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ Heaviside-Fkt $H = 1_{[0,\infty)}$ ist F-Lsg

Ebenso $H + c$, $c \in \mathbb{C}$. Das sind alle

(Man kann zeigen: $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, $u' = 0 \Rightarrow u = \text{konst.} \in \mathbb{C}$)

Bsp 2: Riesz-Distr. auf $\mathbb{R}^d$: $R_\alpha(x) = c \cdot \Gamma\left(\frac{d-\alpha}{2}\right) |x|^{\alpha - d}$, $0 < \alpha < d$

(vgl. Blatt 11)

$$\Delta^n \underbrace{\left(\frac{(-1)^n}{(2\pi)^{d/2}} R_{2n} \right)}_{\tilde{R}_{2n}} = \delta_0 \quad \text{für } n < \frac{d}{2}$$

$\Rightarrow \tilde{R}_{2n}$ ist F-Lsg von Δ^n für $n < \frac{d}{2}$

Fall $n = 1$: $\tilde{R}_2$ F-Lsg von Δ, falls $d > 2$

$d = 2$ nicht abgedeckt (Koeff. von R_α hat Pol in $\alpha = d$)

10.2. Satz

$$N(x) := \begin{cases} \frac{|x|^{2-d}}{(2-d)\omega_d}, & d \geq 3 \\ \frac{\ln|x|}{2\pi}, & d = 2 \end{cases}$$

Newton-Potential

ω_d: Oberfläche der S^{d-1}

$\rightarrow N \in \mathcal{S}_d'$ ist F-Lsg von Δ auf $\mathbb{R}^d$

Beweis: $d \geq 3 \Rightarrow N = \tilde{R}_2$

$d = 2$: direkter Beweis (geht auch für $d \geq 3$)

z.z: $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2) \Rightarrow \int_{\mathbb{R}^2} N \Delta\varphi \, dx = \varphi(0)$

$x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \Rightarrow \Delta N(x) = (\partial_r^2 + \frac{1}{r}\partial_r) \ln r = 0 \quad (r = |x|)$

Sei $\operatorname{Tr} \varphi \subseteq B_R(0)$.

Umgekehrt: E F-Lsg von $\frac{d}{dx}$ $\Rightarrow$ $u := E - H$ erfüllt $u' = \delta_0 - \delta_0 = 0$

$\Rightarrow$ $u =$ konst. $= c \in \mathbb{R}$. (unten)

a beliebig: setze $\gamma_a(x) = e^{ax}$. $\gamma_a \delta_0 = \delta_0$. Ferner:

$$\left(\frac{d}{dx} - a\right)(\gamma_a u) \underset{\text{prod. Regel}}{=} \gamma_a' u + \gamma_a u' - a \gamma_a u = \gamma_a u'$$

$$\Rightarrow \left(\frac{d}{dx} - a\right)(\underbrace{\gamma_a H}_{\text{F-Lsg!}}) = \delta_0$$

10.3. Lemma Sei $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, $u' = 0 \Rightarrow u =$ konst $\in \mathbb{C}$

Beweis: Für $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ gilt: $\psi = \varphi'$ mit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \int_{\mathbb{R}} \psi \, dx = 0$

("$\Rightarrow$" klar; "$\Leftarrow$": setze $\varphi(x) := \int_{-\infty}^{x} \psi \, dt$)

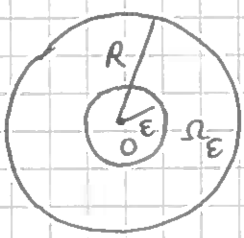
Also: $u' = 0 \Rightarrow \langle u, \psi \rangle = 0 \;\; \forall \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ mit $\int \psi \, dx = 0$

Fixiere ψ_0 mit $\int \psi_0 = 1$.

$\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \Rightarrow \langle u, \varphi - \psi_0 \cdot \int \varphi \, dx \rangle = 0 \Rightarrow \langle u, \varphi \rangle = \underbrace{\langle u, \psi_0 \rangle}_{=c} \int \varphi \, dx$

$\Rightarrow u = c$ ∎

W



$$\Omega_\varepsilon := \{\varepsilon < |x| < R\}$$

$$\Longrightarrow \int_{\mathbb{R}^2} N \Delta\varphi \, dx = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{\Omega_\varepsilon} N \Delta\varphi \, dx$$

Greensche Formel:

$$\int_{\Omega_\varepsilon} (N\Delta\varphi - \varphi \underbrace{\Delta N}_{=0}) \, dx = \int_{\partial\Omega_\varepsilon} (N \partial_\nu \varphi - \varphi \partial_\nu N) \, dS \qquad \nu: \text{„äußeres" ENF an } \partial\Omega_\varepsilon$$

$$= \int_{|x|=\varepsilon} (\ldots)$$

$$|x| = \varepsilon \Rightarrow \nu(x) = -\frac{x}{\varepsilon}, \quad \partial_\nu N(x) = \langle \underbrace{\nabla N(x)}_{=\frac{x}{2\pi|x|^2}}, \nu(x) \rangle = -\frac{1}{2\pi\varepsilon}$$

$$\Longrightarrow \int_{\mathbb{R}^2} N\Delta\varphi \, dx = \lim_{\varepsilon\downarrow 0} \underbrace{\int_{|x|=\varepsilon} \left(\frac{\ln\varepsilon}{2\pi} \partial_\nu \varphi \right.}_{\to 0} \left. + \frac{\varphi}{2\pi\varepsilon} \right) dS = \varphi(0) \quad \blacksquare$$

$\Rightarrow$ hinten

2. Der Satz v. Malgrange - Ehrenpreis

10.4. Satz (M.-E., 1954-56)

Jeder lin. DO $p(D)$ auf $\mathbb{R}^d$ mit konst. Koeff., $p \neq 0$, besitzt eine Fundamentallsg.

Es gibt verschiedene Beweisvarianten.

Eine Idee: $p(D)u = \delta_0$, $u \in \mathcal{S}'_d \Longleftrightarrow p\hat{u} = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}}$

„Divisionsproblem". Schwer zu lösen falls p reelle NS hat!

Formal: $\langle u, \varphi \rangle = \langle \hat{u}, \check{\varphi} \rangle = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\check{\varphi}(\xi)}{p(\xi)} \, d\xi$

Problem: i.A. ist $\frac{1}{p} \notin L^1_{loc}$!

$\rightsquigarrow$ verschiebe Int. bereich ins Komplexe, so dass NS von p vermieden werden.

Konstruktive Beweise erst seit 1994!

__Bem__ Eine $\mathcal{F}$-Lsg kann keinen komp. Träger haben. Denn

Ang. $p(D)E = \delta_0$, $E \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d) \Rightarrow p\hat{E} = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}}$.

$\hat{E} \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^d)$ nach Paley-Wiener, aber p hat NS $\lightning$

Hier: Nach P. Wagner, Amer. Math. Monthly 2009

10.5. Lemma Sei $p \in \Pi_d$ Polynom, $p \not\equiv 0$ $\Rightarrow$

$N = \{x \in \mathbb{R}^d : p(x) = 0\}$ ist Nullmenge

Beweis: $\int_N dx = \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \left(\int_{N_{x'}} dx_1 \right) dx'$ mit $N_{x'} = \{x_1 \in \mathbb{R} : p(x_1, x') = 0\}$ endlich!

$\Rightarrow \int_N dx = 0$ ∎

Kor.

10.6 Lemma Sei $p \in \Pi_d$, $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$, $z \in \mathbb{C}^d$, $e_z(x) = e^{i\langle z, x\rangle}$

(1) $e_z\, p(D+z)u = p(D)(e_z u)$

(2) $e_z\, p(D-z)u = p(D-2z)(e_z u)$ (aus (1) mit $p(\cdot - 2z)$ statt p)

(3) $u \in \mathcal{S}_d' \Rightarrow p(D)\check{u} = (pu)^\vee$ (L. 7.10.)

Insbes. $(u=1)$: $\check{p} = (2\pi)^{d/2} p(D)\delta_0$

Beweis von (1): $\langle e_z\, p(D+z)u, \varphi\rangle = \langle u, p(-D+z)(e_z\varphi)\rangle =$

$= \langle u, e_z\, p(-D)\varphi\rangle = \langle p(D)(e_z u), \varphi\rangle$ ∎

Nun: Betrachte $p(D) = \sum_{|\alpha| \le m} c_\alpha D^\alpha$.

Sei $\operatorname{grad} p = m$. Hauptsymbol von $p(D)$:

$$p_m(\xi) = \sum_{|\alpha| = m} c_\alpha \xi^\alpha \quad (\not\equiv 0, \text{ homog. v. Grad } m)$$

Fixiere $\eta \in \mathbb{R}^d$ mit $p_m(\eta) \neq 0$, und sei $\lambda \in \mathbb{R}$

$u \in \mathcal{S}_d' \Rightarrow$

$$p(D)(e_{-i\lambda\eta}\check{u}) \underset{10.6.(1)}{=} e_{-i\lambda\eta}\, p(D - i\lambda\eta)\check{u} \underset{10.6.(3)}{=}$$

$$= e_{-i\lambda\eta} \cdot (p(\xi - i\lambda\eta)u)^\vee$$

Argument ins Komplexe verschoben!

Nun: Spezielle Wahl von u:

$$q_\lambda(\xi) := \frac{\overline{p(\xi - i\lambda\eta)}}{p(\xi - i\lambda\eta)} \quad (\lambda \in \mathbb{R})$$

Sei grad $p = m$. o.E. $p_m(1,0,\dots,0) \neq 0$ $\Rightarrow$

$$p(x) = c x_1^m + \sum_{k=0}^{m-1} q_k(x') x_1^k \quad , \quad c \neq 0$$

Fixiere x'; $q(x_1) = p(x_1, x') \neq 0$ $\Rightarrow$

$N_{x'} = \{x_1 : q(x_1) = 0\}$ ist endl.

Lemma 10.5. $\Rightarrow q_\lambda \in L^\infty(\mathbb{R}^d) \subseteq \mathcal{S}_d'$

$$p(D)(e_{-i\lambda\eta}\check{q}_\lambda) = e_{-i\lambda\eta} \cdot \overline{p}(\xi + i\lambda\eta)^\vee$$
$$\underset{10.6.(3)}{=} (2\pi)^{d/2} e_{-i\lambda\eta}\, \overline{p}(D + i\lambda\eta)\delta_0$$
$$\underset{10.6.(2)}{=} (2\pi)^{d/2}\, \overline{p}(D + 2i\lambda\eta)(e_{-i\lambda\eta}\delta_0)$$
$$= (2\pi)^{d/2}\, \overline{p}(D + 2i\lambda\eta)\delta_0$$

Entwickle nach Potenzen von λ!

$$= (2\pi)^{d/2}(2i)^m \lambda^m \overline{p_m}(\eta)\delta_0 + \sum_{k=0}^{m-1} \lambda^k u_k$$

mit gewissen $u_k \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$

10.7. <u>Lemma</u> Seien $\lambda_0, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ paarweise verschieden $\Rightarrow$ das lineare GS

$$\sum_{j=0}^m a_j \lambda_j^k = \begin{cases} 0, & \text{falls } k = 0, \dots, m-1 \\ 1, & \text{falls } k = m \end{cases}$$

hat die eindeutige Lsg $\quad a_j = \prod_{k=0, k\neq j}^m \frac{1}{\lambda_j - \lambda_k}$

<u>Beweis:</u> $\det(\lambda_j^k)_{k,j} = \prod_{0 \le i < j \le m} (\lambda_i - \lambda_j) \neq 0$ (Vandermonde)

$\Rightarrow \exists!$ Lsg

$$q(z) := \prod_{j=0}^m (z - \lambda_j) \Rightarrow q'(\lambda_j) = \prod_{k=0, k\neq j}^m (\lambda_j - \lambda_k)$$

Residuensatz mit $R > 0$ groß genug $\Rightarrow$

$$\underbrace{\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=R} \frac{z^k}{q(z)}\,dz}_{} = \sum_{j=0}^m \operatorname{Res}\left(\frac{z^k}{q(z)}; \lambda_j\right) \underset{\text{1-fache Pole}}{=} \sum_{j=0}^m \frac{\lambda_j^k}{q'(\lambda_j)}$$

$$\xrightarrow[R\to\infty]{} \begin{cases} 0, & \text{falls } k < m \\ 1, & \text{falls } k = m \end{cases}$$

■

10.8. Satz Sei $\eta \in \mathbb{R}^d$ mit $p_m(\eta) \neq 0$.
Seien $\lambda_0, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ paarweise verschieden und

$$a_j = \prod_{k=0, k\neq j}^{m} \frac{1}{\lambda_j - \lambda_k}$$

$$\Rightarrow E := \frac{(2\pi)^{-d/2}}{(2i)^m \, p_m(\eta)} \cdot \sum_{j=0}^{m} a_j \, e_{-i\lambda_j \eta} \, \check{q}_{\lambda_j} \in \mathcal{S}_d'$$

ist F-Lsg von $p(D)$.

Beweis: $p(D)E = \sum_{j=0}^{m} a_j \left(\lambda_j \delta_0 + \sum_{k=0}^{m-1} \lambda_j^k u_k \right) = \delta_0$ ■

10.9. Korollar Sei $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d) \Rightarrow \exists u \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ mit
$p(D)u = f$, nämlich $u = E * f$
Man sagt: „$p(D)$ ist lokal lösbar".

3. Die Wärmeleitungsgleichung im $\mathbb{R}^d$

Betrachte AWP für Fkt $u = u(x,t)$, $x \in \mathbb{R}^d$, $t \geq 0$:

$$(A) \begin{cases} u_t - \Delta u = 0 & \text{auf } \mathbb{R}^d \times (0,\infty) \\ u(x,0) = f(x) \end{cases}$$

Interpretation: $u(x,t)$ = Temperaturverteilung in homog. Medium zur Zeit t (Anfangsverteilung f)
$\partial_t - \Delta$: Wärmeleitungsoperator (Hauptsymbol: $p_2(\xi,\tau) = i\tau + |\xi|^2$

Zu (A): Zunächst $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$
Formal: Fouriertrafo von (A) bzgl. $x \Rightarrow$

$$\begin{cases} \partial_t \hat{u}(\xi,t) = \widehat{u_t}(\xi,t) = -|\xi|^2 \hat{u}(\xi,t) \\ \hat{u}(\xi,0) = \hat{f}(\xi) \end{cases}$$

gewöhnliche DGL für $t \mapsto \hat{u}(\xi,t)$! (ξ fest)
$\Rightarrow \hat{u}(\xi,t) = \hat{f}(\xi) e^{-t|\xi|^2}$, $t \geq 0$

<u>Gauß-Kern</u>: $g_t(x) := \frac{1}{(4\pi t)^{d/2}} e^{-|x|^2/4t}$, $t>0$

$g_t \in \mathcal{S}_d$, $\hat{g}_t(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} e^{-t|\xi|^2}$

$(g_t)_{t>0}$ ist approx. Eins: $\int_{\mathbb{R}^d} g_t(x)\,dx = 1$; $g_t(x) = \frac{1}{t^{d/2}} g_1\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right)$

Damit: $\hat{u}(\xi,t) = \widehat{g_t * f}(\xi)$

$\underset{\text{Formal}}{\Rightarrow}$ $u(x,t) = g_t * f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} g_t(x-y) f(y)\,dy$

Kurze Rechnung $\Rightarrow$ $u(x,t) = g_t(x)$ löst

$u_t = \Delta u$ in $\mathbb{R}^d \times (0,\infty)$

10.10. <u>Satz</u> Für $f \in C_b(\mathbb{R}^d)$ setze

$$u(x,t) := \begin{cases} g_t * f(x), & t>0 \\ f(x), & t=0 \end{cases}$$

$\Rightarrow u \in C^\infty(\mathbb{R}^d \times (0,\infty)) \cap C_b(\mathbb{R}^d \times [0,\infty))$ mit $|u(x,t)| \le \|f\|_\infty$,

und u löst (A).

Ferner: $f \geq 0 \Rightarrow u(x,t) \geq 0$ (Positivitätserhaltung)

<u>Beweis:</u> Diffsatz f. Parameterint. $\Rightarrow$ $u \in C^\infty(\mathbb{R}^d \times (0,\infty))$ und

$(\partial_t - \Delta) u(x,t) = \int_{\mathbb{R}^d} (\partial_t - \Delta_x) g_t(x-y) f(y)\,dy = 0$

$|u(x,t)| \le \|g_t * f\|_\infty \underset{\text{Young}}{\le} \|g_t\|_1 \cdot \|f\|_\infty = \|f\|_\infty$

Stetigkeit in $t=0$: $t \downarrow 0$, $x \to x_0$ $\Rightarrow u(x,t) = g_t * f(x) \underset{\uparrow}{\to} f(x_0)$

Approx. Satz 2.11.

Beobachte: $\hat{g}_t \hat{g}_s = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \hat{g}_{t+s} \Rightarrow g_t * g_s = g_{t+s}$ (Faltungshalbgruppe)

<u>Def.</u> $X = L^p(\mathbb{R}^d)$, $1 \le p < \infty$ oder $C_0(\mathbb{R}^d)$

Für $f \in X$ setze

$$H(t) f := \begin{cases} g_t * f \in X, & \text{falls } t>0 \\ f & \text{falls } t=0 \end{cases}$$

$\|g_t * f\|_X \le \|g_t\|_1 \cdot \|f\|_X \implies H(t) \in L(X), \quad \|H(t)\| \le 1$

$H(t+s) = H(t)H(s), \quad H(0) = id$

Approx. Satz f. Faltung $\implies \lim\limits_{t\downarrow 0} H(t) f = f \quad \forall f \in X$ bei C_0: approx aus C_c

Man sagt: $H(t)_{t\ge 0}$ ist stark stetige Operator-Halbgruppe.
Wärmeleitungs-HG.

<u>Fund. Lsg für $\partial_t - \Delta$:</u>

Def. auf $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$: $W(x,t) := \begin{cases} g_t(x), & \text{falls } t>0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

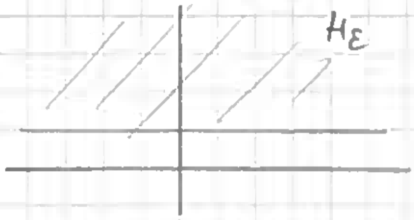
$W \in \mathcal{D}'_{d+1}$, da $W \in L_{loc}$: $\int\limits_{|t|\le R} \big(\underbrace{\int\limits_{|x|\le R} W(x,t)\,dx}_{\le 1}\big)\,dt = R$

und $\frac{1}{t^2} W \in L^1(\mathbb{R}^{d+1})$

10.11. <u>Satz</u> W ist F-Lsg von $\partial_t - \Delta$ auf $\mathbb{R}^{d+1}$

Beweis: Sei $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{d+1})$. $\varphi(0) \overset{!}{=} \langle (\partial_t - \Delta)W, \varphi\rangle = \langle W, -(\partial_t + \Delta)\varphi\rangle$

$= -\lim\limits_{\varepsilon\downarrow 0} \int\limits_{H_\varepsilon} W(\partial_t + \Delta)\varphi\, d(x,t), \quad H_\varepsilon = \mathbb{R}^d \times (0,\infty)$



$= -\lim\limits_{\varepsilon\downarrow 0} \int\limits_{\mathbb{R}^d} \int\limits_{\varepsilon}^{\infty} W \cdot (\partial_t + \Delta)\varphi\, dt\, dx$

$\underset{\text{part. Int.}}{=} -\lim\limits_{\varepsilon\downarrow 0} \Big[\int\limits_{\mathbb{R}^d} \big(-(W\varphi)(x,\varepsilon) - \int\limits_{\varepsilon}^{\infty} \partial_t W \cdot \varphi\, dt \big)\, dx + \int\limits_{\mathbb{R}^d} \int\limits_{\varepsilon}^{\infty} (\Delta W) \cdot \varphi\, dt\, dx \Big]$

$= \underbrace{\lim\limits_{\varepsilon\downarrow 0} \int_{\mathbb{R}^d} g_\varepsilon(x)\varphi(x,\varepsilon)\,dx}_{\to \varphi(0,0)} + \int\limits_{\mathbb{R}^d} \int\limits_{\varepsilon}^{\infty} \underbrace{(\partial_t - \Delta)W}_{=0} \cdot \varphi\, d(x,t)$

■